АЛГЕБРА және АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

Оқулық

11

Жаратылыстану-математикалық бағыт

ШАРТТЫ БЕЛГІЛЕР:

— жаңа тақырыпты игеру барысында қойылатын оқыту мақсаттары

— өздігінен орындауға арналған тапсырмалар

— өзіндік тексеру сұрақтары

— теореманың немесе қасиеттің дәлелдеуінің соңы

— қосымша материалдар

— барлық оқушылардың орындауы міндетті жаттығулар

— орта деңгейдегі жаттығулар

— жоғары деңгейдегі жаттығулар

— электронды ресурстарды қолдануға арналған жаттығулар

ҚАЙТАЛАУ — өткенді қайталауға арналған жаттығулар

АЛҒЫ СӨЗ

Құрметті оқушылар! Сендерге ұсынылып отырған оқулық 10-сыныптың жаратылыстану-математика бағытындағы "Алгебра және анализ бастамалары" курсының жалғасы болып табылады.

11-сыныпта *алғашқы функция, анықталмаған және анықталған интегралдар, рационал және иррационал көрсеткішті дәрежелер, n-ші дәрежелі түбір, логарифм, дәрежелі, көрсеткішті және логарифмдік функциялар, комплекс сандар, дифференциалдық теңдеу, дискреттік және интервалды вариациялық қатар* ұғымдарымен танысып, осы аталған ұғымдардың қасиеттерін меңгересіңдер.

Сонымен қатар, иррационал, көрсеткіштік, логарифмдік теңдеулер мен теңсіздіктерді және олардың жүйелерін, дифференциал теңдеулерді шешуді, дәрежелік, көрсеткіштік және логарифмдік функциялардың туындысын табуды үйренесіңдер.

Жоғарыда айтылғандарды игере отырып, жазық фигуралардың аудандарын және денелердің көлемін анықталған интеграл арқылы табуды үйренетін боласыңдар.

Оқулық 8 тараудан, 28 параграфтан тұрады.

Әр параграфтың оқу материалдарының соңында оқушылардың өздігінен орындауына арналған сұрақтар мен тапсырмалар ұсынылған.

Оқулықпен жұмыс барысында әрбір параграфтағы жаттығулардың алдында берілген сұрақтарға назар аударған жөн. Әр тарау соңында тараудың материалы және математикалық сауаттылық бойынша тест тапсырмалары берілген.

Оқулықта берілген материалдарды меңгеру процесін жеңілдету үшін әр параграфтың алдында тірек ұғымдары, сондай-ақ есептерді шығару жолдары көрсетілген.

Әр тақырыпты терең игеру үшін:

A — барлығы үшін міндетті тапсырмалар;

B — күрделілігі орташа тапсырмалар;

C — күрделілігі жоғары тапсырмалар ұсынылған.

Сонымен қатар, оқулықта * таңбасымен ерекшеленген есептер бар. Олар шығармашылық деңгейді қажет етеді.

В тобының тапсырмаларын орындауға А тобының есептерін шешу дағдыларын меңгерген соң кіріскен жөн. С тобынан жеке тапсырмаларды орындай отырып, математика пәнін терең меңгеру қабілеттеріңді дамыта аласыңдар.

Сонымен қатар, оқулықта 10-11-сыныптардағы алгебра және анализ бастамалары курсын қайталауға арналған жаттығулар және практикаға бағытталған тапсырмалар бар.

Оқулық материалын меңгеру кезінде өздігімен жұмыс жасауға, яғни мәтінді өздігімен түсіну, жаттығуларды өздігімен орындауға арналған тапсырмалар берілген.

Қажет болған жағдайда кейбір ұғымдарды еске түсіру үшін оқулық соңында глоссарий ұсынылған.

Жаттығулардың дұрыс шығарылғанын тексеру үшін оқулықтың соңында жауаптары келтірілген.

10-СЫНЫПТАҒЫ АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

Есептеулер

1. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\arcsin 0{,}5 + \arccos(-1) - \arccos 0 - \operatorname{arctg} 1$;

2) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arcctg} 1$;

3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin 1$;

4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2} - \arccos 0 - \operatorname{arcctg}(-1)$.

2. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

4) $\arccos\left(\sin\frac{27\pi}{7}\right)$; 5) $\arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{3}\right)$; 6) $\arcsin(\sin 7)$;

7) $\arcsin(\cos 8)$; 8) $\arccos(\cos 12)$.

3. x_0 нүктесіндегі $f(x)$ функциясының туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = 3\sqrt{2x} - \frac{5}{x} + 3x - 2,\ x_0 = 1$;

2) $f(x) = (3x + 4)^2 + \frac{6}{x+1},\ x_0 = -2$;

3) $f(x) = \sin(3x - 2\pi) + 3\pi,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$;

4) $f(x) = \cos(2x - \pi) - 2\pi,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

4. Абсциссасы x_0 болатын нүктеде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентінің мәнін табыңдар:

1) $y = 1 - \frac{2x+1}{x-1},\ x_0 = 2$; 2) $y = 3 + \frac{x}{x+1} + \sqrt{3-x},\ x_0 = 2$.

5. x_0 нүктесінде $f''(x)$ мәнін табыңдар:

1) $f(x) = 4x + \sin 3x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;

2) $f(x) = 2x + \cos 4x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = x + \sin^2 3x,\ x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

6. Берілген аралықтағы $y = f(x)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $y = x^4 - 8x^2 - 9,\ [-1; 3]$; 2) $y = 2 + 3x^5 - 5x^3,\ [2; 3]$;

3) $y = \sqrt{x} - x,\ [0; 4]$; 4) $y = \frac{1}{x} + x,\ [0{,}5; 4]$.

Функцияның туындысы

7. $f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

1) $f(x) = \sin^2 2x + \cos^2 2x - \sqrt{2x}$; 2) $f(x) = \sin^3 2x + \cos 3x - \frac{2}{x}$;

3) $f(x) = \mathrm{tg}^2 2x + \mathrm{ctg} 3x + \sqrt{\pi}$; 4) $f(x) = \mathrm{arctg} 2x + \arccos x + \sqrt{x}$;

5) $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2} + 3x - 2$; 6) $f(x) = x\sin 2x + \sqrt{2-3x}$.

8. $x = 2$ болғанда $f(x) = 3x + \sqrt{1+x^2}$ функциясының екінші туындысының мәнін табыңдар.

9. $f'(x) = 0$ теңдеуін шешіңдер:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3 - 2$; 2) $f(x) = 4 + 2x^2 - x^4$;

3) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x - 2$; 4) $f(x) = \sin^2 2x + 2x - \pi$.

Теңдеулер мен теңсіздіктер

10. $f'(x) < 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын ең үлкен бүтін санды табыңдар:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$; 2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x$;

3) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x$; 4) $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

11. 1) $\frac{x-2}{2} \geqslant \frac{(\sqrt{x-6})^2}{x-7}$ теңсіздігінің ең кіші бүтін шешімін табыңдар;

2) $\frac{6-x}{\sqrt{x^2-8x+7}} \geqslant 0$ теңсіздігінің ең үлкен бүтін шешімін табыңдар;

3) $(x^2 + 4x - 12) \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 3} \leqslant 0$ теңсіздігін шешіңдер.

12. $f'(x) \geqslant 0$ теңсіздігін шешіңдер:

1) $f(x) = \frac{1}{3}\cos 3x - x$; 2) $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}x$;

3) $f(x) = 3\cos^2 x + 2\sin^2 x + 3x$; 4) $f(x) = \sin^2 3x - \frac{1}{12}\cos 6x + x$;

5) $f(x) = 1 + \arccos 3x + 2x$; 6) $f(x) = \mathrm{arcctg} 2x + 2x$.

13. $f'(x) = 0$ теңдеуін шешіңдер:

1) $f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$; 2) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$;

3) $f(x) = 2x - \mathrm{tg} x$; 4) $f(x) = x + \mathrm{ctg} x$.

14. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sin^4\frac{x}{2} = \cos^4\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$;

2) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$;

3) $\cos^2 x - \cos^2 2x = \cos^2 4x - \cos^2 3x$;

4) $5\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x \cdot \sin x + 6\cos^2 x = 5$;

5) $(x-1)^2(x^2-2x) = 12$;

6) $(x-3)^2(x^2-6x)+16=4$;
7) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+3)-3=0$;
8) $(x^2+3x-4)(x^2+3x-2)+1=0$;
9) $(x^2+\frac{1}{x^2})+7(x+\frac{1}{x})+12=0$;
10) $(x^2+\frac{4}{x^2})-(x-\frac{2}{x})-16=0$.

15. Тригонометриялық теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} \sin x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \mathrm{ctg}\, x \leqslant 1, \\ \mathrm{tg}\, x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \mathrm{tg}\, x \leqslant \sqrt{3}, \\ \cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Функция және оның графигі

16. Функция графигінің асимптоталарын табыңдар:

1) $y=\frac{x-3}{x-2}$; 2) $y=\frac{5-3x}{x+3}$; 3) $y=\frac{x^2+3}{x-2}$; 4) $y=\frac{x^2-2x}{x+1}$.

17. Функция графигінің иілу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

1) $y=\frac{2x^3}{x^2-1}$; 2) $y=\frac{2x^2}{x^2-1}$; 3) $y=\frac{x^3}{4-x^2}$; 4) $y=4-3x+2x^3$.

18. $f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар:

1) $f(x)=\frac{2x}{x+1}$; 2) $f(x)=\frac{3x}{x^2-9}$; 3) $f(x)=\frac{x}{25-x^2}$; 4) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-4}$.

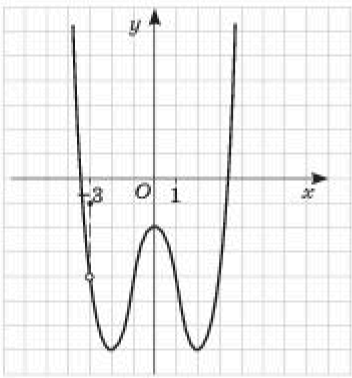
19. а) $x_0=0$ нүктесінде $y=f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $y=2x+\sqrt{x+1}$; 2) $y=\sqrt{3x+1}$; 3) $y=1+\frac{1}{x+2}$; 4) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

ә) Берілген түзуге параллель болатын $y=f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $f(x)=\sqrt{3x+1}$, $y=\frac{3}{4}x+1$; 2) $f(x)=\sqrt{3-2x}$, $y=2-x$.

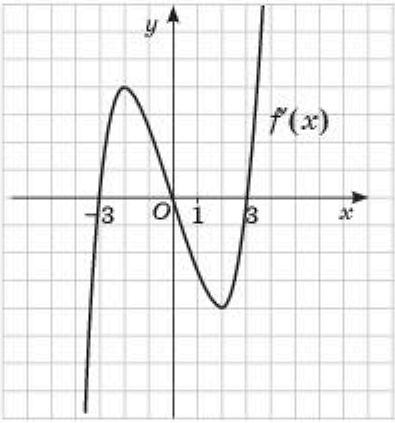
20. 1-суретте берілген функцияның графигі бойынша:



1-сурет

1) минимум нүктелерін;
2) максимум нүктелерін;
3) иілу нүктелерінің координаталарын;
4) функция экстремумдарын табыңдар.

21. 2-суретте $f'(x)$ функциясының графигі берілген.



2-сурет

Функцияның максимум нүктелерін және минимум нүктелерін табыңдар.

22. Функцияны зерттеңдер және графигін салыңдар:

1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 2$;

3) $y = 2x + \frac{2}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x} - \frac{x}{4}$.

Туындының қолданылуы

23. Нүкте түзусызықты $s(t) = 4t^2 - \frac{1}{2}t$ заңымен қозғалады ($s(t)$ — метрмен, t — уақытпен өрнектелген). [1; 8] аралығындағы уақыттың қандай мерзімінде жылдамдық ең үлкен мәнге ие болады?

24. 1) Тіктөртбұрыш пішінді спорт алаңының ауданы 3600 м^2. 1 м × 2 м өлшемінің ең кіші санын қолдану үшін алаң ауданының өлшемдерін табыңдар.
2) Трапецияның бір табаны мен екі бүйір қабырғасының ұзындықтары 15 см-ге тең. Трапеция ауданы ең үлкен болатындай екінші табанының ұзындығын табыңдар.

25. Бір жағы өзенмен шектелген тіктөртбұрыш пішінді жер телімін үш жағынан қоршау үшін 600 м сым берілген. Ауданы ең үлкен болатындай жер телімінің өлшемдерін табыңдар.

26. Тікбұрышты трапеция пішінді жер телімінің сүйір бұрышы 30°, периметрі 96 м. Жер телімінің ең үлкен ауданын табыңдар.

27. Катеті $4\sqrt{2}$ см болатын теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрышқа ауданы ең үлкен болатын тіктөртбұрыш іштей салынған. Тіктөртбұрыштың екі төбесі гипотенузаға, ал екі төбесі катеттерге тиісті. Тіктөртбұрыштың қабырғаларының ұзындықтарының қосындысын табыңдар.

28. 1) Қосындысының мәні ең үлкен болатындай 484 санын екі оң санның көбейтіндісі түрінде жазыңдар.
2) Екі оң санның қосындысы 98-ге тең. Олардың көбейтіндісі ең үлкен болатындай екі санды табыңдар.

29. $M(0;\ 3)$ нүктесіне ең жақын орналасқан $y = 0{,}5x^2$ функциясы графигіне тиісті K нүктесінің координатасын табыңдар.

Көпмүше

30. $f(z)$ және $h(z)$ көпмүшелері тепе-тең болатындай a параметрінің барлық мәндерін табыңдар:
1) $f(z) = (a^2 - 2)z^3 - 2z^2 + (2a + 1)z - 4$ және $h(z) = 2z^3 - 2z^2 + (a - 1)z - a - 6$;
2) $f(z) = (a^2 - 2a)z^4 - 2z^2 + (3a - 2)z - 4 + a$ және $h(z) = -z^4 - 2z^2 + (2a - 1)z - a - 2$.

31. Горнер схемасын қолданып $P(z) = z^5 - 2z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 7$ көпмүшесін $z - 2$ екімүшесіне бөліңдер. Бөлінді мен қалдықты табыңдар.

32. Көпмүшені сызықтық көбейткіштерге жіктеңдер:
1) $y^4 - 10y^2 + 9$; 2) $y^3 + 3y^2 - 4y - 12$.

33. a және c-ның қандай мәндерінде $P(y)$ және $K(y)$ көпмүшелері тең болады:
1) $P(y) = 2y^3 - 5y^2 + (a - c)y - 11$, $K(y) = 2y^3 + (a + c)y^2 + 3y - 11$;
2) $P(y) = y^3 + 10y^2 + 3y + a - 3c$, $K(y) = y^3 + (a + 2c)y^2 + 3y - 5$?

34. a-ның қандай мәндерінде $Q(y)$ көпмүшесінің бір түбірі 1-ге тең болады:
1) $Q(y) = 2y^3 - 3y^2 + 3y + 2a^2 - 3a - 7$;
2) $Q(y) = y^3 + 7y^2 - 2y + a^2 - 5a$?

35. 1) $P(x)$ көпмүшесін $x^2 - 5x + 6$ үшмүшесіне бөлгенде $2x - 5$ қалдығы шығады. $P(2) - 3P(3)$ өрнегінің мәнін табыңдар;
2) $P(x)$ көпмүшесін $x^2 - x - 6$ үшмүшесіне бөлгенде $5x - 7$ қалдығы шығады. $P(3) - 2P(-2)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

36. Симметриялы теңдеуді шешіңдер:
1) $y^4 + 2y^3 - y^2 + 2y + 1 = 0$;
2) $3y^4 - 2y^3 + 4y^2 - 4y + 12 = 0$.

Комбинаторика және ықтималдықтар теориясының элементтері

37. 1) Мектеп асханасының мәзірінде 3 бірінші, 3 екінші және 4 үшінші тамақ бар. Үш тамақтан (бірінші, екінші және үшінші) тұратын түскі асты қанша тәсілмен таңдауға болады?
2) Цифрлары қайталанбайтындай 2, 3, 6, 9 цифрларынан тұратын қанша төрттаңбалы санды құрастыруға болады?
3) Сары, қызыл және қара түстерді қолданып, үшбұрышты, ромбты және квадратты қанша тәсілмен бояуға болады?

38. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:
1) $A^2_{2x+1} : A^{x-1}_{2x} = 31$; 2) $C^2_x : A^2_x = \frac{1}{24}$.

39. Биномның жіктелуіндегі x^n көбейткішінің коэффициентін табыңдар:
1) $(x + 3)^6$, $n = 3$; 2) $(1 - 3x)^7$, $n = 4$.

40. 1) Жәшікте 4 жасыл және 2 сары шар бар. Жәшіктен екі шар алынған. Алынған шарлар жасыл түсті болуының ықтималдығын табыңдар.
2) Тетік дайындау үшін үш кезеңнен өтеді. Бірінші және екінші кезеңдерден өту барысында тетіктің жарамсыз болуының ықтималдығы 0,01-ге, үшінші кезеңнен өту барысында жарамсыз болуының ықтималдығы 0,02-ге тең. Үш кезеңнен кейін тетіктің жарамды болуының ықтималдығын табыңдар.

41. 200 лотерея билетінің 10-ында ұтыс бар.
1) Кездейсоқ алынған үш лотерея билетінде ұтыс болуының ықтималдығын табыңдар.
2) Кездейсоқ алынған екі лотерея билетінің біреуінде ұтыс болуының ықтималдығын табыңдар.

Практикаға бағытталған тапсырмалар

42. 1-кестеде 11-сынып оқушыларының 200 м-ге жүгіру нәтижелері берілген.

1-кесте

Жүгіру нәтижелерінің интервалы (секундпен)	24-25	26-27	28-29	30-31	32-33
Нәтижелерді көрсеткен оқушылар саны	4	9	11	10	6

1) Жарысқа қанша оқушы қатысқан?
2) Жүгіру нәтижелері қандай интервалдарда өзгерген?
3) Қанша оқушы 28 с-тан 33 с-қа дейінгі нәтижелерді көрсеткен?
4) Қанша оқушы 27 с-тан кем нәтижелерді көрсеткен?

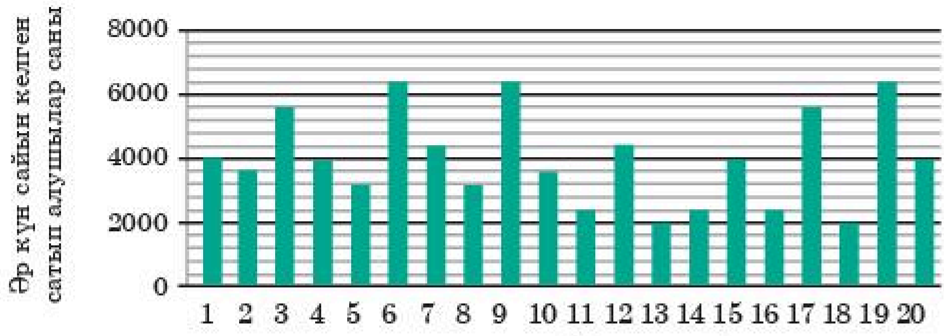
43. Үй құрылысына қажет 25 т кірпішті үш фирманың бірінен алуға болады. Бір кірпіштің салмағы 5 кг-ға тең. Кірпіш бағасы мен жеткізу бағасы 2-кестеде көрсетілген.

2-кесте

Фирма	1 дана кірпіштің бағасы (теңге)	Жеткізу бағасы (теңге)	Қосымша шарттар
X	254	190 000	Жоқ
Y	260	150 000	500 000 тг-ден жоғары бағаға тапсырыс болғанда жеткізу бағасы 10 % жеңілдікпен беріледі
Z	270	145 000	500 000 тг-ден жоғары бағаға тапсырыс болғанда жеткізу бағасы 20% жеңілдікпен беріледі

1) Сатып алудың ең арзан бағасы қанша теңге болады?
2) Егер 30 т кірпіш алынатын болса, онда ең аз шығын шығару үшін қай фирманы таңдау керек?

44. 3-суретте 1—20 наурыз аралығында дүкенге келген сатып алушылар саны келтірілген.

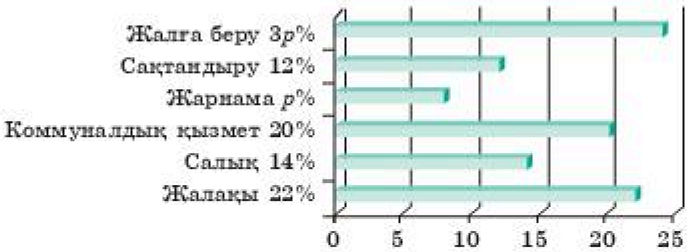


3-сурет

1) Берілген аралықтағы бір күндегі сатып алушылардың ең үлкен және ең кіші сандарының айырымын табыңдар.
2) Бір күндегі сатып алушылардың орташа санын табыңдар.
3) Егер бір сатып алушы орташа есеппен 2540 тг-ге сауда жасаса, онда дүкендегі бір күндік түсімді табыңдар.

45. A, B, C — әртүрлі тақ цифрлар. $\overline{ABC} \cdot \overline{ABC} = 32\,041$ екені белгілі. $(C + B) : (4A)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

46. 4-суретте фирманың бір айдағы шығыны көрсетілген. Шығынның жалпы сомасы 2 500 000 теңге.



4-сурет

1) Фирманың жалға төлеген шығыны қандай?
2) Жалға төлеген сома жалпы шығынның қанша пайызын құрайды?

47. Оқушы мектеп асханасында күнделікті тамаққа ботқа, бір стақан шай немесе компот және бір тәтті нан алады. Ботқа 60 тг, тәтті нан 45 тг, шай 35 тг, компот 50 тг тұрады. Оқушының қалалық көлікке төлейтін бағасы 40 тг.
1) Күніне оқушыға қанша теңге керек?
2) Мектепте бес күндік оқу. Егер жанұяда екі бала және олар үш күн шай, екі күн компот алатын болса, онда ата-ана әр балаға күніне қанша теңге беруі керек?

48. 1) Жәшікте қызыл, көк, жасыл түсті барлығы 32 шар бар. Қызыл шарлар саны жасыл түсті шарлардан 18 есе артық. Жәшікте көк түсті шар қанша?
2) Жәшікте 14 көк және 12 қызыл шар бар. Бір түсті алты шар алу үшін жәшіктен қанша шар алу қажет?

49. 3-кестені қолданып, функцияның формуласын жазыңдар және $z = 10$ болғандағы мәнін табыңдар.

3-кесте

z	-2	-1	0	1	2	3	4
y	1	-2	-3	-2	1	6	13

50. Тік параллелепипед пішінді ыдысқа 1700 см^3 су құйылды. Сонда ыдыстағы судың биіктігі 10 см-ге тең болды. Одан кейін ыдысқа тетік салынды. Нәтижесінде судың деңгейі 5 см-ге көтерілді.
1) Тетіктің көлемі неге тең?
2) Егер судың деңгейі 15 см болса, онда ыдыстағы судың көлемі қанша?
3) Егер ыдысқа салынған тетіктің көлемі 1700 см^3 болса, онда ыдыстағы судың деңгейі қанша сантиметрге көтеріледі?

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның шегі, функцияның туындысы, күрделі функцияның туындысы, туындыны есептеу ережелері, туындының геометриялық және физикалық мағынасы, функциялар туындысының кестесі.

I ТАРАУ

АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛ

§ 1. АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ. АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ ҚАСИЕТТЕРІ

Сендер *алғашқы функция* ұғымымен танысасыңдар және функцияның алғашқы функциясын табуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, анықталу облысы, тұрақты сан, туынды, функцияның графигі

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Егер $f(x) = 3x^2$ функциясы берілсе, оның туындысы $f'(x) = 6x$ болады.

Кез келген функцияның туындысы функция (тұрақты немесе айнымалыға тәуелді) болатыны белгілі.

Енді "Туындысы белгілі болған жағдайда функцияны қалай табуға болады?" деген сұрақ туындайды.

$f(x) = 4x^3$ функциясы қандай функцияның туындысы екенін анықтайық, яғни туындысы $f(x) = 4x^3$ болатын функцияны қалай анықтауға болады?

Егер ондай функцияны шартты түрде $F(x)$ деп белгілесек, онда ізделінді функция $F(x) = x^4$ болады, өйткені $F'(x) = (x^4)' = 4x^3$.

Анықтама. *Кез келген X жиынында өзгеретін x үшін $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда берілген жиында $f(x)$ функциясы үшін $F(x)$ функциясы* ***алғашқы функция*** *деп аталады.*

Кез келген функция сияқты алғашқы функция да барлық нақты сандар жиынында немесе белгілі бір аралықта қарастырылуы мүмкін.

Жоғарыда келтірілген мысалда $F(x) = x^4$ функциясы $(-\infty; +\infty)$ аралығында, яғни барлық нақты сандар жиынында $f(x) = 4x^3$ функциясы үшін алғашқы функция болып табылады.

МЫСАЛ

1. Барлық нақты сандар жиынында $F(x) = \cos 5x$ функциясы $f(x) = -5\sin 5x$ функциясы үшін алғашқы функция болады, өйткені $F'(x) = (\cos 5x)' = -5\sin 5x$, мұндағы $x \in (-\infty; +\infty)$.

МЫСАЛ

2. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ интервалында $F(x) = -\frac{1}{x} + 2$ функциясы $f(x) = \frac{1}{x^2}$ функциясы үшін алғашқы функция болады, себебі $F'(x) = \left(-\frac{1}{x} + 2\right)' = \frac{1}{x^2}$.

МЫСАЛ

3. Барлық нақты сандар жиынында $F(x) = \frac{1}{x}$ функциясы $(-\infty; +\infty)$ аралығында $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ функциясының алғашқы функциясы болмайды, өйткені $x = 0$ нүктесінде $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалмайды. Бірақ $(-\infty; 0)$ және $(0; +\infty)$ интервалдарында $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясы үшін алғашқы функция болып табылады.

Функцияның бір ғана емес, шексіз көп алғашқы функциясы болады. Мысалы, $f(x) = 4x^3$ функциясы үшін алғашқы функция ретінде $F(x) = x^4$ функциясын ғана емес, $G(x) = x^4 - 5$; $P(x) = x^4 + \frac{\sqrt{2}}{3}$; $Q(x) = x^4 + 7$ және т.с.с. функцияларды да қарастыруға болады. Себебі, бұл функциялардың әрқайсысының туындысы $4x^3$-не тең, яғни олар туындысы нөлге тең қандай да бір тұрақты санға ғана ерекшеленеді.

Теорема. *Егер белгілі бір аралықта $F(x)$ және $\Phi(x)$ функциялары $f(x)$ функциясы үшін алғашқы функция болса, онда осы аралықта ол функциялар бір-бірінен тек тұрақты санға ғана ерекшеленеді.*

Дәлелдеу. Ол үшін

$$\varphi(x) = \Phi(x) - F(x) \qquad (*)$$

деп алайық. Теорема бойынша берілген аралықта $F'(x) = f(x)$ және $\Phi'(x) = f(x)$ теңдіктері орындалады. Онда $\varphi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Туынды табу ережесі бойынша тұрақты санның ғана туындысы нөлге тең екені белгілі. Демек, $\varphi(x) = C = const$. Енді $\varphi(x)$-дің мәнін $(*)$ теңдігіне қойсақ,

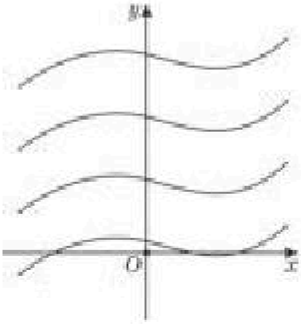
$$\Phi(x) = F(x) + C. \qquad (1)$$

Сонымен, егер $F'(x) = f(x)$ және C — кез келген тұрақты сан болса, онда $F(x) + C$ өрнегі де $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болады.

$\Phi(x) = F(x) + C$ теңдігі алғашқы функцияның негізгі қасиеті болып табылады.

Сендер алғашқы функцияның геометриялық мағынасын білетін боласыңдар.

$f(x)$ функциясының алғашқы функцияларының жалпы түрін беретін (1)-формуладағы тұрақтыны нөлге тең деп алып, $y = F(x)$ функциясының графигін саламыз. Қалған алғашқы функциялардың



5-сурет

айырмашылығы тұрақты C-ның мәніне байланысты болғандықтан, олардың графиктерін $y = F(x)$ функциясының графигін Oy осі бойымен C бірлікке параллель көшіру арқылы аламыз. Демек, *алғашқы функцияның геометриялық мағынасы графиктері өзара параллель қисықтар тобын береді* (5-сурет).

Енді кейбір функциялардың алғашқы функцияларының кестесін келтірейік (4-кесте):

4-*кесте*

Функция	Алғашқы функцияның жалпы түрі
$f(x) = k$ (k — тұрақты)	$F(x) = kx + C$
$f(x) = x^n$, $n \in Z$, $n \neq -1$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x + C$

Сендер *анықталмаған интеграл* ұғымымен танысасыңдар және анықталмаған интегралды табуды үйренесіңдер.

Анықтама. *$f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының жиынтығы $F(x) + C$ берілген $f(x)$ функциясының* ***анықталмаған интегралы*** *деп аталады.*

Белгіленуі:

$$\int f(x)\,dx, \qquad (2)$$

мұндағы $f(x)$ — интеграл таңбасының астындағы функция, $f(x)dx$ — интеграл таңбасының астындағы өрнек, x — интегралдау айнымалысы, $\int$ — интеграл белгісі.

Анықтама бойынша $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, мұнда C тұрақтысының орнына кез келген санды алуға болады, яғни оның мәні анықталмаған. Сондықтан $\int f(x)\,dx$ анықталмаған интеграл болып есептелінеді.

Анықталмаған интегралдың мәнін табу операциясын *функцияны интегралдау* дейді.

Алғашқы функция мен анықталмаған интегралдың анықтамаларынан

$$(\int f(x)dx)' = f(x). \tag{3}$$

Мектептің математика курсында тура және оған кері амалдар орын алатыны белгілі, яғни қосу мен азайту, көбейту мен бөлу, дәрежеге шығару мен түбірді табу. Тура осылайша туындыны табуға (дифференциалдауға) өзара кері амал алғашқы функцияны табу (интегралдау) екеніне көз жеткіздік.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Берілген қозғалыс теңдеуі бойынша туындының көмегімен берілген уақыт мезетінде материялық нүкте қозғалысының жылдамдығын табуға болады. Материялық нүктенің жылдамдығын табу үшін қозғалыс теңдеуінен уақыт бойынша туынды табу керек, яғни $s'(t) = v(t)$, ал жылдамдықтан уақыт бойынша алынған бірінші ретті туынды дене қозғалысының үдеуін береді:

$$v'(t) = a(t).$$

"$v'(t)$ туындысы бойынша $v(t)$-ны, одан кейін $s'(t)$ туындысы бойынша $s(t)$-ты қалай табуға болады?" деген сұрақ қойылады. Мұндай есептерді шығару үшін интегралдау амалы қолданылады.

! Сендер анықталмаған интеграл қасиеттерін білесіңдер.

1-ереже. *Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының, ал $P(x)$ функциясы $p(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $F(x) + P(x)$ функциясы $f(x) + p(x)$ функциясының алғашқы функциясы болады.*

Дәлелдеу. $F(x)$ және $P(x)$ функциялары сәйкесінше $f(x)$ және $p(x)$ функциясының алғашқы функциясы болғандықтан, $F'(x) = f(x)$ және $P'(x) = p(x)$. Қосындының туындысын табу ережесі бойынша $(F(x) + P(x))' = F'(x) + P'(x) = f(x) + p(x)$ теңдігін аламыз. ■

2-ереже. *Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы, ал k — тұрақты болса, онда $kF(x)$ функциясы $kf(x)$ функциясы үшін алғашқы функция болады.*

2-ереженің ақиқаттығын өздерің дәлелдеңдер.

3-ереже. *Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы, ал k және b — тұрақтылар (мұндағы $k \neq 0$) болса, онда $\frac{1}{k}F(kx + b)$ функциясы $f(kx + b)$ функциясы үшін алғашқы функция болады.*

Дәлелдеу. Күрделі функцияның туындысын табу теоремасын қолданамыз: $\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx+b)\cdot(kx+b)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx+b)\cdot k =$ $= F'(kx+b) = f(kx+b)$.

Сендер кейбір анықталмаған интегралдардың формулаларын білесіңдер (5-кесте).

5-кесте

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$	$\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$

Анықталмаған интегралдың қасиеттері:

1) $\int(f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

2) $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, мұндағы k — тұрақты;

3) $\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

3-қасиеттің дәлелдеуін келтірейік. Осы қасиеттің теңдігінің екі жағынан туынды табамыз. Сонда (3)-теңдікке сәйкес $(\int f(kx+b)\,dx)' =$ $= f(kx+b)$; ал күрделі функцияның туындысын табу ережесі бойынша $\left(\frac{1}{k}F(kx+b)+C\right)' = \frac{1}{k}(F(kx+b))' + C' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot(kx+b)' + 0 =$ $= \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = F'(kx+b) = f(kx+b)$.

Теңдіктің оң және сол жақтарының туындылары өзара тең, онда функциялар бір-бірінен C тұрақтысымен ғана ерекшеленеді:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

1 және 2 қасиеттерінің ақиқаттығын өздерің дәлелдеңдер.

Берілген ережелерді және интегралдың қасиеттерін қолдануға мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ

4. Анықталмаған интегралды табайық:

1) $\int 3\sin x dx$; 2) $\int\left(\frac{1}{x^2} + x^4\right)dx$; 3) $\int\cos(5x+1)\,dx$.

Шешуі. 1) $-\cos x$ функциясы $\sin x$ функциясы үшін алғашқы функциялардың бірі болып табылады. Олай болса, екінші ереже бойынша

$$\int 3\sin x dx = -3\cos x + C.$$

2) $\frac{1}{x^2}$ функциясының алғашқы функцияларының бірі $-\frac{1}{x}$ функциясы, ал x^4 функциясы үшін $\frac{x^5}{5}$ алғашқы функция болып табылады. Бірінші ережені қолдансақ,

$$\int\left(\frac{1}{x^2} + x^4\right)dx = -\frac{1}{x} + \frac{x^5}{5} + C$$

шығады.

3) $\sin x$ функциясы $\cos x$ функциясы үшін алғашқы функциялардың бірі. Үшінші ережені қолданып мынаны аламыз:

$$\int\cos(5x + 1)\,dx = \frac{1}{5}\sin(5x + 1) + C.$$

Жауабы: 1) $-3\cos x + C$; 2) $-\frac{1}{x} + \frac{x^5}{5} + C$; 3) $\frac{1}{5}\sin(5x + 1) + C$.

МЫСАЛ

5. Графигі $M(-2; 3)$ нүктесі арқылы өтетін $f(x) = x^2$ функциясының алғашқы функциясын табайық.

Шешуі. $f(x) = x^2$ функциясының кез келген алғашқы функциясын $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ түрінде жазуға болады. Есептің шарты бойынша $F(x)$ функциясының графигі $M(-2; 3)$ нүктесі арқылы өтеді: $F(-2) = 3$.

Онда $\frac{(-2)^3}{3} + C = 3$, осыдан $C = \frac{17}{3}$.

Демек, ізделінді алғашқы функция $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{17}{3}$.

Жауабы: $\frac{x^3}{3} + \frac{17}{3}$.

?

1. *Туынды* және *алғашқы функция* ұғымдарының арасында қандай байланыс бар?
2. Жұп (тақ) функцияның алғашқы функциясы жұп (тақ) функция бола ма? Мысал келтіріңдер.
3. Алғашқы функцияны табудың үш ережесін бірдей қолдануға нақты мысал келтіріңдер.
4. 1) $[a; b]$ кесіндісінде $f'(x) = p'(x)$; 2) $[a; b]$ кесіндісінде $\int f(x)dx = \int p(x)dx$ болатыны белгілі. Бұдан берілген кесіндіде $f(x) = p(x)$ теңдігі шыға ма?

Жаттығулар

A

Функциялардың алғашқы функциясын табыңдар (1.1-1.2):

1.1. 1) $f(x) = 3x$; 2) $f(x) = 4x^2 + x - 2$;

3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

1.2. 1) $f(x) = 2\sin x$; 2) $f(x) = 5\cos x$;

3) $f(x) = 3\cos x - 4\sin x$; 4) $f(x) = 5\sin x + 2\cos x$;

5) $f(x) = x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}$; 6) $f(x) = x^3 - \frac{4}{\sqrt{x}}$;

7) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$; 8) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

1.3. **Анықталмаған интегралды табыңдар:**

1) $\int\left(3x^5 + \frac{7}{2\sqrt{x}}\right)dx$; 2) $\int\left(3\cos 5x - \frac{1}{x^2}\right)dx$;

3) $\int\left(8\sin x - \frac{2}{\sin^2 2x}\right)dx$; 4) $\int(2\sin 3x - 5x^7 + 3)dx$;

5) $\int\left(\frac{3}{x^7} - \frac{7}{\cos^2 x}\right)dx$; 6) $\int\left(7 - \frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$.

1.4. $y = f(x)$ функциясы үшін графигі координаталар басы арқылы өтетін алғашқы функцияны жазыңдар:

1) $f(x) = (x + 1)(x + 3)$; 2) $f(x) = (1 - x)(3 + x)$;

3) $f(x) = \frac{x^2}{3} + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $f(x) = -\frac{x^3}{2} + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.5. $y = f(x)$ функциясы үшін графигі $M(a;\ b)$ нүктесі арқылы өтетін $F(x)$ алғашқы функциясын табыңдар және $F(x)$ функциясының графигін салыңдар:

1) $f(x) = x + 1$, $M(-2;\ 3)$; 2) $f(x) = 4 + x$, $M(-2;\ 3)$;

3) $f(x) = \sin x$, $\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$; 4) $f(x) = \cos x$, $M(\pi;\ -1)$.

1.6. $y = f(x)$ функциясы үшін графигі $M(a;\ b)$ нүктесі арқылы өтетін $F(x)$ алғашқы функциясын табыңдар:

1) $f(x) = x^{-2}$, $M(1;\ -1)$;

2) $f(x) = x^{-3}$, $M(-1;\ 0)$;

3) $f(x) = 2 - \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $f(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + 1$, $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $M\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$.

1.7. $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясы үшін алғашқы функция болатынын дәлелдеңдер:

1) $f(x) = 3x^2 + 3\sin x$, $F(x) = x^3 - 3\cos x$;

2) $f(x) = x^4 + 4\cos x$, $F(x) = 0{,}2x^5 + 4\sin x$.

B

1.8. $y = f(x)$ функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңдар:

1) $f(x) = 9x^2 + \sin 3x$; 2) $f(x) = 12x^3 - \cos 4x$;

3) $f(x) = \cos 2x - \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}} + 2$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-2x}} + \sin 5x + 1$.

1.9. Төменде берілген $y = f(x)$ функциясы үшін графигі $M(a; b)$ нүктесі арқылы өтетін $F(x)$ алғашқы функциясын табыңдар және $F(x)$ функциясының графигін салыңдар:

1) $f(x) = 2x + 3$, $M(1; 2)$; 2) $f(x) = 3x^2 - 2$, $M(2; 4)$;

3) $f(x) = 1 + \sin x$, $M(0; 1)$; 4) $f(x) = 3\cos x - 2$, $M\left(\dfrac{\pi}{2}; -1\right)$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)}$, $M\left(-\dfrac{\pi}{4}; -1\right)$; 6) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)}$, $M\left(\dfrac{5\pi}{6}; \sqrt{3}\right)$.

1.10. Анықталмаған интегралды табыңдар:

1) $\int(3x-2)^2dx$; 2) $\int((2-x)^4 - 17x^9 + \sqrt{2})dx$;

3) $\int(\sin 5x - 2(4x-1)^5)dx$; 4) $\int\left(\dfrac{1}{\sin^2 5x} - \dfrac{3}{x^{10}}\right)dx$.

1.11. $y = f(x)$ функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін анықтаңдар:

1) $f(x) = (x-1)^3$; 2) $f(x) = (1-2x)^2$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 11x^{10}$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 12x^8$.

1.12. $y = f(x)$ функциясы үшін графигі $M(a; b)$ нүктесі арқылы өтетін алғашқы функцияны жазыңдар:

1) $f(x) = x - \cos^{-2}x$, мұндағы $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi^2}{32}\right)$;

2) $f(x) = 2\sin^{-2}x - x$, мұндағы $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $M\left(\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi^2}{32}\right)$;

3) $f(x) = x^{-3} + \cos x$, мұндағы $x \in (0; +\infty)$, $M\left(0{,}5\pi; -\dfrac{1}{2\pi^2}\right)$;

4) $f(x) = x^3 - \sin x$, мұндағы $x \in (0; +\infty)$, $M\left(\pi; \dfrac{\pi^4}{4}\right)$.

1.13. Берілген аралықтарда $y = F(x)$ функциясы $y = f(x)$ функциясының алғашқы функциясы бола ма:

1) $F(x) = (x - 3)\sqrt{x - 5}$, $f(x) = 2x - 10 + \dfrac{x - 3}{\sqrt{x - 5}}$, $x \in (5; +\infty)$;

2) $F(x) = \dfrac{2x - 5}{3 + 5x}$, $f(x) = \dfrac{31}{(3 + 5x)^2}$, $x \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{5}\right) \cup \left(-\dfrac{3}{5}; +\infty\right)$?

C

1.14. Берілген $F'(x)$ туындысы және $F(a) = b$ шарты бойынша $F(x)$ функциясын табыңдар:

1) $F'(x) = 4x^3 - 3x^2$ және $F(1) = 3$;
2) $F'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 2x$ және $F(1) = 4$;
3) $F'(x) = 1 + x + \cos 2x$ және $F(0) = 1$;
4) $F'(x) = \sin 2x + 3x^2$ және $F(0) = 2$.

1.15. Анықталмаған интегралды табыңдар:

1) $\int(\cos(4x - 5) + 2x^{-7} + 3)\, dx$; 2) $\int\left(\sin(2 - x) + \dfrac{1}{\cos^2 5x}\right)dx$;

3) $\int\left(\dfrac{24}{\cos^2 2x} - \dfrac{2}{x^4} + \sqrt{3}\right)dx$; 4) $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x}} - \dfrac{3}{\sin^2 2x} - x\right)dx$.

$y = F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясы үшін алғашқы функция болатынын дәлелдеңдер (**1.16-1.17**):

1.16. 1) $F(x) = -\dfrac{1}{4}\cos 2x - \dfrac{1}{2}\cos x + \pi$, $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{3x}{2}$;

2) $F(x) = -\dfrac{3}{8}\cos\dfrac{4x}{3} + \dfrac{3}{4}\cos\dfrac{2x}{3} - 7$, $f(x) = \sin\dfrac{x}{3}\cos x$.

1.17. 1) $F(x) = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{32}\sin 4x$, $f(x) = \sin^4 x$;

2) $F(x) = \dfrac{3}{8}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{32}\sin 4x$, $f(x) = \cos^4 x$;

3) $F(x) = |x^2 - 1| - 3x + 3$; $f(x) = 2x - 3$, $x \in (1; +\infty)$.

ҚАЙТАЛАУ

1.18. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $2\cdot\left(0{,}5 - 0{,}5\cos 4\alpha + \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}\right) - (1 - \sin^2 2\alpha)\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 2\alpha} - \cos^2 2\alpha = 1$;

2) $\dfrac{\cos^2(2\pi + 4\alpha) - \cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2\left(4\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^2(3\pi - (\alpha + \beta)) + \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)} - \cos^2(2\pi + (\alpha + \beta)) = 0$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-4\alpha)\cdot\sin(4\pi-2\alpha)\cdot\cos(-2\alpha)}{\operatorname{ctg}(6\pi-4\alpha)\cdot\left(\cos^2 2\alpha-\cos^2(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)\right)}-0{,}5\operatorname{tg}4\alpha=0.$

1.19. "Жанды геометрия" немесе "GeoGebra" бағдарламасын қолданып функцияның графигін салыңдар:

1) $f(x) = 3 - \sqrt{3-x}$; 2) $f(x) = 1 + \sqrt{4-x}$;

3) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$; 4) $f(x) = -\sqrt{x-1} + 2$.

1.20. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+5x}$; 2) $f(x) = x^2 - \sqrt{x^2+4x+4}$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$; 4) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{16-x^2}$.

1.21. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $y = (2x-7)^5 + 4x^2$; 2) $y = 3(3x^2-5x)^4 - x^6$;

3) $y = \sin^2 3x + 2x$; 4) $y = \cos^2 3x - x^3 + \sqrt{3}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Тіктөртбұрыш, трапеция, жазық фигураның ауданы, тікбұрышты координаталар жүйесі, функция, функцияның үзіліссіздігі, функцияның графигі, функцияның шегі, туынды, алғашқы функция, анықталмаған интеграл.

§2. ИНТЕГРАЛДАУ ТӘСІЛДЕРІ

Сендер айнымалыны алмастыру әдісін қолданып интегралды табуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, алғашқы функция, интеграл, интеграл астындағы функция

Кейбір жағдайда интеграл астындағы өрнектің интегралын кесте арқылы табу мүмкін болмайды. Ондай жағдайда жаңа айнымалыны енгізу әдісін қолданып, берілген интегралды кесте арқылы табуға келтіруге болады. Мұндай әдіс *айнымалыны алмастыру әдісі* немесе *жаңа айнымалыны енгізу әдісі* деп аталады.

Интеграл астындағы өрнек тәуелсіз айнымалы және:

— осы айнымалыға байланысты көпмүшенің көбейтіндісіне;

— осы айнымалыға байланысты тригонометриялық функцияның көбейтіндісіне;

— осы айнымалыға байланысты дәрежелік функцияның немесе түбірдің көбейтіндісіне тең болған жағдайда анықталмаған интеграл жаңа айнымалыны енгізу әдісі арқылы табылады.

МЫСАЛ

1. $\int x \cdot (2 + x)^5\, dx$ анықталмаған интегралын табайық.

Шешуі. Берілген интегралды табу үшін $t = 2 + x$ айнымалысын енгіземіз. $t = 2 + x$ теңдігінің екі жағын дифференциалдаймыз. Сонда $dt = d(2 + x)$ немесе $dt = dx$. Ал $t = 2 + x$ теңдігінен x айнымалысын анықтаймыз: $x = t - 2$. Демек,

$$\int x \cdot (2 + x)^5 dx = \int (t - 2) \cdot t^5 dt = \int (t^6 - 2t^5) dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{3} + C.$$

Енді x айнымалысына көшеміз. Сонда $\int x \cdot (2 + x)^5 dx = \frac{(2 + x)^7}{7} - \frac{(2 + x)^6}{3} + C.$

Жауабы: $\frac{(2 + x)^7}{7} - \frac{(2 + x)^6}{3} + C.$

МЫСАЛ

2. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ анықталмаған интегралын табайық.

Шешуі. Берілген интегралды табу үшін $t = \sqrt{x}$ айнымалысын енгіземіз.

Бұдан $x = t^2$. Әрі қарай соңғы теңдікті дифференциалдаймыз. Сонда $dx = (t^2)'dt$ немесе $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin t}{t} \cdot 2t\, dt = \int 2\sin t dt = -2\cos t + C.$$

Енді x айнымалысына көшеміз. Сонда $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2\cos\sqrt{x} + C.$

Жауабы: $-2\cos\sqrt{x} + C.$

Сендер бөліктеп интегралдау әдісін қолданып интегралды табуды үйренесіңдер.

Көбейткіштері интегралдар арқылы өрнектелген дифференциалданатын функциялардың туындысынан интегралды табу формулалары жоқ. Туындыға қарағанда элементар функциялардың интегралы әрдайым элементар функция болмайды. Мысалы, $\int \cos x dx$, $\int x^5 dx$ интегралдарын кесте арқылы табуға болады, ал $\int \frac{\cos x}{x} dx$ интегралының астындағы функцияны элементар функциялар арқылы өрнектеу мүмкін емес.

$[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз $u = f(x)$, $v = g(x)$, $u' = f'(x)$ және $v' = g'(x)$ функциялары берілсін.

Анықталмаған интегралды табудың бөліктеп интегралдау формуласы:

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (1)$$

Дәлелдеу. $(uv)' = uv' + vu'$ формуласының екі жақ бөлігін интегралдаймыз. Сонда $\int (uv)'\, dx = \int (uv' + vu')dx$. Бұдан $uv + C = \int (uv' + vu')dx$ немесе $uv + C = \int uv'dx + \int vu'dx$. Енді $v'dx = dv$ және $u'dx = du$ болғандықтан $uv + C = \int udv + \int vdu$ немесе $\int udv = uv - \int vdu + C$.

(1)-формула *бөліктеп интегралдау формуласы* деп аталады. Осы формуланы қолдану арқылы интеграл астындағы функцияны екі көбейткішке жіктеуге болады. Атап айтқанда, u және v', олардың біреуі дифференциалданады, екіншісі интегралданады. Яғни, u өрнегінің орнында u', ал v' өрнегінің орнында v берілген. Мұндай түрлендірулерден кейін кесте арқылы табуға болатын интеграл алынады.

Бөліктеп интегралдау формуласы көп жағдайда келесі интегралдар үшін қолданылады: $\int P_n(x)\sin ax\,dx$ немесе $\int P_n(x)\cos ax\,dx$, $\int P_n(x)\arcsin ax\,dx$, $\int P_n(x)\arccos ax\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}\,ax\,dx$.

$\int P_n(x)\sin ax\,dx$ немесе $\int P_n(x)\cos ax\,dx$ интегралын табу кезінде u ретінде $P_n(x)$ көпмүшесі алынады. Сонда сәйкесінше $dv = \sin ax\,dx$ немесе $dv = \cos ax\,dx$ болып, бөліктеп интегралдау формуласы n рет қолданылады.

$\int P_n(x)\arcsin ax\,dx$, $\int P_n(x)\arccos ax\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}\,ax\,dx$ интегралын табу кезінде u ретінде $\arcsin ax$ немесе $\arccos ax$, немесе $\mathrm{arctg}\,ax$ алынады. Сонда $dv = P_n(x)\,dx$ болады. Яғни $v = P_{n+1}(x)$ шығады.

МЫСАЛ

3. $\int x\sin x\,dx$ интегралын табайық.

Шешуі. $u = x$ және $\sin x\,dx = dv$ болсын. Бірінші теңдікті дифференциалдаймыз, екіншісінен интеграл табамыз. Сонда сәйкесінше келесі шығады: $du = dx$ және $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$. Бөліктеп инегралдау формуласын қолданамыз.

$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$

Жауабы: $-x\cos x + \sin x + C.$

МЫСАЛ

4. $\int(5x+2)\cos 2x\,dx$ анықталмаған интегралын табыңдар.

Шешуі. $\int(5x+2)\cos 2x\,dx = \left| u = 5x+2,\ dv = \cos 2x\,dx \Rightarrow du = 5dx,\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \right| =$
$= (2{,}5x+1)\sin 2x - \frac{5}{2}\int \sin 2x\,dx = (2{,}5x+1)\sin 2x + \frac{5}{4}\cos 2x\,dx + C.$

Жауабы: $(2{,}5x+1)\sin 2x + \frac{5}{4}\cos 2x\,dx + C.$

МЫСАЛ

5. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$ анықталмаған интегралын табыңдар.

Шешуі. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \left| u = \mathrm{arctg}\,x,\ dv = x\,dx,\right.$ онда $du = \frac{dx}{1+x^2}$,
$v = \frac{x^2}{2} \left.\right| = \frac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x -$
$- \frac{1}{2}(x - \mathrm{arctg}\,x) + C.$

Жауабы: $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}(x - \mathrm{arctg}\,x) + C.$

?

1. Қандай жағдайда анықталмаған интегралды табу үшін жаңа айнымалыны енгізу әдісі қолданылады?
2. Қандай жағдайда бөліктеп интегралдау әдісі қолданылады?

Жаттығулар

A

Анықталмаған интегралды табыңдар (2.1—2.4):

2.1. 1) $\int x \cdot (1+x)^4 dx$; 2) $\int (x-3)^5 x dx$.

2.2. 1) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; 2) $\int \frac{5\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

2.3. 1) $\int x \cdot \cos x dx$; 2) $\int 2x \cdot \sin x dx$.

2.4. 1) $\int x \cdot \cos 2x dx$; 2) $\int x \cdot \sin 3x dx$.

B

Анықталмаған интегралды табыңдар (2.5—2.7):

2.5. 1) $\int x \cdot (2x-1)^7 dx$; 2) $\int x \cdot (3x+1)^8 dx$.

2.6. 1) $\int x \cdot \sqrt{4+x}\, dx$; 2) $\int x \cdot \sqrt{x-3}\, dx$; 3) $\int \sin x \cdot \sqrt{\cos x}\, dx$.

2.7. 1) $\int x^2 \cos 4x dx$; 2) $\int x \cos(x+2) dx$; 3) $\int (x^2 - 3x) \sin 2x dx$.

C

Анықталмаған интегралды табыңдар (2.8-2.9):

2.8. 1) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$; 2) $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

2.9. 1) $\int x \cdot \sin^2 x dx$; 2) $\int x \cdot \cos^2 x dx$.

2.10. Интегралды табыңдар:

1) $\int x \arcsin x dx$; 2) $\int x \arccos x dx$.

2.11. Интегралды табыңдар:

1) $\int x \operatorname{arcctg} x dx$; 2) $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$.

ҚАЙТАЛАУ

2.12. "Жанды геометрия" немесе "GeoGebra" бағдарламасын қолданып функцияның графигін салыңдар және анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$; 2) $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$;

3) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$; 4) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$.

2.13. Функцияның мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = 2x + \sin 2x$; 2) $f(x) = \sin 2x \cos 2x$;

3) $f(x) = 1 + \sqrt{x^2+2x-3}$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 2x$.

2.14. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $y = \mathrm{tg}^5 x + x^{-2}$; 2) $y = \cos^2 2x - 2x$;

3) $y = x^3 \sin 2x$; 4) $y = (x^{-2} - 1)\sin^2 x^2$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның үзіліссіздігі, функцияның шегі, функцияның графигі, қисықсызықты трапеция, туынды, алғашқы функция, анықталмаған интеграл, алғашқы функцияны табу ережелері, қисықсызықты трапецияның ауданын табу формуласы.

§ 3. ҚИСЫҚСЫЗЫҚТЫ ТРАПЕЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ АУДАНЫ

Сендер *қисықсызықты трапеция* ұғымымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, алғашқы функция, анықталмаған интеграл, интеграл астындағы функция, трапеция, аудан, координаталық жазықтық

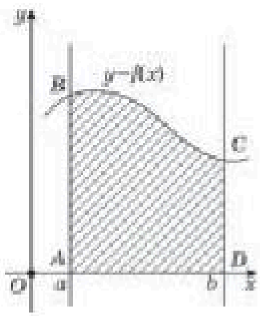
СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Қабырғалары түзудің кесіндісі болатын үшбұрыштың, тіктөртбұрыштың, трапецияның және т.б. көпбұрыштардың ауданын табу формулалары сендерге геометрия курсынан белгілі.

Практикада бір қабырғасы қисық сызық (сызықтық емес функция графигінің бөлігі) болатын фигуралардың ауданын табу есептері де кездеседі.

Мұндай фигуралардың ауданын белгілі формулалармен есептеу мүмкін емес. Ол үшін басқа тәсіл қолданылады.

Жоғарыдан $y = f(x)$ функциясының графигімен, бүйір жақтарынан $x = a$ және $x = b$ түзулерімен, төменнен Ox осімен шектелген жазық $ABCD$ фигурасы берілсін (6-сурет).



6-сурет

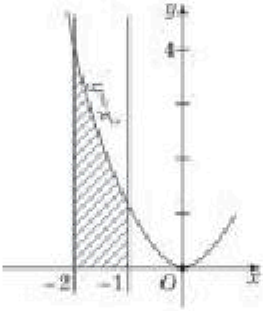
Бұл жағдайда $y = f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндісінде анықталған және үзіліссіз деп саналады.

Қисықсызықты трапеция ұғымын енгізейік.

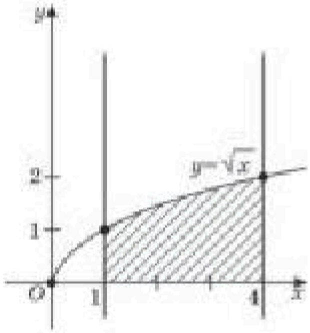
Анықтама. *Үзіліссіз теріс емес $y = f(x)$ функциясының графигімен, Ox осімен және $x = a$, $x = b$ түзулерімен шектелген жазық фигура* ***қисықсызықты трапеция*** *деп аталады.*

Қисықсызықты трапецияның табаны ретінде $[a; b]$ кесіндісі алынады.

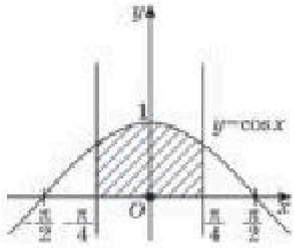
Өздеріңе белгілі $f(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \cos x$ функцияларының графиктерімен шектелген қисықсызықты трапецияға 7-, 8-, 9-суреттерде мысалдар келтірілген.



7-сурет

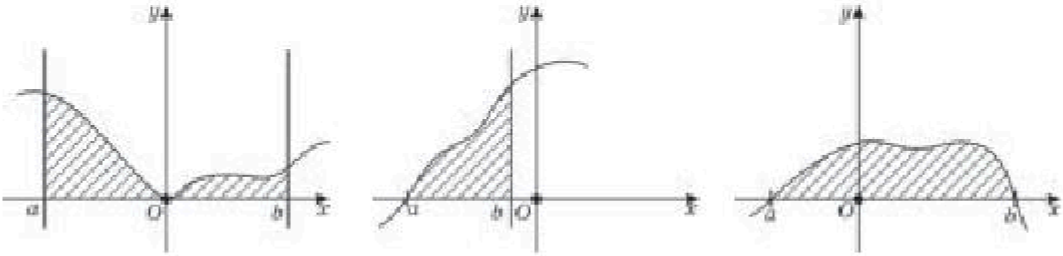


8-сурет



9-сурет

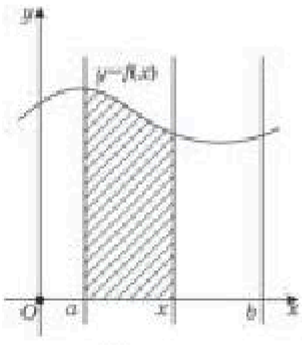
Қисықсызықты трапеция әртүрлі функциялардың графиктерінен де құралуы мүмкін. Ондай қисықсызықты трапецияның кейбір түрлері 10-суретте көрсетілген.



а) *ә)* *б)*

10-сурет

Сендер қисықсызықты трапецияның ауданын табу формуласымен танысасыңдар.



11-сурет

Енді қисықсызықты трапецияның ауданын табу формуласын қорытып шығарайық. 6-суретте кескінделген қисықсызықты трапецияның ауданын S әрпімен белгілейік. Егер $[a; b]$ кесіндісіне тиісті x нүктесін алсақ, онда $S(x)$ функциясы $x = a$ түзуімен және $(x; 0)$ нүктесі арқылы өтетін абсцисса осіне перпендикуляр түзумен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын өрнектейді (11-сурет).

$S(a) = 0$, $S(b) = S$ екені анық.

Енді $[a; x]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясы үшін $S(x)$ барлық алғашқы функциялар жиынтығы болатынын дәлелдейік, яғни $S'(x) = f(x)$.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғанда функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының шегі сол функцияның туындысын анықтайтыны белгілі.

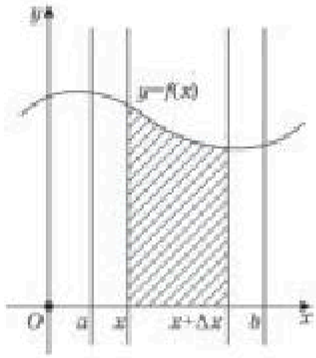
Демек, қарастырылып отырған жағдайда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = S'(x) = f(x)$ теңдігін дәлелдеу керек.

$\Delta S(x)$-тің геометриялық мағынасын біліңдер.

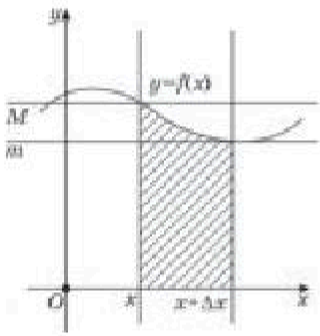
$\Delta x > 0$ жағдайын қарастырайық. $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ болғандықтан, $\Delta S(x)$ шамасы қисықсызықты трапецияның штрихталған бөлігінің ауданын береді (12.1-сурет).

$S'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x}$ екенін дәлелдейік.

$S(x + \Delta x) - S(x)$ айырымы қисықсызықты трапецияның ауданына тең. $y = f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз болғандықтан, ол $[x; x + \Delta x] \subset [a; b]$ кесіндісінде де үзіліссіз болады. Демек, $f(x)$ функциясының Вейерштрасс теоремасы бойынша $[x; x + \Delta x]$ кесіндісінде өзінің ең үлкен және ең кіші мәні болады. $[x; x + \Delta x]$ кесіндісіндегі $f(x)$ функциясының ең үлкен мәні M, ал ең кіші мәні m болсын. Онда қисықсызықты трапецияның ауданы ұзындықтары m және M, ені ортақ $[x; x + \Delta x]$ кесіндісі болатын тіктөртбұрыштар аудандарының арасында жатады (12.2-сурет).



12.1-сурет



12.2-сурет

Демек, мына қос теңсіздікті жазамыз:

$m \cdot \Delta x \leqslant S(x + \Delta x) - S(x) \leqslant M \cdot \Delta x$, мұндағы $\Delta x > 0$, ал m мен M мәндері Δx-ті таңдап алуға байланысты мәндер. $\Delta x > 0$ болғандықтан, $m \leqslant \dfrac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} \leqslant M$. $f(x)$ функциясы x нүктесі мен $[x; x + \Delta x]$ кесіндісінде үзіліссіз болғандықтан, $\Delta x \to 0$ жағдайында $f(x)$ функциясының $[x; x + \Delta x]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндері ортақ шекке ұмтылады, яғни $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} M = f(x)$. Ендеше олардың арасында орналасқан $\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}$ мәні де $f(x)$-ке ұмтылады. Олай болса, $S'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} = f(x)$. Бұл теңдік $\Delta x < 0$ жағдайы үшін де ақиқат.

Сонымен, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$. Бұдан $S'(x) = f(x)$ екені шығады, яғни $[a;\ b]$ кесіндісінде $S(x)$ функциясы $f(x)$ функциясы үшін алғашқы функция болып табылады.

Егер $f(x)$ функциясы үшін алғашқы функциялардың бірін $F(x)$ деп белгілесек,

$$S(x) = F(x) + C$$

аламыз, мұндағы C — кез келген сан.

C-ның мәнін табу үшін x-тің орнына a-ны қоямыз. Сонда $S(a) = F(a) + C$ және $S(a) = 0$, олай болса, $F(a) + C = S(a) = 0$, $C = -F(a)$. Демек, $S(x) = F(x) - F(a)$. Жоғарыда $S(b) = S$ деп көрсетілді, сондықтан қисықсызықты трапецияның ауданын былай жазуға болады:

$$S = S(b) = F(b) - F(a)$$

немесе

$$S = F(b) - F(a). \tag{1}$$

(1) — *қисықсызықты трапецияның ауданын есептеу формуласы*. Мұндағы $F(x)$ функциясы $S(x)$ функциясы үшін алғашқы функциялардың бірі, ал S — қисықсызықты трапецияның ауданы.

АЛГОРИТМ

Қисықсызықты трапецияның ауданын табу алгоритмі:

1) бір координаталық жазықтықта берілген қисықтардың графиктерін салу;
2) графигі қисықсызықты трапецияны жоғарыдан шектейтін функцияның алғашқы функцияларының бірін табу;
3) қисықсызықты трапецияның төменгі табаны болатын кесіндінің шеткі нүктелерінің координаталарын анықтау;
4) (1)-формула бойынша қисықсызықты трапецияның ауданын табу.

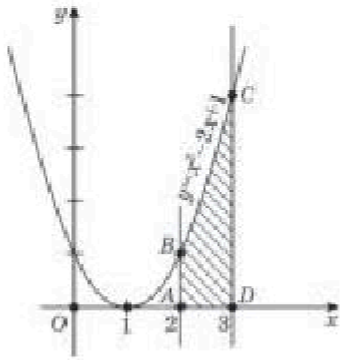
МЫСАЛ

1. $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$ және $f(x) = x^2 - 2x + 1$ сызықтарымен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын табайық.

Шешуі. Алдымен төбесінің координатасы $(1;\ 0)$ нүктесі болатын және тармақтары жоғары бағытталған $f(x) = x^2 - 2x + 1$ функциясының графигі параболаны саламыз.

Содан кейін Oy осіне параллель сәйкесінше $A(2; 0)$ және $D(3; 0)$ нүктелері арқылы өтетін $x = 2$ және $x = 3$ түзулерін жүргіземіз, ал $y = 0$ түзуі Ox осімен беттеседі (13-сурет). Сонда жоғарыдан $f(x) = x^2 - 2x + 1$ функциясының графигімен, екі жағынан $x = 2$, $x = 3$ түзулері және төменнен Ox осімен шектелген $ABCD$ қисықсызықты трапециясын аламыз. Енді $f(x)$ функциясының алғашқы функцияларының бірін 1- және 2-ережелер бойынша табайық:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x.$$



13-сурет

$a = 2$ және $b = 3$ екенін ескеріп, (1)-формула бойынша қисықсызықты трапецияның ауданын есептейміз:

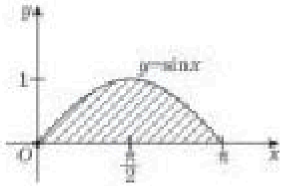
$$S = F(3) - F(2) = \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 + 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2\right) = 3 - \frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Жауабы: $2\frac{1}{3}$ кв. бірл.

МЫСАЛ 2. Абсцисса осімен, $x = 0$, $x = \pi$ түзулерімен және $y = \sin x$ функциясының графигімен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын есептейік.

Шешуі. Берілген сызықтармен шектелген қисықсызықты трапеция 14-суретте көрсетілген. $y = \sin x$ функциясының алғашқы функцияларының бірі $F(x) = -\cos x$. Ал $a = 0$ және $b = \pi$, онда $S = F(\pi) - F(0) = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$.

Жауабы: 2 кв. бірл.



14-сурет

МЫСАЛ 3. $y = -x^2$, $y = 0$, $x = -2$ сызықтарымен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын табайық (15-сурет).

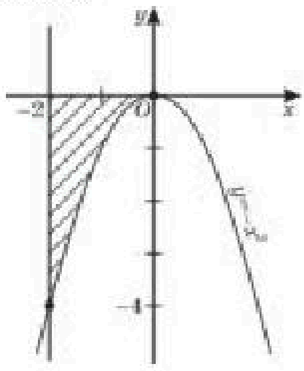
Шешуі. 15-суреттен қисықсызықты трапецияның тұтасымен абсцисса осінің төменгі жағында орналасқанын көруге болады. Мұндай жағдайда (1)-формуладағы $F(b) - F(a)$ өрнегін минус таңбасымен аламыз.

$y = -x^2$ функциясының алғашқы функцияларының бірі $F(x) = -\frac{x^3}{3}$ және $a = -2$, $b = 0$.

Сондықтан

$$S = -(F(b) - F(a)) = F(a) - F(b) = -\frac{(-2)^3}{3} + 0 = 2\frac{2}{3}.$$

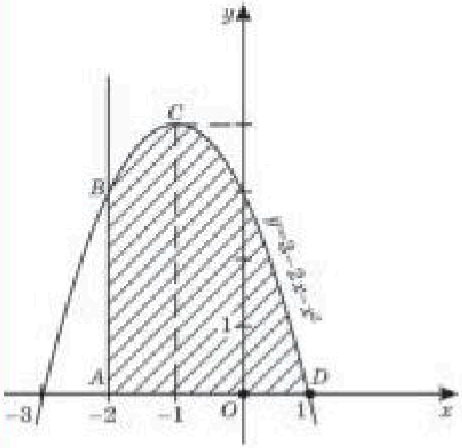
Жауабы: $2\frac{2}{3}$ кв. бірл.



15-сурет

МЫСАЛ 4. $y = 0$, $x = -2$ (мұндағы $x > -2$), $y = 3 - 2x - x^2$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданын табайық.

Шешуі. $y = 0$, $x = -2$ және $y = 3 - 2x - x^2$ сызықтарының графиктерін координаталар жазықтығына салайық (16-сурет). $x = -2$ түзуі қисықсызықты трапецияны екі бөлікке бөледі. Есептің шарты бойынша $x > -2$. Демек, $x = -2$ түзуінің оң жағында орналасқан бөлікті аламыз. Енді $ABCD$ қисықсызықты трапециясының ауданын есептейміз.



16-сурет

Ауданын есептеуді қажет ететін фигура жоғарыдан $y = 3 - 2x - x^2$, ал төменнен $y = 0$ түзуімен, бүйір жақтарынан $x = -2$ және $x = 1$ түзулерімен шектелген. Олай болса $S_ф = S_{ABCD}$.

$y = 3 - 2x - x^2$ функциясы үшін алғашқы функция $F(x) = 3x - x^2 - \dfrac{x^3}{3}$ және $a = -2, b = 1$. Ал S_{ABCD} фигурасының ауданын табу үшін (1)-формуланы қолданамыз:

$$S_{ABCD} = F(1) - F(-2) = \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-6 - 4 + \frac{8}{3}\right) = 1\frac{2}{3} + 7\frac{1}{3} = 9.$$

Жауабы: 9 кв. бірл.

1. Қисықсызықты трапецияның геометрия курсынан белгілі трапециядан қандай айырмашылығы бар?
2. Қисықсызықты трапецияның ауданын есептеу формуласын қорытып шығару кезінде қандай белгілі ұғымдар қолданылды?
3. Трапеция ауданын қисықсызықты трапецияның ауданын есептеу формуласы арқылы табуға бола ма?

Жаттығулар

А

Берілген қисықтармен шектелген фигураның ауданын табыңдар (3.1—3.4):

3.1. 1) $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;
2) $y = x^2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;
3) $y = 2x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;
4) $y = 2x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$.

3.2. 1) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;
2) $y = x^2 - 2x + 8$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 3$;

3) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$;

4) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

3.3. 1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$; 2) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

3.4. 1) $y = 1 - x^2$, $y = 0$; 2) $y = -x^2 + 4$, $y = 0$;
3) $y = 3x - x^2$, $y = 0$; 4) $y = 6x - x^2$, $y = 0$.

3.5. 1) $y = \cos x$ функциясының графигімен, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$ және $y = 0$ түзулерімен;

2) $y = \sin x$ функциясының графигімен, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$ және $y = 0$ түзулерімен және абсцисса осімен шектелген фигураның ауданын табыңдар.

B

3.6. 1) $x = \frac{\pi}{18}$, $x = \frac{\pi}{12}$ түзулерімен, $y = \sin 6x$ функциясының графигімен және абсцисса осімен;

2) $y = 0$, $x = \frac{\pi}{24}$, $x = \frac{\pi}{12}$ түзулерімен және $y = \cos 4x$ функциясының графигімен шектелген фигураның ауданын табыңдар.

3.7. Берілген қисықтармен шектелген фигураның ауданын табыңдар:
1) $y = -x^3$, $x = -3$, $y = 0$; 2) $y = -2x^3$, $x = -2$, $y = 0$;
3) $y = 1 - x^3$, $x = 0$, $y = 0$; 4) $y = 1 - x^2$, $y = 0$;
5) $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
6) $y = -x^2 - 2x + 2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$;
7) $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 4$; 8) $y = -\frac{3}{x^3}$; $y = -3x$, $x = -4$.

3.8. Егер $0 < x < \frac{\pi}{6}$ болса, онда $y = \sin 6x$ және $y = 0$ қисықтарымен шектелген фигураның ауданы неге тең?

C

3.9. $[a; b]$ және $[b; c]$ кесінділерінде сәйкесінше $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының графиктерімен, $x = a$, $x = c$ түзулерімен және Ox осімен шектелген фигураның ауданын табыңдар:
1) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $[-2; 1]$ және $g(x) = x^2 - 2x + 7$, $[1; 2]$;
2) $f(x) = -x^2 - 4x - 1$, $[-3; -1]$ және $g(x) = -x^2 + 2x + 5$, $[-1; 1]$.

3.10. Ox осімен және берілген функцияның графигімен шектелген фигураның ауданын табыңдар:

1) $y = -x^2 + x + 6$; 2) $y = -x^2 + 2x + 3$;
3) $y = -2(x - 1)^2 + 8$; 4) $y = -2(x - 3)^2 + 2$.

3.11. d-ның қандай мәнінде $y = \cos 5x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{30}$ және $x = d$ $\left(d < \frac{\pi}{30}\right)$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданы 0,2-ге тең болады?

3.12. $y = f(x)$ функциясының графигіне абсциссасы x_0 нүктесінде жүргізілген жанамамен, $x = a$ түзуімен және Ox осімен шектелген фигураның ауданын есептеңдер:
1) $f(x) = 4{,}5 - 0{,}5x^2$, $x_0 = 1$, $x = -2$;
2) $f(x) = 8 - 0{,}5x^2$, $x_0 = -2$, $x = 1$.

3.13. Берілген қисықтармен шектелген фигураның ауданын табыңдар:
1) $y^2 = x$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, $y < 0$;
2) $y^2 = x$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y > 0$;
3) $y = 2\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $x = 9$.

3.14. $y = x^3$ функциясының графигімен, абсциссасы $x = 1$ болатын нүктеде жүргізілген жанамамен және Oy осімен шектелген фигураның ауданын табыңдар.
2) $y = x^3$ функциясының графигімен, абсциссалары $x = 1$ және $x = 0$ болатын нүктелерде жүргізілген жанамалармен шектелген фигураның ауданын табыңдар.

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИКТЕР ЖАЙЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

3.15. $\int$ белгісін Готфрид Вильгельм Лейбниц, «интеграл» терминін Иоганн Бернулли ұсынған. "Интеграл" термині алғашқы рет Якоб Бернулли еңбектерінде кездеседі. $\int\limits_a^b f(x)dx$ белгісі француз математигі және физигі Жан-Батист Жозеф Фурьенің жұмыстарынан кейін кеңінен қолданыла бастады.


Я. Бернулли
(1655—1705)


Ж. Фурье
(1768—1830)


Г.В Лейбниц
(1646—1716)

ҚАЙТАЛАУ

3.16. Берілген функциялардың графиктерімен шектелген фигураны координаталық жазықтықта салыңдар:

1) $y = x^2 - 2x$ және $y = x$; 2) $y = x + 1$ және $y = \sqrt{x+1}$.

3.17. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $y = \text{arctg}2x + \frac{1}{x}$; 2) $y = \sqrt{2x+1} - \text{tg}x^3$;

3) $y = \cos^{-1}x - x$; 4) $y = \frac{\sin 2x}{x} + \frac{1}{3x}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның үзіліссіздігі, функцияның шегі, функцияның графигі, қисықсызықты трапеция, туынды, алғашқы функция, анықталмаған интеграл, алғашқы функцияны табу ережелері, қисықсызықты трапецияның ауданын табу формуласы.

§4. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ

Сендер *анықталған интеграл* ұғымымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, алғашқы функция, анықталған интеграл, интеграл астындағы функция

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Қисықсызықты трапецияның ауданын табуды білесіңдер.

“Қисықсызықты трапецияның ауданын басқа жолмен табуға бола ма?” – деген сұрақ туындауы мүмкін. Бұл сұраққа жауап беру үшін $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясын алайық. Ол үшін жоғарыдан $f(x)$ функциясының графигімен, төменнен абсцисса осімен және бүйір жағынан $x = a$ және $x = b$ түзулерімен шектелген қисықсызықты трапецияны қарастырайық.

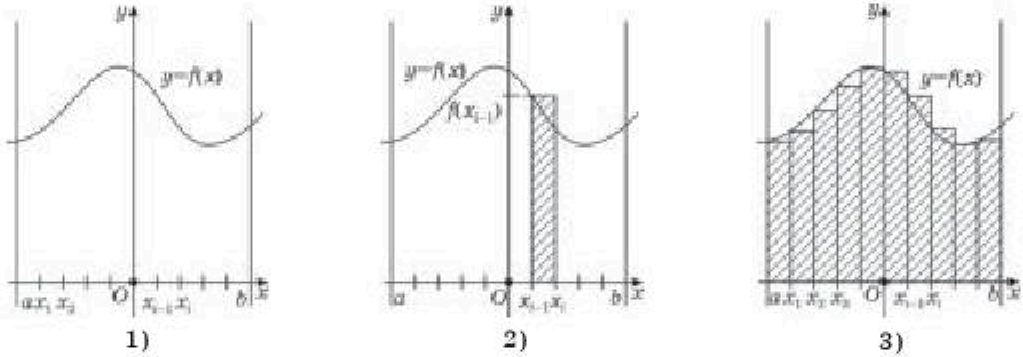
Алынған қисықсызықты трапецияның S ауданын есептеу формуласын қорытып шығарайық.

Координаталары x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_{n-1} болатын нүктелер арқылы $[a; b]$ кесіндісін бірдей бөліктерге бөлеміз (17.1-сурет).

Онда $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b$ шығады.

$[a; b]$ кесіндісінің әрбір бөлігінің ұзындығын Δx деп белгілейміз.

Сонда $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = ... = x_i - x_{i-1} = ... = x_n - x_{n-1}$.



17-сурет

Енді табаны $[x_{i-1}; x_i]$ кесіндісі, ал биіктігі ұзындығы $f(x_{i-1})$-ке тең кесінді болатын тіктөртбұрышты салайық (17.2-сурет). Алынған тіктөртбұрыштың ауданы $S_{i-1} = f(x_{i-1}) \cdot \Delta x = f(x_{i-1}) \cdot \dfrac{b-a}{n}$ болады.

Мұндай тіктөртбұрыштардың саны n-ге тең (17.3-сурет). Демек, барлық осындай тіктөртбұрыштар аудандарының қосындысын былай беруге болады:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right).$$

Берілген $f(x)$ функциясы үзіліссіз, сондықтан $[a; b]$ кесіндісін бөліктерге бөлу санын арттырғанда, яғни n-нің жеткілікті үлкен мәнінде (Δx кесіндісі өте аз шамаға азаяды) салынған барлық тіктөртбұрыштар аудандарының жиынтығы қарастырылып отырған қисықсызықты трапеция ауданымен беттеседі деп есептеуге болады.

Бұдан n-нің ең үлкен мәнінде S_n ауданының мәні шамамен S-ке (қисықсызықты трапецияның ауданы) тең, сондықтан n шексіздікке ұмтылғанда S_n-нің мәні қандай да бір S санына ұмтылады:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

Алынған қорытынды $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы үшін ақиқат және $n \to \infty$ жағдайында S_n берілген трапецияның S ауданына ұмтылады. Ол сан a-дан b-ға дейінгі $f(x)$ функциясының *анықталған интегралы* деп аталады.

Белгіленуі: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Оқылуы: "a-дан b-ға дейінгі интеграл икс-тен эф дэ икс". Мұндағы a және b сандары интегралдау шектері: a — *төменгі шегі*, b — *жоғарғы шегі*.

Сонымен, $[a; b]$ кесіндісінде $f(x)$ үзіліссіз функциясы $f(x) \geqslant 0$ болса, қарастырылған қисықсызықты трапецияның S ауданын былай жазуға болады:

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Қисықсызықты трапецияның ауданы

$$S = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

формуласымен есептелінетіні сендерге алдыңғы параграфтан белгілі.

Сендер Ньютон—Лейбниц формуласымен танысасыңдар.

Егер $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы үшін $F(x)$ алғашқы функция болса, онда (1) және (2) формулаларын салыстыру арқылы мына теңдікті аламыз:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

(3)-формуланы *Ньютон—Лейбниц формуласы* деп атайды.

Алдағы уақытта $F(b) - F(a)$ айырымын ($[a; b]$ кесіндісіндегі $F(x)$ функциясының өсімшесін) $F(x)\Big|_a^b$ түрінде жазатын боламыз. Сонда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (4)$$

Сендер анықталған интегралды табуды үйренесіңдер.

МЫСАЛ

1. 1) $\int_0^2 x^3\,dx$; 2) $\int_0^\pi \sin x\,dx$; 3) $\int_{-1}^1 (9x^2 - 24x + 16)\,dx$ интегралдарын есептейік.

Шешуі. 1) $f(x) = x^3$ функциясы үшін алғашқы функциялардың бірі $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Енді Ньютон—Лейбниц формуласын қолданамыз:

$$\int_0^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{16}{4} = 4.$$

2) $F(x) = -\cos x$ функциясы $f(x) = \sin x$ функциясы үшін алғашқы функциялардың бірі. Ендеше Ньютон—Лейбниц формуласын қолданып интегралдың мәнін есептеуге болады:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

3) Интеграл таңбасының ішіндегі функцияның алғашқы функцияларының бірі $F(x) = 3x^3 - 12x^2 + 16x$.

Демек, $\int_{-1}^1 (9x^2 - 24x + 16)\,dx = (3x^3 - 12x^2 + 16x)\Big|_{-1}^1 = (3 - 12 + 16) - (-3 - 12 - 16) = 38.$

Жауабы: 1) 4; 2) 2; 3) 38.

МЫСАЛ

2. $\int\limits_x^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Ньютон—Лейбниц формуласы бойынша анықталған интегралдың өрнегін табамыз: $\int\limits_x^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_x^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{x} = 4 - 2\sqrt{x}$. Енді берілген теңдеуді былай жазамыз: $4 - 2\sqrt{x} = 2$ немесе $\sqrt{x} = 1$. Демек, $x = 1$.

Жауабы: 1.

МЫСАЛ

3. Интегралдың геометриялық мағынасын қолданып $\int\limits_3^6 \sqrt{6x - x^2}\,dx$ интегралын табыңдар.

Шешуі. Интеграл астындағы өрнекті келесідей белгілейік: $y = \sqrt{6x - x^2}$. Бұдан $y^2 = 6x - x^2$, мұндағы $y \geqslant 0$ немесе $x^2 - 6x + y^2 = 0$. Екімүшенің толық квадратын айыру үшін теңдіктің екі жағына 9 санын қосамыз. Сонда $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9$ немесе $(x - 3)^2 + y^2 = 9$, мұндағы $y > 0$. Шыққан теңдеу радиусы 3-ке тең және центрі $A(3;\ 0)$ болатын шеңберді береді. Мұндағы $y > 0$. Интегралдың геометриялық мағынасы функцияның графигімен шектелген фигураның ауданы және интегралдау шектері 3-тен 6-ға дейін болғандықтан, радиусы 3-ке тең дөңгелек ауданының төрттен бір бөлігін аламыз. Дөңгелектің ауданы 9π-ге тең. Демек, $\int\limits_3^6 \sqrt{6x - x^2}\,dx = \frac{9\pi}{4}$.

Жауабы: $\frac{9\pi}{4}$.

?

1. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ неге анықталған интеграл деп аталады?
2. Анықталған интегралдың анықталмаған интегралдан қандай айырмашылығы бар?
3. Интеграл ішіндегі функция берілген кесіндіде үзілісті функция болған жағдайда, анықталған интегралды қарастыруға бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.
4. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$ екені белгілі. Бұдан $[a;\ b]$ кесіндісінде $f(x) = 0$ бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

Интегралды есептеңдер (4.1-4.2):

4.1. 1) $\int\limits_{-3}^{2} (2x - 3)\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{1} (5 - 4x)\,dx$;

3) $\int\limits_{-2}^{0} (3x^2 + 10)\,dx$; 4) $\int\limits_{0}^{2} (6x^2 - 2x + 5)\,dx$.

4.2. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos x\, dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{1} \left(5x^4 + 6x^2\right) dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{1} \left(4x^3 + 6x\right) dx$.

Интеграл таңбасының ішіндегі функцияны түрлендіріп, интегралды есептеңдер (**4.3-4.4**):

4.3. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{4}\, dx$;

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1}\, dx$; 4) $\int\limits_{3}^{5} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}\, dx$.

4.4. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{18}} (\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x) dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{16}} (\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x) dx$;

3) $\int\limits_{0,3}^{1,5} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{x^2}\right) dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{-1} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) dx$.

B

Интегралды есептеңдер (**4.5–4.7**):

4.5. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \sin 3x dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx$.

4.6. 1) $\int\limits_{1}^{1,5} (1 - 2x)^3 dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} (3x + 1)^3 dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{4} \frac{(2 - x)^3}{8}\, dx$; 4) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{(1 - x)^4}{7}\, dx$.

4.7. 1) $\int\limits_{1}^{4} \frac{5\sqrt{x}}{x}\, dx$; 2) $\int\limits_{-8}^{-3} \frac{1}{\sqrt{1 - x}}\, dx$;

3) $\int\limits_{4}^{11} \frac{1}{\sqrt{x + 5}}\, dx$; 4) $\int\limits_{14}^{47} \frac{4}{\sqrt{x + 2}}\, dx$.

Интеграл таңбасының ішіндегі функцияны түрлендіріп, интегралды есептеңдер (4.8-4.9):

4.8. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\cos^2 x)dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin 2x - 1)dx$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x)dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg}\frac{x}{5} \operatorname{ctg}\frac{x}{5} - \cos x\right)dx$.

4.9. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} 12\sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} - x\right)dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)dx$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \sin 2x dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos 2x dx$.

4.10. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\int\limits_{1}^{x} (3 - 2t)dt = 4 - 2x$; 2) $\int\limits_{1}^{x} (1 - 4t)dt = 12 - 9x$;

3) $\int\limits_{x}^{-1} (3t - 2)dt = 5 - x$; 4) $\int\limits_{x}^{-2} (5t + 1)dt = 6 + x$.

4.11. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\int\limits_{0}^{x} 5dt > 1$; 2) $\int\limits_{x}^{x^2} 5dt < 0$;

3) $\int\limits_{x}^{1} 3dt > 9$; 4) $\int\limits_{x}^{2} (2t - 3)\, dt > 0$.

C

Интегралды есептеңдер (4.12–4.14):

4.12. 1) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin 2x \cos 3x dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \sin 5x dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos dx}{1 - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}$; 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{2\sin x + 1}$.

4.13. 1) $\int\limits_{0}^{1} (2 + 5x)^3 dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} (2x + 3)^3 dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(6x - 1)^4}$; 4) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(1 - 2x)^5}$.

4.14. 1) $\int\limits_2^{12} \frac{dx}{\sqrt{3x-1}}$; 2) $\int\limits_4^{12} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$;

3) $\int\limits_2^{3} \frac{2x^3+x^2+2x+1}{1+x^2}\,dx$; 4) $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1}\,dx$.

4.15. Теңсіздікті тура теңсіздікке айналдыратын x-тің мәндерін табыңдар:

1) $\int\limits_x^3 (t+1)dt < 0$; 2) $\int\limits_x^2 (1-t)dt > 0$;

3) $\int\limits_{-2}^x (2-3t)dt > 0$; 4) $\int\limits_{-3}^x (4t-1)dt < 0$.

4.16. 1) $\int\limits_x^{2x} \sin 2t\,dt = \frac{1}{2}$ теңдігі орындалатындай x-тің ең кіші оң мәнін;

2) $\int\limits_x^{x-1} \sin 2t\,dt < 0$ теңсіздігі орындалатындай x-тің ең кіші бүтін оң мәнін табыңдар.

4.17. Интегралдың геометриялық мағынасын қолданып интегралды табыңдар:

1) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$;

3) $\int\limits_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx$; 4) $\int\limits_2^4 \sqrt{4x-x^2}\,dx$.

ҚАЙТАЛАУ

4.18. $f(x)$ функциясы берілген. $f'(x)$-ті табыңдар:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x^2-4, & x>3, \\ -x^2+2, & x<3; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} 5x-x^2, & x>2, \\ -\sqrt{2-x}, & x<2. \end{cases}$

4.19. Берілген функциялардың графиктерімен шектелген фигураны координаталық жазықтықта салыңдар:

1) $y = 2+\sin x$ және $y = x^2 - x$;

2) $y = \cos x + 1$ және $y = \sqrt{4-x}$.

4.20. Функцияның алғашқы функциясын табыңдар:

1) $f(x) = 2x + 6x^3$; 2) $f(x) = \sqrt{2x+1} - 4x^3$;

3) $f(x) = 6\cos 3x - 4x$; 4) $f(x) = 2\sin 2x - 2x$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Жазықтықтағы және кеңістіктегі координаталар жүйесі, функция, функцияның графигі, түзу, парабола, көпжақтар, айналу денелері, қисықсызықты трапеция, туынды, алғашқы функция, интеграл, қозғалыстың жылдамдығы мен үдеуі.

§ 5. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ ФИЗИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЫҒАРУДА ҚОЛДАНЫЛУЫ

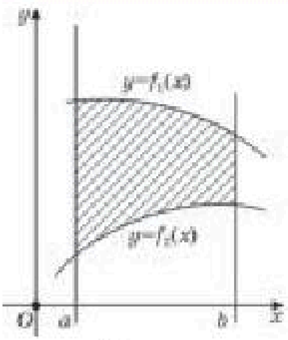
Сендер берілген сызықтармен шектелген жазық фигураның ауданын есептеуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, алғашқы функция, анықталған интеграл, жазық фигура, айналу денесі, аудан, көлем

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

$\int_a^b f(x)dx$ анықталған интегралы жоғарыдан $f(x)$ функциясының графигімен, төменгі жағынан Ox осіне тиісті $[a; b]$ кесіндісімен, ал екі жағынан $x = a$ және $x = b$ түзулерімен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын беретіні белгілі.



18-сурет

Кейбір жағдайларда жоғарыдан да, төменнен де әртүрлі функциялардың графиктерімен (әртүрлі қисықтармен) шектелген жазық фигураның ауданын табуға тура келеді (18-сурет).

18-суретте кескінделген жазық фигураның ауданын есептеу үшін жоғарыдан $y = f_1(x)$ функциясының графигімен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданынан төменнен $y = f_2(x)$ функциясының графигімен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын азайту керек.

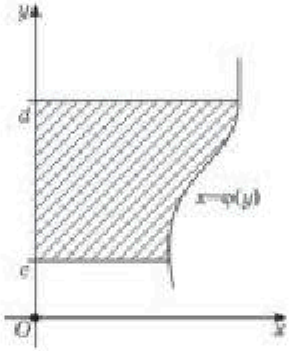
Сонда ізделінді ауданды былай табамыз:

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$

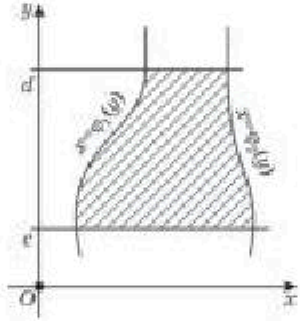
немесе

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx. \qquad (1)$$

Кейбір дербес жағдайларда Ox осіне параллель $y = c$ және $y = d$ түзулерімен, $x = 0$ түзуі және бір бүйір жағынан қисықпен ($x = \varphi(y)$ функциясының графигімен) шектелген фигураның ауданын есептеу қажет болады (19-сурет).



19-сурет



20-сурет

Мұндай фигураның ауданы

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy \qquad (2)$$

формуласымен (мұндағы y — интегралдау айнымалысы) есептелінеді. Егер фигура бүйір жақтарынан $x = \varphi_1(y)$ және $x = \varphi_2(y)$ қисық сызықтарымен шектелсе (20-сурет), онда фигураның ауданын мына формуламен есептейді:

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy. \qquad (3)$$

МЫСАЛ

1. $y = x^3 + 1$ қисығымен, $y = 2$ түзуімен және Oy осімен шектелген фигураның ауданын табайық (21-сурет).

Шешуі. 21-суретте берілген жазық фигураның ауданын (1)-формула бойынша есептейміз:

$$S = \int_0^1 (2 - x^3 - 1)\,dx = \int_0^1 (1 - x^3)\,dx = \left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Жауабы: $\frac{3}{4}$ кв. бірл.

МЫСАЛ

2. $y = 2x$, $x = 1$ түзулерімен және Ox осімен шектелген фигураның ауданын есептейік (22-сурет).

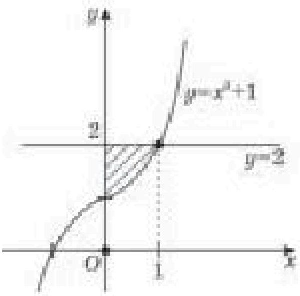
Шешуі. 22-суретте берілген үшбұрыштың ауданын (1)-формуланың көмегімен табамыз:

$$S = \int_0^1 2xdx = x^2\Big|_0^1 = 1.$$

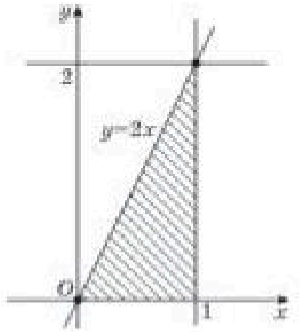
Тура осындай қорытындыны тікбұрышты үшбұрыштың ауданын есептеу формуласы $S = \frac{1}{2}ab$ арқылы да алуға болады. Бұл жағдайда $a = 1$, $b = 2$. Демек,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

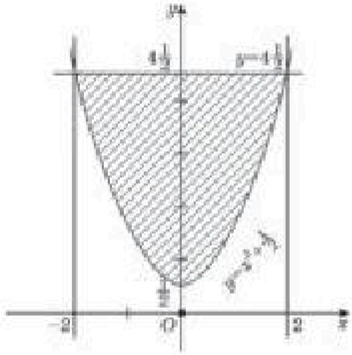
Жауабы: 1 кв. бірл.



21-сурет



22-сурет



23-сурет

МЫСАЛ

3. $y = \int\limits_{x^2}^{x^2+1} tdt$ интегралы түрінде берілген функцияның графигімен және $y = 4\frac{1}{2}$ түзуімен шектелген фигураның ауданын табайық.

Шешуі. Алдымен интегралды табамыз:

$$y = \int\limits_{x^2}^{x^2+1} tdt = \frac{1}{2}t^2\Big|_{x^2}^{x^2+1} = \frac{1}{2}((x^2+1)^2 - x^4) = x^2 + \frac{1}{2}.$$

Сонымен, есепті шығару $y = x^2 + \frac{1}{2}$ параболасы және $y = 4\frac{1}{2}$ түзуімен шектелген фигураның ауданын табуға әкеледі (23-сурет).

Алдымен интегралдау шектерін табайық. Ол үшін $x^2 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$ теңдеуін шешеміз. Теңдеудің түбірлері $x_1 = -2$ және $x_2 = 2$.

23-суретте берілген жазық фигура Oy осіне қарағанда симметриялы. Сондықтан қисықсызықты трапецияның ауданын [0; 2] кесіндісінде есептеп, екіге көбейтсе жеткілікті.

$$S = 2\cdot\int\limits_0^2\left(4\frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = 2\cdot\int\limits_0^2(4 - x^2)dx = 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

Жауабы: $\frac{32}{3}$ кв. бірл.

МЫСАЛ

4. $y^2 = 4x$ параболасымен және $y = x$ түзуімен шектелген фигураның ауданын есептейік.

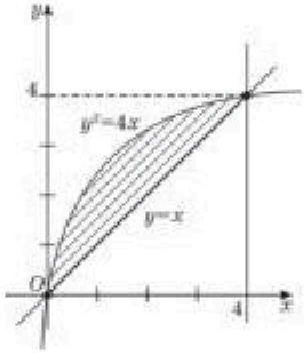
Шешуі. Берілген қисықтармен шектелген жазық фигураның ауданы 24-суретте көрсетілген. Осы жазық фигураның ауданын есептеу үшін, алдымен берілген парабола мен түзудің қиылысқан нүктелерінің координаталарын табайық. Ол үшін екі теңдеуден тұратын теңдеулер жүйесін шешеміз:

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = x \end{cases}$$ немесе $\frac{y^2}{4} = y$, осыдан $y_1 = 0$, $y_2 = 4$.

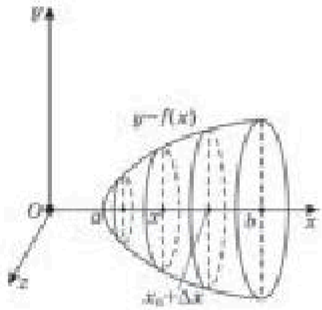
Демек, ізделінді фигураның ауданын (3)-формула бойынша анықтаймыз:

$$S = \int\limits_0^4\left(y - \frac{y^2}{4}\right)dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right)\Big|_0^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{12} = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

Жауабы: $\frac{8}{3}$ кв. бірл.



24-сурет



25-сурет

Сендер айналу денесінің көлемін анықталған интеграл көмегімен есептеу формуласымен танысасыңдар.

$[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз $y = f(x)$ функциясының графигімен шектелген қисықсызықты трапеция берілсін. Осы қисықсызықты трапецияны Ox осінен айналдырғанда пайда болған геометриялық дененің көлемін табу керек болсын (25-сурет).

$[a; b]$ кесіндісінің бойынан кез келген x нүктесін алайық. Егер осы нүкте арқылы Ox осіне перпендикуляр жазықтық жүргізсек, онда жазықтық айналу денесін дөңгелек бойымен қиып өтеді (қимада дөңгелек пайда болады). Ал шыққан дөңгелектің радиусы y-ке тең. Демек, қиманың ауданы $Q(x) = \pi y^2$.

$[a; b]$ кесіндісінде $Q(x)$ қимасының ауданы үзіліссіз екені айқын. $[a; x]$ кесіндісіне сәйкес дене бөлігінің көлемін $V(x)$ арқылы өрнектейік (25-сурет).

$V(x)$ функциясының туындысын табамыз. Ол үшін қандай да бір x_0 мәнін алып, оған Δx өсімшесін берейік. Δx мәні нөлден үлкен немесе нөлден кем болуы мүмкін. $\Delta x > 0$ деп есептесек, $V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)$ айырымы Ox осінен алынған x_0 және $x_0 + \Delta x$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтар арасында орналасқан дененің көлемі болады (25-сурет). Суреттен мына теңдік орындалады:

$$Q(x_0) \cdot \Delta x \leqslant V(x_0 + \Delta x) - V(x_0) \leqslant Q(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Мұндағы $Q(x_0) \cdot \Delta x$ — алынған қабат ішіне толығымен тиісті болатын цилиндрлік дененің көлемі, ал $Q(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$ — осы қабатты қамтитын дененің көлемі $\Delta x > 0$ болғандықтан

$$Q(x_0) \leqslant \frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} \leqslant Q(x_0 + \Delta x).$$

$Q(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндісінде үзіліссіз. Сондықтан ол x_0 нүктесінде де үзіліссіз. Демек, егер Δx мәні нөлге ұмтылса, онда $Q(x_0 + \Delta x)$ мәні $Q(x_0)$ мәніне ұмтылады. Сондықтан $\Delta x \to 0$ жағдайында $\dfrac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x}$ мәні $Q(x_0)$ мәніне ұмтылады. Сонымен, $V'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} = Q(x_0)$. Ендеше, $V(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндісінде $Q(x)$ функциясы үшін алғашқы функция болады. Сонда

$$\int_a^b Q(x)dx = V(x)\Big|_a^b = V(b) - V(a).$$

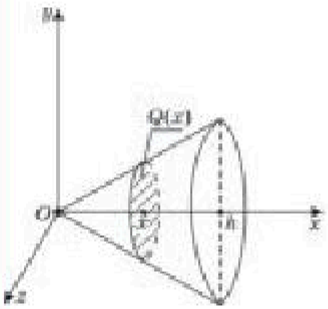
Демек, айналу денесінің көлемін табу үшін a-дан b-ға дейінгі аралықта $Q(x) = \pi y^2$ функциясын интегралдасақ жеткілікті:

$$V = \int_a^b Q(x)\, dx = \pi \int_a^b y^2 dx. \qquad (4)$$

МЫСАЛ

5. Табанының ауданы S-ке, биіктігі h-қа тең конустың көлемін есептейік.

Шешуі. Конустың төбесін координаталар басына сәйкес етіп, биіктігін Ox осі бойымен бағыттайық (26-сурет).



26-сурет

Кез келген x нүктесі арқылы Ox осіне перпендикуляр жазықтық жүргіземіз. Ол жазықтық конустан ауданы $Q(x)$ болатын дөңгелекті қиып өтеді.

Конустың параллель қималары аудандарының қатынасы осы қималардан конустың төбесіне дейінгі қашықтықтардың квадраттарының қатынасына тең екені геометрия курсынан белгілі: $\dfrac{Q(x)}{S} = \dfrac{x^2}{h^2}$, мұндағы $Q(x)$ — конустың x нүктесі арқылы өтетін Ox осіне перпендикуляр жазықтықпен қимасының ауданы, S — конус табанының ауданы, h — конустың биіктігі, x шамасы x нүктесі арқылы өтетін қимадан конустың төбесіне дейінгі қашықтық.

Соңғы теңдіктен $Q(x) = \dfrac{S}{h^2}\, x^2$.

Енді интеграл көмегімен конустың көлемін есептейік:

$$V = \int_0^h Q(x)dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} Sh.$$

Сонымен, конустың көлемін есептейтін $V = \dfrac{1}{3} Sh$ формуласын алдық.

Сендер анықталған интегралды физикалық есептерді шығару үшін қолдануды үйренесіңдер.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Материялық нүктенің жылдамдығы оның жүрген s жолынан t уақыт бойынша алынған туынды $v = s'(t)$, ал үдеу жылдамдықтан t уақыт бойынша алынған туынды $a = v'(t)$ екені белгілі.

Жылдамдығы бойынша дененің жүрген жолын табу үшін Ньютон—Лейбниц формуласын қолданып мына теңдікті аламыз:

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = s(t_1) - s(t_0) \text{ немесе } s(t_1) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt, \qquad (5)$$

мұндағы t_0 — бастапқы уақыт.

Тура осылай дененің үдеуі бойынша жылдамдығының шамасын да анықтауға болады:

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)dt = v(t_1) - v(t_0) \text{ немесе } v(t_1) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt.$$

Мұнда $v(t_0)$ бастапқы жылдамдықты анықтайды және v_0 арқылы белгіленеді. Сондықтан соңғы теңдік былай жазылады:

$$v(t_1) = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt. \qquad (6)$$

(6)-формула арқылы материялық нүктенің үдеуі бойынша жылдамдықты, ал (5)-формула арқылы материялық нүктенің жылдамдығы бойынша жүрген жолын анықтауға болады.

МЫСАЛ

6. Жылдамдығы $v = 9{,}8t - 0{,}003t^2$ заңдылығымен өзгерген материялық нүктенің $t_0 = 0$-ден $t = 5$-ке дейінгі уақыт аралығындағы жүрген жолын анықтайық.

Шешуі. Есепті шығару үшін (5)-формуланы қолданамыз:

$$s(t) = s(t_0) + \int_0^5 (9{,}8t - 0{,}003t^2)dt.$$

Есептің берілгені бойынша $t_0 = 0$ $(s(t_0) = 0)$, сондықтан

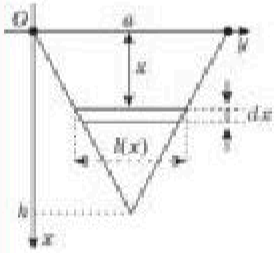
$$s(t) = \int_0^5 (9{,}8t - 0{,}003t^2)dt = \left(9{,}8 \cdot \frac{t^2}{2} - 0{,}003 \cdot \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^5 = (4{,}9t^2 - 0{,}001t^3)\Big|_0^5 =$$

$$= 4{,}9 \cdot 25 - 0{,}001 \cdot 125 = 122{,}5 - 0{,}125 = 122{,}375.$$

Жауабы: 122,375.

МЫСАЛ

7. Табаны a-ға, биіктігі h-қа тең үшбұрыш пішінді пластина берілген. Осы пластинаға (пластинаның табаны судың бетінде орналасқан) әсер ететін судың қысымын табайық.



27-сурет

Шешуі. 27-суретте көрсетілген x тереңдікте орналасқан биіктігі шексіз аз dx-қа тең жолақты қарастырайық. Үшбұрыштардың ұқсастығынан

$$\frac{l(x)}{a} = \frac{h-x}{h}, \text{ бұдан } l(x) = \frac{a(h-x)}{h}.$$

Демек, жолақтың ауданы $dS = \dfrac{a(h-x)}{h} \cdot dx$. Ал оған әсер ететін судың қысымы $dp = x \cdot dS = \dfrac{x \cdot a(h-x)}{h} dx$.

Пластинаға әсер ететін судың қысымын табу үшін dp-ны x айнымалысы бойынша $x = 0$-ден $x = h$-қа дейін интегралдау керек:

$$p = \int_0^h \frac{x(h-x)a}{h} dx = \frac{a}{h}\int_0^h (xh - x^2)dx = \frac{a}{h}\left(\frac{hx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = \frac{a}{h}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{a}{h} \cdot \frac{h^3}{6} = \frac{ah^2}{6}.$$

Демек, пластинаға әсер ететін судың қысымы $\frac{1}{6}ah^2$ Па.

Жауабы: $\frac{1}{6}ah^2$ Па.

1. Қандай жағдайда фигуралардың ауданын және көлемін есептеу тек қана анықталған интеграл арқылы жүргізіледі?
2. Түзудің кесінділерімен ғана емес, қисық сызықтармен шектелген фигураның ауданын анықталған интегралды қолданып табу неліктен негізгі тәсілдердің бірі болып табылады?
3. Кейбір көпжақтар мен айналу денелерінің (пирамида, қиық пирамида, конус, қиық конус) көлемін есептеу формулаларының дәлелдеуін анықталған интеграл арқылы беру неге тиімді болып саналады?
4. Қозғалыс есептерін шығару үшін анықталған интеграл қалай қолданылады?

Жаттығулар

А

5.1. 1) $y = 2x + 2$, $y = 0$, $x = 2$; 2) $y = x + 2$, $y = 0$, $x = 2$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданын табыңдар. Жауабын геометрия пәнінен белгілі формуламен тексеріңдер.

5.2. 1) $y = (x - 2)(2x - 3)$, $y = 0$; 2) $y = (3x + 2)(x - 1)$, $y = 0$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданы неге тең?

5.3. Берілген сызықтармен шектелген фигураның ауданын есептеңдер:
1) $y = x^2 - 4x + 4,\ y = 0,\ x = 0$;
2) $y = x^2 + 6x + 9,\ y = 0,\ x = 0$;
3) $y = 4x^2 + 12x + 9,\ y = 0,\ x = 0$;
4) $y = 9x^2 - 6x + 1,\ y = 0,\ x = 0$.

5.4. $y = f(x)$ функциясының графигімен және координата осьтерімен шектелген фигураның ауданын табыңдар:
1) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$; 2) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

5.5. Берілген қисықтармен шектелген фигураның ауданын есептеңдер:
1) $y = 2x^2,\ y = 4x$; 2) $y = x^2,\ y = -2x$.

5.6. Берілген қисықтармен шектелген фигураны салыңдар:
1) $y = \sin x,\ y = x + 1,\ x = 0,\ x = 2$ және $\cos 2 \approx -0{,}41$;
2) $y = \cos x,\ y = 3 - x,\ x = 0,\ x = -1$ және $\sin 1 \approx 0{,}84$
ескеріп ауданын табыңдар.

5.7. 1) $y = x^2$ параболасын $x = 0$-ден $x = 2$-ге дейін абсцисса осіне қатысты айналдырғанда шыққан дененің көлемін есептеңдер.
2) $y = x^2$ параболасын ордината осіне қатысты айналдырғанда шыққан дененің $x = -2$ нүктесінен $x = 2$ нүктесіне дейінгі аралықтағы көлемін табыңдар.

5.8. Қандай да бір биіктіктен құлаған дененің жылдамдығы $v = 9{,}8t + 0{,}01t^2$ заңымен өзгереді. Дененің құлау уақыты $t = 4$ с болса, ол қандай биіктіктен құлаған?

B

5.9. Берілген функциялардың графиктерімен шектелген фигураның ауданын табыңдар:
1) $y = x^2 - 4x - 4,\ y = -x$; 2) $y = 3x^2,\ y = 2x$.

5.10. 1) $y = 4x - x^2$ параболасы және (4; 0) мен (0; 4) нүктелері арқылы өтетін түзумен шектелген;
2) $y = 3x^2$ $(x \le 0)$ параболасымен, абсцисса осімен және (–3; 0), (0; 4,5) нүктелері арқылы өтетін түзумен шектелген фигураның ауданын есептеңдер.

5.11. Берілген сызықтармен шектелген фигураның ауданын табыңдар:
1) $y = \frac{1}{8}x^3,\ y = 0{,}5x$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^3,\ \ y = -x$.

5.12. 1) $y = 4x - x^2$; 2) $y = x^2 - 6x$ параболасымен және осы параболаның төбесі мен координаталар басы арқылы өтетін түзумен шектелген фигураның ауданын есептеңдер.

5.13. Берілген функциялардың графиктерімен шектелген фигураның ауданын табыңдар:

1) $y = x^2$ және $y = 3 - 2x$;
2) $y = x^2$ және $y = 2x - x^2$;
3) $y = x^2 + 1$ және $y = -x^2 + 3$;
4) $y = 2x^2 + 1$ және $y = x + 2$, $y = 1{,}5$.

5.14. $y = \dfrac{1}{x}$ гиперболасын абсцисса осіне қатысты айналдырғанда пайда болған дененің $x = 1$ нүктесінен $x = 3$ нүктесіне дейінгі аралықтағы көлемін табыңдар.

5.15. Егер материялық нүкте $\upsilon = Rt + a\sqrt{t}$ заңы бойынша қозғалса, ол $t = 0$-ден $t = 4$-ке дейінгі уақыт аралығында қандай жол жүреді?

5.16. Ауданы: 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx$ анықталған интегралының мәніне тең фигураның кескінін салыңдар.

C

5.17. $y = x^2 - 2x + 1$ функциясының графигімен және оның туындысымен шектелген фигураның ауданын есептеңдер.

5.18. $F(x)$ функциясы $f(x) = 2x - 4$ функциясының алғашқы функциясы. Егер $F(x)$ функциясының графигі $A(0;\ 4)$ нүктесі арқылы өтсе, онда $f(x)$ және $F(x)$ функцияларының графиктерімен шектелген фигураның ауданын табыңдар.

5.19. Үшбұрыш ұзындығы a-ға тең қабырғасынан айналдырылған. Егер осы қабырғасына іргелес жатқан бұрыштар α және β-ға тең болса, онда шыққан айналу денесінің көлемін табыңдар.

5.20. $y = \left||x - 1| - 2\right|$, $y = 0$, $x = 0$ қисықтарымен шектелген қисықсызықты трапецияны абсцисса осінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемін есептеңдер.

5.21. $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3$ функциясының графигімен және Oy осі бойындағы нүкте арқылы өтетін, әрі өзара тікбұрыш жасайтын және берілген функцияның графигіне жанама екі түзумен шектелген фигураның ауданын табыңдар.

5.22. $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 1$ функциясының графигімен және осы графикке оның абсцисса осімен қиылысу нүктелері арқылы жүргізілген жанамаларымен шектелген фигураның ауданын есептеңдер.

5.23. $y = -x^2 + 4x$ функциясының графигімен және осы графикке оның абсцисса осімен қиылысу нүктелері арқылы жүргізілген жанамаларымен шектелген фигураның ауданын есептеңдер.

5.24. $y = \int\limits_{x}^{x+1} 3t^2\,dt$ функциясының графигімен және $y = 1$ түзуімен шектелген фигураның ауданын табыңдар.

5.25. Төбелері $A(-4; 0)$, $B(-2; 4)$, $C(2; 4)$, $D(4; 0)$ болатын $ABCD$ төртбұрышының ауданын $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ параболасы қандай қатынаста бөледі?

5.26. 1) Табаны 18 м, биіктігі 6 м тіктөртбұрышты шлюзге жіберілген судың қысымын есептеңдер;
2) Арықтың көлденең қимасы табандары a мен b (a — жоғарғы табаны) және биіктігі h-қа тең теңбүйірлі трапеция пішіндес. Арықты толтыратын су бөгетке қандай күшпен қысым түсіреді?

5.27. Материялық нүктенің түзу бойымен қозғалыс жылдамдығы $v(t) = \sin t \cos t$ теңдеуімен анықталады. Егер нүкте $t = \frac{\pi}{4}$ уақыт ішінде 3 м жол жүрсе, оның қозғалыс теңдеуі қандай болады?

5.28. Графигі $y = 6x + 3$ түзуін жанайтын $f(x) = 2x + 4$ функциясының алғашқы функциясын табыңдар. Анықталған алғашқы функцияның графигімен және $y = 6x + 3$, $y = 0$ түзулерімен шектелген фигураның ауданын есептеңдер.

ҚАЙТАЛАУ

5.29. Берілген кесіндідегі функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $y = \frac{x}{2x^2 - 1}$, $[-4; -2]$; 2) $y = x \cdot \sqrt{3 - x}$, $[-1; 3]$.

5.30. Интегралдың геометриялық мағынасын қолданып интегралды табыңдар:

1) $\int\limits_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$;

3) $\int\limits_0^4 \sqrt{4x - x^2}\,dx$; 4) $\int\limits_1^2 \sqrt{2x - x^2}\,dx$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Алғашқы функциясы $F(x) = 2 - \cos x$ функциясы болатын функцияны табыңдар:

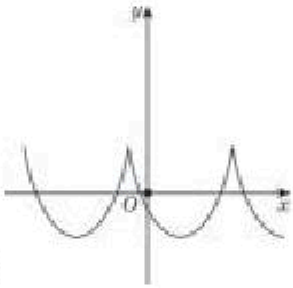
A) $2x + \sin x$; B) $\sin x$; C) $-\sin x$; D) мұндай функция жоқ.

2. $f(x) = 5x^4 - 2x$ функциясының алғашқы функциясын табыңдар:

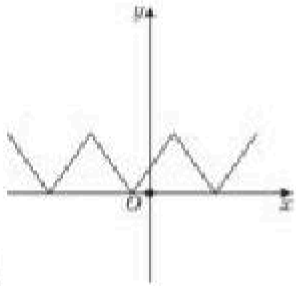
A) $F(x) = 20x^4 + 8$; B) $F(x) = x^5 + x^2$;

C) $F(x) = 20x^4 - 8$; D) $F(x) = x^5 - x^2$.

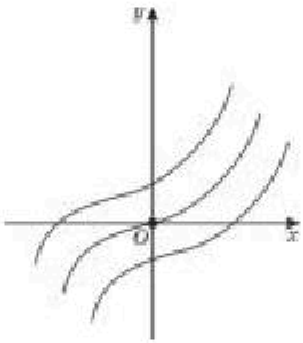
3. Алғашқы функцияның графигі қай суретте кескінделген?



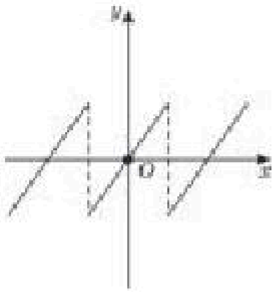
A)



B)



C)



D)

4. $F(x) = \dfrac{3}{x-2}$ функциясы $f(x) = -\dfrac{3}{(x-2)^2}$ функциясының алғашқы функциясы болмайтын аралықты табыңдар:

A) $(-\infty; 0)$; B) $(2; +\infty)$;

C) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; D) $(-\infty; -2) \cup (-2; 4)$.

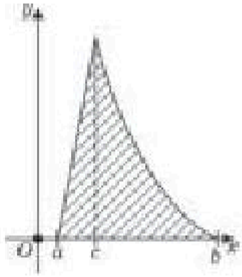
5. $A(-1;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін $y(x) = x^2 - 2x$ функциясының алғашқы функциясын табыңдар:

A) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 + \dfrac{1}{3}$; B) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - \dfrac{1}{3}$;

C) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \dfrac{1}{3}$; D) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \dfrac{4}{3}$.

6. $f(x) = 5\sin 0{,}5x$ функциясының алғашқы функциясын жазу үшін қолданылатын ереже:

A) 1-ереже; B) 2-ереже; C) 2- және 3-ереже; D) 3-ереже.



7. $\int\limits_{2}^{4} 10x\,dx$ интегралын есептеңдер:

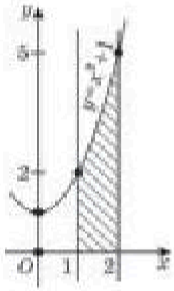
A) 0; B) 100; C) 80; D) 60.

8. Суретте кескінделген фигураның ауданын табу формуласын анықтаңдар:

A) $S = S_{\text{қ.трап}} - S_{\Delta}$; B) $S = S_{\text{қ.трап}} + S_{\Delta}$;

C) $S = 2S_{\text{қ.трап}} - S_{\Delta}$; D) $S = S_{\text{қ.трап}}$.

9. Суретте кескінделген фигураның ауданын есептеңдер:



A) $\frac{3}{10}$; B) 8; C) 10; D) $3\frac{1}{3}$.

10. $\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$ интегралын есептеңдер:

A) 2; B) 3; C) 1; D) 4.

11. $\int\limits_{1}^{b} 8dx = 8$ теңдігі орындалатындай b-ның мәнін табыңдар:

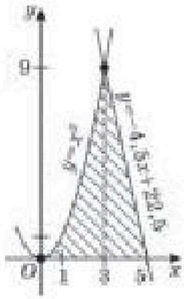
A) 4; B) 8; C) 2; D) 5.

12. $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$ қисықтарымен шектелген фигураның ауданын табыңдар:

A) $10\frac{2}{3}$; B) $\frac{3}{32}$; C) 11; D) 10.

13. Суретте кескінделген фигураның ауданын есептеңдер:

A) 18; B) 9; C) 27; D) 54.



14. $\int\limits_{0}^{4} \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}dx$ интегралын есептеңдер:

A) 8; B) 12; C) 6; D) –4.

15. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 14 \sin x\,dx$ интегралының мәнін табыңдар:

A) –14; B) 1; C) 14; D) 0.

16. $\int\limits_{0}^{6} \frac{x^4 - 1}{x + 1}dx$ интегралын есептеңдер:

A) 212; B) 264; C) 210; D) 320.

17. $\int\limits_{0}^{x} 12t^2dt = 4$ теңдеуін шешіңдер:

A) –1; B) 1; C) 2; D) –2.

18. $\int_{-2}^{x} 4dt > 0$ теңсіздігін шешіңдер:

A) $(-2; +\infty)$;
B) $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$;
C) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$;
D) $(-\infty; 0)$.

19. Алғашқы функциясы $F(x) = 7,5x^2 - 10$ болатын функцияны табыңдар:

A) $7,5x$;
B) $15x$;
C) 0;
D) $2,5x^3 - 10x$.

20. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$ сызықтарымен шектелген фигураны Ox осі бойымен айналдырғанда шыққан дененің көлемін есептеңдер:

A) 243π;
B) $5,4\pi$;
C) 27π;
D) $48,6\pi$.

Математикалық сауаттылық бойынша тест тапсырмалары

21. Әртүрлі a және b сандары c санына бөлінеді. Ақиқат емес тұжырымды көрсетіңдер:

A) $\dfrac{a - b + 1}{a + b}$ саны c санына бөлінеді;
B) $\dfrac{2a - b}{a + b}$ қысқартылатын бөлшек;
C) b саны c санына бөлінеді;
D) $3a + 2b$ саны c санына бөлінеді;
E) $b - 2c$ саны c санына бөлінеді.

22. Бір бумада A4 форматты 500 парақ бар. Фирма бір аптада 1400 парақ жұмсайды. Фирманың алты аптада алатын бумалар санының ең кіші санын табыңдар:

A) 15;
B) 14;
C) 16;
D) 17;
E) 18.

23. Үш апельсин және бір алмұрттың салмағы 10 мандариннің салмағына, алты мандарин мен бір апельсиннің салмағы бір алмұрттың салмағына тең. Салмағы бір алмұрттың салмағына тең болатын мандарин санын табыңдар:

A) 8;
B) 7;
C) 6;
D) 5;
E) 9.

24. Ойын добын 27 м биіктіктен түсіргенде, доп биіктіктің үштен бір бөлігіне көтерілді. Доп толық тоқтау үшін кеткен қашықтықты табыңдар:

A) 44;
B) 56;
C) 54;
D) 52;
E) 60.

25. Қабырғасының ұзындығы 6 см шаршыдан ұзындығы 4 см және ені 3 см қанша бірдей тіктөртбұрыш алуға болатынын табыңдар:

A) 2;
B) 4;
C) 6;
D) 3;
E) 5.

ТАРИХИ МАҒЛҰМАТТАР

Интеграл ұғымы кез келген жазық фигураның ауданын, сондай-ақ кез келген дене бетінің ауданын және көлемін есептеу қажеттілігінен пайда болды.

Мәселен, Ежелгі Грекия мен Римде математик ғалымдар кез келген жазық фигураның квадратурасын (тең шамалы квадрат салу тәсілімен ауданды табу) және кез келген дененің кубатурасын (тең шамалы куб салу тәсілімен көлемді есептеу) табуға есептер шығарумен айналысқан. Олар өз есептеулерінде Евдокс Книдский (шамамен б.з.д. 408—358 жж.) ұсынған түгесу (аяқтау, тауысу) әдісін қолданған. Мысалы, бұл әдісті қолдану арқылы Евдокс екі дөңгелектің аудандарының қатынасы олардың диаметрлері квадраттарының қатынасына, ал табанындағы шеңбері мен биіктігі цилиндрдің табанындағы шеңбері мен биіктігіне сәйкесінше тең болатын конустың көлемі цилиндр көлемінің $\frac{1}{3}$ бөлігіне тең екенін дәлелдеген.

Архимед өзінің "Парабола квадратурасы" шығармасында Евдокс әдісін жетілдіріп, дөңгелектің ауданын есептеу формуласын қорытып шығарды. Архимед әдісінің негізгі мағынасы:

1) дөңгелектің ауданы оған сырттай сызылған кез келген дұрыс көпбұрыштың ауданынан кіші, бірақ оған іштей сызылған кез келген дұрыс көпбұрыштың ауданынан үлкен екені дәлелденеді;

2) іштей және сырттай сызылған дұрыс көпбұрыштардың қабырғаларының санын екі еседен шексіз арттырғанда, олардың аудандарының айырымы өте аз шама болатыны (нөлге жақындайтыны) дәлелденеді;

3) сырттай (іштей) сызылған дұрыс көпбұрыштың қабырғаларының санын екі еседен шексіз арттырғанда, оның ауданының ұмтылатын шамасы дөңгелек ауданының шамасы ретінде алынады.

$\int$ интеграл белгісін Г. Лейбниц (1675 ж.) енгізген. Бұл белгі "summa" сөзіндегі S латын әрпіне ұқсас етіп алынған. Ал *интеграл* ұғымын алғаш рет Я. Бернулли (1690 ж.) қолданды. Бұл аудармасы *алғашқы күйі, қалпына келтіру* ұғымын білдіретін "integro" деген латын сөзінен шыққан. Мұның *тұтас* деген мағына беретін "integer" сөзінен шығуы да мүмкін.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Варианта, вариациялық қатар, таралу қатары, полигон, жиілік полигоны.

II ТАРАУ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

§6. БАС ЖИЫНТЫҚ ЖӘНЕ ТАҢДАМА

Математикалық статистиканың негізгі терминдерімен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Таңдама, бас жиынтық, статистикалық қатар, жиілік, гистограмма

Нақты өлшеулерді немесе эксперименттерді жүргізу кезінде үлкен көлемді ақпараттар алынады. Мысалы, фирма қызметкерлерінің туған күні туралы мәліметтер, нақты қаладағы немесе аудандағы ҰБТ балының нәтижелері, Қазақстан банктеріндегі халықтың салым мөлшері, ҚР нақты облыстарынан әскери қызметке шақырылушылардың дене салмағы және саны, күн бойы супермаркетте сатып алынған тауарлар бағасының тізімі және т. б.

Статистикада ақпаратты жинау және сақтау, әртүрлі болжамдарды әзірлеу, олардың шынайылығын бағалау және т. б. есептеулер жүргізіледі. Бірақ математикалық статистиканың негізгі есептерінің бірі алынған ақпаратты тиісті түрде өңдеу, сонда қалған есептердің нәтижесіне қол жеткізуге болады.

Бастапқы алынған ақпаратты өңдеу тәртібі шамамен келесідей:

— өлшеу (тәжірибе) деректері ретке келтіріледі және топтастырылады;

— топтастырудан кейін деректерді өлшеу кестелері құрастырылады;

— бөлу кестесі бойынша деректерді бөлу графигі құрылады;

— алынған өлшемдердің негізгі сандық сипаттамаларының шағын саны жиналған осы өлшемнің төлқұжаты құрастырылады.

Практикада бұл қадамдарды іске асыру деректерді өңдеу мен талдаудың компьютерлік бағдарламаларының бірі арқылы жүргізіледі. Мысалы, “MatLab”, “Microsoft Excel”, “Statistica”.

Зерттеуге жататын барлық нысандардың немесе бір нысанға бірдей жағдайларда жүргізілетін барлық бақылаулардың мүмкін болатын нәтижелерінің жиынтығы ***бас жиынтық*** *деп аталады.*

Бас жиынтықтан кездейсоқ түрде іріктелген нысандар жиынтығы немесе нысанды бақылау нәтижелерінің жиынтығы ***таңдама жиынтық*** *немесе* ***таңдау*** *деп аталады.*

Таңдамадағы нысандар немесе бақылаулар саны ***таңдама көлемі*** *деп аталады.*

Таңдау мәндері деп кездейсоқ X шамасының бақыланатын мәндерін айтады.

Нақты, сенімді қорытындылар алу үшін таңдама көлемі бойынша жеткілікті болуы тиіс. Үлкен таңдама — реттелмеген сандар жиыны. Зерттеу үшін таңдаманы көрнекі реттелген түрге келтіреді.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Вариациялық қатар екі элементтен: жиілік пен вариантадан тұрады.

Таралу қатарында қабылданатын белгінің жекеленген мәнін *варианта* деп атайды.

Жекеленген вариантаның немесе вариациялық қатардың әр тобының саны *жиілік* деп аталады.

x_1, x_2, x_3, ... , x_k қатары берілсін. Мұнда x_1 вариантасы n_1 рет, x_2 вариантасы n_2 рет, x_3 вариантасы n_3 рет кездеседі және т.с.с.

Сонда $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ теңдігі варианта көлемі болып табылады.

n_i мәні x_i вариантасының жиілігі, ал $\frac{n_1}{n}$ — салыстырмалы жиіліктің саны.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Төмендегі кесте жиіліктің статистикалық қатарын береді:

6-кесте

Варианта	x_1	x_2	x_3	...	x_k
Варианта жиілігі	n_1	n_2	n_3	...	n_k

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Жиілік полигоны (көпбұрыш) координаталары топтастыру интервалдарының орташа мәндеріне және осы интервалдардың жиілігіне сәйкес келетін нүктелерді қосатын қисықты береді.

Полигон (polygon) сөзі грек тілінен аударғанда көпбұрышты білдіреді.

Салыстырмалы жиілігі берілген вариантаның кестесін құрастырайық:

7-кесте

x_i вариантасы	x_1	x_2	x_3	....	x_k
$\frac{n_i}{n}$ салыстырмалы жиілігі	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Берілген кесте *салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатары* деп аталады.

Координаталары топтастыру интервалдарының орташа мәндері мен осы интервалдардың салыстырмалы жиілігіне сәйкес нүктелерді қосатын сынық *салыстырмалы жиіліктің полигоны* деп аталады.

Яғни салыстырмалы жиіліктің полигонын координаталық жазықтықта салу үшін $(x_1; \frac{n_1}{n})$, $(x_2; \frac{n_2}{n})$, ... , $(x_k; \frac{n_k}{n})$ нүктелерін белгілеп, кесінділермен қосады.

МЫСАЛ 1. 8, 9, 4, 8, 6, 8, 8, 9, 4, 4, 4, 9, 6, 9, 9, 4, 8, 8, 8, 9 сандар қатары берілген. Таңдама көлемін, таңдама варианталарын табыңдар, жиіліктің және салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар, жиілік полигонын салыңдар.

Шешуі. Есептің шарты бойынша таңдама көлем 20-ға тең. Берілген қатарда 4, 6, 8, 9 сандары кездеседі. Олар таңдама варианталары болып табылады.

Жиіліктің вариациялық қатарын құрастырайық:

8-*кесте*

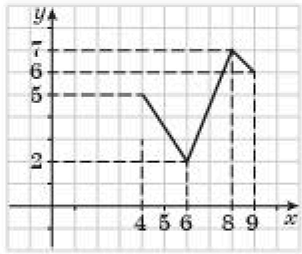
x_i вариантасы	4	6	8	9
n_i варианта жиілігі	5	2	7	6

Салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырайық:

9-*кесте*

x_i вариантасы	4	6	8	9
$\frac{n_i}{n}$	0,25	0,1	0,35	0,3

Жиілік полигонын саламыз (28-сурет).



28-сурет

1. Математикалық статистиканың негізгі терминдерін атаңдар.
2. Бас жиынтықтың таңдамадан қандай айырмашылығы бар?
3. Жиілік полигоны, салыстырмалы жиілік полигоны нені көрсетеді?
4. Таңдама үшін абсолюттік және салыстырмалы жиілік кестелері қалай құрастырылады?

Жаттығулар

А

6.1. 1, 3, 4, 2, 1, 3, 5, 3, 4, 4, 5, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 3, 5, 2, 1 сандар қатары берілген. Таңдаманың көлемін, таңдаманың варианталарын табыңдар, жиіліктің вариациялық қатарын және салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар.

6.2. 5, 9, 4, 8, 6, 8, 5, 9, 4, 4, 5, 4, 9, 8, 6, 6, 8, 9, 4, 8, 5, 8, 5, 8, 9 сандар қатары берілген. Таңдаманың көлемін, таңдаманың варианталарын табыңдар, жиіліктің вариациялық қатарын және салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатары мен салыстырмалы жиіліктің пайызбен берілген қатарын құрастырыңдар.

6.3. 10-сынып оқушыларының I тоқсан бойынша жиынтық бағалауының нәтижелері кестеде көрсетілген (9.1-кесте).

9.1-*кесте*

4	3	2	3	4	3	3	5	3	4
3	4	3	4	3	3	5	4	3	3
4	2	4	4	4	3	4	4	4	5
3	3	4	3	3	4	3	5	2	4
3	4	3	3	4	4	4	4	5	4

1) Нәтижелердің вариациялық қатарын құрастырыңдар және таңдама көлемін табыңдар;
2) салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар.

B

6.4. 10-сынып оқушыларына алгебра және анализ бастамаларынан I тоқсанда қандай баға күтетінін көрсету ұсынылды. Нәтижелер кестеде көрсетілген (9.2-кесте).

9.2-*кесте*

4	3	3	3	4	3	3	5	3	4
3	4	3	4	3	4	5	4	5	3
4	4	4	4	4	3	4	4	4	5
3	3	4	3	3	4	3	5	3	4
3	4	3	5	4	3	4	4	5	4

1) Нәтижелердің вариациялық қатарын құрастырыңдар және таңдаманың көлемін табыңдар;

2) салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар;
3) салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын пайыз түрінде құрастырыңдар.

6.5. Жиіліктің вариациялық қатары бойынша таңдама көлемін табыңдар және жиілік полигонын салыңдар (9.3-9.4-кестелер).

9.3-*кесте*

1)

x_i	2	6	10	14
n_i	5	8	6	6

9.4-*кесте*

2)

x_i	4	6	8	10	12
n_i	5	8	8	5	4

C

6.6. Кестеде балалардың бойларының ұзындықтары (см) берілген (9.5-кесте).

9.5-кесте

55	56	57	56	54
57	59	56	58	58
56	58	59	59	57
55	55	54	57	59
58	57	54	60	56

Кестедегі деректер бойынша:
1) нәтижелердің вариациялық қатарын құрастырыңдар және таңдаманың көлемін табыңдар;
2) салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар;
3) салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын пайыз түрінде құрастырыңдар;
4) салыстырмалы жиіліктің полигонын пайыз түрінде құрастырыңдар.

6.7. Қожалық шаруашылығында картоп жинау барысында кейбір түйнектердің салмағы өлшенді. Түйнектердің массаларының нәтижесі (грамм өлшемімен) кестеде көрсетілген (9.6-кесте).

9.6-кесте

60	59	61	56	62
57	59	58	58	58
56	58	59	59	57
61	61	59	57	59
58	56	62	60	60

Кестедегі деректер бойынша:
1) нәтижелердің вариациялық қатарын құрастырыңдар және таңдама көлемін табыңдар;
2) салыстырмалы жиіліктің нұсқалық қатарын құрастырыңдар;
3) салыстырмалы жиіліктің нұсқалық қатарын пайыз түрінде құрастырыңдар;
4) салыстырмалы жиіліктің полигонын пайыз түрінде құрастырыңдар.

ҚАЙТАЛАУ

6.8. Анықталмаған интегралды табыңдар:

1) $\int(1+\sqrt{x+1})dx$; 2) $\int\left(x+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx$;

3) $\int(\sin 2x + x^{-3})dx$; 4) $\int\left(2-\frac{1}{\cos^2 2x}\right)dx$.

6.9. Функцияны жұптылыққа зерттеңдер:

1) $f(x) = x \cdot \arcsin 2x$; 2) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} 2x$;

3) $f(x) = x \cdot \arccos x$; 4) $f(x) = x^2 \cdot \cos 2x + \sqrt{|x|}$.

6.10. Анықталған интегралдың мәнін табыңдар:

1) $\int\limits_1^2 (3x^2 - 2x + 3\sqrt{2x})dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (18x^2 - \sin 2x)dx$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Варианта, вариациялық қатар, таралу қатары, полигон, жиілік полигоны, таңдама, бас жиынтық, статистикалық қатар, жиілік, гистограмма.

§7. ДИСКРЕТТІ ЖӘНЕ ИНТЕРВАЛДЫ ВАРИАЦИЯЛЫҚ ҚАТАРЛАР

Дискретті вариациялық қатар ұғымымен танысасыңдар, дискретті вариациялық қатарды құрастыру үшін деректерді талдауды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Қатар, топ, дискретті вариациялық қатар, интервалдық вариациялық қатар

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Әрбір белгісі, белгілер топтамасы немесе белгілер класы бойынша топтағы бірліктердің саны немесе жалпы қорытындыдағы осы санның меншікті салмағы белгілі болатын ерекше түрдегі топтамаларды *үлестірім қатары* деп атайды.

Үлестірім қатары сандық немесе төлсипаттық белгі бойынша құрастырылады.

Сандық белгісі бойынша құрастырылған үлестірім қатары *вариациялық қатар* деп аталады.

Вариациялық қатарлар дискретті және интервалдық болып келеді. Үлестірім қатары үздіксіз өзгеріп отыратын белгі бойынша (белгі қандай да бір интервал шеңберінде кез келген мәндерді қабылдай алатын кезде) және дискретті өзгеретін белгі бойынша (қатаң анықталған бүтін мәндерді қабылдайды) салынуы мүмкін.

Дискретті вариациялық қатардың үлестірілуі деп сәйкес келетін жиіліктері немесе бөлінділері бойынша варианталардың бөліну жиынтығын айтады. Дискретті қатардың варианталары — белгінің дискретті үзілісті өзгеретін мәндері, әдетте ол есептеу нәтижесі.

Дискретті вариациялық қатарларды әдетте зерттелетін белгінің мәндері бір-бірінен кем дегенде қандай да бір шекті шамаға ерекшеленген жағдайда ғана құрады.

Дискретті қатарда белгінің нүктелік мәндері беріледі.

МЫСАЛ 1. 20 кәсіпорынның тарифтік разряды туралы деректер берілген. 2, 3, 2, 4, 4, 5, 5, 4, 6, 3, 1, 4, 4, 5, 5, 6, 4, 3, 2, 3 тарифтік разрядпен жұмысшыларды бөлудің дискретті вариациялық қатарын құрастырыңдар.

Шешуі. Алдымен кестені құрастырамыз. Үлестірім қатары екі элементтен болғандықтан, кесте екі жолдан тұрады.

Бірінші жол — варианта, мысал бойынша — жұмысшылардың тарифтік разряды; екінші жол — жиілік, яғни варианталардың кездесу жиілігі, мысалда белгілі бір разряд бойынша жұмысшылар саны.

Тапсырманың шартын ескере отырып, кем дегенде бір рет кездесетін мәндерді анықтаймыз. Ол келесі сандар: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Содан кейін вариантаның әрбір мәнінің қанша рет кездесетінін санаймыз және келесі кестені құрастырамыз:

10-*кесте*

Тарифтік разряд (x_i)	1	2	3	4	5	6
Жұмысшылар саны (n_i)	1	3	4	6	4	2

Нәтижесінде тарифтік разряд бойынша жұмысшыларды бөлудің дискретті вариациялық қатары алынды.

Сонымен, өлшеу нәтижесінде алынған деректердің өсу реті бойынша қатары берілген.

Барлық деректердің n саны өлшеу деректері қатарының көлемі болып табылады.

$x_n - x_1$ айырмасы *өлшемнің құлашы* немесе *ең үлкен және ең кіші вариацияның айырмасы* деп аталады. Деректер қатарының модасы — өлшемдер қатарында жиі кездесетін варианта. Мода еселігі ең үлкен болатын вариантаға тең.

Тақ деректер $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k} < x_{2k+1}$ *сан қатарының медианасы* деп $m = x_{k+1}$ санын, ал жұп деректер $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k-1} < x_{2k}$ *сан қатарының медианасы* деп $m = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ санын атайды.

Өлшеу деректерінің жиі кездесетін сипаттамасы олардың орташа арифметикалық мәні немесе орташа мәні M болып табылады.

Орташа мәнді табу үшін:

1) барлық өлшем деректері қосындысының мәнін табу;

2) алынған қосындының мәнін деректер санына бөлу (таңдау көлемі), яғни $M = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ қажет.

Орташа мән, мода және медиана деректер қатарының сандық сипаттамаларының бір түріне жатады. Кейде олар *орталық үрдістің өлшемі* деп аталады. Осы сандардың әрқайсысы деректер қатарының орта мәнін сипаттайды.

1-мысалдағы мәндердің модасын, медианасын және орташа мәнін табыңдар.

Интервалды вариациялық қатар ұғымымен танысасыңдар, интервалды вариациялық қатарды құрастыру үшін деректерді талдауды үйренесіңдер.

Анықтама. ***Интервалды вариациялық қатар*** *деп кездейсоқ шаманың мәндерін сәйкес жиіліктерімен немесе олардың әрқайсысына шама мәндерінің түсу жиіліктерімен түрленудің реттелген интервалдарының жиынтығын айтады.*

Мәні өлшеу немесе өлшеу жолымен тіркелетін интервалдық қатарлар үздіксіз өзгеретін белгінің үлестірімін талдауға бағытталған. Мұндай қатардың вариантасы — топтастыру.

Егер дискретті вариациялық қатарда жиілік сипаттама қатардың вариантасына тікелей қатысты болса, онда интервалды вариация тобына жатады.

Интервалды құрудың бірнеше жолы бар:

1) деректерді логикалық талдау негізінде қосымша есептеулерсіз көзбен шолу тәсілі; егер шарт бойынша тең аралықтарды салу талап етілсе, онда формула бойынша есептеу;

2) қосымша есептеулер әдісі. Интервал шамасын есептеу үшін келесі формула қолданылады:

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n}, \qquad (1)$$

мұндағы i — шама немесе интервал ұзындығы; $x_{\max}$ — ең үлкен шама; $x_{\min}$ — ең кіші шама; n — есептің шарты бойынша қажетті топтар саны.

Бірінші интервалды салуды ең кіші мәнінен бастайды, оған интервалдың шамасы қосылады және бірінші интервалдың жоғарғы шегарасы алынады. Содан кейін бірінші интервалдың жоғарғы шегарасы екінші аралықтың төменгі шегіне айналады, оған интервалдың шамасы қосылып екінші интервал алынады. Одан соң шарт бойынша қанша интервалдар салу керек болса, сонша рет интервалдар анықталады.

МЫСАЛ

2. Банкте 10 салымшының салым мөлшері туралы деректер берілген — 300, 380, 480, 350, 450, 560, 250, 400, 500, 200 (мың тг). Салым көлемін тең аралықты 3 топқа бөліп, салымшыларды бөлудің интервалды вариациялық қатарын құрыңдар. Әрбір топ бойынша салымдардың жалпы мөлшерін есептеңдер.

Шешуі. Алдымен кестені құрастырамыз. Үлестірім қатарында екі элемент болғандықтан, кесте екі жолдан тұрады.

Бірінші жол — варианта, мысалда банктегі салымның мөлшері; екінші жол — жиілік, яғни интервалға түсетін тиісті салымы бар салымшылар саны.

(1) формуласын пайдалана отырып интервал шамасын табамыз. Есеп шарты бойынша ең үлкен мәні 560 мың тг, ең кіші мәні 200 мың тг, топтар саны — 3. Сонда $i = \frac{560000 - 200000}{3} = 120\,000$.

11.1-*кесте*

Банк салымының мөлшері (x)	200 000—320 000	320 000—440 000	440 000—560 000
Салымшылар саны (n)	3	3	4

Енді әрбір интервал бойынша және жалпы алғандағы салымдардың барлық көлемінің есебін жүргіземіз. Бұл үшін әрбір интервал бойынша салым мөлшерін қосамыз және салымдардың жиынтық мәнін аламыз:

- бірінші интервал бойынша: 200 000 + 300 000 + 250 000 = 750 000;
- екінші интервал бойынша: 350 000 + 380 000 + 400 000 = 1 130 000;
- үшінші интервал бойынша: 450 000 + 480 000 + 500 000 + 560 000 = 1 990 000.

11.2-*кесте*

Банк салымының мөлшері (x)	200 000—320 000	320 000—440 000	440 000—560 000	Барлығы
Салымшылар саны (n)	3	3	4	10
Салымның жалпы көлемі	750 000	1 130 000	1 990 000	3 870 000

Берілген шартқа сәйкес вариациялық қатардың деректерін талдауды үйренесіңдер.

Үлестіру қатарларын олардың графикалық бейнесінің көмегімен талдау ыңғайлы.

Дискретті қатар графикте сынық сызық — таралу полигоны түрінде бейнеленеді. Оны тікбұрышты координата жүйесінде салу үшін абсцисса осі бойынша координаталары бірдей масштабта түрленетін белгінің сараланған (реттелген) мәндері қойылады, ал ординат осі бойынша жиіліктерді көрсетуге арналған шкала салынады.

1-мысалға дискретті вариациялық қатарды өздерің құрастырыңдар.

Интервалды қатарлар гистограмма (яғни диаграмма бағандары) түрінде бейнеленеді. Гистограмманы салған кезде абсцисса осіне интервалдардың шамасы жазылады, ал жиіліктер тиісті аралықтарда салынған тіктөртбұрыштармен бейнеленеді. Интервалдар тең болған жағдайда бағандардың биіктігі жиілікке пропорционал болуы керек.

2-мысалға интервалды вариациялық қатарды өздерің құрастырыңдар.

1. Дискретті вариациялық қатардан қандай деректер алуға болады?
2. Интервалды қатардан қандай деректер алуға болады?

Жаттығулар

A

7.1. Мектеп мұғалімдерінің санаты туралы деректер берілген: 2, 3, 2, 0, 1, 0, 1, 2, 3, 0, 2, 3, 2, 10, 0, 3, 2, 3, 0, 1, 2, 2, 1, 2. Мұғалімдердің санаты бойынша бөлінуінің дискретті вариациялық қатарын құрастырыңдар (0 — санаты жоқ, 1 — бірінші санат, 2 — екінші санат, 3 — жоғары санат).

7.2. Мектептің 50 оқушысының әрқайсысы тақтаға кез келген цифрды жазды. Нәтижесінде келесі деректер алынды (12.1-кесте):

12.1-*кесте*

2	1	3	5	3	5	3	8	7	1
5	7	1	5	3	8	0	4	3	7
9	3	6	9	1	9	6	2	1	3
8	9	0	7	5	1	3	1	3	9
2	6	5	3	9	2	5	1	7	5

Берілген сандардың қайталануының үлестірім кестесін құрастырыңдар және таңдама көлемі мен модасын табыңдар.

7.3. 7.2-жаттығудағы өлшемдер деректерінің орта мәнін табыңдар.

B

7.4. 7.3-жаттығудағы деректердің полигонын салыңдар.

7.5. 9-сынып оқушыларының массалары (кг-мен) — 30, 38, 48, 35, 44, 46, 30, 50, 40, 54, 36, 40, 42, 52, 39. Массалары бойынша оқушыларды интервалдары бірдей 3 топқа бөліп, интервалды вариациялық қатарын салыңдар. Әр топтың жалпы массасын есептеңдер.

C

7.6. 7.5-жаттығудағы деректер бойынша:

1) салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар;

2) салыстырмалы жиіліктің пайызбен көрсетілген вариациялық қатарын құрастырыңдар;

3) сандардың еселігі бойынша полигонын (таралу көпбұрышын) салыңдар.

7.7. Арнайы дүкенде спорттық аяққиімнің 50 түрі сатылады. Олар бағасына қарай 12.2-кестеде берілген.

12.2-*кесте*

Баға (мың тг)	[2 – 3)	[3 – 6)	[6 – 9)	[9 – 12)	[12 – 15)	[15 – 18]
Түрлерінің саны	3	8	19	(*)	11	2

1) Кестеден (*) табыңдар;

2) салыстырмалы жиіліктің пайызбен көрсетілген вариациялық қатарын құрастырыңдар.

ҚАЙТАЛАУ

7.8. Функцияның бірсарындылық аралығын табыңдар:

1) $y = 2 + 2x^2 - x^4$; 2) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$; 3) $y = \frac{x}{4} - \frac{4}{x}$.

7.9. Функция графигінің асимптоталарын табыңдар:

1) $y = x^2 - x^4$; 2) $y = \frac{2x^3}{1 - x^2}$;

3) $y = \frac{5}{x} - \frac{x}{5}$; 4) $y = \frac{1}{x} - \frac{x}{4}$.

7.10. 1) Ox осімен және $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ болғанда $y = \sin x$ синусоидасымен шектелген фигураның ауданын есептеңдер.

2) Фигураны Ox осі арқылы айналдырғанда шығатын және $y = x^2$ пен $y = 2x$ графиктерімен шектелген дененің көлемін есептеңдер.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Варианта, вариациялық қатар, таралу қатары, полигон, жиілік полигоны, таңдама, бас жиынтық, статистикалық қатар, жиілік, гистограмма, дискреттік вариациялық қатар, интервалдық вариациялық қатар.

§8. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАНЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫН ТАҢДАМАЛАР БОЙЫНША БАҒАЛАУ

Таңдама бойынша кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамаларын бағалауды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Статистика, орташа мән, дисперсия, орташа ауытқу

Кейде кездейсоқ шаманы (бас жиынтықты) зерттеу кезінде таңдамалы деректер негізінде үлестірудің кейбір сандық (нүктелік) сипаттамаларын бағалауды есептеу жеткілікті. Сандық сипаттамалар таңдалған деректер негізінде теориялық үлестіру параметрлерін анықтау кезінде де есептеледі.

Нүктелік баға деп бір санмен ұсынылған мүмкін бағаны айтады. Нүктелік бағалар бас жиынтықтың сәйкес параметрінің шамасы туралы жуық түсінік береді.

Таңдау мәліметтері бойынша кездейсоқ шаманың сандық сипаттамаларын бағалауды қарастырайық.

Салыстырмалы жиіліктің вариантасы көрсетілген кесте берілсін, мұндағы $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ (13-кесте).

13-кесте

x_i вариантасы	x_1	x_2	x_3	...	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Таңдамалы орта мәнмен бағаланатын математикалық күтім келесі формуламен есептеледі:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(x_1n_1 + x_2n_2 + \ldots + x_kn_k). \qquad (1)$$

$\bar{X}$ орташа мәнінің айналасындағы x_1, x_2, x_3, ..., x_k сандарының шашырауын сипаттайтын шама *дисперсия* деп аталады және $\bar{D}$ деп белгіленеді.

Таңдама дисперсиясын есептеу формуласы:

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \bar{X})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{X})^2 \cdot n_2 + \ldots + (x_k - \bar{X})^2 \cdot n_k\right]. \qquad (2)$$

Таңдаманың көлемі азайған сайын қателіктер пайда болады. Сондықтан $n < 30$ болғанда түзетілген таңдама дисперсиясы табылады:

$$\bar{\bar{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \bar{D} \qquad (3)$$

формуласымен есептеледі. (2) және (3) формулаларын ескере отырып, таңдаманың орташа квадраттық ауытқуы сәйкесінше

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{D}} \qquad (4)$$

және

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sqrt{\bar{\bar{D}}} \qquad (5)$$

формулаларымен есептеледі.

Әдетте, таңдама дисперсиясы:

$$\bar{D} = \overline{X^2} - \bar{X}^2, \qquad (6)$$

формуласымен есептеледі, мұндағы $\overline{X^2} = \frac{1}{n}(x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \ldots + x_k^2 n_k)$.

Дисперсияны және орташа квадраттық ауытқуды есептеу өте қиын. Сондықтан оларды есептеу үшін қандай да бір компьютер бағдарламасын (мысалы, Microsoft Office Excel) қолданған дұрыс. Егер есептеулер тікелей жүргізілсе, онда қателерді бақылау үшін нәтижелерді кесте түрінде көрсету керек.

Үздіксіз кездейсоқ шамалар үшін салыстырмалы жиілік вариантасының интервалдық кестесі берілсін (14-кесте):

14-*кесте*

Интервалдар	$[x_0;\ x_1)$	$[x_1;\ x_2)$	$[x_2;\ x_3)$	...	$[x_{k-1};\ x_k]$
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Онда $x_1^* = \frac{x_0 + x_1}{2}$, $x_2^* = \frac{x_1 + x_2}{2}$, ..., $x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ ескерсек, таңдаманың салыстырмалы жиілігінің кестесін аламыз (15-кесте):

15-*кесте*

x_i^*	x_1^*	x_2^*	x_3^*	...	x_k^*
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

МЫСАЛ

1. Интервалды салыстырмалы жиіліктің кестесін қолдану арқылы таңдама дисперсиясын және таңдаманың орташа квадраттық ауытқуын табайық (16-кесте).

16-*кесте*

Интервалдар	[1;4)	[4;8)	[8;12)	[12;16]
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,3	0,3	0,2

Шешуі.

Таңдаманың салыстырмалы жиілігінің кестесін құрастырайық. Ол үшін интервалдардың ортасын табамыз:

$x_1^* = (1+4) : 2 = 2,5$; $x_2^* = (4+8) : 2 = 6$; $x_3^* = (8+12) : 2 = 10$; $x_4^* = (12+16) : 2 = 14$.

Сонда келесі кестені аламыз (17-кесте):

17-*кесте*

x_i^*	2,5	6	10	14
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,3	0,3	0,2

Енді төмендегі шамаларды есептейміз:

$\overline{X} = 2,5 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,3 + 14 \cdot 0,2 = 8,1;$

$\overline{X^2} = \frac{1}{10} \cdot (2,5^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 3 + 10^2 \cdot 3 + 14^2 \cdot 2) = 81,25;$

$\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 81,25 - 8,1^2 = 81,25 - 65,61 = 15,64.$

$n = 10$ және ол 30-дан кем, сондықтан түзетілген таңдама дисперсиясын табайық:

$\overline{\overline{D}} = \frac{10}{9} \cdot 15,64 \approx 17,3778.$

Сәйкесінше таңдаманың орташа квадраттық ауытқуын есептейміз:

$\overline{\overline{\sigma}} = \sqrt{\overline{\overline{D}}} \approx \sqrt{17,3778} \approx 4,1687.$

Жауабы: $\approx 17,3778$; $\approx 4,1687$.

1. Таңдама дисперсиясы мен түзетілген таңдама дисперсиясының ұқсастығы мен айырмашылығы қандай?
2. Орташа квадраттық ауытқуды есептеу формуласын таңдау неден тәуелді?
3. Таңдама дисперсиясы мен орташа квадраттық ауытқудың формуласын жазыңдар.

Жаттығулар

А

8.1—8.3-жаттығуларда бірдей өлшемдердің нәтижелері қарастырылады (17.1-кесте). Тәуелсіз бақылау нәтижелері бойынша бас жиынтық мәндері алынды.

17.1-*кесте*

9	13	10	10	12	8	11	14
11	12	11	8	13	11	14	13
12	11	10	10	9	9	10	12
9	13	14	11	11	12	11	11
12	13	9	13	8	12	8	11

8.1. 1) Бақылау нәтижесінің вариациялық қатарын құрастырыңдар және таңдама көлемін табыңдар;
2) салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар;
3) салыстырмалы жиіліктің пайыздық вариациялық қатарын құрастырыңдар.

8.2. 1) Моданы, медиананы, математикалық күтімді табыңдар.
2) Салыстырмалы жиіліктің полигонын пайызбен көрсетіңдер.

8.3. Дисперсияны және орташа квадраттық ауытқуды табыңдар.

В

8.4. "Математикалық статистика элементтері" тақырыбы бойынша сабақтан кейін тақтада "орташа мәні 12-ге тең" деген жазу және келесі кесте қалды (17.2-кесте).

17.2-*кесте*

Варианта	5	8	18	x
Еселік	15	11	19	5

1) x санын табыңдар;
2) үлестірімнің құлашын, модасын және медианасын есептеңдер;
3) үлестірімнің салыстырмалы жиілігінің вариациялық қатарын құрастырыңдар;
4) үлестірімнің дисперсиясын табыңдар.

8.5. “Математикалық статистика элементтері” тақырыбы бойынша сабақтан кейін тақтада “орташа мәні 9-ға тең” деген жазу және келесі кесте қалды (17.3-кесте).

17.3-*кесте*

Варианта	4	8	12
Еселік	5	2	x

1) x санын табыңдар;
2) үлестірімнің құлашын, модасын және медианасын есептеңдер;
3) үлестірімнің салыстырмалы жиілігінің вариациялық қатарын құрастырыңдар;
4) үлестірімнің дисперсиясын табыңдар.

C

8.6. Варианталардың интервалды салыстырмалы кестесін қолданып, таңдама дисперсиясын және таңдаманың орташа квадраттық ауытқуын табыңдар (17.4-кесте):

17.4-*кесте*

Интервалдар	[0;6)	[6;12)	[12;18)	[18;24]
n_i	4	6	6	4
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,3	0,3	0,2

8.7. Кестеде 25 фирманың активтері туралы деректер келтірілген (млрд тг) (17.5-кесте):

17.5-*кесте*

54,2	55,2	64,7	90,0	85,3
74,0	85,4	75,3	68,4	78,4
82,3	40,0	64,9	48,8	68,9
58,4	65,2	54,6	80,0	45,3
64,0	75,8	77,4	63,2	75,2

Фирманың активтерін тең интервалды 5 топқа бөліп, актив шамалары бойынша интервалды вариациялық қатарын құрастырыңдар.
1) Салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын жазыңдар;
2) вариантаның интервалды салыстырмалы жиілігінің кестесін қолданып, таңдама дисперсиясын және таңдаманың орташа квадраттық ауытқуын табыңдар.

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИК ЖАЙЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

8.8. Қазіргі математикалық статистиканың негізін қалаушылардың бірі ағылшын математигі Карл Пирсон. Әртүрлі статистикалық деректер арасындағы корреляцияның (тәуелділіктің) сандық бағалауының дамуы осы ғалымның есімімен байланысты. Математикалық статистиканың бөлімдері әртүрлі. Олардың ішінде сипаттау статистикасын, бағалау теориясын, гипотезаларды (болжам) тексеру теориясын, біріздi статистикалық анализді бөліп көрсетуге болады.

Карл Пирсон
(1857—1936)

ҚАЙТАЛАУ

8.9. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\frac{97^3+23^3}{120}+97\cdot23$;
2) $\frac{83^3+27^3}{110}-83\cdot27$;
3) $\frac{71^2-51^2}{122}+21$;
4) $\frac{85^2-44^2}{41}+\frac{136^2-128^2}{264}$.

8.10. Екі ойын сүйегі лақтырылды. Түскен ұпайлардың көбейтінділерінің мәндері: 1) 4; 2) 5. Салыстырмалы жиілікті табыңдар.

8.11. Теңдеудің түбірін табыңдар:

1) $x+4\sqrt{x}=12$;
2) $x-13\sqrt{x}=-42$;
3) $x-2+3\sqrt{x-2}=28$;
4) $x-3=2\sqrt{x+4}+1$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. X кездейсоқ шаманың үлестірім қатары берілген.

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	?	0,15	?	0,15	?

Белгісіз салыстырмалы жиілік 2 : 3 : 2 сандарына пропорционал. Онда салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарының толтырылған кестесін көрсетіңдер:

A)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,3	0,15	0,2

B)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,25	0,15	0,2

C)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,15	0,15	0,25	0,15	0,25

D)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,1	0,15	0,3	0,15	0,2

E)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,2	0,15	0,3

2. Салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатары бойынша орташа мәнін табыңдар:

X	2	4	5	7	8
$\frac{n_i}{n}$	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

A) 5,2; B) 4,95; C) 5,1; D) 5,3; E) 5,15.

3. Салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатары бойынша дисперсияны табыңдар:

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

A) 5,3; B) 4,9; C) 5,1; D) 4,6; E) 4,8.

4. 3-тапсырмадағы салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатары бойынша орташа квадраттық ауытқуды табыңдар:

A) 2,292; B) 2,191; C) 2,189; D) 2,176; E) 2,138.

5. Кестеде фирмалық дүкендегі сыртқы киімнің бағасы (мың тг) туралы деректер келтірілген:

34,2	35,2	34,7	50,0	25,3
24,0	25,4	25,3	28,4	18,4
32,3	40,0	34,9	18,8	48,9
18,4	25,2	24,6	30,0	25,3
10,0	35,8	17,4	23,2	35,2

Деректерді құны бойынша тең 4 интервалдық топқа бөліп, әйелдер сыртқы киімдерінің үлестірімінің интервалды вариациялық қатарын құрастырыңдар:

A)

Интервалдар	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	5	9	8	3
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,36	0,32	0,12

B)

Интервалдар	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	5	9	8	3
$\frac{n_i}{n}$	0,22	0,34	0,32	0,12

C)

Интервалдар	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	6	8	8	3
$\frac{n_i}{n}$	0,24	0,32	0,32	0,12

D)

Интервалдар	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	5	8	8	4
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,32	0,32	0,16

E)

Интервалдар	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	5	8	9	3
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,32	0,36	0,12

6. Салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатары бойынша орташа мәні мен дисперсиясын табыңдар:

Интервалдар	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
x_i'	15	25	35	45
n_i	5	9	8	3
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,36	0,32	0,12

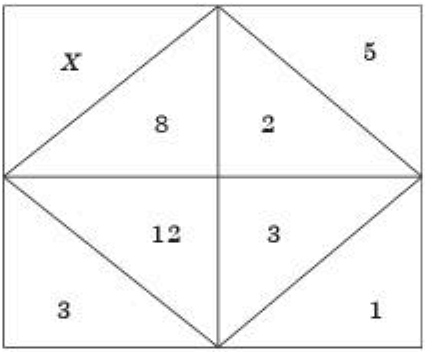
A) $\bar{X} = 28{,}2;\ \bar{D} = 87{,}4;$ B) $\bar{X} = 28{,}6;\ \bar{D} = 87{,}04;$
C) $\bar{X} = 26{,}6;\ \bar{D} = 85{,}4;$ D) $\bar{X} = 27{,}4;\ \bar{D} = 87{,}24;$
E) $\bar{X} = 28{,}6;\ \bar{D} = 85{,}24.$

7. 6-тапсырмадағы салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарының орташа квадраттық ауытқуын табыңдар:

A) $\bar{\sigma} \approx 9{,}3488;$ B) $\bar{\sigma} \approx 9{,}3509;$ C) $\bar{\sigma} \approx 9{,}2412;$
D) $\bar{\sigma} \approx 9{,}3295;$ E) $\bar{\sigma} \approx 9{,}2326.$

Математикалық сауаттылық бойынша тест тапсырмалары

8. Кесте бойынша X-тің мәнін табыңдар:



A) 4; B) 6; C) 15; D) 2; E) 12.

9. Кестені қолданып функцияның формуласын жазыңдар:

18-*кесте*

x	1	2	3	4	5	...
y	5	2	−1	−4	−7	...

A) $y = -3x + 4;$ B) $y = x^2 + 1;$ C) $y = x^2 - 2;$
D) $y = -x^2 + 2;$ E) $y = -3x + 8.$

10. Графикте түрлі температурадағы су буының 1 м^3 ауадағы мөлшері көрсетілген:

19-*кесте*

А бағаны	*В бағаны*
10°С болғандағы су буының мөлшері	8 г

Ақиқат тұжырымды көрсетіңдер:

A) $A = B$; B) $A > B$; C) A бағаны 3 г артық;
D) $A < B$; E) A бағанының мәні B-дан 2 г артық.

11. Қабырға сағаты тәулігіне 3 мин қалып қояды. Бүгін түсте сағат тура уақытты көрсетіп тұрды. Қанша күннен кейін сағат қайтадан дұрыс уақытты көрсететінін табыңдар:

A) 440; B) 460; C) 354; D) 240; E) 480.

12. Егер кірпіштің өлшемі 25 см × 12 см × 8 см болса, онда өлшемі 4 м × 1,2 м × 3 м болатын ғимарат тұрғызуға қажетті кірпіш санын табыңдар:

A) 3000; B) 4800; C) 5600; D) 6000; E) 7500.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Өрнек, санның дәрежесі, дәреженің негізі, дәреженің көрсеткіші, санның квадрат түбірі, арифметикалық түбір, түбірдің қасиеттері, рационал және иррационал сандар.

III ТАРАУ

ДӘРЕЖЕ ЖӘНЕ ТҮБІР. ДӘРЕЖЕЛІК ФУНКЦИЯ

§9. n-ші ДӘРЕЖЕЛІ ТҮБІР ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Сендер *n-ші дәрежелі түбір* және *n-ші дәрежелі арифметикалық түбір* ұғымдарымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Дәреже, дәреженің көрсеткіші, түбір, квадрат түбір, арифметикалық квадрат түбір, түбірдің мәні

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

a санының квадрат түбірі дегеніміз квадраты a санына тең сан екені белгілі.

Тура осылай a-ның 3-ші дәрежелі түбірінің анықтамасын беруге болады. Кубы (3-ші дәрежесі) a санына тең санды *a санының 3-ші дәрежелі түбірі* дейміз.

a санының n-ші дәрежелі түбірінің анықтамасын берейік (мұндағы n — кез келген натурал сан).

Анықтама. *a санының **n-ші дәрежелі түбірі** деп n-ші дәрежесі a санына тең болатын b санын айтады.*

Анықтама бойынша

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ мұндағы } b^n = a. \tag{1}$$

Мұндағы n — түбірдің көрсеткіші және бірден өзгеше кез келген натурал сан, a — түбір таңбасының ішіндегі сан.

8 санының 3-ші дәрежелі түбірі 2-ге тең, себебі $2^3 = 8$, яғни $\sqrt[3]{8} = 2$.

a санынан n-ші дәрежелі түбір табуды *түбір шығару* дейміз.

a санының n-ші дәрежелі түбірі x болсын, онда анықтама бойынша $x^n = a$ теңдеуін аламыз.

$x^n = a$ (мұндағы $a > 0$, $n \in N$, $n > 1$) теңдеуінің n жұп болғанда $-\sqrt[n]{a}$ және $\sqrt[n]{a}$ -ға тең екі түбірі, ал n тақ болғанда $\sqrt[n]{a}$ -ға тең бір түбірі болады.

3 және -3 сандары $x^4 = 81$ теңдеуінің түбірлері болады, өйткені $3^4 = 81$ және $(-3)^4 = 81$.

Анықтама. *a санының **n-ші дәрежелі арифметикалық түбірі** деп n-ші дәрежесі a-ға тең теріс емес b санын айтады.*

Сендер n-ші дәрежелі түбір қасиеттерін білесіңдер.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Екінші дәрежелі арифметикалық түбірдің қасиеттері белгілі.

Бұл қасиеттер $n > 2$ болғанда да орындалады.

Егер n және m — кез келген натурал сандар, a және b — кез келген теріс емес нақты сандар болса, онда түбірдің негізгі қасиеттерін беретін төмендегі теңдіктер орындалады.

1. *Көбейтіндіден түбір шығару үшін әрбір көбейткіштен түбір шығарып, алынған нәтижелерді көбейту керек (көбейтіндіден түбір шығару ережесі):*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \qquad (1)$$

МЫСАЛ 1. $\sqrt[3]{1000 \cdot 64 \cdot (-27)}$ есептейік.

Шешуі. (1)-формуланы қолданамыз:

$$\sqrt[3]{1000 \cdot 64 \cdot (-27)} = \sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{-27} = 10 \cdot 4 \cdot (-3) = -120.$$

Жауабы: -120.

(1)-теңдікті оңнан солға қарай оқып, оған тұжырымдама беріңдер.

2. *Бөлшектен (қатынастан) түбір шығару үшін алымынан және бөлімінен жеке түбір шығарып, бірінші нәтижені екінші нәтижеге бөлу керек (бөлшектен түбір шығару ережесі):*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \qquad (2)$$

(2)-теңдікті оңнан солға қарай оқып, оған тұжырымдама беріңдер.

МЫСАЛ 2. 1) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ түбірлерінің мәндерін табайық.

Шешуі. (2)-формуланы қолданамыз:

1) $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$.

Жауабы: 1) $\frac{5}{8}$; 2) $\frac{2}{5}$.

3. *Түбірдің дәреже көрсеткіші мен түбір таңбасының ішіндегі өрнектің көрсеткішін қысқарту ережесі:*

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}. \qquad (3)$$

(3)-ереженің тұжырымдамасын беріңдер.

МЫСАЛ

3. 1) $\sqrt[6]{8}$; 2) $\sqrt[12]{b^8}$ түбірлерінің мәндерін ықшамдайық.

Шешуі. (3)-формуланы қолданамыз:

1) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$; 2) $\sqrt[12]{b^8} = \sqrt[3]{b^2}$.

Жауабы: 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[3]{b^2}$.

4. *Түбірді дәрежеге шығару үшін түбір таңбасының ішіндегі өрнекті осы дәрежеге шығару керек (түбірді дәрежеге шығару ережесі):*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (4)$$

МЫСАЛ

4. 1) $\left(\sqrt{3}\right)^4$; 2) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^5$ түбірлерін ықшамдайық.

Шешуі. (4)-формуланы қолданамыз:

1) $\left(\sqrt{3}\right)^4 = \sqrt{3^4} = \sqrt{81} = 9$;

2) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^5 = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = 2\sqrt[3]{4}$.

Жауабы: 1) 9; 2) $2\sqrt[3]{4}$.

5. *Түбірден түбір шығару үшін түбір таңбасының ішіндегі өрнекті өзгеріссіз қалдырып, көрсеткіші берілген екі түбірдің көрсеткіштерінің көбейтіндісіне тең түбірден шығару керек (түбірден түбір шығару ережесі):*

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}. \qquad (5)$$

МЫСАЛ

5. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ түбірінің мәнін есептейік.

Шешуі. (5)-формуланы қолданамыз:

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Жауабы: 2.

$\sqrt[n]{a}$ және $\sqrt[m]{b}$ түбірлерінің қайсысы үлкен екенін анықтау үшін берілген екі түбірді бірдей көрсеткішке келтіреміз:

$$\sqrt[nm]{a^m} \text{ және } \sqrt[mn]{b^n}.$$

Енді түбір ішіндегі өрнектерді, яғни a^m мен b^n мәндерін салыстырсақ жеткілікті.

МЫСАЛ

6. 1) $\sqrt{3}$ және $\sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt{5}$ және $\sqrt[5]{2}$ сандарын салыстырайық.

Шешуі. 1) Салыстыру үшін $\sqrt{3}$ және $\sqrt[3]{4}$ түбірлерін алтыншы дәрежеге шығарамыз: $\sqrt{3} = \sqrt[2\cdot3]{3^3} = \sqrt[6]{27}$ және $\sqrt[3\cdot2]{4^2} = \sqrt[6]{16}$. Енді 27 және 16 сандарын салыстырамыз: $27 > 16$. Демек, $\sqrt{3} > \sqrt[3]{4}$.

2) Салыстыру үшін $\sqrt{5}$ және $\sqrt[5]{2}$ түбірлерін оныншы дәрежеге шығарамыз: $\sqrt{5} = \sqrt[2\cdot5]{5^5} = \sqrt[10]{3125}$ және $\sqrt[5]{2} = \sqrt[2\cdot5]{2^2} = \sqrt[10]{4}$. Сонда $3125 > 4$. Демек, $\sqrt{5} > \sqrt[5]{2}$.

Жауабы: 1) $\sqrt{3} > \sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt{5} > \sqrt[5]{2}$.

Жоғарыда берілген (1) — (5) қасиеттері кері бағытта да, яғни оңнан солға қарай да қолданылады.

?

1. Түбір таңбасының ішіндегі өрнектер қандай мәндерді қабылдауы мүмкін? Мысалдар келтіріңдер.
2. Кез келген нақты саннан әр уақытта n-ші дәрежелі түбір табыла ма? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

9.1. Көбейтіндіден түбір шығарыңдар:

1) $\sqrt{49\cdot64\cdot100}$; 2) $\sqrt[3]{8\cdot27\cdot125}$;

3) $\sqrt{a^4\cdot b^2\cdot c^6}$; 4) $\sqrt[4]{m^8\cdot k^{12}\cdot t^4}$.

9.2. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt{\dfrac{49}{225}}$; 2) $\sqrt[3]{\dfrac{8\cdot125}{343}}$;

3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{625}\cdot5\dfrac{1}{16}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[5]{486}}{\sqrt[5]{2}}$.

9.3. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt[5]{32\cdot a^{10}}$; 2) $\sqrt[6]{128\cdot a^{12}b^{18}c^6}$;

3) $\sqrt[3]{64\cdot m^6n^9p^3}$; 4) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}x^8y^{12}}$.

9.4. Ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$; 4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{11}}$;

5) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; 6) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^5}}$; 7) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{mn}}$; 8) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$.

Амалдарды орындандар (9.5-9.6):

9.5. 1) $\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{486}}+\sqrt[3]{27\cdot 2^6}$; 2) $\sqrt[3]{216\cdot 7^3}-\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$;

3) $\sqrt[3]{27\cdot 4^3}-\sqrt{\frac{81}{256}}$; 4) $5-\left(3\cdot\sqrt[4]{\frac{16}{81}}+\sqrt[3]{0{,}125}\right)$.

9.6. 1) $1-\sqrt{2\frac{7}{9}}+0{,}3\cdot\sqrt[4]{256}$;

2) $2\cdot\sqrt{1\frac{11}{25}}-1\frac{2}{5}+0{,}7\cdot\sqrt[3]{0{,}216}$;

3) $11:(0{,}15\cdot\sqrt[3]{64000}-0{,}29\cdot\sqrt[3]{8000})$;

4) $2{,}5\cdot\sqrt[4]{10000}+\frac{3}{4}\sqrt{1{,}44}-2{,}09:\sqrt[3]{1{,}331}$.

B

Амалдарды орындандар (9.7-9.8):

9.7. 1) $\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}\cdot\sqrt[3]{8-\sqrt{37}}$;

2) $\sqrt[3]{7-\sqrt{41}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{41}}$;

3) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2\cdot 0{,}2^{-2}$;

4) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}-\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$.

9.8. 1) $2\sqrt[4]{81}+\sqrt[3]{-125}+\sqrt[6]{64}$;

2) $5\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{16}-\sqrt[6]{729}$;

3) $\sqrt[3]{375}-\frac{2}{7}\cdot\sqrt[3]{1029}+0{,}75\sqrt[3]{192}-0{,}2\sqrt[3]{3000}$;

4) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{162}-0{,}2\sqrt[4]{1250}+0{,}75\sqrt[4]{512}-7\sqrt[4]{2}$.

9.9. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\left(2\sqrt{175}-3\sqrt{28}+2\sqrt{63}\right)^2-60\sqrt[3]{1000}=100$;

2) $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{150}+3\sqrt{24}-5\sqrt{54}\right)^2+15\sqrt[4]{625}=77$;

3) $\left(\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=-2$;

4) $\sqrt{20{,}25}+\sqrt[3]{24}-\sqrt[4]{0{,}1296}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{375}+\frac{1}{3}\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}=4{,}4$.

9.10. Есептеңдер:

1) $\sqrt{47-4\sqrt{33}}+\sqrt{47+4\sqrt{33}}$;   2) $\sqrt{31-6\sqrt{26}}-\sqrt{31+6\sqrt{26}}$;

3) $\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}\right):\sqrt[3]{7}$;   4) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

C

9.11. Ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$;   2) $\sqrt[4]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt[3]{b^2\sqrt[4]{b}}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{a}{b}}}$;   4) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}\cdot\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$.

9.12. Есептеңдер:

1) $\sqrt{\dfrac{67^2-58^2}{\sqrt{53^2-28^2}}}$;

2) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{113^2-112^2}}{19^2-11^2}}$;

3) $\left(3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{24}+\sqrt{6}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$;

4) $\left(\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{54}\right)\cdot\left(5\sqrt[3]{4}-3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

9.13. Есептеңдер:

1) $\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}-\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}$;   2) $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt{\sqrt{5}}:\left(\sqrt{5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{200}\right)$;   4) $\sqrt{3\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{1125}:\left(\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{5\sqrt[3]{5}}\right)$;

5) $\sqrt{\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}:\sqrt{\sqrt[4]{3}}\right)^2$;   6) $\sqrt{5\sqrt{5}}:\sqrt{\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}}$;

7) $\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{4\ldots}}}}$;   8) $\sqrt[5]{3\cdot\sqrt[5]{9\cdot\sqrt[5]{3\cdot\sqrt[5]{9\ldots}}}}$.

9.14. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{\sqrt[9]{a^{-2}}}$;   2) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}$;   3) $\dfrac{\sqrt[4]{a^{-1}b^2\sqrt{ab}}}{\sqrt[3]{a^2b^{-2}\sqrt[4]{a^3b}}}$;   4) $\dfrac{\sqrt[5]{x^{-2}y\sqrt{xy^{-1}}}}{\sqrt[3]{xy^{-1}\sqrt[5]{x^2y^{-4}}}}$;

5) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y}}}}}$;   6) $\sqrt{\sqrt[4]{x}}\cdot x^{-1}\cdot y:(y^2x)$;

7) $\dfrac{\sqrt{b^2\cdot\sqrt[4]{ab^2}}}{\sqrt[4]{\left(ab^{-2}\right)^3}} : (a\cdot b^{-2})^{-2}$;   8) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{b}}}{\sqrt[4]{\left(a^{-1}b^2\right)^{-3}}} : \sqrt[12]{ab^{16}}$.

9.15. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\sqrt[10]{27^4}\cdot\sqrt[5]{9}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{3^4\cdot\sqrt{27}}} - \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{1\dfrac{91}{125}} = -1$;   2) $\dfrac{\sqrt{5\sqrt[4]{80}}}{\sqrt[8]{20}\cdot\sqrt[4]{50}} + \dfrac{2}{5}\sqrt[3]{1\dfrac{61}{64}} = 1{,}5$.

ҚАЙТАЛАУ

9.16. Теңдеудің графигін салыңдар:

1) $2y - 2 + x^2 = 0$;   2) $y^2 + x^2 = 4$;

3) $x^2 - 2x + y^2 = 0$;   4) $y - \sqrt{9 - x^2} = 0$.

9.17. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{2}$; 4) $-\sqrt{2}$ саны $x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$ теңдеуінің түбірі бола ма?

9.18. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $4^3\cdot 2^{-3}\cdot 32 : 8^3$;   2) $9^3\cdot 3^{-2}\cdot 243 : 27^2$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Дәреже, дәреженің негізі, дәреженің көрсеткіші, натурал көрсеткішті дәреже, бүтін көрсеткішті дәреже, бүтін көрсеткішті дәреженің қасиеттері, рационал сан, иррационал сан, санның жуық мәні, периодты және периодсыз шектеусіз ондық бөлшектер, n-ші дәрежелі түбір және оның қасиеттері.

§ 10. РАЦИОНАЛ ЖӘНЕ ИРРАЦИОНАЛ КӨРСЕТКІШТІ ДӘРЕЖЕЛЕР

Сендер *рационал көрсеткішті дәреже* ұғымымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Дәреже, дәреженің көрсеткіші, *n*-ші дәрежелі түбір, рационал сан, өрнек

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Кез келген санды натурал дәрежеге шығару тәсілі, сонымен қатар нөлден өзгеше кез келген санды ($a \neq 0$) нөлінші және бүтін, теріс дәрежеге шығаруға болатыны белгілі.

Енді кез келген теріс емес санды ($a \geqslant 0$) оң және теріс бөлшек көрсеткішті дәрежеге, яғни кез келген рационал дәрежеге қалай шығаруға болатынын анықтайық.

a — теріс емес сан және оны $\frac{m}{n}$ бөлшек көрсеткішті дәрежеге шығару керек болсын. Сендерге $(a^m)^n = a^{mn}$ теңдігі, яғни дәрежені дәрежеге шығару ережесі белгілі.

Жоғарыда көрсетілген теңдікте $m = \frac{1}{n}$ деп ұйғарсақ,

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

теңдігін аламыз. Бұдан $a^{\frac{1}{n}}$ дәрежесі a санының n-ші дәрежелі түбірі деген қорытындыны жасауға болады: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Онда $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n} = a$.

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ және $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ өрнектерінің мәндері бірдей екенін айта кеткен жөн.

Расында $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ және $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Демек, $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Сонымен, мына теңдік орынды: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

1-анықтама. ***a оң санының $\frac{m}{n}$*** (мұндағы $\frac{m}{n}$ — қысқартылмайтын бөлшек) ***рационал көрсеткішті дәрежесі деп a^m санынан алынған n-ші дәрежелі түбірдің мәнін айтады.***

Демек, анықтама бойынша $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, мұндағы $a > 0$.

МЫСАЛ

1. 1) $5^{\frac{2}{3}}$; 2) $3{,}7^{-0{,}7}$; 3) $\left(\frac{10}{19}\right)^{\frac{13}{8}}$ рационал көрсеткішті дәрежені n-ші дәрежелі түбір арқылы өрнектейік.

Шешуі. 1) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$; 2) $3{,}7^{-0{,}7} = 3{,}7^{-\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{3{,}7^{-7}}$; 3) $\left(\frac{10}{19}\right)^{\frac{13}{8}} = \sqrt[8]{\left(\frac{10}{19}\right)^{13}}$.

Жауабы: 1) $\sqrt[3]{25}$; 2) $\sqrt[10]{3{,}7^{-7}}$; 3) $\sqrt[8]{\left(\frac{10}{19}\right)^{13}}$.

Негізі нөлге тең дәреже тек оң бөлшек көрсеткіш үшін ғана анықталған, яғни $\frac{m}{n} > 0$ болса, онда $0^{\frac{m}{n}} = 0$. Теріс негізді бөлшек көрсеткішті дәреже мектеп курсында қарастырылмайды.

Сендер рационал көрсеткішті дәреженің қасиеттерін білесіңдер.

Негіздері бірдей рационал көрсеткішті дәрежелер үшін де көбейту, бөлу, дәрежеге шығару және түбір табу ережелерін орындауға болады, яғни 1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$; 2) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$; 3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$; 4) $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$, мұндағы n, q — натурал, m, p — бүтін сандар.

Бірінші және екінші ережелердің дәлелдеулерін келтірейік.

$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ қасиетін дәлелдейік.

Дәлелдеу. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$, яғни бүтін көрсеткішті дәреже тәрізді рационал көрсеткішті дәреже үшін де негіздері бірдей болғанда дәрежелердің көрсеткіштері қосылады.

$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$ қасиетін дәлелдейік.

Дәлелдеу. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$, яғни бүтін көрсеткішті дәреже тәрізді негіздері бірдей болғанда дәрежелердің көрсеткіштері азайтылады.

МЫСАЛ

2. $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$; 2) $16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{3}{2}}$; 3) $81^{\frac{3}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}}$ мәндерін есептейік.

Шешуі. 1) $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 5$; 2) $16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{3}{2}} = 16^{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}} = 16^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{16^9} = \sqrt[4]{2^{36}} = 2^9 = 512$; 3) $81^{\frac{3}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}} = 81^{\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)} = 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$.

Жауабы: 1) 5; 2) 512; 3) 3.

Сендер рационал көрсеткішті дәреже қасиеттерін алгебралық өрнектерді түрлендіруде қолдануды үйренесіңдер.

МЫСАЛ

3. 1) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} : \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$; 3) $(0,15)^{\frac{8}{5}} : (0,15)^{-\frac{2}{5}}$ мәндерін есептейік.

Шешуі. 1) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 5^1 = 5$; 2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} : \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; 3) $(0,15)^{\frac{8}{5}} : (0,15)^{-\frac{2}{5}} = (0,15)^{\frac{8}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)} = (0,15)^2 = 0,0225$.

Жауабы: 1) 5; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0,0225.

Иррационал көрсеткішті дәреже ұғымымен танысасыңдар.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: $\sqrt{2}$ иррационал сан екені және оны шектеусіз ондық бөлшек түрінде $\sqrt{2} \approx 1,4142$ ... беруге болатыны белгілі.

Кез келген рационал санды шексіз периодты ондық бөлшек түрінде, ал кез келген иррационал санды шексіз периодсыз ондық бөлшек түрінде жазуға болады.

Енді *иррационал көрсеткішті дәреже* ұғымына көшейік.

Қандай да бір α оң иррационал саны ($\alpha > 0$) және a оң рационал саны ($a > 0$) берілсін. a^α жазуы (дәрежесі) нені білдіретінін анықтайық.

Ол үшін үш жағдайды қарастырайық: $a = 1$, $a > 1$ және $0 < a < 1$.

1) Егер $a = 1$ болса, онда $1^\alpha = 1$;

2) $a > 1$ жағдайында $r_1 < \alpha$, $r_2 > \alpha$ немесе $r_1 < \alpha < r_2$ болатын кез келген екі r_1 және r_2 рационал сандарын алсақ, $a^{r_1} < a^{r_2}$ болады.

Бұл жағдайда a^α саны a^{r_1} және a^{r_2} сандарының арасында орналасады: $a^{r_1} < a^\alpha < a^{r_2}$, мұндағы r_1 — α санының кемімен алынған кез келген рационал жуықтау мәні, r_2 — α санының артығымен алынған кез келген рационал жуықтау мәні. Онда a^α дәрежесі кез келген a^{r_1} дәрежесінен үлкен, бірақ кез келген a^{r_2} дәрежесінен кіші. Мұндай сан бар және оның біреу ғана екенін дәлелдеуге болады.

3) $0 < a < 1$ болсын ($r_1 < r_2$ немесе $r_1 < \alpha < r_2$). Бұл жағдайда a^α дәрежесі кез келген a^{r_1} дәрежесінен үлкен, бірақ кез келген a^{r_2} дәрежесінен кіші, яғни $a^{r_2} < a^\alpha < a^{r_1}$.

Жоғарыда қарастырылған үш жағдайды пайдаланып келесі анықтамалардың тұжырымдамаларын береміз.

2-анықтама. *Егер $a > 1$ болса, онда* ***a санының α оң иррационал көрсеткішті дәрежесі*** *деп көрсеткіші α санының кемімен алынған ондық жуықтауы болатын барлық a санының дәрежелерінен үлкен, бірақ көрсеткіші α санының артығымен алынған ондық жуықтауы болатын барлық a санының дәрежелерінен кіші санды айтады.*

3-анықтама. *Егер $0 < a < 1$ болса, онда* ***a санының α оң иррационал көрсеткішті дәрежесі*** *деп көрсеткіші α санының кемімен алынған ондық жуықтауы болатын барлық a санының дәрежелерінен кіші, бірақ көрсеткіші α санының артығымен алынған ондық жуықтауы болатын барлық a санының дәрежелерінен үлкен санды айтады.*

Жоғарыда оң иррационал көрсеткішті дәреже қарастырылды.

Енді α теріс иррационал сан, ал негізі a кез келген оң сан болсын.

Онда a^α өрнегі теріс рационал көрсеткішті дәреженің мағынасына ие болады, себебі $a^\alpha = \dfrac{1}{a^{-\alpha}}$.

МЫСАЛ

4. $10^{-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{10^{\sqrt{2}}}$.

Ескерту. Рационал көрсеткішті дәреженің қасиеттері иррационал көрсеткішті дәреже үшін де орындалады.

1. Бүтін көрсеткішті және бөлшек көрсеткішті дәрежелердің қандай ұқсастығы және айырмашылығы бар?
2. Бөлшек көрсеткішті дәреженің тура мәнін әр уақытта есептеуге бола ма?
3. "Кез келген нақты санды шексіз периодты ондық бөлшек түрінде жазуға болады" деген тұжырым дұрыс па? Жауабын түсіндіріңдер.
4. Иррационал көрсеткішті дәреженің рационал көрсеткішті дәрежеден қандай айырмашылығы бар?

Жаттығулар

А

10.1. Бөлшек көрсеткішті дәрежені түбір түрінде жазыңдар:

1) $11^{\frac{2}{3}}$; 2) $0{,}7^{-\frac{5}{4}}$; 3) $\left(\frac{3}{10}\right)^{0{,}75}$; 4) $(-21)^{1\frac{1}{5}}$;

5) $a^{-2{,}5}$; 6) $(b+1)^{1{,}5}$; 7) $(a-2b)^{3\frac{1}{2}}$; 8) $\left(x-y^2\right)^{-\frac{7}{4}}$.

10.2. Есептеңдер:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $16^{\frac{3}{4}}$; 3) $64^{-\frac{1}{2}}$; 4) $0{,}25^{-\frac{1}{2}}$;

5) $0{,}36^{\frac{1}{2}}$; 6) $(-27)^{-\frac{4}{3}}$; 7) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; 8) $32^{-\frac{1}{5}}$.

10.3. Түбірді бөлшек көрсеткішті дәреже түрінде жазыңдар:

1) $\sqrt[3]{a^2}$; 2) $\sqrt[5]{b^3}$; 3) $\sqrt[3]{a^2+b^2}$; 4) $\sqrt[3]{x-y}$;

5) $\sqrt[5]{a^2b^3}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$; 7) $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$; 8) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{a-b}}$.

10.4. Есептеңдер:

1) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{-\frac{3}{4}} \cdot 32^{-\frac{4}{5}} \cdot 2^3$; 2) $27^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$;

3) $64^{\frac{2}{3}} : 64^{\frac{1}{2}}$; 4) $729^{\frac{1}{2}} : 729^{\frac{1}{3}}$.

10.5. Ықшамдаңдар:

1) $a^{1\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}}$; 2) $(x+y)^{\frac{4}{5}} : (x+y)^{\frac{2}{5}}$;

3) $a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$; 4) $b^{\frac{7}{12}} \cdot y^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{4}}$.

10.6. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $4^{1,5} - 9^{-0,5} + \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 2) $8^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{4}\right)^{1,5}$;

3) $\left(125^{-\frac{1}{3}} - 36^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(16^{\frac{1}{4}} + 216^{\frac{1}{3}}\right)^{0}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \cdot \left(6\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

10.7. Ықшамдаңдар:

1) $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{6}}$; 2) $\left(a^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{3}{10}}$; 3) $\left((a+x)^{\frac{2}{5}}\right)^{1\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

10.8. Есептеңдер:

1) $\left(49^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$; 2) $\left(625^{-\frac{3}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(64^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

4) $\left(\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$; 5) $\left(\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{15}}$; 6) $\left(\left(3\frac{6}{25}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

10.9. Салыстырыңдар:

1) $12^{\frac{3}{4}}$ және $12^{\frac{3}{2}}$; 2) $8^{\frac{3}{2}}$ және $8^{\frac{4}{3}}$;

3) $\left(\frac{1}{18}\right)^{\frac{5}{4}}$ және $\left(\frac{1}{18}\right)^{\frac{6}{5}}$; 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,5}$ және $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$.

B

Есептеңдер (10.10-10.11):

10.10. 1) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$; 2) $\left(\left(\sqrt[3]{6}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{-3\sqrt{3}}$;

3) $8^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{9}\right)^{1,5}$;   4) $\left(64^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}\right)^{0} \cdot \left(343^{\frac{1}{3}} - 81^{\frac{1}{2}}\right)$.

10.11. 1) $-0,027^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} - 3^{-1} + (5,5)^{0}$;

2) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\right)^{-0,5} - 7,5 - \left(\sqrt[4]{4^{3}}\right)^{2} - 2 \cdot (-2)^{4}$;

3) $(0,008)^{\frac{2}{3}} \cdot (0,64)^{0,5} : (0,04)^{-0,5} : (0,25)^{-1,5}$;

4) $0,125^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0,75} + (1,2)^{0}$.

10.12. Ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{a^{3}}}{a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{7}{6}}}$;   2) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{x}}{x^{-\frac{4}{3}}}$;   3) $\dfrac{a - 16a^{0,5}}{5a^{0,25} + 20}$;   4) $\dfrac{x^{\frac{4}{3}}y + xy^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$.

10.13. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} \cdot 16^{3} = \left(4^{\sqrt{3}}\right)^{-4}$;

2) $\dfrac{12^{\sqrt{48}}}{4^{\sqrt{108}}} \cdot \dfrac{2^{27\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{27}}} = \left(6 \cdot 2^{19}\right)^{\sqrt{3}}$.

C

10.14. Есептеңдер:

1) $\left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} + 198^{0} - \left(9^{-0,4} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}\right)^{-2} + (0,0081)^{\frac{1}{4}}$;

2) $\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + 27^{-\frac{2}{3}} \cdot (9^{0,5})^{5} \cdot 3^{-2} + \left(\left(\frac{7}{9}\right)^{3}\right)^{0} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$;

3) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{10}} : \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-3}$;

4) $\left(9^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} - \left(25^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{10}} + \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{6}{7}}\right)^{0} : (36)^{-\frac{1}{2}}$;

5) $\left(4^{-\frac{1}{4}} + \left(\dfrac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right) \cdot \left(4^{-0,25} - \left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)$;

6) $\left(\dfrac{1}{3}\left(0,027^{\frac{2}{3}} + 15 \cdot 0,0016^{\frac{3}{4}} + 0,1 \cdot 243^{\frac{3}{5}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

10.15. Салыстырыңдар:

1) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^{\sqrt{5}}$ және $\left(\dfrac{2}{8}\right)^{\sqrt{5}}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$ және $\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{4}\right)^{-\sqrt{3}}$;

3) $\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^{1,2}$ және $\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{1,2}$; 4) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{2}}{3}\right)^{-2,8}$ және $\left(\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}\right)^{-2,8}$.

Ықшамдаңдар (**10.16-10.17**):

10.16. 1) $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}} - b\right)^2 \cdot \left(\dfrac{b}{a^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{b} + 1\right)}{\dfrac{b^2}{a^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{b}{a^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{b^2} - \dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{b}}$;

2) $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{8}} + 1} + \dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{8}} + 1} - \dfrac{2\sqrt[4]{a} - 2}{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} + 1}$.

10.17. 1) $\dfrac{2a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 3a^{-\frac{1}{3}}} - \dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{a+1}{a^2 - 4a + 3}$;

2) $\left(\dfrac{x^{\frac{4}{3}} + 8x^{\frac{1}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt[3]{xy} + 4y^{\frac{2}{3}}} - 2\sqrt[3]{xy}\right)^6$.

10.18. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\left(x^{-2} + a^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a^{-2} + a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$, мұндағы $x = \left(1 - a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

2) $\left(\dfrac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$, мұндағы $x=\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$ және оны

а) $n > m > 0$; ә) $m > n > 0$; б) $m = n = 1$ жағдайлары үшін қарастырыңдар.

10.19. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{x^{\frac{3}{p}}-x^{\frac{3}{q}}}{\left(x^{\frac{1}{p}}+x^{\frac{1}{q}}\right)^2-2x^{\frac{1}{q}}\left(x^{\frac{1}{q}}+x^{\frac{1}{p}}\right)}+\dfrac{x^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{q-p}{pq}}+1}=\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}$;

2) $\left(\dfrac{9-4a^{-2}}{3a^{-\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{3}{2}}}-\dfrac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-\frac{1}{2}}+3a^{-\frac{3}{2}}}\right)^4-16a^2=0.$

ҚАЙТАЛАУ

10.20. $f(x)=\begin{cases}x^2-4x, & x>2,\\ -x^2+2x, & x<2\end{cases}$ функциясының:

1) -1; 2) 0; 3) 2; 4) 5 нүктесіндегі туындысының мәнін табыңдар.

10.21. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}>0$; 2) $(x-2)^2(x+3)(x-4)<0$.

10.22. Анықталған интегралды есептеңдер:

1) $\int\limits_0^4 |x-2|dx$; 2) $\int\limits_2^6 |x-4|dx$;

3) $\int\limits_{-6}^0 |x+2|dx$; 4) $\int\limits_0^2 |x^2-2x|dx$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Өрнек, айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны, өрнектерді тепе-тең түрлендіру, толық квадрат, тепе-теңдік, тепе-теңдікті дәлелдеу, n-ші дәрежелі түбір және оның қасиеттері, рационал көрсеткішті дәреже және оның қасиеттері.

§11. ИРРАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕРДІ ТҮРЛЕНДІРУ

Сендер n-ші дәрежелі түбір қасиеттерін иррационал өрнектерді түрлендіруде қолдануды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Дәреже, n-ші дәрежелі түбір, иррационал өрнек, қасиет, түрлендіру

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Көбейткішті түбір алдына шығару, көбейткішті түбір астына енгізу, бөлшектің бөлімін иррационалдықтан босату түрлендірулері 8-сыныптың "Алгебра" курсынан белгілі.

Алдыңғы параграфтарда n-ші дәрежелі түбір, рационал көрсеткішті дәреже және олардың қасиеттері қарастырылды. Енді иррационал өрнектердің тепе-тең түрлендірулерде қолданылуын қарастырамыз.

МЫСАЛ

1. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})$ көбейтуін орындайық.

Шешуі. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3}) = 3\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3} = 21\cdot 2 - 14\sqrt{6} + 15\sqrt{6} - 10\cdot 3 = 12+\sqrt{6}$.

Жауабы: $12+\sqrt{6}$.

МЫСАЛ

2. $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx}$ бөлуін орындайық.

Шешуі. $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx} = 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} : \sqrt[3]{bx} - x\sqrt[3]{b} : \sqrt[3]{bx} = 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b^2x}} - x\sqrt[3]{\frac{b}{bx}} =$

$= 2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

Жауабы: $2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

Иррационал өрнектерді түрлендіру кезінде мәні оң да, теріс те болатын өрнектен n-ші дәрежелі түбір шығару қажет болады.

Өрнектен n-ші дәрежелі түбір шығарғанда мына ережелерді қолдану қажет:

— егер n жұп сан болса, онда түбірдің мәні модуль таңбасымен;

— егер n тақ сан болса, онда түбірдің мәні модульсіз алынады.

МЫСАЛ

3. $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ өрнегінің мәнін есептейік.

Шешуі. $27+10\sqrt{2}=(\sqrt{2}+5)^2$; $27-10\sqrt{2}=(\sqrt{2}-5)^2$ ескерсек, $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+5\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-5\right)^2}=|\sqrt{2}+5|+$ $+|\sqrt{2}-5|=\sqrt{2}+5+5-\sqrt{2}=10$ шығады.

Жауабы: 10.

МЫСАЛ

4. $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$ өрнегінің мәнін есептейік.

Шешуі. **Бірінші тәсіл.** Берілген өрнекті екінші дәрежеге шығарайық: $\left(\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}\right)^2=29-12\sqrt{5}-2\sqrt{\left(29-12\sqrt{5}\right)\left(29+12\sqrt{5}\right)}+$ $+29+12\sqrt{5}=58-2\sqrt{841-144\cdot 5}=58-2\sqrt{121}=58-22=36.$

Берілген өрнектің мәні 6 немесе −6 болуы мүмкін.

$\sqrt{29+12\sqrt{5}}>\sqrt{29-12\sqrt{5}}$ екенін ескерсек, берілген өрнектің мәні теріс болуы тиіс. Демек, өрнектің мәні −6-ға тең.

Екінші тәсіл. Түбір ішіндегі өрнектер толық квадратты береді.

$$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{29-2\cdot 6\sqrt{5}}=\sqrt{29-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{5}+3^2}=$$

$$=\sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\right)^2}=|2\sqrt{5}-3|=2\sqrt{5}-3.$$ Онда $\sqrt{29-12\sqrt{5}}=2\sqrt{5}+3.$

Сонда $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-3-(2\sqrt{5}+3)=-6.$

Жауабы: −6.

МЫСАЛ

5. $x=3$ болғандағы $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}}$ өрнегінің мәнін табайық.

Шешуі. Айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны $(2\sqrt{2};\ +\infty)$. Алдымен берілген өрнекті ықшамдайық:

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{|x-2\sqrt{2}|}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{|x+2\sqrt{2}|}.$$

Айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынында $x-2\sqrt{2}>0$, $x+2\sqrt{2}>0$ теңсіздіктерінің екеуі де орындалады. Сондықтан $|x-2\sqrt{2}|=x-2\sqrt{2}$ және $|x+2\sqrt{2}|=x+2\sqrt{2}$ деп алуға болады. Демек,

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{|x-2\sqrt{2}|}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{|x+2\sqrt{2}|}=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{x-2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{x+2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}-\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}.$$

$x = 3$ саны айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынына тиісті болғандықтан x айнымалысының орнына 3-ті қойып, өрнектің мәнін есептейік:

$$\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1} = 2.$$

Жауабы: 2.

МЫСАЛ

6. $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$ өрнегін көбейткіштерге жіктейік.

Шешуі. $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b} = (2 - 2\sqrt{ab}) + (b\sqrt{a} - \sqrt{b}) =$

$= 2(1 - \sqrt{ab}) + \sqrt{b}(\sqrt{ab} - 1) = 2(1 - \sqrt{ab}) - \sqrt{b}(1 - \sqrt{ab}) = (1 - \sqrt{ab}) \times$

$\times (2 - \sqrt{b})$.

Жауабы: $(1 - \sqrt{ab})(2 - \sqrt{b})$.

МЫСАЛ

7. $\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}}$ бөлшегін қысқартайық.

Шешуі. $$\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\,(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\,(x+1) - 2\sqrt[6]{x^4}} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(x+1-2\sqrt{x}\right)} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}.$$

Жауабы: $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$.

МЫСАЛ

8. $\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}} - \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\dfrac{a\sqrt{a}-2\sqrt{a}+2}{4}\right)^{-1}$ өрнегінің a айнымалысының мәніне тәуелді болмайтынын дәлелдейік.

Шешуі. $$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}} - \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\frac{a\sqrt{a}-2\sqrt{a}+2}{4}\right)^{-1} = \frac{\left(a+\sqrt{a^2-4}\right)^2 - \left(a-\sqrt{a^2-4}\right)^2}{a^2-\left(a^2-4\right)} \times$$

$$\times \frac{4}{a\sqrt{a^2-4}} = \frac{\left(a^2+2a\sqrt{a^2-4}+a^2-4-a^2+2a\sqrt{a^2-4}-a^2+4\right)\cdot 4}{\left(a^2-a^2+4\right)\cdot a\sqrt{a^2-4}} = \frac{4a\sqrt{a^2-4}\cdot 4}{4a\sqrt{a^2-4}} = 4,$$

яғни, $a > 2$ және $a < -2$ болғанда берілген өрнектің мәні айнымалыға тәуелді емес.

Кейбір жағдайда иррационал өрнектерді түрлендіру кезінде *жаңа айнымалыны енгізу* тәсілі де қолданылады.

МЫСАЛ

9. $\sqrt{\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)^2-8\left(a+\frac{2}{a}\right)^2+48}=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2$ тепе-теңдігі айнымалының мүмкін болатын мәндерінде орындалатынын көрсетейік.

Шешуі. $a+\frac{2}{a}=t$ жаңа айнымалыны енгізейік: $a^2+\frac{4}{a^2}=t^2-4$.

Бұл жағдайда тепе-теңдіктің сол жақ бөлігі мына түрге келеді:

$$\sqrt{\left(t^2-4\right)^2-8t^2+48}=\sqrt{t^4-8t^2+16-8t^2+48}=\sqrt{t^4-16t^2+64}=\sqrt{\left(t^2-8\right)^2}=\left|t^2-8\right|.$$

Енді алғашқы айнымалыға көшейік. Сонда

$$\left|\left(a+\frac{2}{a}\right)^2-8\right|=\left|a^2+4+\frac{4}{a^2}-8\right|=\left|a^2-4+\frac{4}{a^2}\right|=\left|\left(a-\frac{2}{a}\right)^2\right|=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2.$$

Жауабы: $\left(a-\frac{2}{a}\right)^2$.

Сендер құрамында $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ түріндегі түбірі бар иррационал өрнекті түрлендіруді үйренесіңдер.

Иррационал өрнектерді түрлендіру кезінде $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ (мұндағы A, B — оң рационал сандар, B саны қандай да бір санның тура квадраты емес) түріндегі *күрделі түбірлер* (*күрделі радикалдар*) кездеседі. Бұл $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ күрделі түбір мына түрге түрлендіріледі:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \qquad (1)$$

Дәлелдеу. (1)-теңдікте барлық түбірлер арифметикалық түбірлер болғандықтан, теңдіктің екі жақ бөлігін де квадраттаймыз.

Сол жақ бөлігінің квадраты: $\left(\sqrt{A+\sqrt{B}}\right)^2=A+\sqrt{B}$.

Оң жақ бөлігінің квадраты: $\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2=$

$$=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}+\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}+2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}=$$

$$=A+\sqrt{A^2-\left(A^2-B\right)}=A+\sqrt{B}.$$

(1)-теңдіктің екі жағын да екінші дәрежеге шығарғанда бірдей өрнек шықты. Демек, (1)-теңдік ақиқат.

Тура осылай

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \qquad (2)$$

теңдігін алуға болады.

(2)-теңдіктің ақиқат болатынын өздерің дәлелдеңдер.

МЫСАЛ

10. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ **өрнегінің мәнін есептейік.**

Шешуі. (1)-формуланы қолдану үшін түбір ішіндегі екінші қосылғышты түрлендірейік: $2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{8}$. Онда $A = 3$, $B = 8$. Енді (1)-формуланы қолдануға болады:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2}+1.$$

Жауабы: $\sqrt{2}+1$.

1. Иррационал өрнектерді түрлендіру тәсілдерін қандай жағдайларда қолданған ыңғайлы?
2. Рационал және иррационал өрнектерді түрлендіруде айырмашылық бар ма?
3. (1)-формуланы дәлелдеу кезінде қандай белгілі білімдерді қолдандыңдар?

Жаттығулар

A

Амалдарды орындаңдар (11.1-11.2):

11.1. 1) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 2) $\frac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}} + \frac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}$;

3) $\frac{1}{11-2\sqrt{30}} - \frac{1}{11+2\sqrt{30}}$; 4) $\frac{5}{3+2\sqrt{2}} + \frac{5}{3-2\sqrt{2}}$.

11.2. 1) $\sqrt[4]{6+\sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6-\sqrt{20}}$; 2) $\sqrt[4]{4+\sqrt{15}} \cdot \sqrt[4]{4-\sqrt{15}}$;

3) $\left(\sqrt{14}-3\sqrt{2}\right)^2 + 6\sqrt{28}$; 4) $\left(3\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)^2 - 10\sqrt{27}$.

11.3. Күрделі түбірлер формулаларын қолданып өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$; 3) $\sqrt{7-\sqrt{13}}$; 4) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$;

5) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$; 6) $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$; 7) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; 8) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$.

11.4. $\left(\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-3}-\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+3}\right):\dfrac{2m}{m-6\sqrt{m}+9}$ өрнегін ықшамдаңдар.

11.5. Берілген бөлшектің бөлімін иррационалдықтан босатыңдар:

1) $\dfrac{7}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{11}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{5}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 4) $\dfrac{6}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+5-\sqrt{15}}$.

B

11.6. Амалдарды орындаңдар:

1) $\sqrt[3]{12-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[3]{12+\sqrt{19}}$; 2) $\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}$;

3) $\left(2\sqrt{27}-\frac{1}{2}\sqrt{6}+4\sqrt{3}\right):\frac{1}{2}\sqrt{3}$; 4) $\left(5\sqrt{8}-\frac{1}{3}\sqrt{10}-2\sqrt{18}\right):\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

11.7. Күрделі түбірлердің формулаларын қолданып $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ өрнегін ықшамдаңдар.

11.8. Күрделі түбірлердің формулаларын қолданып $x\geqslant 2$ болғанда $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ өрнегінің мәні x айнымалысына тәуелді болмайтынын дәлелдеңдер.

C

11.9. 1) $a\geqslant 2$ болса, онда $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}=\dfrac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$;

2) $x>1$ болса, онда $\left(\sqrt[3]{(x^2+1)\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}+\sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\right)^2=$
$=\dfrac{\sqrt[3]{x^{-2}}\left(x^2+\sqrt{x^4-1}\right)}{2^{-1}}$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

11.10. Айнымалылардың кез келген нақты мәндерінде

$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\left(\dfrac{x+\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}-\sqrt[4]{xy}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ өрнегінің мәні теріс емес және x айнымалысына тәуелді болмайтынын дәлелдеңдер.

11.11. Ықшамдаңдар:

1) $\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x^2}\right)^{-3}-\left(\left(x\sqrt{x}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}+\sqrt{\sqrt{x^3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{6}{5}}-\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

3) $\left(\dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{-\frac{4}{5}}-\left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}\right)^{\frac{6}{7}}$; 4) $\sqrt{1+\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)^2}:\left((x^2+1)\cdot\dfrac{1}{x}\right)$.

ҚАЙТАЛАУ

11.12. 1) Екі қаланың аралығы өзен бойымен 90 км. Теплоход бір қаладан екінші қалаға барып-қайту үшін 7,5 сағ жұмсайды. Егер өзен ағысының жылдамдығы теплоходтың меншікті жылдамдығының 20%-ын құрайтын болса, онда теплоходтың тынық судағы жылдамдығын табыңдар.

2) Катер жарты сағатта өзен бойымен жүрген жолды өзен ағысына қарсы 40 мин-та, ал өзен ағысына қарсы 2 км жолды 10 мин-та жүріп өтеді. Катердің меншікті жылдамдығы мен өзен ағысының жылдамдығын табыңдар.

11.13. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{3x^3}{5y^3} : \frac{27x^5}{4y^4} \cdot \frac{45}{8y^2x^{-3}}$; 2) $\frac{25a(b-1)}{81d} : \frac{5cd^2}{27ab} : \frac{a^3(b-1)}{2c^3d^3}$.

11.14. Функцияның периодын табыңдар:

1) $y = \cos 4\pi x + \mathrm{ctg}\, 2\pi x$; 2) $y = \mathrm{ctg}\, 6x - 2\sin 3x$;

3) $y = \mathrm{tg}\, \pi x - 3\cos 2\pi x$; 4) $y = 4 - \cos\frac{\pi x}{3} + 5\mathrm{tg}\frac{\pi x}{3}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның анықталу облысы, жұп және тақ функциялар, олардың графиктері, бірсарынды функция, периодты функция, тұрақты функция, сызықтық функция, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ түріндегі функциялар және олардың қасиеттері, көрсеткіші нақты сан болатын дәреже, n-ші дәрежелі түбір және оның қасиеттері.

§12. ДӘРЕЖЕЛІК ФУНКЦИЯ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ МЕН ГРАФИГІ

Сендер *нақты көрсеткішті дәрежелік функция* ұғымымен танысасыңдар; дәреже көрсеткішіне тәуелді дәрежелік функция графигін салуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, график, дәрежелік функция, дәреженің көрсеткіші, нақты сан

Анықтама.

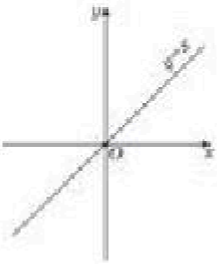
$$y = x^r$$

түрінде берілген функция ***дәрежелік функция*** *деп аталады.* Мұндағы x — тәуелсіз айнымалы, ал r — кез келген рационал сан. r-ге байланысты дәрежелік функция әртүрлі болады.

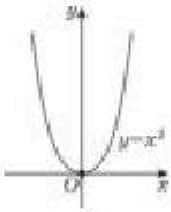
Көрсеткішіне байланысты дәрежелік функцияның түрлерін қарастырайық.

1. Егер r — натурал сан болса, онда $y = x^n$ *натурал көрсеткішті дәрежелік функциясын* аламыз. $n = 1$ болғанда функцияның графигі түзу болатыны, $n = 2$ болғанда $y = x^2$ функциясының графигі парабола,

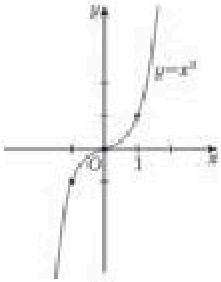
ал $n = 3$ болғанда шыққан функцияның графигі кубтық парабола болатыны сендерге белгілі (29-сурет).



1)



2)



3)

29-сурет

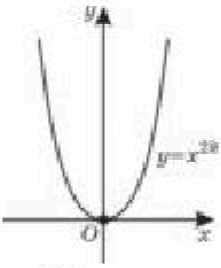
$y = x^{2n}$ функциясының графигі схемалық түрде $y = x^2$ функциясының графигінің түрін, ал $y = x^{2n+1}$ функциясының графигі кубтық параболаны береді.

Осы айтылғандарға сүйеніп $n = 2k$ және $n = 2k + 1$ болғандағы $y = x^n$ ($n \in N$) функциясының қасиеттерін беруге болады (20.1-кесте).

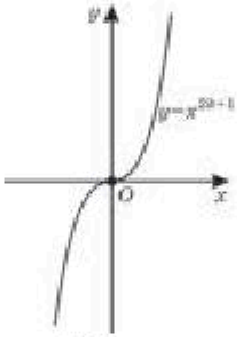
20.1-*кесте*

Функцияның қасиеттері	$y = x^n$, $n \in N$	
	$n = 2k$	$n = 2k + 1$
Анықталу облысы	R	R
Мәндер жиыны	$[0; +\infty)$	R
Жұптығы, тақтығы	жұп	тақ
Функцияның нөлдері	$x = 0$	$x = 0$
Өсу аралықтары	$[0; +\infty)$	R
Кему аралықтары	$(-\infty; 0]$	—
Ең үлкен мәні	—	—
Ең кіші мәні	$f(0) = 0$	—
Таңбатұрақтылық аралықтары	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ аралықтарында $f(x) > 0$	$(-\infty; 0)$ аралығында $f(x) < 0$; $(0; +\infty)$ аралығында $f(x) > 0$

$y = x^n$ ($n \in N$) функциясының $n = 2k$ және $n = 2k + 1$ болғандағы графиктері сәйкесінше 30- және 31-суреттерде көрсетілген.



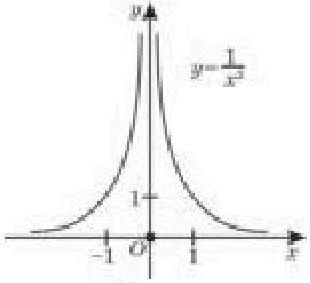
30-сурет



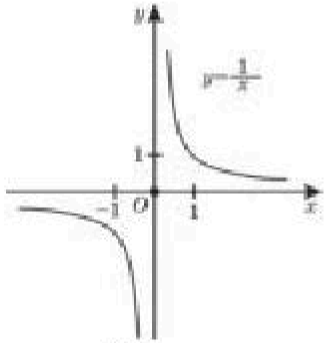
31-сурет

2. Егер r — бүтін теріс сан болса ($r = -n$, мұндағы n — натурал сан), онда $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ — *бүтін теріс көрсеткішті дәрежелік функцияны* аламыз.

n — жұп және n — тақ сан болған жағдайларға мысалдар қарастырайық. $n = 2$ болса, онда $y = \frac{1}{x^2}$ функциясын аламыз. Бұл функцияның графигі 32-суретте кескінделген. $n = 1$ болса, онда $y = \frac{1}{x}$ функциясын аламыз. Бұл функцияның графигі гипербола болады (33-сурет).



32-сурет



33-сурет

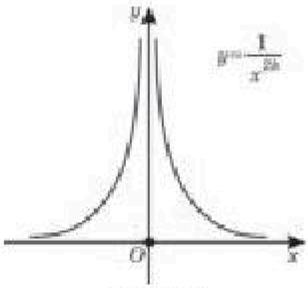
Енді $y = \frac{1}{x^2}$ және $y = \frac{1}{x}$ функцияларының графиктерін қолданып $n = 2k$ және $n = 2k + 1$ жағдайлары үшін $y = \frac{1}{x^n}$ функциясының қасиеттерін беруге болады (20.2-кесте).

20.2-*кесте*

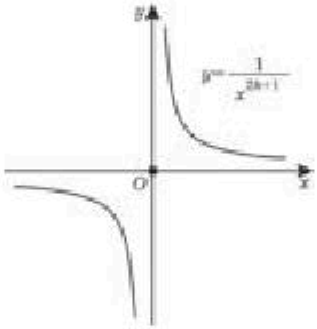
Функцияның қасиеттері	$y = x^{-n}$, $n \in N$	
	$n = 2k$	$n = 2k + 1$
Анықталу облысы	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Мәндер жиыны	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Жұптығы, тақтығы	жұп	тақ
Функцияның нөлдері	—	—
Өсу аралықтары	$(-\infty; 0)$	—
Кему аралықтары	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$ және $(0; +\infty)$
Ең үлкен мәні	—	—
Ең кіші мәні	—	—
Таңбатұрақтылық аралықтары	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ аралықтарында $f(x) > 0$	$(-\infty; 0)$ аралығында $f(x) < 0$; $(0; +\infty)$ аралығында $f(x) > 0$

$y = x^{-n}$ ($n \in N$) функциясының $n = 2k$ және $n = 2k + 1$ болғандағы графиктері сәйкесінше 34- және 35-суреттерде көрсетілген.

3. Егер $r = \frac{1}{n}$ (мұндағы $n > 1$ — натурал сан) болса, онда бөлшек көрсеткішті $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ дәрежелік функциясын аламыз.



34-сурет

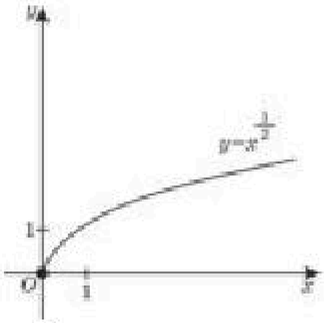


35-сурет

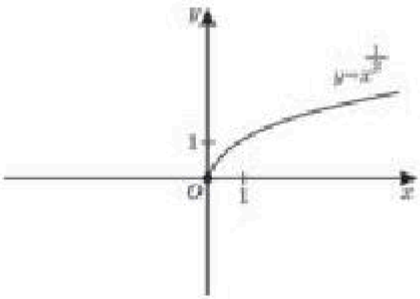
Мысал ретінде $n = 2$ және $n = 3$ жағдайларын қарастырайық. $y = x^{\frac{1}{2}}$ және $y = x^{\frac{1}{3}}$ функцияларының графиктері сәйкесінше 36.1 және 36.2-суреттерде көрсетілген. Осы функциялардың графиктерінің көмегімен $n = 2k$ және $n = 2k + 1$ болғандағы $y = x^{\frac{1}{n}}$ функциясының қасиеттерін анықтайық (21-кесте).

21-*кесте*

Функцияның қасиеттері	$y = x^{\frac{1}{n}}, n > 1$
	$n = 2k$ немесе $n = 2k + 1$
Анықталу облысы	$[0; +\infty)$
Мәндер жиыны	$[0; +\infty)$
Жұптығы, тақтығы	жұп емес, тақ емес
Функцияның нөлдері	$x = 0$
Өсу аралықтары	$[0; +\infty)$
Кему аралықтары	—
Ең үлкен мәні	—
Ең кіші мәні	$f(0) = 0$
Таңбатұрақтылық аралықтары	$(0; +\infty)$ аралығында $f(x) > 0$



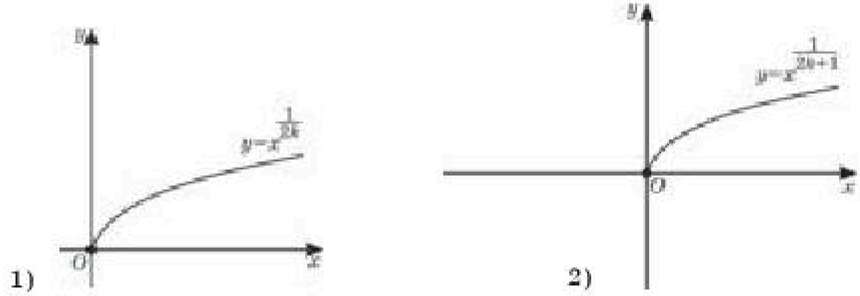
1)



2)

36-сурет

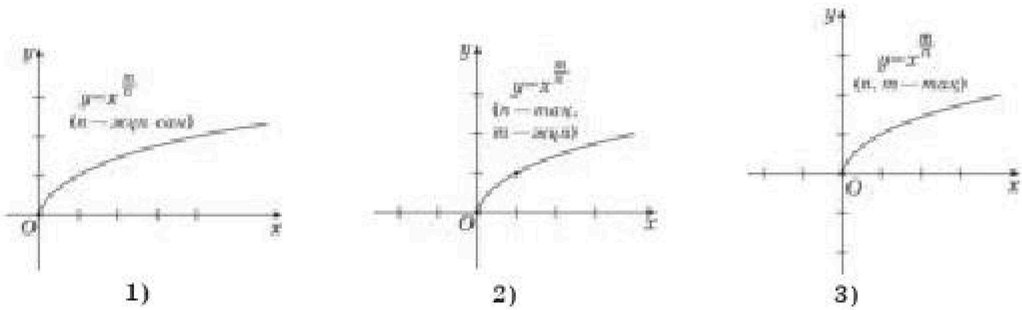
$y = x^{\frac{1}{n}}$ $(n > 1)$ функциясының $n = 2k$ және $n = 2k + 1$ болғандағы графиктері сәйкесінше 37.1 және 37.2-суреттерде көрсетілген.



37-сурет

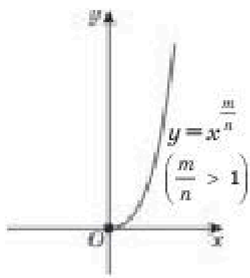
4. Егер $r = \frac{m}{n}$ (мұндағы n, m — натурал сандар) және $m < n$ болса, онда *оң бөлшек көрсеткішті* $y = x^{\frac{m}{n}}$ $\left(0 < \frac{m}{n} < 1\right)$ *дәрежелік функцияны* аламыз.

Осы функция графигінің жалпы түрі 38.1-, 2-, 3-суреттерде кескінделген.



38-сурет

5. $r = \frac{m}{n}$ (мұндағы n, m — натурал сандар) және $\frac{m}{n} > 1$ жағдайында оң бөлшек көрсеткішті дәрежелік функцияны аламыз. Бұл функцияның графигі 39-суретте берілген.

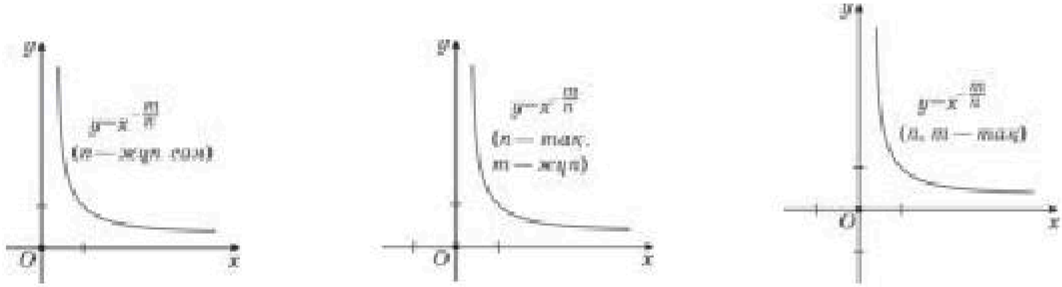


39-сурет

6. Егер $r = -\frac{m}{n}$, мұндағы n, m өзара жай натурал сандар болса, онда теріс бөлшек көрсеткішті $y = x^{-\frac{m}{n}}$ дәрежелік функциясын аламыз.

$y = x^{-\frac{m}{n}}$ функциясы графигінің түрі n, m мәндерінің жұп және тақ болуына байланысты болғандықтан 3-пункттегі сияқты мұнда да үш жағдай қарастырылады.

$y = x^{-\frac{m}{n}}$ функциясы графигінің жалпы түрі әрбір жағдай үшін сәйкесінше 40(1, 2, 3)-суретте көрсетілген.



1) 2) 3)

40-сурет

МЫСАЛ

1. $y = x^5$ натурал көрсеткіштік функциясының анықталу облысын, функцияның нөлдерін, жұптығын немесе тақтығын, өсу және кему аралықтарын, ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтайық.

Шешуі. Алдымен берілген функция дәрежелік функцияның қай түріне жататынын анықтайық. Мұнда $n = 5$, яғни натурал сан. Демек, $y = x^5$ функциясы — натурал көрсеткішті функция. Сондықтан оның қасиеттерін анықтау үшін 1-кестедегі n тақ болған жағдайды қолданамыз.

Функцияның анықталу облысы — барлық нақты сандар жиыны; функцияның нөлі — $x = 0$ нүктесі; функция — тақ, барлық нақты сандар жиынында өспелі; функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері жоқ.

МЫСАЛ

2. $y = x^{-4}$ функциясының өсу және кему аралықтарын анықтайық.

Шешуі. $y = x^{-4}$ функциясы — бүтін теріс көрсеткішті дәрежелік функция. Сондықтан 20.2-кестенің $n = 2k$ жағдайына сәйкес берілген функция $(-\infty; 0)$ аралығында өседі, $(0; +\infty)$ аралығында кемиді.

$y = x^{-4}$ функциясының қалған қасиеттерін өздерің анықтаңдар.

МЫСАЛ

3. $y = x^{\frac{1}{7}}$ функциясының анықталу облысын, ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтайық.

Шешуі. Берілген функция бөлшек көрсеткішті дәрежелік функцияға жатады. Демек, $y = x^{\frac{1}{n}}$ функциясының анықталу облысы $[0; +\infty)$ аралығы болып табылады және функция жоғарыдан шектелмегендіктен, оның ең үлкен мәні жоқ, ең кіші мәні нөлге тең.

МЫСАЛ

4. $y = x^{\frac{4}{9}}$ функциясының жұп немесе тақ болатынын анықтайық.

Шешуі. $y = x^{\frac{4}{9}}$ функциясы жұп та, тақ та емес, себебі $[0; +\infty)$ жиынында анықталған.

$y = x^{\frac{4}{9}}$ функциясының қалған қасиеттерін өздерің анықтаңдар.

МЫСАЛ

5. $y = x^{-\frac{5}{7}}$ функциясының таңбатұрақтылық аралықтарын анықтайық.

Шешуі. $y = x^{-\frac{5}{7}}$ функциясы — теріс бөлшек көрсеткішті дәрежелік функция. Көрсеткіші $-\frac{5}{7}$ саны болғандықтан, берілген функция $(0; +\infty)$ аралығында анықталған және $(0; +\infty)$ аралығында оң мәндерді қабылдайды.

$y = x^{-\frac{5}{7}}$ функциясының қалған қасиеттерін өздерің анықтаңдар.

?

1. Дәрежелік функциялардың әртүрлі болуының себебі неде?
2. Қандай жағдайда дәрежелік функция жоғарыдан немесе төменнен шектелген болады?
3. $y = x^{\frac{m}{n}}$ функциясындағы $\frac{m}{n}$ бөлшегі неге қысқартылмайтын бөлшек болуы керек?

Жаттығулар

A

12.1. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x) = x^5$; 2) $f(x) = x^{-7}$; 3) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$;

4) $f(x) = x^{\frac{9}{10}}$; 5) $f(x) = x^{\frac{4}{7}}$; 6) $f(x) = x^{\frac{11}{13}}$;

7) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$; 8) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$; 9) $f(x) = x^{-\frac{5}{7}}$.

12.2. $y = f(x)$ функциясының жұп немесе тақ болуын тексеріңдер:

1) $f(x) = x^{11}$; 2) $f(x) = x^{\frac{1}{9}}$; 3) $f(x) = x^{-8}$;

4) $f(x) = x^{\frac{11}{12}}$; 5) $f(x) = x^{\frac{12}{13}}$; 6) $f(x) = x^{\frac{15}{17}}$;

7) $f(x) = x^{-\frac{7}{10}}$; 8) $f(x) = x^{-\frac{8}{13}}$; 9) $f(x) = x^{-\frac{11}{13}}$.

B

12.3. $y = f(x)$ функциясының таңбатұрақтылық аралықтарын анықтаңдар:

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = x^{-4}$; 3) $f(x) = x^{\frac{1}{7}}$;

4) $f(x) = (1 + x)^{\frac{7}{9}}$; 5) $f(x) = x^{\frac{5}{8}} + 2$; 6) $f(x) = x^{\frac{6}{5}} - 1$;

7) $f(x) = (3 - x)^{-\frac{5}{6}}$; 8) $f(x) = 1 - x^{-\frac{4}{7}}$; 9) $f(x) = (x + 2)^{-\frac{3}{5}}$.

12.4. $y = f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар:

1) $f(x) = 1 + x^{7}$; 2) $f(x) = 2 - x^{-10}$; 3) $f(x) = 3 + x^{\frac{1}{9}}$;

4) $f(x) = 4 - x^{\frac{11}{16}}$; 5) $f(x) = 5 - x^{\frac{13}{15}}$; 6) $f(x) = (-x)^{\frac{11}{13}}$;

7) $f(x) = (-x)^{-\frac{7}{8}}$; 8) $f(x) = (-x)^{-\frac{8}{11}}$; 9) $f(x) = (-x + 0,5)^{-\frac{11}{17}}$.

12.5. $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар және бірсарынды аралықтарын табыңдар:

1) $f(x) = x^4 + 2$; 2) $f(x) = x^3 - 3$;

3) $f(x) = 1 - x^{\frac{1}{2}}$; 4) $f(x) = -1 + x^{-\frac{1}{3}}$.

C

12.6. 1) Натурал санға кері; 2) оң бөлшек; 3) теріс бөлшек көрсеткішті жұп және тақ дәрежелік функцияларға екі мысалдан келтіріңдер.

12.7. 1) $x \in [0; +\infty)$; 2) $x \in (0; +\infty)$; 3) $x \in R$ аралықтарында өсетін бөлшек көрсеткішті дәрежелік функцияға мысалдар келтіріңдер.

12.8. 1) $x \in R$; 2) $x \in [0; +\infty)$; 3) $x \in (0; +\infty)$ аралықтарында кемитін бөлшек көрсеткішті дәрежелік функцияға мысалдар келтіріңдер.

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИКТЕР ЖАЙЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

12.9. $\sqrt{\ }$ және $\sqrt[n]{\ }$ белгілерін француз математигі Альбер Жирар, неміс философы және математигі Готфрид Вильгельм Лейбниц бірінен соң бірі қолдана бастады. Швейцар математигі Иоганн Бернулли x^r функциясынан анықталған интегралын табудың формуласын қорытып шығарған.

А. Жирар
(1595—1632)

И. Бернулли
(1667—1748)

ҚАЙТАЛАУ

12.10. Теңсіздікті шешіңдер:
1) $\cos 3 \cdot (2x - 8) < 0$; 2) $\sin 2 \cdot \cos 6 \cdot (x^2 - 9) < 0$.

12.11. Теңсіздікті дәрежені төмендету тәсілімен шешіңдер:
1) $\cos^2 x \geqslant 0{,}5$; 2) $\sin^2 x \geqslant 1$; 3) $\cos^2 x < 1$; 4) $\sin^2 2x < 1$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Туынды, интеграл, дәрежелік функция, дифференциалдау формулалары, алғашқы функциялар кестесі.

§13. НАҚТЫ КӨРСЕТКІШТІ ДӘРЕЖЕЛІК ФУНКЦИЯНЫҢ ТУЫНДЫСЫ МЕН ИНТЕГРАЛЫ

Сендер нақты көрсеткішті дәрежелік функцияның туындысын табу ережелерін қолдануды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, дәрежелік функция, туынды, алғашқы функция, интеграл

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (1) формуласы белгілі, мұндағы n — натурал сан.

(1)-формуладағы кез келген n бүтін сан үшін $(x^n)' = nx^{n-1}$ формуласының ақиқат болатынын математикалық индукция әдісімен дәлелдеуге болады.

Дәлелдеу. 1) $n = 1$ болғанда, (1)-формула $x' = 1$ түріне келеді. Бұл теңдік ақиқат. Өйткені $f(x) = x$ функциясының туындысын анықтасақ, $f(x) = x$, $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x$.

Демек, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, бұдан $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$ шығады. Сондықтан $n = 1$ болғанда (1)-формула ақиқат.

2) $n = k$ үшін (1)-формула ақиқат деп алайық, яғни $(x^k)' = kx^{k-1}$.

3) $n = k + 1$ үшін $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$ екенін дәлелдейік. Ол үшін x^{k+1} өрнегін көбейтінді түрінде жазып $(x^k \cdot x)$, содан кейін көбейтіндінің туындысын табу ережесін қолданамыз:

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)'.$$

$x' = 1$ ақиқат және $(x^k)' = kx^{k-1}$ дұрыс деп ұйғарғанымызды ескеріп, мынаған келеміз: $(x^{k+1})' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k + 1)x^k$. Демек, (1)-формула $n = k + 1$ үшін де ақиқат. ◼

Сонымен, (1)-формула кез келген n бүтін саны үшін ақиқат.

α кез келген нақты сан болса, онда $y = x^\alpha$ дәрежелік функциясының туындысы

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad (2)$$

формуласымен табылады.

МЫСАЛ

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. $y' = \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} =$
$= -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

Жауабы: $-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

МЫСАЛ

2. Абсциссасы $x = -1$ нүктесінде $y = x^{-4}$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазайық.

Шешуі. Абсциссасы x_0 болатын нүктеде функция графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуі $y = y_0 + y_0'(x - x_0)$. Сондықтан келесілерді табамыз:

$y(-1) = (-1)^{-4} = 1;$
$y' = (x^{-4})' = -4x^{-5};$
$y'(-1) = -4 \cdot (-1)^{-5} = 4.$

Жанаманың теңдеуі: $y = 1 + 4(x + 1) = 4x + 5$.

Жауабы: $y = 4x + 5$.

Сендер нақты көрсеткішті дәрежелік функцияның интегралын табуды үйренесіңдер.

СЕНДЕР БІЛЕСІНДЕР:

$f(x) = x^k$ функциясының алғашқы функциясы

$$F(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \qquad (3)$$

мұндағы k — кез келген бүтін сан және $k \neq -1$ екені белгілі.

Алғашқы функцияны табудың (3)-формуласы нақты көрсеткішті дәрежелік функция үшін де ақиқат екенін туындының формуласын дәлелдегендей көрсетуге болады, яғни кез келген нақты сан үшін дәрежелік функцияның интегралы мына формуламен анықталады:

$$\int x^{\beta}\,dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + C,\ \beta \neq -1. \qquad (4)$$

МЫСАЛ

3. $y = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ функциясының 1-ден 4-ке дейінгі анықталған интегралын есептейік.

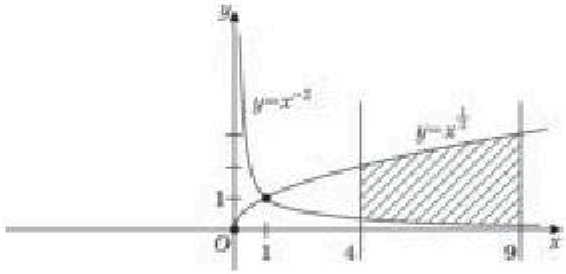
Шешуі. $\displaystyle\int_1^4\left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)dx = -\frac{1}{2}\int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\left.\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right|_1^4 = -\frac{1}{2}\left.\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_1^4 = \left.\frac{1}{\sqrt{x}}\right|_1^4 =$
$= \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$.

Жауабы: $-\dfrac{1}{2}$.

МЫСАЛ

4. $y = x^{-2}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $x = 4$, $x = 9$ қисықтарымен шектелген жазық фигураның ауданын табайық.

Шешуі. Берілген қисықтармен шектелген жазық фигура 41-суретте көрсетілген. Мұндағы $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $g(x) = x^{-2}$, $a = 4$, $b = 9$.



41-сурет

$$S_ф = \int_4^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-2}\right)dx = \left(\frac{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^9 = \frac{2 \cdot 9^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{9} - \frac{2 \cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{4} =$$

$$= 18 + \frac{1}{9} - \frac{16}{3} - \frac{1}{4} = 12\frac{19}{36}.$$

Жауабы: $12\frac{19}{36}$ кв. бірл.

1. Егер α және β рационал сандар және $\alpha = \frac{m}{n}$ немесе $\beta = \frac{m}{n}$ болса, онда $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ және $\int x^{\beta}\,dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + C$ формулаларындағы $\frac{m}{n}$ неге қысқартылмайтын бөлшек болу керек?

2. 1—4-мысалдарда дәреженің қандай қасиеттері қолданылды?

Жаттығулар

А

13.1. $y = f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

1) $f(x) = x^9$; 2) $f(x) = x^{-1}$; 3) $f(x) = \frac{1}{7}x^7$; 4) $f(x) = x^{-\frac{11}{6}}$.

13.2. $y = f(x)$ функциясы туындысының $x = 1$ нүктесіндегі мәнін табыңдар:

1) $f(x) = 2x^4$; 2) $f(x) = x^{-3}$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^{-3}}$; 4) $f(x) = x^{-2,5}$.

13.3. $y = f(x)$ функциясының анықталмаған интегралын табыңдар:

1) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 2) $f(x) = \dfrac{2}{3\sqrt{x^3}}$; 3) $f(x) = \dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{5}}$; 4) $f(x) = x^{-\frac{7}{8}}$.

13.4. $y = f(x)$ функциясы туындысының x_0 нүктесіндегі мәнін есептеңдер:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 9$;

3) $f(x) = -\dfrac{3}{x^2}$, $x_0 = 6$; 4) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, $x_0 = 1$.

13.5. Абсциссасы x_0 болатын нүктеде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = x^{\frac{4}{5}}$, $x_0 = -1$.

13.6. Берілген қисықтармен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар:

1) $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 9$; 2) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = 1$, $x = -3$, $x = -2$.

B

13.7. $y = f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

1) $f(x) = x\sqrt{x}$; 2) $f(x) = x^{\sqrt{3}}$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$;

4) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$; 5) $f(x) = x\sqrt[3]{x^2}$; 6) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^4}$.

13.8. $y = f(x)$ функциясының анықталмаған интегралын табыңдар және дифференциалдау арқылы дұрыстығын тексеріңдер:

1) $f(x) = 5x^{-\frac{4}{5}}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$;

3) $f(x) = \dfrac{2x^{-1} + 3x}{4x^3}$; 4) $f(x) = (x^5 + x)^2$.

13.9. Есептеңдер:

1) $\int\limits_1^9 (\sqrt{x} + x)dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{1} (0{,}25x + 3)^3 dx$.

13.10. $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{6} \cdot \cos\dfrac{x}{6}$ функциясы $f(x) = \dfrac{1}{12}\cos\dfrac{x}{3}$ функциясының алғашқы функциясы болатынын дәлелдеңдер.

13.11. $f(x) = \left(\dfrac{x+3}{2}\right)^3$ функциясының $M(0;\ 0)$ нүктесі арқылы өтетін алғашқы функциясын табыңдар.

13.12. Интегралды есептеңдер:

1) $\int\limits_{-3}^{-2} 3x^{-2}dx$; 2) $\int\limits_{1}^{32} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$; 3) $\int\limits_{1}^{3} \left(x^3 + x\right)^2 dx$.

13.13. Берілген қисықтармен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар:

1) $y = -x^2 + 2x,\ y = -3$; 2) $y = \sqrt{x},\ y = 2,\ x = 9$.

C

13.14. $y = f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$; 2) $y = \frac{1}{x\sqrt[3]{2x}}$; 3) $y = \frac{1 + 2x - x^4}{x\sqrt{x}}$; 4) $y = x^{-\sqrt{7}}$.

13.15. Абсциссасы $x = 32$ болатын нүктеде $f(x) = x^{-\frac{3}{5}} + 2x^2$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар.

13.16. $y = f(x)$ функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін жазыңдар:

1) $f(x) = \sqrt[3]{2x\sqrt{3x}} + \pi$; 2) $f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} - \sqrt{2}$.

13.17. Анықталмаған интегралды табыңдар:

1) $\int \frac{dx}{7\cos^2(3 - x)}$; 2) $\int \frac{\cos^2 x dx}{1 - \sin x}$.

13.18. $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$ функциясының $M(1;\ 1{,}5)$ нүктесі арқылы өтетін алғашқы функциясын табыңдар.

13.19. Анықталған интегралды табыңдар:

1) $\int\limits_{1}^{8} \frac{5dx}{2x^{\frac{2}{3}}}$; 2) $\int\limits_{4}^{9} \frac{3}{x^{-\frac{1}{2}}}dx$; 3) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt[4]{2x - 1}dx$.

13.20. Берілген қисықтармен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар:

1) $y = x^2,\ x = 0,\ x = 5,\ y = \frac{1}{x^2}\ (x \geqslant 0)$;

2) $y = x^3,\ y = \sqrt[3]{x},\ x = -1,\ x = 0$.

13.21. $a \in (1;\ 2)$ болғанда $y = \frac{1}{x^2},\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0$ қисықтарымен шектелген фигураның ауданы a-ның қандай мәнінде $x = a$ түзуімен тура екіге бөлінеді?

КАЙТАЛАУ

13.22. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}-\frac{8}{x^2-4}=0$; 2) $\frac{2}{x}+\frac{x^2+8}{x^2-4x}+\frac{6}{4-x}=0$;

3) $\frac{4x-14}{x-3}=x-2$; 4) $\frac{x^2-2x}{x-1}-2=\frac{2x-1}{1-x}$.

13.23. 1) $2x+\frac{1}{2x}=3$; 2) $2x-\frac{1}{2x}=5$; 3) $2x+\frac{1}{2x}=2$; 4) $2x-\frac{1}{2x}=4$ болса, онда $4x^2+\frac{1}{4x^2}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

13.24. $y=|x^2-2x-8|$ функциясының графигін салыңдар. Графикті қолданып,

1) функцияның бірсарындылық аралықтарын анықтаңдар;

2) функция графигінің симметрия осінің теңдеуін жазыңдар;

3) $p=|x^2-2x-8|$ теңдеуінің төрт түбірі болатындай p параметрінің мәндерін табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $\left(\frac{125}{512}\right)^{-\frac{1}{3}}$ өрнегінің мәнін есептеңдер:

A) 0,8; B) $\frac{5}{8}$; C) $\frac{5}{4}$; D) 1,6.

2. $\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}}$ өрнегін ықшамдап, $x=0{,}008$ болғандағы мәнін табыңдар:

A) $\frac{3}{2}$; B) $\frac{1}{6}$; C) $\frac{2}{3}$; D) $\frac{3}{4}$.

3. $\left(\frac{b^{\frac{1}{3}}}{b-1}+\frac{b}{b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}\right)\cdot\left(b^{\frac{1}{3}}-1\right)\cdot\frac{b-1}{b^{\frac{1}{3}}}$ өрнегін ықшамдаңдар:

A) b; B) $-b$; C) $b^{\frac{2}{3}}-1$; D) $b^{\frac{1}{3}}-1$.

4. $\left(k^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(k^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}-(kq)^{\frac{1}{3}}\right)$ өрнегін қосынды түрінде жазыңдар:

A) $k-q$; B) $k+q$; C) k^3-q^3; D) k^3+q^3.

5. $\frac{27^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{625^{-\frac{1}{4}}}$ өрнегінің мәнін есептеңдер:

A) 10; B) $\frac{1}{5}$; C) 5; D) $-\frac{1}{5}$.

6. Егер $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 5$ болса, онда функция туындысының $x = 8$ нүктесіндегі мәнін есептеңдер:

A) $-\frac{1}{3}$; B) $6\frac{1}{3}$; C) $\frac{16}{3}$; D) $\frac{1}{3}$.

7. Абсциссасы $x = \frac{1}{27}$ болатын нүктеде $y = x^{-\frac{1}{3}} + 1$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

A) $y = 27x + 5$; B) $y = -27x + 5$;
C) $y = -27x + 4$; D) $y = -9x + 5$.

8. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x$ функциясының экстремумдарын табыңдар:

A) $x_{min} = 1$; B) $x_{min} = 1$; $x_{max} = -1$;
C) экстремумы жоқ; D) $x_{max} = 1$.

9. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x$ функциясының өсу және кему аралықтарын анықтаңдар:

A) $[0; 4]$ аралығында өседі, $[4; +\infty)$ аралығында кемиді;
B) $(-\infty; 4)$ аралығында өседі, $(4; +\infty)$ аралығында кемиді;
C) $[0; 4]$ аралығында кемиді, $[4; +\infty)$ аралығында өседі;
D) $(-\infty; 4)$ аралығында кемиді, $(4; +\infty)$ аралығында өседі.

10. $y = x^{\frac{5}{2}}$ функциясының $[1; 4]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәнін табыңдар:

A) 1; 0; B) 32; 0; C) 16; 32; D) 32; 1.

11. $y = \frac{1}{x^4}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$ қисықтарымен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар:

A) $\frac{28}{81}$; B) $\frac{26}{81}$; C) $\frac{8}{27}$; D) $\frac{29}{81}$.

12. $\int_0^{64}\left(\frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)dx$ өрнегінің мәнін есептеңдер:

A) 578; B) 576; C) 656; D) 568.

13. $y = \frac{3}{\sqrt{10}}x^{\frac{1}{3}}$ функциясының графигін Ox осіне қатысты айналдырғанда шыққан дененің $x = 0$ нүктесінен $x = 1$ нүктесіне дейінгі аралықтағы көлемін табыңдар:

A) π; B) $\frac{9}{10}\pi$; C) $\frac{10}{9}\pi$; D) $\frac{27}{50}\pi$.

Математикалық сауаттылық бойынша тест тапсырмалары

14. Оқушы сөмкесінің бағасы 80 тг-ге арзандады. Бастапқы бағасы 800 тг болса, жаңа бағаны қанша пайызға көтергенде сөмкенің бастапқы бағасын алуға болатынын табыңдар (Жауабын бүтінге дейін дөңгелектеңдер):

A) 10%; B) 11%; C) 12%; D) 13%; E) 15%.

15. Жасыл түске боялған текше бірдей 64 текшеге бөлінген. Барлық жақтары боялмаған текшелер санын табыңдар:

A) 6; B) 18; C) 16; D) 24; E) 8.

16. Азамат, Дәурен және Абай баскетбол ойнады. Әрқайсысы допты 16 реттен лақтырған. 22-кестедегі мәліметтерді қолданып, X пен Y-тің мәндерін табыңдар:

22-кесте

	Себетке түсіру саны	Тигізу пайызы
Азамат	8	50%
Дәурен	12	Y%
Абай	X	25%

A) $X=4$, $Y=75$; B) $X=4$, $Y=65$; C) $X=6$, $Y=75$;
D) $X=4$, $Y=50$; E) $X=8$, $Y=50$.

17. Даяшының жалақысы тұтынушы тапсырысының 15%-ын құрайды. Даяшының бір күндегі тұтынушыға қызмет көрсету кестесін толтырыңдар (23-кесте).

23-кесте

Тұтынушы	Тапсырыс сомасы	Даяшының жалақысы
Бірінші тұтынушы	9 400 тг	
Екінші тұтынушы	10 200 тг	
Үшінші тұтынушы	5 400 тг	
Төртінші тұтынушы	7 600 тг	
Бесінші тұтынушы	9 200 тг	
Алтыншы тұтынушы	12 200 тг	

Даяшының бір күнгі жалақысын табыңдар:

A) 7941 тг; B) 8461 тг; C) 7351 тг; D) 8240 тг; E) 8271 тг.

18. $M(1; 0)$ нүктесі арқылы $y = x^2 - 2x + 2$ функциясының графигіне жанамалар жүргізілген. Жанасу нүктесінің координаталарын табыңдар:

A) $(0; 1)$ және $(2; 2)$; B) $(0; 2)$ және $(2; 0)$;
C) $(0; 3)$ және $(2; 3)$; D) $(0; 2)$ және $(2; 2)$;
E) $(1; 1)$ және $(3; 3)$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Теңдеу, теңдеудің түбірі, теңдеуді шешу, теңдеулер жүйесі, теңдеулер жүйесін шешу, өрнектің мүмкін болатын мәндер жиыны, өрнектерді тепе-тең түрлендіру, мәндес теңдеулер, мәндес теңдеулер жүйесі, n-ші дәрежелі түбір және оның қасиеттері.

IV ТАРАУ

ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР

§14. ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕЛЕРІ

Сендер *иррационал теңдеу* ұғымымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Теңдеу, иррационал теңдеу, айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны, бөгде түбір, теңдеуді шешу

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Рационал теңдеулер және олардың жүйелерін шешу тәсілдерін білесіңдер.

Анықтама. ***Иррационал теңдеу*** *деп айнымалысы түбір таңбасының ішінде немесе бөлшек көрсеткішті дәреженің негізі болатын теңдеуді айтады.*

Мысалы:

$$\sqrt{x+3} = 2x - 1; \qquad \sqrt{x-1} - 12\sqrt[3]{x} = 3;$$

$$2x^{\frac{1}{3}} - 5 = 0; \qquad (2x - x)^{\frac{1}{3}} = (x+6)^{\frac{1}{4}} + 7x.$$

Иррационал теңдеуді шығармастан бұрын берілген теңдеудің түріне назар аудару керек. Ол "Берілген теңдеуді шешудің мәні бар ма, егер теңдеу шешілсе, онда оны қандай тәсілмен шешуге болады?" деген сұраққа жауап алуға мүмкіндік береді. Мысалы, $\sqrt[4]{x+3} = -2$ теңдеуін шығармауға болады, себебі арифметикалық түбірдің мәні тек қана оң сан болады.

Сендер айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынын табу бойынша білімдеріңді кеңейтесіңдер.

Иррационал теңдеуді шығару кезінде теңдеуге кіретін түбірлерді *арифметикалық түбірлер* деп қарастырады. Ол үшін түбір таңбасының ішіндегі айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынын табу керек.

Сендер теңдеудің екі жағын бірдей n-ші дәрежеге шығару әдісі арқылы иррационал теңдеулерді шешуді үйренесіңдер.

Иррационал теңдеулерді шешудің жалпы әдісі:

1) егер иррационал теңдеуде бір ғана түбір белгісі болса, онда түбір белгісі теңдеудің бір жақ бөлігінде қалатындай етіп түрлендіреміз. Одан

кейін теңдеудің екі жақ бөлігін де бірдей дәрежеге шығару арқылы рационал теңдеу аламыз;

2) егер иррационал теңдеуде екі немесе одан да көп түбір белгісі болса, онда алдымен түбірдің біреуін теңдеудің бір жақ бөлігінде қалдырып, теңдеудің екі жақ бөлігін бірдей дәрежеге шығарамыз. Содан кейін рационал теңдеу алынғанша осы тәсілді қайталаймыз.

Иррационал теңдеудің екі жақ бөлігін бірдей дәрежеге шығарған кезде шыққан теңдеу кейбір жағдайда берілген теңдеуге мәндес болмайды. Сондықтан айнымалының табылған мәндерін міндетті түрде тексеру қажет. Тексеру иррационал теңдеуді шешудің құрамдас бөлігі болып саналады, өйткені табылған айнымалының мәндері берілген теңдеуді қанағаттандырмауы мүмкін. Айнымалының мұндай мәндерін *бөгде түбірлер* деп атайды.

Иррационал теңдеулерді шешуге мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ

1. $\sqrt{x+2} = x$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $\sqrt{x+2} = x$ иррационал теңдеуінің екі жақ бөлігін квадраттаймыз: $x + 2 = x^2$ немесе $x^2 - x - 2 = 0$, соңғы теңдеудің түбірлері: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Тексеру. 1) $x = 2$, онда $\sqrt{2+2} = 2$; $2 = 2$ ақиқат.

2) $x = -1$, онда $\sqrt{-1+2} = -1$; $1 = -1$ ақиқат емес.

Демек, $x = -1$ бөгде түбір. Берілген иррационал теңдеудің түбірі тек 2 саны болады.

Жауабы: 2.

МЫСАЛ

2. $(x - 5)(x + 2)\sqrt{x-7} = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиынын табайық. $x - 7 > 0$ немесе $x > 7$. Сонда $x \in [7; +\infty)$. Берілген теңдеуді $x - 5 = 0$, $x + 2 = 0$, $\sqrt{x-7} = 0$ теңдеулерінің жиынтығымен алмастырамыз. Әрқайсысын шешіп, мына мәндерді аламыз: $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 7$.

x_1 және x_2 мәндері айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынына тиісті емес. Сондықтан берілген иррационал теңдеудің түбірі 7 саны болады.

Жауабы: 7.

МЫСАЛ

3. $\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 = 2x$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Берілген теңдеуде бір ғана радикал белгісі бар. Теңдеудің сол жақ бөлігіндегі 1 санын оң жақ бөлігіне шығару арқылы радикал белгісін бөліп аламыз: $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1$. Енді теңдеудің екі жақ бөлігін квадраттаймыз:

$x^2 + 5x + 1 = (2x - 1)^2$ немесе $x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$.

Осыдан $3x^2 - 9x = 0$ немесе $x^2 - 3x = 0$, немесе $x(x - 3) = 0$ аламыз, бұдан $x_1 = 0$ және $x_2 = 3$.

Тексеру. $\sqrt{0^2 + 5 \cdot 0 + 1} + 1 \neq 2 \cdot 0$. Демек, $x = 0$ түбірі теңдеуді қанағаттандырмайды, яғни бұл — бөгде түбір. Тура осылай $x_2 = 3$ үшін тексерсек, ол берілген теңдеуді қанағаттандырады. Демек, берілген иррационал теңдеудің түбірі 3 саны болады.

Жауабы: 3.

Сендер айнымалыны алмастыру әдісі арқылы иррационал теңдеулерді шешуді үйренесіңдер.

Кейбір жағдайларда иррационал теңдеулерді шешу кезінде *жаңа айнымалы енгізу тәсілі* күрделі иррационал теңдеуді қарапайым түрге келтіру мақсатында қолданылады.

МЫСАЛ

4. $\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} - 2 = 0$ теңдеуінің түбірлерін табайық.

Шешуі. Берілген теңдеуді шешу үшін $y = \sqrt[8]{x}$ белгілеуін енгізіп, $y^2 + y - 2 = 0$ теңдеуін аламыз. Теңдеудің түбірлері: $y_1 = 1$, $y_2 = -2$. Онда $\sqrt[8]{x} = 1$ және $\sqrt[8]{x} = -2$. $\sqrt[8]{x} = 1$ теңдеуінің түбірі $x = 1$ саны, ал екінші теңдеудің түбірі болмайды, себебі $\sqrt[8]{x} > 0$. Демек, берілген теңдеудің түбірі 1 саны болады.

Жауабы: 1.

МЫСАЛ

5. $\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 - 1}} = x - 1$ теңдеуінің түбірлерін табайық.

Шешуі. Берілген теңдеудің екі жақ бөлігін квадраттаймыз:

$$1 - x\sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 2x + 1 \text{ немесе } -x\sqrt{x^2 - 1} = x(x - 2).$$

Шыққан теңдеуді x-ке қысқартуға болмайды, өйткені мұндай жағдайда теңдеудің бір шешімі жоғалады. Олай болса, соңғы теңдеуді мына түрге келтіреміз:

$$-x\sqrt{x^2 - 1} - x(x - 2) = 0 \text{ немесе } -x\left(\sqrt{x^2 - 1} + (x - 2)\right) = 0,$$

$$-x = 0 \text{ немесе } \sqrt{x^2 - 1} + x - 2 = 0,$$

$$x = 0 \text{ немесе } \sqrt{x^2 - 1} = -x + 2.$$

Соңғы теңдеудің екі жақ бөлігін екінші дәрежеге шығарамыз:

$$x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4, \text{ осыдан } x = \frac{5}{4}.$$

Тексеру жүргізсек, $x = 0$ мәні берілген теңдеуді қанағаттандырмайтынына, ал $x = \frac{5}{4}$ мәні берілген теңдеуді ақиқат теңдікке айналдыратынына көз жеткіземіз. Демек, берілген теңдеудің түбірі $\frac{5}{4}$.

Жауабы: $\frac{5}{4}$.

МЫСАЛ

6. $(x + 34)^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{x - 3} = 1$ теңдеуінің түбірлерін табайық.

Шешуі. Берілген теңдеуді шешу үшін оның сол жақ бөлігіндегі дәрежені түбір түрінде жазсақ, $\sqrt[3]{x + 34} - \sqrt[3]{x - 3} = 1$ теңдеуі шығады. Соңғы теңдеуді мына түрге келтіреміз: $\sqrt[3]{x + 34} = 1 + \sqrt[3]{x - 3}$. Шыққан теңдеудің екі жақ бөлігін үшінші дәрежеге шығарамыз:

$$x + 34 = 1 + 3\sqrt[3]{x - 3} + 3\sqrt[3]{(x - 3)^2} + x - 3,$$

$$36 = 3\sqrt[3]{x - 3} + 3\sqrt[3]{(x - 3)^2} \text{ немесе } \sqrt[3]{(x - 3)^2} + \sqrt[3]{x - 3} - 12 = 0.$$

$y = \sqrt[3]{x - 3}$ айнымалысын енгізіп, $y^2 + y - 12 = 0$ теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеудің түбірлері: $y_1 = 3$, $y_2 = -4$. Сонымен, берілген теңдеу $\sqrt[3]{x - 3} = 3$ немесе $\sqrt[3]{x - 3} = -4$ теңдеулеріне мәндес болады. Теңдеулердің екі жақ бөлігін үшінші дәрежеге шығарып, $x - 3 = 27$ немесе $x - 3 = -64$ теңдеулерін аламыз.

Демек, $x = 30$ немесе $x = -61$. Тексеру арқылы x айнымалысының екі мәні де берілген теңдеудің түбірі болатыны шығады.

Жауабы: 30; –61.

Сендер иррационал теңдеулер жүйелерін шешуді үйренесіңдер.

Анықтама. *Құрамында иррационал теңдеуі бар жүйені* ***иррационал теңдеулер жүйесі*** *деп атайды.*

Иррационал теңдеулер жүйесін шығарған кезде рационал теңдеулерді және рационал теңдеулер жүйесін шешу тәсілдері қолданылады.

Мысал қарастырайық.

МЫСАЛ

7. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ x + y = 35 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешейік.

Шешуі. $\sqrt[3]{x} = a$, $\sqrt[3]{y} = b$ белгілеулерін енгіземіз. Сонда берілген теңдеулер жүйесі мынадай жүйеге көшеді:

$$\begin{cases} a + b = 5, \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} a + b = 5, \\ a^2 - ab + b^2 = 7. \end{cases}$$

Соңғы теңдеулер жүйесіне алмастыру тәсілін қолданып $a = 2$, $b = 3$ және $a = 3$, $b = 2$ мәндерін аламыз. Енді $\sqrt[3]{x} = a$ және $\sqrt[3]{x} = b$ белгілеулерін ескеріп x және y айнымалыларының мәндерін табамыз:

$\sqrt[3]{x} = 2$ және $\sqrt[3]{y} = 3$, бұдан $x_1 = 8$, $y_1 = 27$;

$\sqrt[3]{x} = 3$ және $\sqrt[3]{y} = 2$, бұдан $x_2 = 27$, $y_2 = 8$.

Тексеру: 1) $x = 8$ және $y = 27$ болса, онда $\begin{cases} \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 5, \\ 8 + 27 = 35; \end{cases}$

2) $x = 27$ және $y = 8$ болса, онда $\begin{cases} \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{8} = 5, \\ 27 + 8 = 35. \end{cases}$

x және y айнымалыларының табылған мәндерінің бәрі берілген теңдеулер жүйесін қанағаттандырады.

Жауабы: (8; 27) және (27; 8).

1. Иррационал теңдеуді шешу барысында қандай теңдеулер шығарылуы мүмкін?
2. Иррационал теңдеулерді шешу кезінде неліктен айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынына назар аударылады?

Жаттығулар

А

Теңдеулерді шешіңдер (**14.1—14.4**):

14.1. 1) $\sqrt{x} = 3$; 2) $\sqrt{x-3} = 2$;

3) $\sqrt{x} = 2 - x$; 4) $\sqrt{x-2} = \frac{x}{3}$.

14.2. 1) $\sqrt[3]{x+2} = 3$; 2) $\sqrt[4]{x-3} = 2$;

3) $3 + \sqrt{x+3} = x$; 4) $5 + \sqrt{x+1} = x$.

14.3. 1) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$; 2) $x + \sqrt{2x} - 4 = 0$;

3) $(x^2 - 4) \cdot \sqrt{x+5} = 0$; 4) $(x^2 - 9) \cdot \sqrt{x+5} = 0$.

14.4. 1) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 6 = 0$; 2) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0$;

3) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 10 = 0$; 4) $\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} - 18 = 0$.

14.5. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ x + y = 13. \end{cases}$

B

Теңдеулерді шешіңдер (14.6—14.10):

14.6. 1) $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$; 2) $\sqrt{x+2}=2+\sqrt{x-6}$;

3) $\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-2}+2$; 4) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$.

14.7. 1) $\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1$; 2) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$;

3) $\sqrt{x-9}-\sqrt{x-16}=1$; 4) $\sqrt{3x+1}-2-\sqrt{x+1}=0$.

14.8. 1) $\sqrt{16-\sqrt{x+1}}=1$; 2) $\sqrt[3]{5-\sqrt{x+15}}=1$;

3) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1}$; 4) $\dfrac{2x-5}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+2}$.

14.9. 1) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=x+2$; 2) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=27-x$;

3) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}=(2x-1)^{\frac{1}{2}}$; 4) $\dfrac{x+6}{(x-6)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{3x+2}$.

14.10. 1) $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3$; 2) $3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^{-1}}=2$;

3) $\sqrt{3x^2+13}-\sqrt[4]{3x^2+13}=2$; 4) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$.

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (14.11-14.12):

14.11. 1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=72,\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6.\end{cases}$

14.12. 1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2,\\ xy=27;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4.\end{cases}$

C

Теңдеулерді шешіңдер (14.13—14.15):

14.13. 1) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}$; 2) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$;

3) $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x+17}=1$; 4) $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

14.14. 1) $\sqrt[5]{\frac{x-3}{5-x}} + \sqrt[5]{\frac{5-x}{x-3}} = 2$;

2) $\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}} = 4$;

3) $\sqrt[5]{(5x+2)^3} - \frac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}} = 6$;

4) $\frac{(5-x)^{1,5} + (x-3)^{1,5}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}} = 2$.

14.15. 1) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x} = \frac{36}{\sqrt{x-9}}$; 2) $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}}$;

3) $\sqrt{2+x} + \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{2+x}}$; 4) $\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}} = \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (**14.16–14.18**):

14.16. 1) $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ x \cdot y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 10. \end{cases}$

14.17. 1) $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} = 2, \\ x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ xy - x - y = 0. \end{cases}$

14.18. 1) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 2$ және $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = 2$;

2) $\sqrt{x^2-3x+2} = 4$ және $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-1} = 4$;

3) $\sqrt{x-5} = x$ және $x - 5 = x^2$;

4) $\sqrt[3]{2x+1} = x$ және $2x + 1 = x^3$

теңдеулері мәндес теңдеулер бола ма?

КАЙТАЛАУ

14.19. Біртекті теңдеуді шешіңдер:

1) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

2) $3\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$.

14.20. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x^2 - 16}$;

2) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 8}}$.

14.21. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 + 5x + 6 < 0, \\ |x| > 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0, \\ |x| < 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 > 0, \\ |x| \geqslant 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2 + 5x - 8 \geqslant 0, \\ |x| \leqslant 5. \end{cases}$

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Теңсіздіктер, теңсіздіктердің қасиеттері, мәндес теңсіздіктер, теңсіздіктер жүйесі, функция, функцияның қасиеттері, функцияның графигі, нақты санның n-ші дәрежелі түбірі, иррационал теңдеу, иррационал теңдеуді шешу әдістері.

§15. ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Сендер *иррационал теңсіздік* ұғымымен танысасыңдар; иррационал теңсіздіктерді шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Теңсіздік, иррационал теңсіздік, айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны, теңсіздіктер жүйесі, мәндестік, теңсіздікті шешу

Анықтама. *Айнымалысы түбір таңбасының ішінде немесе бөлшек көрсеткішті дәреженің негізі болатын теңсіздікті* ***иррационал теңсіздік*** *деп атайды.*

МЫСАЛ

1. $\sqrt{x+3} > x + 1$; $\sqrt{x^2 - 5x + 3} < \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$; $x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{3}} < 2$.

Иррационал теңсіздіктерді шешу кезінде иррационал теңдеулерді шешу тәрізді жұп дәрежелі түбір арифметикалық түбір ретінде, ал тақ дәрежелі түбір барлық сан түзуінде қарастырылады.

Негізінде иррационал теңсіздіктерді шешу дәрежеге шығару әдісімен шешіледі. Дәрежеге шығару кезінде мына екі тұжырымды білу және қолдану керек:

1) егер теңсіздіктің екі жақ бөлігі айнымалының мүмкін болатын мәндер облысында теріс емес болса, онда оның таңбасын сақтай отырып екінші дәрежеге (немесе кез келген жұп дәреже) шығарамыз, сөйтіп берілген теңсіздікке мәндес теңсіздік аламыз.

Басқаша айтқанда, $f_1(x) > f_2(x)$ теңсіздігі беріліп, x айнымалысының мүмкін болатын мәндер облысында $f_1(x) \geqslant 0$, $f_2(x) \geqslant 0$ болса, онда $(f_1(x))^{2n} > (f_2(x))^{2n}$ теңсіздігі берілген теңсіздікке мәндес болады.

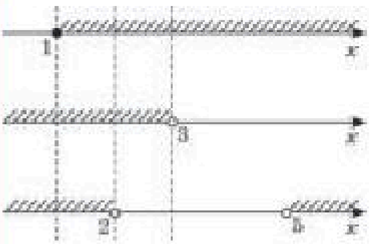
2) Егер теңсіздіктің таңбасын сақтай отырып тақ дәрежеге шығарсақ, онда берілген теңсіздікке мәндес теңсіздік аламыз. Егер $f_1(x) > f_2(x)$ болса, онда $(f_1(x))^{2n+1} > (f_2(x))^{2n+1}$ теңсіздігі берілген теңсіздікке мәндес болады.

Осы екі тұжырымды қолданып иррационал теңсіздікті шешуді рационал теңсіздікті немесе рационал теңсіздіктер жүйесін шешуге келтіруге болады.

МЫСАЛ

2. $\sqrt{x-1} < 3 - x$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. Теңсіздіктің анықталу облысы $x - 1 > 0$ теңсіздігімен анықталады. Теңсіздіктің сол жақ бөлігі арифметикалық түбір болғандықтан, берілген теңсіздік $3 - x > 0$ жағдайында ғана орындалуы тиіс. Осы екі жағдайда теңсіздік теріс емес, сондықтан оның екі жақ бөлігін екінші дәрежеге шығарамыз. Көрсетілген шарттарды ескере отырып теңсіздіктің екі жақ бөлігін квадраттасақ, онда төмендегі теңсіздіктер жүйесін аламыз:



42-сурет

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ 3 - x > 0, \\ x - 1 < (3 - x)^2 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x < 3, \\ (x - 2)(x - 5) > 0. \end{cases}$$

Теңсіздіктер жүйесінің әрбір теңсіздігін координаталық түзуде кескіндесек, теңсіздіктер жүйесінің шешімі $1 < x < 2$ теңсіздігін қанағаттандырады. Берілген теңсіздіктің шешімдер жиыны $[1; 2)$ аралығы (42-сурет).

Жауабы: $[1; 2)$.

МЫСАЛ

3. $\sqrt{x-1} > 3 - x$ иррационал теңсіздігін шығарайық.

Шешуі. Теңсіздіктің анықталу облысы $x - 1 > 0$, яғни $x > 1$ шартын қанағаттандырады. Теңсіздіктің оң жақ бөлігі $x = 3$ болғанда нөлге тең және $x > 3$ жағдайында теріс мәнге ие болады. Осы шарттарды ескеріп, берілген теңсіздікті екі жүйенің жиынтығына мәндес деп аламыз:

1) $\begin{cases} 1 < x < 3, \\ x - 1 > (3 - x)^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{x-1} > 3 - x. \end{cases}$

Бірінші жүйені шешейік:

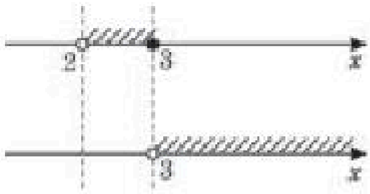
$$\begin{cases}1 < x < 3,\\ x-1 > (3-x)^2\end{cases} \text{ немесе } \begin{cases}1 < x < 3,\\ (x-2)(x-5) < 0.\end{cases}$$

Жүйенің шешімдер жиыны (2; 3] кесіндісі.

Екінші жүйені шешейік: $\begin{cases}x > 3,\\ \sqrt{x-1} > 3-x.\end{cases}$

Жүйенің екінші теңсіздігінің оң жақ бөлігіндегі $(3-x)$ өрнегінің мәні теріс, ал сол жақ бөлігі $\sqrt{x-1}$ оң болғандықтан, екінші жүйенің шешімдер жиыны $(3; +\infty)$ интервалы болады.

Бірінші және екінші теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиынын біріктірсек, берілген иррационал теңсіздіктің шешімдер жиыны $(2; +\infty)$ интервалы болады (43-сурет).



43-сурет

Жауабы: $(2; +\infty)$.

Иррационал теңсіздіктерді шешу үшін қолданылатын қатынастар:

1. $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x) \geq 0,\\ f(x) < g(x).\end{cases}$

2. $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases}g(x) \geq 0,\\ f(x) > g(x).\end{cases}$

3. $\sqrt[2n+1]{f(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x).$

4. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$

5. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < [g(x)]^{2n+1}.$

6. $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > [g(x)]^{2n+1}.$

7. $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases}f(x) \geq 0,\\ g(x) > 0,\\ f(x) < [g(x)]^{2n}.\end{cases}$

8. $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x) \geq 0,\\ g(x) < 0,\end{cases}\\ \begin{cases}g(x) \geq 0,\\ f(x) > [g(x)]^{2n}.\end{cases}\end{array}\right.$

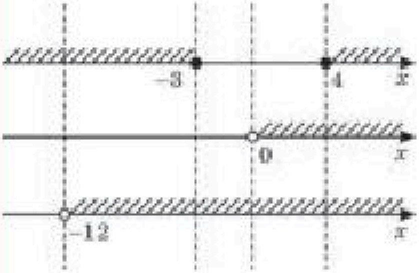
9. $\dfrac{\sqrt[n]{f(x)}}{g(x)} > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x) > 0,\\ \sqrt[n]{f(x)} > a \cdot g(x),\end{cases}\\ \begin{cases}g(x) < 0,\\ \sqrt[n]{f(x)} < a \cdot g(x).\end{cases}\end{array}\right.$

Осы көрсетілген қатынастарды қолданып иррационал теңсіздіктерді шешуге мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ

4. $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. (7)-қатынасты қолданып,



44-сурет

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} (x-4)(x+3) \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x > -12 \end{cases}$$

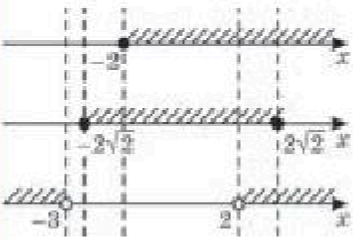
теңсіздіктер жүйесін аламыз. Теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиыны 44-суретте көрсетілген.

Жауабы: $[4; +\infty)$.

МЫСАЛ

5. $\sqrt{x+2} > \sqrt{8 - x^2}$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. (2)-қатынасты қолдансақ,



45-сурет

$$\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ 8 - x^2 \geqslant 0, \\ x + 2 > 8 - x^2 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x^2 - 8 \leqslant 0, \\ x^2 + x - 6 > 0, \end{cases}$$

$$\text{немесе} \quad \begin{cases} x \geqslant -2, \\ \left(x - 2\sqrt{2}\right)\left(x + 2\sqrt{2}\right) \leqslant 0, \\ (x-2)(x+3) > 0 \end{cases}$$

теңсіздіктер жүйесі шығады. Теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиыны 45-суретте көрсетілген.

Жауабы: $(2;\ 2\sqrt{2}\,]$.

МЫСАЛ

6. $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. (8)-қатынасты қолдансақ, онда берілген теңсіздік екі теңсіздіктер жүйесіне келтіріледі:

$$\begin{cases} -x^2 + 6x - 5 \geqslant 0, \\ 8 - 2x < 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} 8 - 2x \geqslant 0, \\ -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2. \end{cases}$$

Әрбір теңсіздіктер жүйесін жеке шығарамыз.

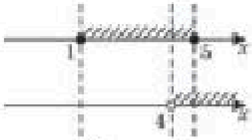
$$1)\ \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 \geqslant 0, \\ 8 - 2x < 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \leqslant 0, \\ 2(4 - x) < 0, \end{cases} \quad \text{немесе}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-5) \leqslant 0, \\ 4 - x < 0, \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 5, \\ x > 4. \end{cases}$$

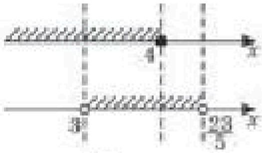
Теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиыны (4; 5] аралығы болады (46-сурет).

2) $\begin{cases} 8 - 2x > 0, \\ -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} 4 - x \geq 0, \\ 5x^2 - 38x + 69 < 0, \end{cases}$ немесе

$\begin{cases} x \leq 4, \\ 5(x-3)\left(x - \dfrac{23}{5}\right) < 0, \end{cases}$ немесе $\begin{cases} x \leq 4, \\ 3 < x < \dfrac{23}{5}. \end{cases}$



46-сурет



47-сурет

Теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиыны (3; 4] аралығы болады (47-сурет). Енді теңсіздіктер жүйелерінің шыққан шешімдерін біріктірсек, қарастырып отырған иррационал теңсіздіктің шешімдер жиыны (3; 5] аралығын береді.

Жауабы: (3; 5].

МЫСАЛ

7. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 7 - x^2 - 2x$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. **Бірінші тәсіл.** (8)-қатынасты қолдансақ, онда төртінші дәрежелі теңсіздікті аламыз. Сондықтан берілген теңсіздікті $\sqrt{5(x^2 + 2x) + 1} > 7 - (x^2 + 2x)$ түрінде жазып, $y = x^2 + 2x$ белгілеуін енгіземіз. Сонда соңғы теңсіздік $\sqrt{5y + 1} > 7 - y$ түріне көшеді.

Енді (8)-қатынасты қолданып, соңғы теңсіздіктен екі теңсіздіктер жүйесін аламыз:

1) $\begin{cases} 5y + 1 \geq 0, \\ 7 - y < 0 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} 5y \geq -1, \\ y > 7, \end{cases}$ немесе $\begin{cases} y \geq -\dfrac{1}{5}, \\ y > 7. \end{cases}$

Бұдан $y > 7$ шығады. Ендеше, бірінші теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиыны $(7; +\infty)$ интервалы болады.

2) $\begin{cases} 7 - y \geq 0, \\ 5y + 1 > (7 - y)^2 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} y < 7, \\ y^2 - 19y + 48 < 0, \end{cases}$ немесе

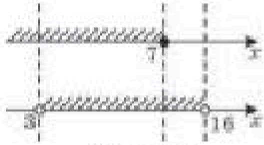
$\begin{cases} y < 7, \\ (y - 3)(y - 16) < 0, \end{cases}$ немесе $\begin{cases} y < 7, \\ 3 < y < 16. \end{cases}$

Екінші теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиыны (3; 7] аралығы болады (48-сурет).

Екі теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиынын біріктірсек, $y > 3$ шығады.

y-тің орнына $x^2 + 2x$ өрнегін қойсақ, $x^2 + 2x > 3$ аламыз.

Соңғы теңсіздікті шешеміз: $x^2 + 2x - 3 > 0$ немесе $(x - 1)(x + 3) > 0$. Теңсіздіктің шешімдер жиыны $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ (49-сурет).



48-сурет

49-сурет

Екінші тәсіл. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 7 - 2x - x^2$ теңсіздігінің екі жағын 5 санына көбейтсек, берілген теңсіздікке мәндес $5\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 35 - 10x - 5x^2$ теңсіздігі шығады. Шыққан теңсіздікті $5\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 36 - (5x^2 + 10x + 1)$ түріне келтіреміз. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = a$ $(a > 0)$ жаңа айнымалысын енгізіп, соңғы теңсіздіктен $5a > 36 - a^2$ немесе $a^2 + 5a - 36 > 0$ теңсіздігін аламыз. Соңғы теңсіздіктің шешімдер жиыны $(-\infty; -9) \cup (4; +\infty)$ болады.

$a > 0$ болғандықтан $(4; +\infty)$ аралығын қарастырамыз.

$a > 4$, демек, $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 4$. Осы теңсіздіктің екі жағын екінші дәрежеге шығарамыз: $5x^2 + 10x + 1 > 16$ немесе $5x^2 + 10x - 15 > 0$. Соңғы теңсіздіктің екі жағын 5-ке бөліп, $x^2 + 2x - 3 > 0$ теңсіздігін аламыз. Шыққан теңсіздіктің шешімдер жиыны $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Жауабы: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

МЫСАЛ

8. $\dfrac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$, мұндағы $x \geq 0$, $y \geq 0$ теңсіздігін дәлелдейік.

Дәлелдеудің екі жолын қарастырайық.

Бірінші тәсіл. $x + y$ қосындысын түрлендірейік:

$$x + y = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy}.$$

Онда $\dfrac{x + y}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + \sqrt{xy}.$

Демек, соңғы теңдіктің оң жақ бөлігінің бірінші қосылғышы теріс емес, ал екінші қосылғышы берілген теңсіздіктің оң жақ бөлігін береді.

Сондықтан $\dfrac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$, ал теңдік $x = y$ болғанда шығады.

Екінші тәсіл. $\dfrac{x + y}{2} - \sqrt{xy}$ айырымын түрлендірейік және оның таңбасын анықтайық: $\dfrac{x + y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{x + y - 2\sqrt{xy}}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2}{2}.$

$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$ теңсіздігі x және y-тің кез келген теріс емес мәнінде ақиқат. Демек, $\dfrac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ теңсіздігінің тұжырымдамасын былай беруге болады: *екі теріс емес санның орташа арифметикалық ортасы олардың геометриялық ортасынан кіші емес.* Бұл теңсіздікті ***Коши теңсіздігі*** деп атайды.

Коши теңсіздігінен $x + \frac{1}{x} \geq 2$ теңсіздігі шығады.

Расында да, $\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$ немесе $x + \frac{1}{x} \geq 2.$

Ескерту. Кез келген теріс емес сандардың арифметикалық ортасы олардың геометриялық ортасынан кіші болмайды, яғни $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ сандары теріс емес болса, онда

$\frac{x_1 + x_3 + x_3 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdot ... \cdot x_n}$ және теңдік $x_1 = x_2 = ... = x_n$ жағдайында ғана орындалады.

МЫСАЛ

9. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1,\ n > 1$ теңсіздігін дәлелдейік.

Дәлелдеу. Кез келген $\frac{1}{\sqrt{m}}$ өрнегін былай жазуға болады:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{2}{2\sqrt{m}} = \frac{2}{\sqrt{m} + \sqrt{m}} < \frac{2}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}, \text{ яғни } \frac{1}{\sqrt{m}} < \frac{2}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}.$$

Олай болса мына жағдайлар ақиқат:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{2}{\sqrt{2} + 1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}} < \frac{2}{\sqrt{4} + \sqrt{3}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}.$$

Осы теңсіздіктерді мүшелеп қоссақ,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \ ...\ + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}\right).$$

Жақша ішіндегі әрбір бөлшектің алымы мен бөлімін бөлімінің түйіндесіне көбейте отырып иррационалдықтан босатсақ, соңғы теңсіздік былай жазылады:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{4 - 3} + \ ...\ + \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n - (n-1)}\right)$$

немесе

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right),$$

немесе

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(-1 + \sqrt{n})$$

теңсіздігін аламыз.

Егер соңғы теңсіздіктің екі жақ бөлігіне бір санын қоссақ, онда

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(-1 + \sqrt{n}) + 1$$

немесе

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

1. Неге иррационал теңсіздіктің екі жақ бөлігін де теріс емес деп алу қажет?
2. Иррационал теңсіздіктерді шешу кезінде қолданылатын екі тұжырымның параграфтың басында берілген тұжырымнан айырмашылығы неде?
3. Иррационал теңсіздіктерді шешу кезінде қолданылатын тұжырымдар функцияның қандай қасиетіне негізделген?

Жаттығулар

А

Теңсіздікті шешіңдер (**15.1—15.3**):

15.1. 1) $\sqrt{x} \geqslant 2$; 2) $\sqrt{x} < 5$; 3) $\sqrt[3]{x} > 3$; 4) $\sqrt[3]{x} \leqslant 2$.

15.2. 1) $\sqrt{x+1} > 2$; 2) $\sqrt{1-x} \leqslant 4$; 3) $\sqrt{3x+1} \geqslant 1$; 4) $\sqrt{2x-1} < 3$.

15.3. 1) $\sqrt{3x-8} < -2$; 2) $\sqrt[3]{x+2} \leqslant -5$;
3) $\sqrt{2x+1} > 8$; 4) $(x-12)\sqrt{x-3} \leqslant 0$.

В

Теңсіздікті шешіңдер (**15.4—15.6**):

15.4. 1) $\sqrt{x^2+x-2} < 2$; 2) $\sqrt{x^2+x+1} < 1$;
3) $\sqrt{x^2+3x} > 4$; 4) $\sqrt{x^2-5x} > 3$.

15.5. 1) $\sqrt{2x-1} > x-2$; 2) $\sqrt{2x+1} < x-1$;
3) $x+2 < \sqrt{x+14}$; 4) $x-3 < \sqrt{x+27}$.

15.6. 1) $\sqrt{x-6}\cdot\sqrt{x-12}<x-1$; 2) $\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}<0$;

3) $\sqrt{x^2-x-2}<x$; 4) $\sqrt{x^2-3x+2}>x+3$.

C

Теңсіздікті шешіңдер (**15.7-15.8**):

15.7. 1) $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$;

2) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+4}>0$.

15.8. 1) $\sqrt{5x+6}-\sqrt{x+1}>\sqrt{2x-5}$;

2) $\sqrt{x^2-8x+15}>\sqrt{4x^2-18x+18}-\sqrt{x^2+2x-15}$.

15.9. 1) Берілген оң санды көбейтіндісі ең үлкен болатындай етіп екі оң қосылғышқа жіктеңдер (*Нұсқау*. Коши теоремасын қолданыңдар).

2) a, b және c оң сандар болса, онда $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$ болатынын дәлелдеңдер;

3) x, y, a және b теріс емес сандар болса, онда $\frac{x+y+a+b}{4}\geqslant$ $\geqslant\sqrt[4]{xyab}$ екенін дәлелдеңдер.

15.10. $\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}\geqslant\frac{x+y}{2}$ $(x>0,\ y>0)$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

***15.11.** $\sqrt{x^2-9x+20}\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant\sqrt{x^2-13}$ қос теңсіздігін шешіңдер.

***15.12.** $\begin{cases}\sqrt{4x-7}<x,\\ \sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}>4\end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін шешіңдер.

ҚАЙТАЛАУ

15.13. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\operatorname{arctg}4x=\frac{3\pi}{4}$; 2) $\arcsin\left(4-\frac{x}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$;

3) $\arcsin\left(1+\frac{x}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$; 4) $\arccos(2-3x)=\pi$.

15.14. Есептеңдер:

1) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-3\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\operatorname{arctg}(-1)$;

2) $3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-4\operatorname{arcctg}(-1)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})-\arcsin(-1)-2\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

15.15. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $f(x) = \operatorname{arctg}2x + x^3$;   2) $f(x) = \arccos 4x - x^{-4} + 2$.

15.16. Функция графигін салыңдар және графиктің көмегімен функцияның мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = 2x + x^2$;   2) $f(x) = 1 - \sqrt{4+x}$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $y = \sqrt{x^3 - 5x^2 + 6x}$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

A) $(-\infty; 0] \cup [2; 3]$;   B) $[0; 2) \cup (3; +\infty)$;
C) $[0; 2] \cup [3; +\infty)$;   D) $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$.

2. $\sqrt{x^2 - 6x} + \frac{1}{x-5}$ өрнегіндегі айнымалының мүмкін мәндер жиынын табыңдар:

A) $[0; 6]$;   B) $[0; 5) \cup (5; 6]$;
C) $(-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$;   D) $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

3. $\sqrt{x^2 + 5} = -9$ теңдеуін шешіңдер:

A) 2;   B) ± 2;   C) -2;   D) $\varnothing$.

4. $\sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{4x}$ теңдеуінің ең үлкен түбірін табыңдар:

A) -5;   B) 5;   C) -1;   D) 1.

5. $\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 6\sqrt{\frac{x-2}{2}} = 5$ теңдеуін шешіңдер:

A) 2; 3;   B) 1; 6;   C) $\frac{9}{4}$; $\frac{8}{3}$;   D) $\frac{4}{9}$; $\frac{3}{8}$.

6. $\sqrt{4 - 3x} < 2$ теңсіздігін қанағаттандыратын ең үлкен бүтін санды табыңдар:

A) ондай бүтін сан жоқ;   B) 1;
C) -1;   D) 0.

7. $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 4, \\ x^2 - y + 5x = 0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер:

A) $(2; 14), (8; -24)$;   B) $(-2; 18), (8; -24)$;
C) $(2; 14), (-8; 24)$;   D) $(2; -18), (-8; 24)$.

8. $\sqrt{x - 3} \leqslant 4$ теңсіздігін қанағаттандыратын ең кіші натурал санды табыңдар:

A) 3;   B) 5;   C) 19;   D) 18.

9. $(x - 5)\sqrt{9 - x^2} = 0$ теңдеуін шешіңдер:

A) ± 3; 5;   B) ± 3;   C) 3; 5;   D) ± 3; -5.

10. $\begin{cases} \sqrt{x-1} < 2, \\ 10 - x \leqslant 8 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

A) (1; 5); B) (1; 2]; C) [2; 5); D) [2; 5].

Математикалық сауаттылық бойынша тест тапсырмалары

11. Сатушының бір күндік жалақысы 8 000 тг. Сатушы қателесіп 5000 тг тұратын екі аяқкиім сату барысында 10% -дың орнына 20% жеңілдік жасаған. Сатушының осы күнгі жалақысын табыңдар:

A) 7800 тг; B) 7920 тг; C) 7850 тг; D) 7900 тг; E) 7950 тг.

12. Кинотеатр сағат 10-нан сағат 22-ге дейін жұмыс істейді және сеанстар әр екі сағаттан кейін басталады. Кинотеатрға келушілер санының өзгерісі $N(t) = 24t - t^2$ теңдеуімен берілген. t — киносеанстың басталу уақыты, $N(t)$ — көрермендер саны. Кинотеатрға келген ең көп көрермендердің санын және бір күндегі көрермендер санын табыңдар:

A) 144 және 740; B) 146 және 780; C) 140 және 720;
D) 144 және 720; E) 140 және 740.

13. Әсем жүзумен айналысады. Бірінші жаттығуда ол 15 мин жүзді. Әр келесі жаттығуда жүзу уақытын 5 мин-қа арттырып отырды. Әсемнің 1 сағ-ғы жаттығу санын табыңдар:

A) 20 жаттығу; B) 8 жаттығу; C) 6 жаттығу;
D) 10 жаттығу; E) 12 жаттығу.

14. Дәурен велосипедпен үйінен өзенге дейінгі 6 км аралықты 12 мин жүрді. Үйге ол қысқа жолмен жүріп, 3 км-ді 8 мин жүріп өтті. Дәуреннің өзенге дейінгі және қайтып келген уақыттағы орташа жылдамдығын табыңдар:

A) 25 км/сағ; B) 27 км/сағ; C) 24 км/сағ;
D) 24,5 км/сағ; E) 28 км/сағ.

15. Функция графигіне $(x;\ y)$ нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті $f'(x) = 6x - 4$ формуласымен табылады. $f(x)$ функциясының графигі $M(1;\ 2)$ нүктесі арқылы өтеді. $f(x)$ функциясын табыңдар:

A) $f(x) = 3x^2 - 4x$; B) $f(x) = x^2 - 4x$; C) $f(x) = 3x^2 + 4x$;
D) $f(x) = 3x^2 - 4x + 3$; E) $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Натурал сандар жиыны, бүтін сандар жиыны, нақты сандар жиыны, санның модулі, координаталық жазықтық, нүктенің координаталары.

V ТАРАУ КОМПЛЕКС САНДАР

§16. ЖОРАМАЛ САНДАР. КОМПЛЕКС САННЫҢ АНЫҚТАМАСЫ

Сендер комплекс санның және оның модулінің анықтамаларын білесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Комплекс сан, жорамал сан, санның модулі, комплекстік жазықтық,түйіндес комплекс сан, комплекс санның алгебралық түрі

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Натурал сандар, бүтін сандар, рационал сандар, нақты сандар анықтамаларын және оларға амалдар қолдануды білесіңдер.

Нақты сандар жиынында квадрат теңдеудің $D > 0$ болғанда екі түбірі болады, $D = 0$ болғанда бір түбірі болады, $D < 0$ жағдайында түбірі болмайды.

Сандар жиынының келесі түрі *комплекс сандар жиыны* ұғымын қарастырайық.

Комплекс сандар дегеніміз — $z = x + iy$ түріндегі сандар. Мұндағы x, y — нақты сандар, i саны $i^2 = -1$ қатынасын қанағаттандыратын жорамал сан. x — z комплекс санының нақты бөлігі және $x = \mathrm{Re}z$ деп белгіленеді. y — z комплекс санының жорамал бөлігі және $y = \mathrm{Im}z$ деп белгіленеді.

Комплекс сандар *комплекс сандардың жиынын* құрайды.

Комплекс сандар жиынының белгіленуі: C.

Анықтама. *$z = x + iy$ түрінде жазылған комплекс сан өрнегі* ***комплекс санның алгебралық түрі*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

1. $z = 4 + 7i$ — комплекс сан, $x = \mathrm{Re}z = 4$ — комплекс санның нақты бөлігі, $y = \mathrm{Im}z = 7$ — комплекс санның жорамал бөлігі.

Кестені толтырыңдар:

24-кесте

Комплекс сан	Нақты бөлігі	Жорамал бөлігі
$z = -2 + 9i$		

$z = 15 - 13i$		
$z = -6 - 10i$		
$z = -25i$		
$z = 20$		

Кестеден $z = -25i$ санының нақты бөлігі $x = \mathrm{Re}z = 0$, ал жорамал бөлігі $y = \mathrm{Im}z = -25$ болатынын байқаймыз.

Анықтама. *Егер комплекс санның нақты бөлігі нөлге тең болса, яғни* $x = \mathrm{Re}z = 0$, *онда комплекс сан* ***жорамал сан*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

2. $z = -25i$ жорамал сан болып табылады.

24-кестені толтыру барысында $z = 20$ комплекс саны үшін нақты бөлігі $x = \mathrm{Re}z = 20$, ал жорамал бөлігі $y = \mathrm{Im}z = 0$ деп жазылды. Сонда 20 саны — нақты сан.

Демек, кез келген нақты санды $z = x + 0i$ комплекс сан түрінде жазуға болады.

Сонымен, комплекс сандар жиыны нақты сандар жиынын кеңейту болып табылады. Яғни, $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

МЫСАЛ

3. $z = -7 + 0i$, $z = -7 - 0i$ комплекс сандары -7 нақты санын береді.

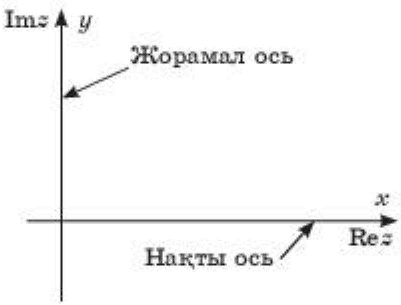
Комплекс санды комплекстік жазықтықта кескіндеуді үйренесіңдер.

Комплекс сандарды комплекс жазықтықта белгілеуге болады. Ол үшін комплекс санның нақты бөлігі горизонталь осьте, жорамал бөлігі вертикаль осьте белгіленеді (50-сурет).

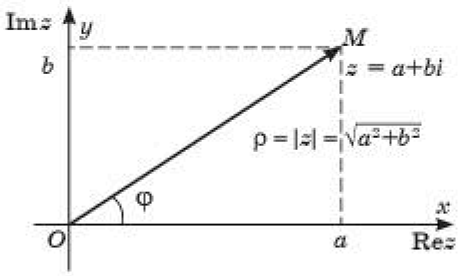
Жазықтықтағы әрбір $M(x;\ y)$ нүктесіне $z = x + iy$ комплекс саны сәйкес қойылады. Комплекс сандар жиыны мен жазықтық нүктелерінің жиыны арасында өзара сәйкестік орнатылады.

Вектордың белгіленуі: r немесе ρ (51-сурет).

Берілген жазықтықты *комплекстік жазықтық* деп атайды.



50-сурет

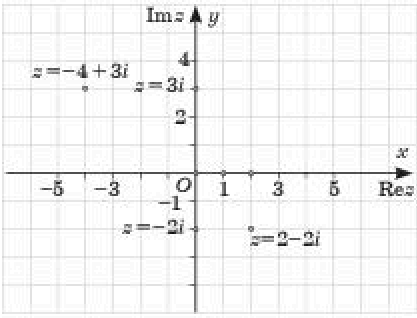


51-сурет

МЫСАЛ

4. Координаталық жазықтықта:

1) $z = -4 + 3i$; 2) $z = 2 - 2i$; 3) $z = 3i$; 4) $z = -2i$ сандарын белгілейік (52-сурет).



52-сурет

Комплекс санның модулі анықтамасымен танысасыңдар.

Анықтама. $z = x + iy$ ***комплекс санының модулі*** *деп* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *түріндегі өрнегін айтады.*

МЫСАЛ

5. 1) $z = -4 + 3i$; 2) $z = 9 - 2i$ санының модулін табайық.

Шешуі.

1) $z = -4 + 3i$ комплекс санының нақты бөлігі $x = \text{Re}z = -4$, жорамал бөлігі $y = \text{Im}z = 3$. Сонда $|z| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$;

2) $z = 9 - 2i$ комплекс санының нақты бөлігі $x = \text{Re}z = 9$, жорамал бөлігі $y = \text{Im}z = -2$. Демек, $|z| = \sqrt{9^2 + (-2)^2} = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}$.

Жауабы: 1) 5; 2) $\sqrt{85}$.

Түйіндес комплекс санның анықтамасымен танысасыңдар.

Анықтама. $z = x + iy$ *және* $\bar{z} = x - iy$ *түріндегі* ***комплекс сандары өзара түйіндес комплекс сандар*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

6. 1) $z = 5 + 4i$ комплекс санына түйіндес комплекс сан $\bar{z} = 5 - 4i$, ал $z = 5 - 4i$ комплекс санына түйіндес комплекс сан $\bar{z} = 5 + 4i$ саны болады.

Келесі кестені толтырыңдар:

25-кесте

Комплекс сан	Берілген комплекс санға түйіндес комплекс сан
$z = -2 + 9i$	
	$z = 15 - 13i$
$z = -6 - 10i$	
	$z = -25i + 6i$
$z = 25 + 6i$	

1. Комплекс сан мен нақты санның айырмашылығы неде?
2. Комплекс санның модулі нені білдіреді?
3. Комплекстік жазықтық деген не?
4. Комплекстік жазықтықта екі түйіндес z және $\bar{z}$ сандары қалай орналасады?
5. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ теңдігі дұрыс па?

Жаттығулар

А

16.1. Кестені толтырыңдар:

26-кесте

Комплекс сан	Нақты бөлігі (Rez)	Жорамал бөлігі (Imz)
$z = -3 + 19i$		
$z = 12 - 7i$		
$z = -5 - 1{,}6i$		
$z = -23i$		
$z = 40$		

16.2. Кестені толтырыңдар:

27-кесте

Комплекс сан	Нақты бөлігі (Rez)	Жорамал бөлігі (Imz)
$z = -1{,}2 + 0{,}9i$		
$z =$	13	14
$z = x - 10i$	8	
$z =$	0	-2
$z =$	13	0

16.3. Кестені толтырыңдар:

28-кесте

Комплекс сан	Нақты бөлігі (Rez)	Жорамал бөлігі (Imz)
$z = -2\sqrt{3} + i(\sqrt{2} + 3)$		
$z = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\,i$		
$z = x - 21i$	$1 - 3\sqrt{3}$	
$z =$	0	$2 - 5\sqrt{3}$
$z =$	$\pi + 1$	$\sqrt{2} - 1$

16.4. Комплекс санның модулін табыңдар:

1) $2 + 3i$; 2) $-2 + 4i$; 3) $-2,5 + 1,5i$; 4) $2 + i\sqrt{3}$.

16.5. Кестені толтырыңдар:

29-кесте

Комплекс сан (z)	Түйіндес сан ($\bar{z}$)
$z = \sqrt{3} - \sqrt{2}i$	
$z = -\sqrt{2} - 3\sqrt{3}i$	
$z = -4 - \sqrt{2}i$	
$z = -4\sqrt{2}i$	
$z = -5\sqrt{2}$	

B

16.6. Кестені толтырыңдар:

30-кесте

Комплекс сан (z)	Түйіндес сан ($\bar{z}$)
$z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}i$	
$z = 3 + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}i$	
$z = -4 - (1 - \sqrt{2})i$	
$z = -2\sqrt{3} - i(\sqrt{2} + 3)$	
$z = (1 - 4\sqrt{2})i$	
$z = -5\sqrt{2} + 2$	

16.7. Комплекс санға түйіндес комплекс санның модулін табыңдар:

1) $z = 2 - 5i$; 2) $z = -4 - 2i$;

3) $z = -\sqrt{5} + i\sqrt{3}$; 4) $z = -2\sqrt{5} - i\sqrt{3}$;

16.8. Координаталық жазықтықта z және $\bar{z}$ комплекс сандарына сәйкес келетін нүктелерді белгілеңдер:

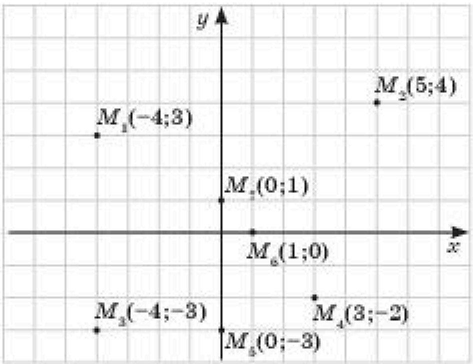
1) $z = -1 - 3i$; 2) $z = -3 - i$;

3) $z = -\sqrt{5} + i\sqrt{3}$; 4) $z = -2 - i\sqrt{8}$.

16.9. Координаталық жазықтықта $M(a;\ b)$ нүктесінің координаталары берілген (53-сурет).

1) Нүктеге сәйкес келетін комплекс санды жазыңдар және оның модулін табыңдар.

2) Егер $a = 2$, $b = -3$ болса, онда $M_8(a+1; b-1)$ және $M_9(a-3; b-2)$ нүктелеріне сәйкес келетін комплекс сандарды жазыңдар.



53-сурет

16.10. z санына түйіндес $\bar{z}$ комплекс санының модулін табыңдар:

1) $z = 2 + \sqrt{2} - 3i$; 2) $z = -4 + \sqrt{5} - 2\sqrt{5}\,i$;

3) $z = -\frac{2}{3} + i\sqrt{3}$; 4) $z = -\sqrt{2} - \frac{3-\sqrt{2}}{2}i$.

C

16.11. x және y-тің қандай нақты мәндерінде берілген комплекс сандар түйіндес болады:

1) $24 - yi$ және $2x - 3\sqrt{5}i$; 2) $-8 + yi$ және $\sqrt{2}x - 4i$.

3) $3 + \sqrt{2}yi$ және $2x + (4 + \sqrt{2})i$; 4) $3 - \sqrt{3} - \sqrt{2}yi$ және $3x + 4i$?

16.12. Комплекс санның модулін табыңдар:

1) $\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha$; 2) $1 + \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$;

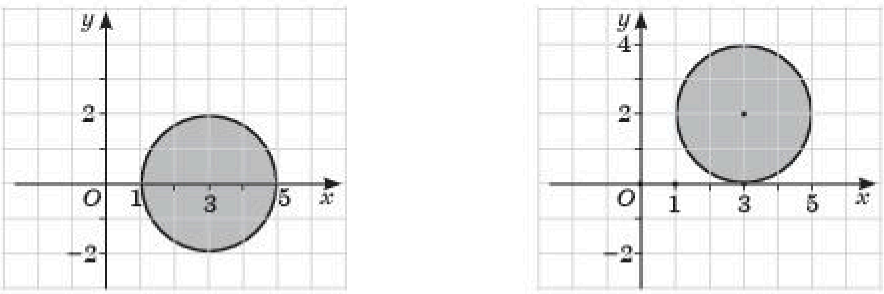
3) $\sin 4\alpha - (1 + \cos 4\alpha)i$; 4) $\sin 6\alpha - (1 - \cos 6\alpha)i$.

16.13. Комплекстік жазықтықта нүктелер жиынын кескіндеңдер:

1) $|z| < 2$; 2) $|z - 4i| < 3$; 3) $|z - 2 - i| \leqslant 2$;

4) $\text{Re}z > -2$; 5) $\text{Im}z < 1$; 6) $\text{Im}z > -2$.

16.14. 54-суретте берілген дөңгелектің ішкі бөлігін теңсіздік арқылы жазыңдар:



а) *ә)*

54-сурет

ҚАЙТАЛАУ

16.15. $f(x)$ функциясының алғашқы функциясын табыңдар:

1) $f(x) = x^3 - 2x + 2$; 2) $f(x) = \sin(1 - x)$;

3) $f(x) = x + \cos(1 - 4x)$; 4) $f(x) = 2 - \frac{1}{\cos^2 3x}$.

16.16. Функцияның графиктерімен шектелген фигураның ауданын табыңдар:

1) $f(x) = 3 - x^2$ және $f(x) = 1 + |x|$;

2) $f(x) = x^2$ және $f(x) = 2 - |x|$.

16.17. $f'(x) \geqslant 0$ теңсіздігін шешіңдер:

1) $f(x) = 2\cos 3x + 3x$; 2) $f(x) = -x^3 + 12x + 1$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Сан, комплекс сан, жорамал сан, санның модулі, комплекстік жазықтық, түйіндес комплекс сан, комплекс санның алгебралық түрі.

§ 17. АЛГЕБРАЛЫҚ ТҮРДЕГІ КОМПЛЕКС САНДАРҒА АМАЛДАР ҚОЛДАНУ

Алгебралық түрдегі комплекс сандардың арасынан тең сандарды анықтауды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Комплекс сан, дәреже, квадрат түбір, алгебралық түрі, арифметикалық амалдар

Алгебралық түрде жазылған екі комплекс санды қарастырайық.

Анықтама. *Екі комплекс санның нақты бөліктері және жорамал бөліктері тең, яғни $x_1 = x_2$ және $y_1 = y_2$ болса, онда $z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сандары* ***өзара тең*** *деп аталады.*

$z_1 = -2 + 9i$; $z_2 = -2 - 9i$; $z_3 = 2 + 9i$; $z_4 = -9 + 2i$; $z_5 = -2 + 9i$; $z_6 = -2i + 9$; $z_7 = 9 - 2i$ сандарының арасынан өзара тең комплекс сандарды көрсетіңдер.

МЫСАЛ

1. x пен y-тің қандай мәндерінде $z_1 = -4 + yi$ және $z_2 = x - 2i$ комплекс сандарының тең болатынын табайық.

Шешуі. Анықтама бойынша екі комплекс санның нақты бөліктері мен жорамал бөліктері тең болса, онда ол сандар өзара тең болады. Есептің шарты бойынша $x = -4$ және $y = -2$ мәндерінде берілген комплекс сандар өзара тең болады.

Жауабы: $x = -4$, $y = -2$.

Алгебралық түрдегі комплекс сандарға арифметикалық амалдар қолдануды үйренесіңдер.

Алгебралық түрде жазылған комплекс сандарға амалдардың қолданылуын қарастырайық.

I. *Комплекс сандардың қосындысы*

$z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сандарының қосындысы $z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ саны болады.

Дәлелдеу:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (iy_1 + iy_2) =$$
$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

МЫСАЛ 2. $z = -4 + 5i$ және $z = 3 - 2i$ сандарының қосындысын табайық.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $x_1 = -4$; $y_1 = 5$; $x_2 = 3$; $y_2 = -2$. Онда

$$z = z_1 + z_2 = (-4 + 3) + i(5 - 2) = -1 + 3i.$$

Жауабы: $-1 + 3i$.

II. *Комплекс сандардың айырымы*

$z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ айырымы $z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ саны болады.

III. *Комплекс сандардың көбейтіндісі*

$z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сандарының көбейтіндісі $z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ саны болады.

Комплекс сандарды азайту мен көбейту кезінде алынатын формулаларды өздерің дәлелдеңдер.

IV. *Комплекс сандардың бөліндісі*

$z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сандарының бөліндісі

$$z = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Дәлелдеу: $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \dfrac{(x_1 + i \cdot y_1)\cdot(x_2 - i \cdot y_2)}{(x_2 + i \cdot y_2)\cdot(x_2 - i \cdot y_2)} =$

$$= \frac{x_1 x_2 + i \cdot x_2 y_1 - i \cdot x_1 y_2 - i^2 \cdot y_1 y_2}{x_2^2 - i^2 \cdot y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i \cdot (x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad \blacksquare$$

МЫСАЛ 3. $z = -4 + 5i$ және $z = 3 - 2i$ сандарының бөліндісін табайық.

Шешуі. Шарт бойынша $x_1 = -4$; $y_1 = 5$; $x_2 = 3$; $y_2 = -2$.

Онда

$$z = \frac{-4 \cdot 3 + 5 \cdot (-2)}{3^2 + (-2)^2} + \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot (-2)}{3^2 + (-2)^2} i = \frac{-12 - 10}{9 + 4} + \frac{15 - 8}{9 + 4} i = -\frac{22}{13} + \frac{7}{13} i.$$

Жауабы: $-\dfrac{22}{13} + \dfrac{7}{13} i$.

Ескерту. Екі комплекс санның бөліндісін формула арқылы емес, алгоритм бойынша: бөлшектің алымын да, бөлімін де бөлімінің түйіндес санына көбейту арқылы табу ыңғайлы.

$$\frac{-4 + 5i}{3 - 2i} = \frac{(-4 + 5i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{-12 - 8i + 15i - 10}{3^2 - (2i)^2} = \frac{-22 + 7i}{13} = -\frac{22}{13} + \frac{7}{13} i.$$

Комплекс санның алгебралық түрін бүтін дәрежеге шығарғанда i^n мәнінің заңдылығын қолдануды үйренесіңдер.

$i^2 = -1$ екені белгілі.
$n > 2$ болғанда i^n дәрежесінің мәнін табайық.

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i;$
$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1;$
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i;$
$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1;$
$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$ және т.с.с.

i^n алгебралық түрдегі комплекс санның бүтін дәрежеге шығару заңдылығы 31-кестеде берілген:

31-кесте

n	2	3	4	5	6	7	8	9
i^n	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i

Комплекс санның квадрат түбірін табуды үйренесіңдер.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Нақты сандар жиынында теріс сандардың квадрат түбірін табу мүмкін емес.

Комплекс сандар жиынында $-1 = i^2$ болғандықтан, комплекс сандар жиынында теріс санның квадрат түбірін табуға болады.

МЫСАЛ

4. 1) $\sqrt{-1} = \sqrt{i^2} = \pm i$, яғни $\sqrt{-1} = \pm i;$
2) $\sqrt{-16} = \pm 4i;$
3) $\sqrt{-81} = \pm 9i.$

Комплекс санның квадрат түбірін табатын формуланы қорытып шығарайық.

Айталық, $\sqrt{a+bi} = x + yi$. Теңдіктің екі жағын да квадраттаймыз.

Сонда $a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Бұдан $\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$ (1)

Осы теңдіктер жүйесінен x және y-ті табамыз. Теңдіктің екі жағын да квадраттап, қосамыз.

$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$ немесе $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ шығады.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \qquad (2)$$

теңдеулер жүйесін қарастырайық.

(2) жүйесінің теңдеулерін қосып және азайтамыз:

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \text{ және } x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \text{ және } y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

(1) жүйесінің екінші теңдеуінен, $b > 0$ болғанда x және y таңбалары бірдей, $b < 0$ болғанда x және y таңбалары әртүрлі болатынын көреміз. Сондықтан:

$b > 0$ болса, онда $\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$,

$b < 0$ болса, онда $\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$, немесе

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\cdot \operatorname{sign}b\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right), \text{ мұндағы}$$

$$\operatorname{sign}b = \begin{cases} 1, \text{ егер } b > 0, \\ 0, \text{ егер } b = 0, \\ -1, \text{ егер } b < 0. \end{cases}$$

МЫСАЛ

5. $\sqrt{3-4i}$ түбірінің мәнін табайық.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $a = 3$, $b = -4$. Комплекс саннан квадрат түбір табу формуласын қолданамыз:

$$\sqrt{3-4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}+3}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}-3}{2}}\right)$$

немесе $\sqrt{3-4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25}+3}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{25}-3}{2}}\right)$, немесе $\sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$.

Жауабы: $\pm(2 - i)$.

1. Комплекс сандардың алгебралық түріне қандай амалдар қолдануға болады?
2. Екі комплекс санды бөлуді дәлелдеу үшін қандай ұғымдар, формулалар, түрлендірулер қолданылады?
3. $\sqrt{a+bi}$ комплекс санының түбірін табу кезінде b-ның таңбасы ескеріле ме?

Жаттығулар

A

17.1. Амалдарды орындаңдар:

1) $2(2 - 3i) - 3(3 - i)$; 2) $4(1 - 3i) - (2 - 5i)$;
3) $(4,1 - i) - (6,1 - 7i)$; 4) $3(2 + 3i) - 4(2 + 5i)$;
5) $2(1 - 3i) - 3(2 - 5i)$; 6) $2(2,2 - i) - (6,4 - 7i)$.

17.2. Комплекс сандармен амалдарды орындаңдар:

1) $(1 + 3i)(3 - i)$; 2) $(1 - 3i)(2 + 2i)$;
3) $(2 - i)^2$; 4) $(2 + 3i)^2 - 5i$.

17.3. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{3-i}{2+i}$; 2) $\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$; 3) $\frac{2-3i}{1+2i}$;
4) $\frac{3-5i}{5-2i}$; 5) $\frac{3-2i}{-1-2i}$; 6) $\frac{-3-7i}{-3+2i}$.

B

17.4. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{3+i}{2-i} + (5 - 2i)^2$; 2) $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} - (\sqrt{3}-2i)^2$; 3) $2 + 3i - \frac{2-3i}{1+2i}$;
4) $\frac{3-4i}{3-2i} - \frac{4-i}{2+3i}$; 5) $\frac{3-2i}{1-2i} + \frac{5-2i}{2-i}$; 6) $\frac{7-i}{5i} + \frac{3-7i}{2i-1}$.

17.5. Амалдарды орындаңдар:

1) $\left(\frac{3-i}{2+i}\right)^2 + (1 - 2i)^3$; 2) $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i} - (\sqrt{3}+2i)^3$;
3) $(2 + 3i)^4 - \frac{2-3i}{1+i}$; 4) $\frac{3-i}{1-2i} - (1 - 2i)^4$.

17.6. Квадрат түбірді есептеңдер:

1) $\sqrt{-7-24i}$; 2) $\sqrt{24+70i}$; 3) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$;
4) $\sqrt{2-i\sqrt{2}}$; 5) $\sqrt{16i}$; 6) $\sqrt{-24i}$.

C

17.7. Өрнекті түрлендіріңдер және шыққан комплекс санның модулін табыңдар:

1) $\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^3 + (2i)^5$; 2) $\left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^5 - (2 + i)^3$;

3) $(2+i)^4-\left(\frac{2-3i}{1+i}\right)^2$; 4) $\left(\frac{3+i}{1-2i}\right)^3-(1-2i)^4$.

17.8. Теңдік орындалатындай x және y нақты сандарын табыңдар:

1) $(x+3i)(2-i)=3x+3yi$; 2) $(1-yi)(5+2i)=3x-2yi$;

3) $(3+i)x+y(2-i)^2=3-2i$; 4) $(2+3i)^2-5yi=5x-3xyi$.

17.9. Комплекс сандармен амалдар орындаңдар:

1) $(2+i)^4+(2-i)^4-i^{18}+\frac{3-i}{2+i}$;

2) $(1-i)^4-(2+i)^3-2(3+32i)-(2i)^7$;

3) $(3+i)^3+(2-i)^2-(2i)^6$;

4) $3(1-5i)+(2+i)^4-5i^{15}$.

ҚАЙТАЛАУ

17.10. $y=\cos 2x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданын табыңдар.

17.11. Интеграл таңбасының ішіндегі функцияны түрлендіріп, интегралдың мәнін табыңдар:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\cos^2 x)dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos 3x dx$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}10\sin\left(\frac{\pi}{12}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right)dx$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)dx$.

17.12. Бөліктеп интегралдау әдісін қолданып анықталмаған интегралды табыңдар:

1) $\int(2x-3)\cos 2x dx$; 2) $\int(x^2+2x)\sin x dx$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Квадрат теңдеу, дәреже, квадрат түбір, алгебралық түрі, арифметикалық амалдар.

§18. КВАДРАТ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ КОМПЛЕКС ТҮБІРЛЕРІ. АЛГЕБРАНЫҢ НЕГІЗГІ ТЕОРЕМАСЫ

Сендер комплекс сандар жиынында квадрат теңдеулерді шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Комплекс сан, комплекс сандар жиыны, алгебраның негізгі теоремасы, квадрат теңдеу

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ квадрат теңдеуінің

— $D > 0$ болғанда әртүрлі екі түбірі болады;

— $D = 0$ болғанда тең нақты екі түбірлері болады;

— $D < 0$ болғанда нақты түбірлері болмайды.

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ квадрат теңдеуінің $D < 0$ болғанда комплекс сандар жиынында екі түбірі болады.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Комплекс сандар жиынында теріс саннан квадрат түбір есептеуге болады. Себебі комплекс сандар жиынында $-1 = i^2$.

МЫСАЛ

1. $5x^2 - 8x + 5 = 0$ теңдеуін шығарайық.

Шешуі: $D = (-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = 64 - 100 = -36$.

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{36 \cdot (-1)}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{36 \cdot i^2}}{10} = \frac{8 \pm 6i}{10} = \frac{4 \pm 3i}{5}.$$

Жауабы: $\frac{4 \pm 3i}{5}$.

$D < 0$ болғанда $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ теңдеуінің түбірлері

$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{(-b)^2 + 4ac}}{2a}$ формуласымен табылады.

Алгебраның негізгі теоремасымен және оның салдарымен танысасыңдар.

Алгебраның негізгі теоремасы. *Комплекс сандар жиынында константаға тең емес көпмүшенің кем дегенде бір комплекс түбірі болады.*

1-*салдар.* Константаға тең емес кез келген көпмүшені комплекс сандар жиынында сызықтық көбейткіштерге жіктеуге болады.

2-*салдар.* Егер комплекс (нақты емес) сан нақты коэффициенттері бар көпмүшенің түбірі болса, онда оған түйіндес сан сонша еселікті түбірі болып табылады.

1-мысалда теңдеудің түбірлері $\frac{4}{5}+\frac{3i}{5}$ және $\frac{4}{5}-\frac{3i}{5}$ комплекс сандары болды. Олардың түйіндес екенін байқауға болады.

МЫСАЛ 2. Түбірлерінің бірі $-4 + 5i$ комплекс саны болатын теңдеу құрастырайық.

Шешуі. Егер теңдеудің түбірлерінің біреуі $-4 + 5i$ комплекс саны болса, онда оның екінші түбірі оған түйіндес комплекс сан $-4 - 5i$ саны болады.

Квадрат теңдеу құрастыру үшін $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, мұндағы x_1 және x_2 — түбірлері, формуласын қолданамыз.

Сонда $(x - (-4 + 5i))(x - (-4 - 5i)) = x^2 - (-4 - 5i)x - (-4 + 5i)x + (-4 + 5i)(-4 - 5i) =$ $= x^2 + 4x + 5ix + 4x - 5ix + 16 - 25i^2 = x^2 + 8x + 16 + 25 = x^2 + 8x + 41 = 0.$

Жауабы: $x^2 + 8x + 41 = 0.$

1. Қандай жиында кез келген санның квадрат түбірін табуға болады?
2. Квадрат теңдеудің түбірлері әр уақытта түйіндес бола ма?
3. Қандай нүктелер жиыны комплекстік жазықтықта $|z| < 2$ теңсіздігін қанағаттандырады?

Жаттығулар

A

18.1. Квадрат теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $x^2 + 4 = 0$; 2) $x^2 + 81 = 0$; 3) $x^2 + 11 = 0$;
4) $x^2 - 5x + 14 = 0$; 5) $x^2 + 4x + 9 = 0$; 6) $x^2 + 2x + 18 = 0$;
7) $2x^2 + x + 11 = 0$; 8) $3x^2 - 6x + 14 = 0$.

18.2. Түбірлерінің бірі берілген сан болатын нақты коэффициентті квадрат теңдеу құрастырыңдар:

1) $3i$; 2) $2 - 3i$; 3) $-3 + 2i$; 4) $5 - 7i$.

18.3. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x^2 + 2x + 10$; 2) $x^2 - 4x + 5$;
3) $x^2 - 4x + 16$; 4) $2x^2 - 6x + 9$.

B

18.4. Квадрат теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $9x^2 + 14 = 0$; 2) $4x^2 + 31 = 0$;
3) $2x^2 + 11 = 0$; 4) $3x^2 + 13\sqrt{2} = 0$;
5) $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 11 = 0$; 6) $3x^2 - \sqrt{5}x + 14 = 0$.

18.5. Түбірлерінің бірі берілген комплекс сан болатын нақты коэффициентті квадрат теңдеу құрастырыңдар:

1) $\sqrt{15}i$; 2) $\sqrt{3} - 2i$; 3) $-3\sqrt{5} + 2i$; 4) $2 - 3\sqrt{2}i$.

18.6. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x^4 + 2x^2 - 8$; 2) $x^4 - 4x^2 - 5$;

3) $x^4 - 4x^2 + 12$; 4) $x^4 - 6x^2 + 8$.

18.7. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $x^2 - 4i = 0$; 2) $x^2 - 9i = 0$; 3) $x^2 + 7i = 0$;

4) $x^2 + 13i = 0$; 5) $z^4 - 16 = 0$; 6) $z^6 - 1 = 0$.

C

18.8. Квадрат теңдеуді шешіңдер:

1) $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$; 2) $z^2 - (2 - i)z - 2i = 0$;

3) $z^2 - (3 + 2i)z + 6i = 0$; 4) $z^2 + (6 - 2i)z - 6i = 0$;

5) $z^2 - (5 + 2i)z + 5 + 5i = 0$; 6) $z^2 - 2(5 - 2i)z + 12 - 20i = 0$.

18.9. Теңдеуді шешіңдер:

1) $z = \bar{z}^2$; 2) $2z = \bar{z}^2$, мұндағы $z = x + yi$.

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

18.10. Комплекс сандардың даму тарихы және олардың ғылым мен техникадағы рөлі туралы хабарлама дайындаңдар.

ҚАЙТАЛАУ

18.11. p параметрінің қандай мәндерінде квадрат теңдеудің нақты түбірлері болмайды:

1) $x^2 + (2 - p)x + 2 + p = 0$; 2) $x^2 - 4(p - 2)x + 2p - 2 = 0$;

3) $x^2 + (3 - p)x + 7 - p = 0$; 4) $x^2 - 2(p - 2)x - 2p + 7 = 0$?

18.12. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $(x^2 - x^{0,5}) : \dfrac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + x}{1 + \sqrt{x}}$; 2) $\dfrac{x - 1}{x + \sqrt{x} + 1} : \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} - 1} + \dfrac{2}{x^{-0,5}}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} - \dfrac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}\right)$; 4) $\dfrac{1 - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} - \dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{a^{-2} - a}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}$.

18.13. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sqrt{x^2 - 16} \leqslant x - 2$; 2) $\sqrt{x^2 - x - 6} \leqslant x + 5$.

18.14. Функцияның графигін салыңдар:

1) $f(x) = (x - 2)^{-2}$; 2) $f(x) = (x + 1)^{-2}$;

3) $f(x) = -1 + \sqrt{x-2}$; 4) $f(x) = 2-\sqrt{2+x}$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $(3 + i)(3 - i) - 2(3 - 2i)$ өрнегін ықшамдаңдар және шыққан санның модулін табыңдар:

A) $\sqrt{74}$; B) $2\sqrt{2}$; C) $4\sqrt{2}$; D) $\sqrt{58}$; E) $\sqrt{42}$.

2. $(1 - 5i)^2 + \frac{5(1-i)}{2+i} + 4 + 12i^9$ өрнегін ықшамдаңдар:

A) $20 - i$; B) $-19 - i$; C) $-20 + 2i$; D) $-20 - 2i$; E) $19 + i$.

3. $x^2 - 6x + 25 = 0$ квадрат теңдеуінің түбірлері:

A) $-3 \pm 3i$; B) $3 \pm 2i$; C) $-3 \pm 4i$; D) $-3 \pm 2i$; E) $3 \pm 4i$.

4. $x^2 + 4x + 13$ квадрат үшмүшесін көбейткіштерге жіктеңдер:

A) $(x - 3i)(x + 3i)$; B) $(x + 2 - 3i)(x + 2 + 3i)$;

C) $(x - 2 + 3i)(x + 3i)$; D) $(x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)$;

E) $(x - 1 - 3i)(x + 1 + 3i)$.

5. $\sqrt{4+2\sqrt{5}i}$ түбірдің мәнін табыңдар:

A) $\pm(\sqrt{5} + i)$; B) $\pm(2\sqrt{5} + i)$;

C) $\pm(\sqrt{5} + 2i)$; D) $\pm(\sqrt{5} - 2i)$;

E) $\pm(\sqrt{5} - i)$.

6. Комплекстік жазықтықта $|z - 3 - 2i| \leqslant 2$ теңсіздігі:

A) радиусы 3-ке тең және центрі $M(3; 2)$ дөңгелектің нүктелер жиынын;

B) радиусы 2-ге тең және центрі $M(0; 3)$ дөңгелектің нүктелер жиынын;

C) радиусы 2-ге тең және центрі $M(0; 0)$ дөңгелектің нүктелер жиынын;

D) радиусы 2-ге тең және центрі $M(3; 2)$ дөңгелектің нүктелер жиынын;

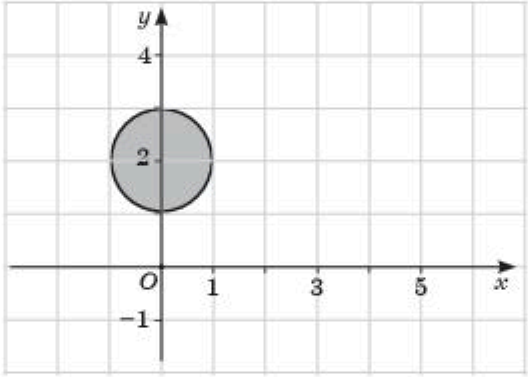
E) радиусы 1-ге тең және центрі $M(2; 3)$ дөңгелектің нүктелер жиынын береді.

7. Егер квадрат теңдеудің түбірлерінің біреуі $5 - 4i$ санына тең болса, онда осы теңдеудің жалпы түрі:

A) $x^2 + 10x + 41 = 0$; B) $x^2 - 5x + 41 = 0$;

C) $x^2 + 10x + 42 = 0$; D) $x^2 - 5x - 41 = 0$;
E) $x^2 - 10x + 41 = 0$.

8. Суретте бейнеленген дөңгелектің ішкі бөлігін беретін теңсіздік:



A) $|z + 2i| < 1$; B) $|z - 2i| < 1$; C) $|z - i| < 2$;
D) $|z + i| < 2$; E) $|2z - 2i| < 1$.

9. $x^2 - 5i = 0$ теңдеуінің түбірлері:

A) $\pm(\sqrt{5} + i)$; B) $5 \pm 2i$; C) $\pm\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}i\right)$;
D) $\pm\left(2\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}i\right)$; E) $\pm\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}i\right)$.

10. $x^2 + 11i = 0$ теңдеуінің түбірлері:

A) $\pm(\sqrt{11} + i)$; B) $11 \pm 2i$; C) $\pm\left(\sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{11}{2}}i\right)$;
D) $\pm\left(2\sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{11}{2}}i\right)$; E) $\pm\left(\sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{11}{2}}i\right)$.

Математикалық сауаттылық бойынша тест тапсырмалары

11. Салымшы 8% жылдық өсіммен банкке 100 мың тг ақша депозитке салды. Үш жылдан кейін депозитте жиналған ақшаның мөлшерін табыңдар:

A) 124 400,2 тг; B) 124 260 тг; C) 125 971,2 тг;
D) 125 520,2 тг; E) 126 122,2 тг.

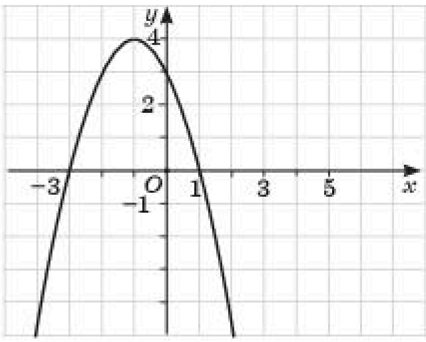
12. Төменде бес құрбының тұжырымы берілген. Егер Әлия шындықты айтса, онда құрбылардың қайсысы шындықты айтқанын табыңдар:

Әлия: “Егер доп аулада болса, онда ол себетте болады”;
Әсем: “Доп аулада емес”;

Анар: “Егер доп аулада болса, онда ол себетте емес”;
Назым: “Егер доп аулада жатпаса, онда ол себетте емес”;
Ғалия: “Егер доп себетте болмаса, онда ол аулада емес”.

A) Әсем; B) Анар; C) Назым;
D) Ғалия; E) құрбылардың барлығы шындықты айтпады.

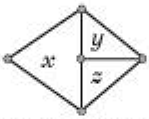
13. $x \in [-2;\ 2]$ болса, $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ функциясының графигін қолданып $M = 2f(-4) + 5f(0) + 2f(-1) + 2f(2)$ өрнегінің мәнін және функцияның мәндер жиынын табыңдар:

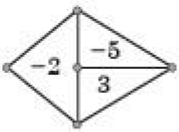


A) $M = 3;\ [-4;\ 4]$; B) $M = 3;\ [-4;\ 3]$; C) $M = 3;\ [-5;\ 3]$;
D) $M = 4;\ [-5;\ 4]$; E) $M = 3;\ [-5;\ 4]$.

14. Төрттаңбалы сандардың жазылуында екі цифры 2-ден, бір цифры 0-ден және 5-тен тұратын тең төрттаңбалы сандар саны:

A) 7; B) 8; C) 9; D) 10; E) 12.

15. Егер 

сызбасы 

сызбасын берсе, онда $5x \cdot \frac{z}{y}$ өрнегінің мәні:

A) $3\frac{1}{3}$; B) 6; C) 3; D) −6; E) $-3\frac{1}{3}$.

VI ТАРАУ

КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯЛАР

§19. КӨРСЕТКІШТІК ФУНКЦИЯ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

Сендер *көрсеткіштік функция* ұғымымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, функция графигі, көрсеткіштік функция, анықталу облысы, мәндер жиыны, функцияның қасиеттері

Ғылым мен техниканың көптеген саласында әртүрлі құбылыстар мен процестерді сипаттайтын екі айнымалы шаманың арасындағы функционалдық тәуелділік байқалады. Осыған бірнеше мысал келтірейік:

1) теңіз деңгейімен салыстырғанда h биіктіктің артуына қарай p атмосфералық қысым $p = p_0a^h$ заңы бойынша өзгереді, мұндағы p_0 — теңіз деңгейіндегі қысым, a — тұрақты шама;

2) ағашты өнеркәсіпте қолдану шамасы $A = A_0a^{kt}$ заңдылығына сәйкес өседі, мұндағы t — уақыт, A_0 — ағаштың бастапқы саны, A — уақыт өтуіне қарай м^3-мен өрнектелетін ағаш санының өзгерісі;

3) радийдің ыдырауы $x = x_0\,a^{kt}$ заңдылығына сәйкес өтеді, мұндағы x_0 саны $t = 0$ болғандағы радий атомдарының бастапқы саны, a және k — тұрақты сандар.

Келтірілген мысалдардағы процестер *органикалық өсу* процесіне жатады. Органикалық өсу процесін сипаттайтын айнымалылардың физикалық мағынасынан ауытқып, оларды x және y әріптерімен белгілесек, онда кез келген органикалық өсу мына функцияны береді:

$$y = Ca^{kx}.$$

Осындай функцияның $C = k = 1$ болғандағы қарапайым түрін, яғни $y = a^x$ функциясын қарастырайық.

Анықтама. *$y = a^x$ ($a \neq 1$, $a > 0$) түрінде берілген функция* ***көрсеткіштік функция*** *деп аталады.*

Анықтаманың тұжырымдамасында берілген төмендегі жағдайларға назар аудару қажет:

1) a негізі 1 санына тең болмауы керек ($a \neq 1$), өйткені $a = 1$ болғанда a^x дәрежесінің мәні 1 санына тең болып, x айнымалысына тәуелді болмайды;

2) a негізі оң сан болуы керек ($a > 0$), себебі $a < 0$ болғанда x-тің кез келген мәні үшін a^x нақты сан болмайды. Мысалы, $a = -3$ және $x = \frac{1}{2}$ болғанда a^x мына түрге келеді: $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$, ал бұл нақты сан емес;

3) a негізі бөлшек болған жағдайда a^x дәрежесі қандай да бір дәрежелі түбірді білдіреді. Онда түбірдің мәндеріне теріс емес сан алынады.

Сендер көрсеткіштік функцияның графигін салуды үйренесіңдер.

Анықтама бойынша $a \neq 1$ және $a > 0$, онда x-тің кез келген нақты мәнінде $a^x > 0$, сондықтан көрсеткіштік функцияның графигі абсцисса осінің жоғарғы бөлігінде орналасқан. Осыған көз жеткізу үшін $y = a^x$ функциясының графигін $a > 1$ және $0 < a < 1$ жағдайлары үшін қарастыруға болады.

1) $a > 1$ болғанда $a = 2$ және $a = 10$ деп алып, $y = 2^x$ және $y = 10^x$ функцияларының графиктерін салайық (55.1-сурет).

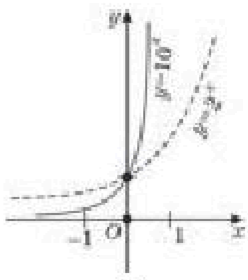
2) $0 < a < 1$ болғанда $a = \frac{1}{2}$ және $a = \frac{1}{10}$ деп алайық және $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ және $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ функцияларының графиктерін салайық (55.2-сурет).

Осы графиктерден көрсеткіштік функциялардың төмендегі қасиеттерін көруге болады:

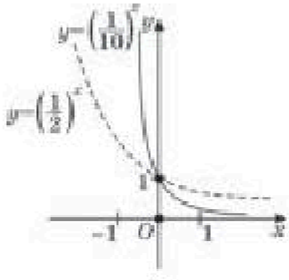
1) $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$ функциясының анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны; мәндер жиыны — $(0; +\infty)$;

2) барлық $y = a^x$ көрсеткіштік функцияларының ($a > 1$ немесе $0 < a < 1$ екеніне тәуелсіз) графиктері $(0; 1)$ нүктесінен өтеді, өйткені $a^0 = 1$;

3) $a > 1$ болғанда көрсеткіштік функция барлық нақты сандар жиынында өспелі және $x > 0$ болса, онда $a^x > 1$, ал $x < 0$ болса, онда $a^x < 1$;



1)



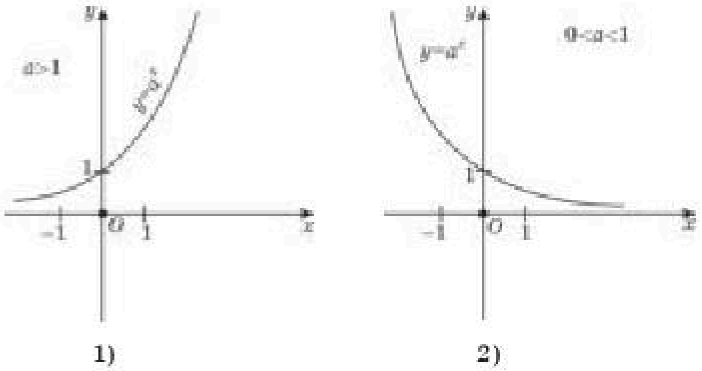
2)

55-сурет

$0 < a < 1$ болғанда көрсеткіштік функция барлық нақты сандар жиынында кемімелі және $x < 0$ болса, онда $a^x > 1$, ал $x > 0$ болса, онда $a^x < 1$;

4) егер $a > 1$ болса, онда a-ның артуына байланысты $y = a^x$ функциясының графигі тез өседі ($y = 2^x$ және $y = 10^x$ функцияларының графиктерін салыстырыңдар); егер $0 < a < 1$ болса, онда a-ның кемуіне байланысты $y = a^x$ функциясының графигі тез кемиді ($y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ және $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ функцияларының графиктерін салыстырыңдар).

$a > 1$ және $0 < a < 1$ жағдайлары үшін $y = a^x$ функциясы графиктерінің жалпы түрі сәйкесінше 56.1-, 2-суреттерде берілген.



56-сурет

Сендер көрсеткіштік функция қасиеттерін есептер шығаруда қолдануды үйренесіңдер.

МЫСАЛ

1. $y = 2^{\frac{1}{x}}$ функциясының анықталу облысын табайық.

Шешуі. $y = a^x$ көрсеткіштік функциясы R барлық нақты сандар жиынында анықталатыны белгілі. Бірақ берілген жағдайда дәреже көрсеткішінің бөлімі нөлге тең болуы мүмкін емес. Сондықтан $y = 2^{\frac{1}{x}}$ функциясының анықталу облысы екі аралықтың бірігуі болып табылады: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

Жауабы: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

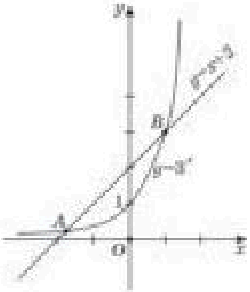
МЫСАЛ

2. Көрсеткіштік функцияның бірсарындылық қасиетін пайдаланып $\left(\frac{5}{7}\right)^{2,6} < \left(\frac{5}{7}\right)^{2,5}$ теңсіздігінің ақиқаттығын көрсетейік.

Шешуі. Берілген теңсіздік ақиқат, себебі $a = \frac{5}{7}$, ал $0 < a < 1$ жағдайында аргументтің мәні өскен сайын $y = a^x$ көрсеткіштік функциясының мәні кемиді.

МЫСАЛ **3.** $y = 3^x$ және $y = x + 2$ функциялары графиктерінің қиылысу нүктелерін табайық.

Шешуі. Бір координаталық жазықтыққа $y = 3^x$ және $y = x + 2$ функцияларының графиктерін салайық (57-сурет). Суреттен көріп отырғанымыздай, берілген функциялардың графиктері A және B нүктелерінде қиылысады.



57-сурет

Жауабы: екі нүктеде қиылысады.

1. Көрсеткіштік функцияның негізі арқылы осы функцияның қандай қасиеттері анықталады?
2. "Кез келген көрсеткіштік функцияның графигі (0;1) нүктесі арқылы өтеді" деген тұжырым неге негізделген?
3. Қандай көрсеткіштік функциялардың графиктері ордината осіне қарағанда симметриялы болады?
4. 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$ жағдайлары үшін x-тің мәні барлық нақты сандар жиынында өссе, $y = a^x$ көрсеткіштік функциясының мәні қалай өзгереді?

Жаттығулар

A

19.1. Бір координаталық жазықтыққа $y = 3^x$ және $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функцияларының графигін салыңдар.

19.2. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x) = 4^{\frac{1}{x}}$; 2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x-2}}$; 3) $f(x) = \frac{1}{7^x}$; 4) $f(x) = 0{,}35^x$.

19.3. $y = f(x)$ функциясының мәндер жиынын анықтаңдар:

1) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 2$; 2) $f(x) = 6^{x+2} + \frac{1}{4}$;

3) $f(x) = 2{,}5^x + 3$; 4) $f(x) = 0{,}7^{x-1} - 1$.

19.4. Егер x:

1) 0; 1; 2; 3; 4; ... ; 2) −1; −2; −3; −4; ... ;

3) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; ...

мәндерін тізбектей қабылдаса, онда $y = 3^x$ функциясы қандай мәндерді қабылдайды?

19.5. Берілген көрсеткіштік функциялардың қайсысы өспелі, қайсысы кемімелі болады:

1) $y = 4^x$; 2) $y = 10^x$; 3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 4) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$?

19.6. x аргументінің мәні артқанда

1) $y = 2^x$ немесе $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$ функцияларының қайсысы жылдам өседі;

2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ немесе $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функцияларының қайсысы жылдам кемиді?

B

19.7. Көрсеткіштік функцияның қасиеттерін қолданып төмендегі сандарды 1 санымен салыстырыңдар:

1) 11^{-5}; 2) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $(0,15)^{-3}$; 4) $(1,2)^{-2}$.

19.8. Салыстырыңдар:

1) $(3,5)^{-\sqrt{2}}$ және $\left(\frac{1}{3,5}\right)^{-\sqrt{2}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{1+\sqrt{3}}$ және $\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$;

3) $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ және $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{3}-2}$; 4) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2\sqrt{3}}$ және $3^{\sqrt{3}}$.

19.9. Төмендегі көрсеткіштік функциялардың графиктері өзара қалай орналасқан:

1) $y = 9^x$ және $y = 4^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ және $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$?

Әр пункті $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$ жағдайлары үшін қарастырыңдар.

19.10. $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының графиктері неше нүктеде қиылысады:

1) $y = 2^x$ және $y = 4^x$; 2) $y = 2^x$ және $y = x^4$;

3) $y = 2^x$ және $y = x^2$; 4) $y = 2^x$ және $y = -3x^2$?

19.11. x аргументінің 1; 2; 3; 4; ... мәндеріне сәйкес $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ көрсеткіштік функциясының мәндері қандай сан тізбегін құрайды?

19.12. Қарапайым түрлендірулерді қолданып функциялардың графиктерін салыңдар: 1) $y = 2^{x+3} - 3$; 2) $y = 2 - 3^{x-1}$.

19.13. Егер: 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$ болса, онда x-тің әртүрлі мәндерінде a^x-нің мәнін 1 санымен салыстырыңдар.

C

19.14. $y = a^x$ функциясының графигін пайдаланып $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ функциясының графигін қалай салуға болады?

19.15. Көрсеткіштік функцияның қасиеттерін қолданып төмендегі тұжырымдардың ақиқат болатынын немесе ақиқат болмайтынын дәлелдеңдер:

1) $a^x > a^3$ және $x > 3$ теңсіздіктері мәндес;

2) $7^{x^2} > 7^x$ теңсіздігінен $x^2 < x$ теңсіздігі шығады;

3) $\left(\frac{1}{9}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ және $2x < x - 1$ теңсіздіктері мәндес.

19.16. $y = 3^{|x|}$ функциясы мәндерінің ішінен

1) ең үлкен мәнді; 2) ең кіші мәнді көрсетуге бола ма?

19.17. x аргументінің қандай мәндерінде $y = 2^{2x}$ функциясының сәйкес мәндері $\frac{1}{4}$-ден үлкен болады?

19.18. 1; 3; 9; 27; 81; ... геометриялық прогрессиясы берілген. Аргументтің қандай мәндерінде осы прогрессияның мүшелері қандай көрсеткіштік функцияның мәндерін береді?

ҚАЙТАЛАУ

19.19. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sin^2 x - \cos x = 1$; 2) $\sin^2 x + 2\cos x = 0$.

19.20. $f'(x) \geqslant 0$ теңсіздігін шешіңдер:

1) $f(x) = 2\cos 3x + 3x$; 2) $f(x) = -x^3 + 9x$.

19.21. Анықталмаған интегралды табыңдар:

1) $\int \left(5x^4 - 3x^2 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$; 2) $\int(\cos 2x - (2x + 1)^3)dx$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Дәреже, дәреженің негізі, дәреженің көрсеткіші, теңдеу, теңдеудің түбірі, дәрежеге шығару, түбір табу, көрсеткіштік функция және оның қасиеттері.

§ 20. САННЫҢ ЛОГАРИФМІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Сендер *санның логарифмі* ұғымымен танысасыңдар.

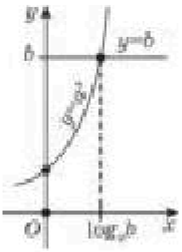
ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Сан, логарифм, ондық логарифм, натурал логарифм, *e* саны

Қандай да бір a санын x дәрежеге шығару арқылы алынған b санын алсақ, оны

$$a^x = b \qquad (1)$$

теңдеуі түрінде жазуға болады, мұндағы a және b — берілген сандар, ал x — белгісіз шама.



58-сурет

Бұл теңдеудің әр уақытта түбірі бола бермейді.

Мысалы, a саны оң, ал b саны теріс болса, онда (1)-теңдеудің шешімі жоқ, себебі көрсеткіштік функция әр уақытта нөлден үлкен: $a^x > 0$. Ал егер a және b оң сандар және $a \neq 1$ болса, онда (1)-теңдеудің бір ғана түбірі бар.

(1)-теңдеуді графиктік тәсілмен шешейік. Теңдеудің сол жақ бөлігі көрсеткіштік функцияны, ал оң жағы $y = b$ сызықтық функцияны береді. Бұл функциялардың графиктері бір нүктеде қиылысады (58-сурет).

Қиылысу нүктесінің абсциссасы (1)-теңдеудің түбірі болады. Теңдеудің түбірін $\log_a b$ белгісімен жазу ұйғарылған (белгінің оқылуы: *негізі a болатын b санының логарифмі*).

Анықтама. *Оң және 1-ден өзгеше a негізі бойынша* ***b оң санының логарифмі*** *деп b саны алынатындай a саны шығарылатын дәреженің көрсеткішін айтады.*

$\log_a b = x$ жазуы *негізі a болатын b санының логарифмі x-ке тең* деп оқылады.

МЫСАЛ

1. Негізі 5-ке тең 25, 625 және $\frac{1}{125}$ сандарының логарифмін табайық.

Шешуі. Негізі 5 болатын 25 санының логарифмі 2-ге тең, себебі $5^2 = 25$ немесе $\log_5 25 = 2$.

Негізі 5 болатын 625 санының логарифмі 4-ке тең, себебі $5^4 = 625$ немесе $\log_4 625 = 5$.

Негізі 5 болатын $\frac{1}{125}$ санының логарифмі −3-ке тең, себебі $5^{-3} = \frac{1}{125}$ немесе $\log_5 \frac{1}{125} = -3$.

Жауабы: 2; 4; −3.

Санның логарифмінің анықтамасынан

$$a^{\log_a b} = b \qquad (2)$$

теңдігі шығады.

(2)-теңдікті *логарифмнің негізгі тепе-теңдігі* деп атайды.

МЫСАЛ

2. 1) $3^{\log_3 27} = 27$; 2) $5^{\log_5 125} = 125$; 3) $10^{\log_{10}\frac{1}{100}} = \frac{1}{100}$.

Енді берілген екі сан бойынша үшінші санды табуға, яғни 1) $a^x = b$; 2) $x^a = b$; 3) $a^c = x$ түріндегі теңдеулерді шешуге есептер қарастырайық.

МЫСАЛ

3. Негізі 9 болатын 27 санының логарифмін табайық.

Шешуі. $\log_9 27 = x$ болсын. Онда логарифмнің анықтамасы бойынша $9^x = 27$ немесе $(3^2)^x = 3^3$, бұдан $2x = 3$ немесе $x = \frac{3}{2}$.

Жауабы: $\frac{3}{2}$.

МЫСАЛ

4. 16 санының логарифмі қандай негізде 4-ке тең болатынын табайық.

Шешуі. Логарифмнің негізі белгісіз болғандықтан $\log_x 16 = 4$ деп жазуға болады. Логарифмнің анықтамасы бойынша $16 = x^4$ немесе $2^4 = x^4$, бұдан $x = 2$.

Жауабы: 2.

МЫСАЛ

5. Негізі 81 болғанда $-\frac{3}{4}$-ке тең логарифмді табайық.

Шешуі. Белгісіз санды x деп белгілесек, $\log_{81} x = -\frac{3}{4}$ шығады. Логарифмнің анықтамасы бойынша $x = 81^{-\frac{3}{4}}$ немесе $x = \frac{1}{\sqrt[4]{81^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3^{12}}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$, $x = \frac{1}{27}$.

Жауабы: $\frac{1}{27}$.

МЫСАЛ

6. 1) Негізі 2 болғанда 0,125 санының; 2) негізі $\frac{1}{2}$ болғанда $\sqrt{2}$ санының; 3) негізі 3 болғанда $\frac{1}{\sqrt{3}}$ санының логарифмін табайық.

Шешуі. 1) $\log_2 0,125 = -3$, себебі $0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$;

2) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}$, себебі $\sqrt{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 3) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$, себебі $\frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-\frac{1}{2}}$.

Жауабы: 1) -3; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$.

Сендер логарифмнің қасиеттерін білесіңдер.

Логарифмнің қасиеттері:

1) *негізі а (а — кез келген оң сан) болатын а санының логарифмі 1-ге тең*:

$$\log_a a = 1;$$

2) *негізі а болатын 1 санының логарифмі 0-ге тең*:

$$\log_a 1 = 0;$$

3) *екі немесе бірнеше оң сандардың көбейтіндісінің логарифмі көбейткіштердің логарифмдерінің қосындысына тең*:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c\ ;$$

4) *қатынастың немесе бөлшектің логарифмі алымының логарифмі мен бөлімінің логарифмінің айырымына тең*:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c\ ;$$

5) *дәреженің логарифмі дәреже көрсеткішін дәреже негізінен алынған логарифмге көбейткенге тең*:

$$\log_a b^n = n\log_a b\ ;$$

6) *жаңа негізге көшу формуласы*:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Аталған қасиеттердің кейбіреулерінің дәлелдемесін келтірейік.

$\log_a b^n = n\log_a b$ қасиетін дәлелдейік.

Дәлелдеу. $b = a^{\log_a b}$ негізгі тепе-теңдікті n-ші дәрежеге шығарайық. Сонда $b^n = a^{n\log_a b}$. Демек, логарифмнің анықтамасы бойынша $\log_a(b^n) = n \cdot \log_a b$.

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ қасиетін дәлелдейік.

Дәлелдеу. b және c оң сандар болсын, онда логарифмнің негізгі қасиеті бойынша $b = a^{\log_a b}$, $c = a^{\log_a c}$. Осы екі теңдікті мүшелеп көбейтсек, $bc = a^{\log_a b + \log_a c}$ теңдігін аламыз. Енді логарифмнің анықтамасын қолдансақ, $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Қалған қасиеттердің ақиқаттығын өздерің дәлелдеңдер.

Сендер логарифм қасиеттерін біліп, оны логарифмдік өрнектерді түрлендіруде қолдануды үйренесіңдер.

МЫСАЛ

7. 1) $\log_3(243\cdot 729)$; 2) $\log_5\dfrac{0{,}008}{125}$; 3) $\log_3\log_4\sqrt[9]{4}$ логарифмінің мәнін табайық.

Шешуі. 1) $\log_3(243\cdot 729)=\log_3 243+\log_3 729=5+6=11$;

2) $\log_5\dfrac{0{,}008}{125}=\log_5 0{,}008-\log_5 125=-3-3=-6$;

3) $\log_3\log_4 4^{\frac{1}{9}}=\log_3\left(\dfrac{1}{9}\log_4 4\right)=\log_3\left(\dfrac{1}{9}\cdot 1\right)=\log_3 3^{-2}=-2$.

Жауабы: 1) 11; 2) −6; 3) −2.

Қарастырылған мысалдардың шығарылу жолын өздерің түсіндіріп көріңдер.

МЫСАЛ

8. Негізі a^k болатын N санының логарифмі берілген. Осы санның a негізі бойынша логарифмін табайық.

Шешуі. Логарифмнің жаңа негізге көшу формуласын қолданамыз:

$$\log_{a^k}N=\frac{\log_a N}{\log_a a^k}=\frac{\log_a N}{k}=\frac{1}{k}\cdot\log_a N.$$

Жоғарыда берілген барлық қасиеттер “Логарифмді табу” амалын орындауда, яғни кез келген алгебралық өрнекті логарифмдеу кезінде қолданылады.

Өрнекті логарифмдей білу логарифмдеудің нәтижесі бойынша осы нәтижені беретін өрнекті табуға мүмкіндік береді. Мысалы, егер $\log_a x=\log_a b+3\log_a c-4\log_a d$ теңдеуі берілсе, онда $x=\dfrac{bc^3}{d^4}$.

Мұндай операцияны *потенциалдау* деп атайды.

Егер a және b — оң сандар және $a\neq 1$ болса, онда кез келген $k\neq 0$ саны үшін $\log_a b=\log_{a^k}b^k$ теңдігі орындалады.

Мысалы, $\log_3 4=\log_{3^2}4^2=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{4}$ және т.б.

Сендер *ондық логарифм* және *натурал логарифм* ұғымдарымен танысасыңдар.

Практикада логарифмнің дербес түрлері қолданылады.

Анықтама. *Негізі* 10 *болатын санның логарифмі* ***ондық логарифм*** *деп аталады.*

Ондық логарифмді жазу үшін lg белгісі қолданылады.

Мысалы, $\log_{10}217$ орнына lg217; $\log_{10}9$ орнына lg9 деп жазылады.

Ондық логарифмнің өзіне тән үш қасиеті бар:

1) 1 саны және одан кейінгі нөлдерден тұратын оң санның ондық логарифмі нөлдердің санына тең бүтін оң сан болады, яғни $a = 10^n$ болса, онда $\lg a = \lg 10^n = n$;

2) 1 саны және оның алдындағы нөлдерден тұратын оң ондық бөлшектің ондық логарифмі n болады (мұндағы n нөл бүтінді қоса алғандағы нөлдердің санына тең), яғни $a = 10^{-n}$ болса, онда $\lg a = \lg 10^{-n} = -n$;

3) бүтін немесе нөлінші дәрежеге тең емес рационал санның ондық логарифмі иррационал сан болады.

Мысалы, $\lg 3$, $\lg 7$, $\lg 0{,}34$, $\lg 15$ — иррационал сандар.

Есептеулерді жеңілдету үшін ондық логарифмдерді қолданған ыңғайлы. Сонымен қатар, негізі $e = 2{,}7182818289...$ (e иррационал саны шексіз периодсыз ондық бөлшек түрінде жазылады) болатын логарифм де қолданылады.

Анықтама. *Негізі e болатын санның логарифмі* ***натурал логарифм*** *деп аталады.*

Натурал логарифмді жазу үшін ln белгісі қолданылады.

Мысалы, $\log_e 13$ орнына $\ln 13$ деп жазылады.

Натурал логарифмнен ондық логарифмге көшу формуласын өздерің жазып көріңдер.

1. Негіздері бірдей өзара кері сандардың логарифмдерінің қандай айырмашылығы бар? Жауабын түсіндіріңдер.
2. Қосындының логарифмі логарифмдердің қосындысына тең деген тұжырыммен келісесіңдер ме? Неге?
3. Нақты сандар жиынында теріс санның логарифмі бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.
4. $\lg e$ мәні белгілі болғанда $\ln 10$ мәнін қалай есептеуге болады?
5. Берілген N санының ондық логарифмі үлкен бе, натурал логарифмі үлкен бе?
6. Логарифмнің жалпы қасиеттерінің қайсысы натурал логарифмге тән?

Жаттығулар

А

20.1. 1; 9; 81; 243; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{27}$ сандарының негізі 3 болатын логарифмін табыңдар.

Есептеңдер **(20.2-20.3):**

20.2. 1) $\log_2 16$; 2) $\log_{0,2} 0{,}04$; 3) $\log_3 \frac{1}{81}$;

4) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; 5) $\log_{23} 1$; 6) $\log_5 \frac{1}{125}$.

20.3. 1) $\log_5 22 - \log_5 11 - \log_5 10$; 2) $\log_2 7 - \log_2 63 + \log_2 36$;

3) $\log_3 8 - \log_3 4 + \log_3 \frac{9}{2}$; 4) $\log_7 64 - \log_7 256 + \log_7 28$.

20.4. Төмендегі көрсеткіштік теңдіктерді логарифм арқылы жазыңдар:

1) $3^6 = 729$; 2) $4^5 = 1024$; 3) $10^4 = 10\ 000$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$; 6) $10^{-3} = 0{,}001$.

20.5. Төмендегі логарифмдік теңдіктерді көрсеткіштік теңдік арқылы жазыңдар:

1) $\log_2 64 = 6$; 2) $\log_3 81 = 4$; 3) $\log_5 125 = 3$;

4) $\lg 100000 = 5$; 5) $\lg 0{,}01 = -2$; 6) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{27}{64} = 3$.

20.6. Негізі 10 болғандағы төмендегі сандардың логарифмдерін табыңдар:

1) 100; 2) 0,001; 3) 10^n;

4) $\sqrt{10}$; 5) $\sqrt[3]{10^2}$; 6) $\frac{1}{10\sqrt{10}}$.

20.7. Ондық логарифмді есептеңдер:

1) $\lg 10000$; 2) $\lg 0{,}1$; 3) $\lg 0{,}0001$; 4) $\lg \sqrt{10}$.

20.8. Натурал логарифмді есептеңдер:

1) $\ln e$; 2) $\ln e^{\frac{1}{3}}$; 3) $\ln \sqrt{e}$; 4) $\ln(\lg 10)$.

20.9. Егер: 1) $\lg 5 \approx 0{,}699$ болса, онда $\lg \frac{1}{5}$; $\lg 0{,}05$; $-\lg 0{,}005$;

2) $\lg 29 \approx 1{,}462$ болса, онда $\lg 29000$; $\lg 2{,}9$; $\lg 0{,}29$ сандарының логарифмін табыңдар.

B

20.10. Есептеңдер:

1) $\log_{\frac{1}{5}} 9 + 2\log_{\frac{1}{5}} \frac{5}{3}$; 2) $\log_3 8 + 3\log_3 \frac{9}{2}$;

3) $\log_7 196 - 2\log_7 2$; 4) $\log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{4}{3}$.

20.11. Өрнекті логарифмдеңдер:

1) $\lg(a^2 b^3)$; 2) $\lg(5a^2 x^2)$; 3) $\lg(mn)^3$;

4) $\lg \sqrt[3]{7a^3 b}$; 5) $\lg\left(4\sqrt[5]{2ab^3}\right)$; 6) $\lg\left(7a^8 b \sqrt[8]{c}\right)$.

20.12. Мына теңдіктерден логарифмнің анықтамасы бойынша белгісізді табыңдар:

1) $x = \log_3 27$; 2) $y = \log_2 16$; 3) $z = \log_5 625$;
4) $x = \log_2 0{,}125$; 5) $\log_{\frac{3}{2}} y = 2$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} z = -3$.

Өрнектің мәнін табыңдар (20.13-20.14):

20.13. 1) $\dfrac{25^{\log_5 2} + 1}{49^{\log_7 4}}$; 2) $\dfrac{16^{0,5\log_4 10}}{10^{\lg 4} + 1}$;

3) $25^{2-\log_5 2} + 7^{-\log_7 3}$; 4) $\log_4 \dfrac{1}{5} + \log_4 36 + \dfrac{1}{2}\log_4 \dfrac{25}{81}$.

20.14. 1) $\log_2 12 + \log_2 \dfrac{5}{3} + \log_2 \dfrac{4}{5}$; 2) $(\log_5 128)\left(\log_2 \dfrac{1}{125}\right)$;

3) $3^{2-\log_3 5} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_3 5}$; 4) $9^{3-\log_3 54} + 7^{-\log_7 4}$.

20.15. Салыстырыңдар:

1) $9^{\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{2}{3}\right)}$ және $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt[3]{3}$ және $\left(\dfrac{1}{36}\right)^{\log_6 2}$.

20.16. Төмендегі теңдікте x-тің мәнін табыңдар:

1) $\log_x 36 = 0{,}5$; 2) $\log_x 27 = \dfrac{3}{2}$;

3) $\log_x 64 = 1{,}2$; 4) $\log_x 2 = -0{,}5$.

20.17. lg2 және lg3 белгілі болған жағдайда 100-ден аспайтын қандай натурал сандардың логарифмін есептеуге болады?

20.18. Ондық логарифмдерінің айырымы: 1) 1; 2) 2; 3) 3-ке тең екі санның қатынасы қандай?

C

20.19. Егер: 1) $\lg 2 = a$ болса, онда $\lg 25$;

2) $\lg 5 = a$ және $\lg 2 = c$ болса, онда $\log_{50} 8$;

3) $\log_b a = 3$ болса, онда $3\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} b$;

4) $\log_a b = 4$ болса, онда $\log_{\sqrt{ab}}\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}}\right) + \log_{\sqrt{ab}}(a\sqrt{a})$ -ны өрнектеңдер.

Есептеңдер (20.20-20.21):

20.20. 1) $343^{2\log_{49} 2}$; 2) $4^{2\log_{32} 10}$; 3) $\sqrt{5}^{2\log_5 3}$;

4) $9^{\log_{27}\sqrt{5}}$; 5) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\log_{\frac{1}{9}} 4}$; 6) $4^{\log_8 125}$.

20.21. 1) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$; 2) $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$; 3) $\log_4 \log_3 \sqrt{81}$;

4) $\log_{\sqrt{3}} \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$; 5) $\log_{\frac{8}{27}} \log_{25} 125$; 6) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$.

20.22. 1) Негізі 2 болғанда 7; 30; 120; 495;
2) негізі 10 болғанда 3; 18; 134; 1782 сандарының логарифмі қандай екі бүтін санның арасында орналасқан?

20.23. 1) Негізі 10 болғанда 0,07; 0,018; 0,00125; 0,00005;

2) негізі 2 болғанда $\frac{1}{15}$; $\frac{3}{80}$; $\frac{1}{120}$ сандарының логарифмі қандай екі теріс санның арасында орналасқан?

20.24. 1) Негізі 2; $\frac{1}{2}$; 4; 16; 64 болғанда $\sqrt[5]{8}$ санының логарифмі неге тең?

2) Қандай негізде $\sqrt{27}$ санының логарифмі $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$ болады?

20.25. Егер сандар тізбегі оң мүшелі геометриялық прогрессияны берсе, онда олардың логарифмі арифметикалық прогрессияны құрайтынын жалпы түрде көрсетіңдер.

Өрнектің мәнін табыңдар (**20.26—20.28**):

20.26. 1) $0{,}25(1 + 4^{\log_2 5})^{\log_{26} 4}$; 2) $10^{2 - \lg 2} - 25^{\log_5 4}$;

3) $81^{\log_9 2 - 0{,}25\log_3 2}$; 4) $81^{-\log_{0,5} 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 4 + 2{,}5}$;

5) $\dfrac{\log_2^2 14 + (\log_2 14)(\log_2 56) - 2\log_2^2 56}{\log_2 14 - \log_2 56}$;

6) $\dfrac{\log_5^2 7\sqrt{5} + 2\log_5^2 7 - 3(\log_5 7\sqrt{5})(\log_5 7)}{\log_5 7\sqrt{5} - \log_5 49}$;

7) $\dfrac{\log_4^2 12 + 3\log_4^2 \frac{1}{3} + 4(\log_4 12)\left(\log_4 \frac{1}{3}\right)}{\log_4 12 + 3\log_4 \frac{1}{3}}$;

8) $\dfrac{2\log_2^2 3 - \log_2^2 12 - \log_2 3 \cdot \log_2 12}{2\log_2 3 + \log_2 12}$.

20.27. 1) $27^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{3}} + 4 \cdot 5^{\log_{0,04} 9} - 2^{\log_8 125} \cdot \log_{32} 16$;

2) $7^{\frac{2}{\log_2 7}} \cdot 4^{\log_4 6} + 4 \cdot 6^{\frac{1}{\log_4 6}} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^{\log_3 27}$;

3) $\left(3^{\log^2_{\sqrt{3}} 2} - 4^{\log^2_{\sqrt{3}} 2}\right)^2 - 3^{\frac{1}{\log_5 3}}$;

4) $\left(3^{\frac{\log_3 5}{\log_5 3}} - 5^{\frac{1}{\log_5 3}} + 0{,}008^{\log_{343} 49}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

5) $\left(2^{\frac{\log_2 5}{\log_5 2}} - 5^{\frac{1}{\log_5 2}} + 5^{\log_5 25}\right)^{\frac{1}{2}}$.

20.28. 1) $(\log_3 2 + \log_2 81 + 4)(\log_3 2 - 2\log_{18} 2) \log_2 3 - \log_3 2$;

2) $(\log_2 7 + \log_7 16 + 4)(\log_2 7 - 2\log_{28} 7) \log_7 2 - \log_2 7$;

3) $(\log_6 3 + \log_3 1296 + 4)(\log_6 3 - \log_{108} 9) \log_3 6 - \log_6 3$;

4) $(\log_5 7 + 9 \log_7 5 + 6)(\log_5 7 - 3\log_{875} 7) \log_7 5 - \log_5 7$;

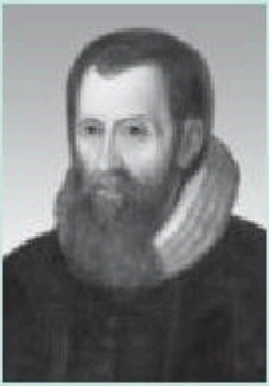
5) $(\log_2 5 + 16\log_5 2 + 8)(\log_2 5 - 4\log_{80} 5) \log_5 2 - \log_2 5$;

6) $(\log_4 6 + \log_6 4 + 2)(\log_4 6 - \log_{24} 6) \log_6 4 - \log_4 6$.

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИК ЖАЙЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

20.29. 1) Санның логарифмі ұғымының даму тарихы бойынша хабарлама дайындаңдар.

2) Ғалым-математик Джон Непер және оның “Логарифмдердің ғажайып кестесі” жайлы хабарлама дайындаңдар.



Дж. Непер
(1550—1617)

ҚАЙТАЛАУ

20.30. Абсциссасы x_0 болатын нүктеде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентінің мәнін табыңдар:

1) $y = x^2 - x,\ x_0 = 2$;

2) $y = \sqrt{4 - x},\ x_0 = 3$;

3) $y = \frac{3x}{x + 1},\ x_0 = 2$.

20.31. 1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$;

2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$;

3) $f(x) = x - 2\sin x$ болса, онда $f'(x) < 0$ теңсіздігін шешіңдер.

20.32. "Жанды геометрия" бағдарламасын қолданып, функцияның графигін салыңдар және мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = 2^{x+1}$;   2) $f(x) = 2^{x-2}$;
3) $f(x) = -e^{x}$;   4) $f(x) = -e^{2x}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның графигі, кері функция, көрсеткіштік функция және оның графигі мен қасиеттері, санның логарифмі, логарифмді табу, негізгі логарифмдік тепе-теңдік, логарифмнің қасиеттері.

§21. ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

Сендер *логарифмдік функция* ұғымымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, функция графигі, логарифмдік функция, анықталу облысы, мәндер жиыны, функцияның қасиеттері

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Егер кез келген $y = y_0$ түзуі $y = f(x)$ функциясының графигін бір ғана нүктеде қиятын болса, онда $y = f(x)$ функциясының кері функциясы болады (егер y_0 мәні $y = f(x)$ функциясының мәндер жиынына тиісті болмаса, онда $y = y_0$ түзуі $y = f(x)$ функциясының графигін қимайды. Демек, $y = f(x)$ қалпына келетін функция).

Егер $y = f(x)$ функциясы өспелі немесе кемімелі болса, онда ол — қалпына келетін функция. Демек, оның кері функциясы бар.

$y = a^x$ көрсеткіштік функциясы — бірсарынды функция, демек оған кері функция бар.

Егер $y = a^x$ (мұндағы $0 < a \neq 1$) болса, онда логарифмнің анықтамасы бойынша $x = \log_a y$. Соңғы теңдіктегі x және y айнымалыларының орындарын ауыстырсақ, $y = \log_a x$ функциясын аламыз. Бұл функция көрсеткіштік функцияға кері функция болып табылады.

Анықтама. *Көрсеткіштік функцияға кері функция* ***логарифмдік функция*** *деп аталады.*

Логарифмдік функцияның түрі $y = \log_a x$, мұндағы $a > 0$ және $a \neq 1$.

Логарифмдік функциялар арқылы ғылыми-практикалық маңызы бар көптеген тәуелділіктер өрнектеледі.

Мысалы,

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p}$$

формуласы теңіз деңгейінен жоғары биіктікті анықтау үшін қолданылады. Мұндағы p_0 — теңіз деңгейіндегі атмосфералық қысым, k — қандай да бір белгілі тұрақты, $e \approx 2{,}718$, h — теңіз деңгейінен жоғары биіктік, p — теңіз деңгейінен h биіктіктегі атмосфералық қысым.

Бұл жерде p — тәуелсіз айнымалы немесе аргумент, ал h — тәуелді айнымалы немесе функция. Жоғарыдағы формуламен берілген p атмосфералық қысым бойынша теңіз деңгейінен жоғары h биіктікті анықтауға болады. Теңдеуді h-қа қатысты шешіп

$$p = p_0\, e^{-kh}$$

формуласын алуға болады.

$$t = \frac{100}{p} \ln \frac{A}{a}$$

формуласын қарастырайық.

Мұндағы a — алғашқы салымды білдіреді, p — жылдық пайыз саны, A — жыл өткеннен кейінгі салымның өсуіне байланысты жиналған ақша.

Бұл жерде A — тәуелсіз айнымалы, ал t — тәуелді айнымалы деп қарастырып, A-ның мәні бойынша t-ны есептеуге болады. Ол тәуелділікті былай жаза аламыз:

$$A = ae^{\frac{pt}{100}}.$$

Логарифмдік функцияның қасиеттері:

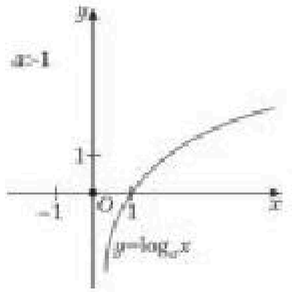
1) анықталу облысы оң сандар жиыны, яғни R_+;

2) мәндер жиыны барлық нақты сандар жиыны, яғни R;

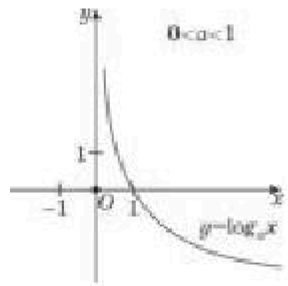
3) $a > 1$ болғанда функция өседі; $0 < a < 1$ болғанда функция кемиді;

4) функция өзінің анықталу облысында үзіліссіз.

Логарифмдік функция графигінің жалпы түрі 58.1-, 2-суреттерде көрсетілген.



1)

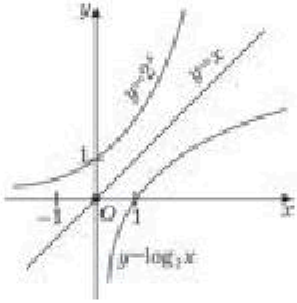


2)

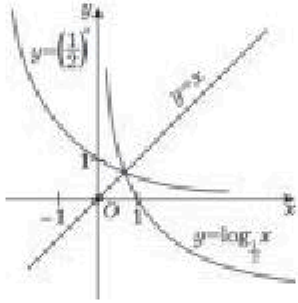
58-сурет

59.1-суретте $y = 2^x$ көрсеткіштік функцияның және оған кері $y = \log_2 x$ логарифмдік функцияның графиктері ($a = 2$), ал 59.2-суретте $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

көрсеткіштік функцияның және оған кері $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ логарифмдік функцияның графиктері $\left(a = \frac{1}{2}\right)$ көрсетілген.



1)



2)

59-сурет

59.1, 59.2-суреттерді қолданып $y = \log_a x$ логарифмдік функциясының графигін оған сәйкес көрсеткіштік функцияның графигімен салыстыруға болады. Логарифмдік функция мен оған сәйкес көрсеткіштік функцияның графиктерін салыстыра отырып олардың $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы болатынына көз жеткіземіз.

МЫСАЛ

1. Бір координаталық жазықтыққа $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ және $y = \lg x$ функцияларының графиктерін салып, олардың өзара қалай орналасқанын анықтайық.

Шешуі. Қарастырылып отырған функциялардың орналасуын анықтау үшін алдымен олардың жуық мәндерінің кестесін құрастырамыз:

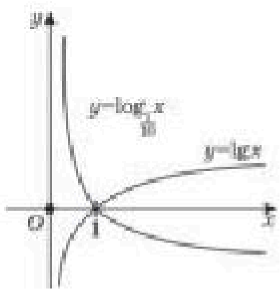
32-*кесте*

x	0,1	1	10	...
$\lg x$	−1	0	1	...

33-*кесте*

x	0,1	1	10	...
$\log_{\frac{1}{10}} x$	1	0	−1	...

Табылған нүктелердің координаталары бойынша бір координаталық жазықтыққа берілген екі функцияның да графигін салайық (60-сурет). Негіздері өзара кері сандар болатын логарифмдік функциялардың графигі Ox осіне қарағанда симметриялы, оны 60-суреттен көруге болады.



60-сурет

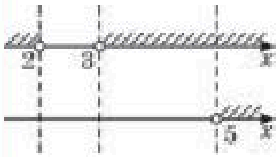
Логарифмдік функцияның анықталу облысын табуды үйренесіңдер.

МЫСАЛ

2. $y = \lg(x^2 - 5x + 6) + \dfrac{\log_2 \sqrt{x - 5}}{17}$ функциясының анықталу облысын табайық.

Шешуі. Логарифмдік функцияның анықталу облысы тек қана оң сандар екенін ескеріп, мына теңсіздіктер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 > 0, \\ x - 5 > 0. \end{cases}$$



61-сурет

Теңсіздіктер жүйесінің әр теңсіздігінің шешімін координаталық түзуге кескіндейік (61-сурет). Осы теңсіздіктердің шешімдер жиынының қиылысуы, яғни $(5; +\infty)$ аралығы, берілген функцияның анықталу облысы болып табылады.

Жауабы: $(5; +\infty)$.

1. Логарифмдік функция мен көрсеткіштік функцияның қасиеттерінде қандай ұқсастық пен айырмашылық бар?
2. Көрсеткіштік функцияның ($y = a^x$) графигінен қандай қозғалысты (геометриялық түрлендіруді) қолданып логарифмдік функцияның ($y = \log_a x$) графигін алуға болады?
3. Барлық логарифмдік функциялардың графиктері қандай нүкте арқылы өтеді? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

21.1. $y = f(x)$ функциясы графигінің кескінін салыңдар:

1) $f(x) = \log_5 x$; 2) $f(x) = \log_{\frac{1}{7}} x$;

3) $f(x) = \log_{12,4} x$; 4) $f(x) = \log_{0,9} x$.

21.2. $y = f(x)$ функциясының өспелі немесе кемімелі болатынын анықтаңдар:

1) $f(x) = \log_8 x$; 2) $f(x) = \log_{0,1} x$;

3) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$; 4) $f(x) = \lg x$.

21.3. Аргументтің қандай мәндері үшін $y = \log_2 x$ функциясының сәйкес мәндері оң және қандай мәндері теріс болады? 1) $0 < a < 1$; 2) $a > 1$ жағдайлары үшін қарастырыңдар.

21.4. 1) $\lg 7 > \lg 5$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 7 < \log_{\frac{1}{3}} 5$ теңсіздігі ақиқат болатынын логарифмдік функцияның қандай қасиетіне сүйеніп айтуға болады?

$y = f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар **(21.5–21.7)**:

21.5. 1) $f(x) = \log_2(x + 1)$; 2) $f(x) = \log_{0,7}(x - 8)$;
3) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(3x + 4)$; 4) $f(x) = \log_5(2x - 1)$.

21.6. 1) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(2 - x)$; 2) $f(x) = \log_{2,5}(5 - 2x)$;
3) $f(x) = \log_5(11 - 4x)$; 4) $f(x) = \log_7(6 - 5x)$.

21.7. 1) $f(x) = \lg(3x - 1) + \lg(x^2 + x + 1)$;
2) $f(x) = \lg(x - 5) + \lg(x^2 + x + 2)$;
3) $f(x) = \log_3(x - 1) + \log_2(x + 5)$;
4) $f(x) = \log_7(3 - x) - \log_{0,3}(x + 2)$.

B

21.8. $y = f(x)$ функциясының графигін салып, қасиеттерін атаңдар:
1) $f(x) = \log_3 x + 2$; 2) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 4$;
3) $f(x) = -\log_2 x$; 4) $f(x) = 2 - \log_4(x + 3)$.

21.9. $y = f(x)$ функциясына кері функцияның графигін салыңдар:
1) $f(x) = 4^x$; 2) $f(x) = 0,2^x$; 3) $f(x) = 2^{x+1}$; 4) $f(x) = 3^x - 2$.

$y = f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар **(21.10—21.12)**:

21.10. 1) $f(x) = \sqrt{x + 2} - \log_{1,1}(6 - 2x)$;
2) $f(x) = \sqrt{3 - x} + \log_5(9 + 4x)$;
3) $f(x) = \log_2(x^2 - 1) + \sqrt{5 - x}$;
4) $f(x) = \log_{0,8}(1 - x^4) - \sqrt{x - 0,7}$.

21.11. 1) $f(x) = \log_3(x(x - 3)) - \log_3(x + 4)$;
2) $f(x) = \ln(3 + 5x) - \ln(4 - 9x^2)$;
3) $f(x) = \log_{0,5}(x^2 + x) + \sqrt{2 - x}$;
4) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \ln(9 - x^2)$.

21.12. 1) $f(x) = \dfrac{\lg(3 + 2x - x^2)}{2 - x}$; 2) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 5x)}{x - 7}$;
3) $f(x) = \lg|x - 3| + \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$; 4) $f(x) = 10\lg|x + 4| - \dfrac{3}{\sqrt{8 - x}}$.

C

21.13. Геометриялық прогрессияны құрайтын 1; 2; 4; 8; ... аргументінің мәндері үшін $y = \log_{\sqrt{2}} x$ логарифмдік функциясының мәндері қандай сан тізбегін құрайды? Тізбекті жазыңдар. Қорытынды жасаңдар.

21.14. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x) = \log_{x-2}\left(\dfrac{2x}{x+1} - 1\right)$; 2) $f(x) = \log_{x+5}\left(\dfrac{3x+2}{2x-1}\right)$;

3) $f(x) = \log_{x-1}\left(\dfrac{x}{9-x^2}\right)$; 4) $f(x) = \log_{3-x}\dfrac{x^2-4}{x}$.

21.15. $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар:

1) $f(x) = \lg|x^2 - 1|$; 2) $f(x) = \lg|x - 3|$;

3) $f(x) = |\lg|x||$; 4) $f(x) = 4 - |\log_3|x - 1||$.

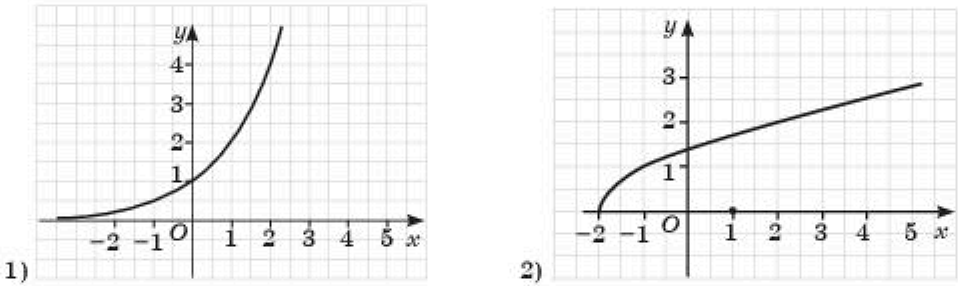
ҚАЙТАЛАУ

21.16. Айнымалыны алмастыру тәсілін қолданып теңдеуді комплекс сандар жиынында шешіңдер:

1) $z^4 - z^2 - 12 = 0$; 2) $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$;

3) $z - 3 + 2\sqrt{z-3} = 8$; 4) $(z+1)^2(z^2 + 2z) = 12$.

21.17. Графигі 61-суретте кескінделген функцияның аналитикалық формуласын жазыңдар:



61-сурет

21.18. Екі ойын сүйегі лақтырылған. Түскен ұпайлардың көбейтіндісінің мәні 1) 6; 2) 3 санына тең болуының ықтималдығын табыңдар.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, кері функция, өзара кері функциялардың графиктері, функцияның графигіне жүргізілген жанама, бұрыштық коэффициент, үзіліссіз функция, функцияның туындысы, көрсеткіштік функция, оның қасиеттері мен графигі, логарифмдік функция, оның қасиеттері мен графигі.

§ 22. КӨРСЕТКІШТІК ФУНКЦИЯНЫҢ ТУЫНДЫСЫ МЕН ИНТЕГРАЛЫ. ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯНЫҢ ТУЫНДЫСЫ

Сендер көрсеткіштік функцияның туындысын табуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Көрсеткіштік функция, логарифмдік функция, туынды, алғашқы функция, анықталған интеграл

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ функциясының графигі кез келген нүктесі арқылы жанама жүргізуге болатын үзіліссіз қисықты беретіні сендерге белгілі. Ал функция графигінің кез келген нүктесінде жанаманың болуы функцияның кез келген нүктеде дифференциалданатынына мәндес ұғым. Сондықтан көрсеткіштік функция дифференциалданады деп айтуға болады. Кез келген көрсеткіштік функцияның графигі (0; 1) нүктесі арқылы өтетіні белгілі.

$y = a^x$ функциясының графигіне (0; 1) нүктесінде жүргізілген жанаманың Ox осінің оң бағытымен құрайтын бұрышын қарастырайық. Бұл бұрыштың шамасы a-ның мәніне тәуелді. Мысалы, $a = 2$ болса, онда ол бұрыш шамамен 34°-қа, ал $a = 3$ болса, онда 48°-қа тең. Басқаша айтқанда, a-ның мәні 2-ден 3-ке дейін өскенде $y = a^x$ функциясының графигіне (0; 1) нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті $\mathrm{tg}34^\circ$-тан $\mathrm{tg}48^\circ$-қа дейін өседі.

Сондықтан жанамасы Ox осімен 45° бұрыш жасайтын көрсеткіштік функцияның графигі бар болады деп ұйғарамыз. Ол функцияның негізі e саны. Сонда $y = e^x$ көрсеткіштік функциясын аламыз (62.1-сурет).

Сонымен, $y = a^x$ функциясы графигінің мынадай қасиетке ие болатын a негізі бар болады деп ұйғарамыз. (1; 0) нүктесі арқылы осы функцияға жүргізілген жанама Ox осінің оң бағытымен 45° бұрыш жасайды.

(0; 1) нүктесінде $y = e^x$ функциясына жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті $\mathrm{tg}45^\circ$, яғни 1 санына тең. Ол басқаша да өрнектелуі мүмкін. Ол үшін x_0 нүктесінде x мәніне Δx өсімшесін берейік. Сонда y сәйкесінше $e^{\Delta x}$ мәнін қабылдайды. $A(0;\ 1)$ және $B(\Delta x;\ e^{\Delta x})$ нүктелері арқылы қиюшы жүргіземіз. Осы қиюшы мен Ox осінің оң бағыты арасындағы бұрышты β деп белгілейік (62.2-сурет).

Сонда $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

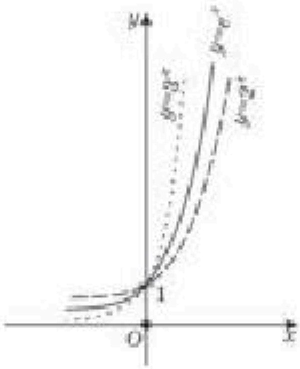
$\Delta x \to 0$ жағдайында қиюшы $A(0;\ 1)$ нүктесінде $y = e^x$ функциясының графигіне жүргізілген жанамаға көшеді.

Демек, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \mathrm{tg}45^\circ = 1.$

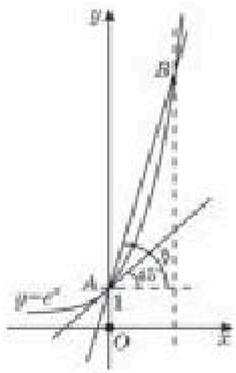
Сонымен,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1 \text{ немесе } \lim_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1 \qquad (1)$$

теңдігін аламыз.



1)



2)

62-сурет

1-теорема. *$y = e^x$ функциясы анықталу облысының кез келген нүктесінде дифференциалданады және*

$$y' = (e^x)' = e^x. \qquad (2)$$

Дәлелдеу. Алдымен $y = e^x$ функциясының x_0 нүктесіндегі өсімшесін табамыз:

$$\Delta y = e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}\cdot e^{\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{\Delta x}-1).$$

(1)-теңдікті қолданып

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} = e^{x_0}\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^{x_0}$$

аламыз. Туындының анықтамасы бойынша

$$y' = e^x \text{ немесе } (e^x)' = e^x.$$

МЫСАЛ

1. $f(x) = e^{5x}$ функциясының туындысын табайық.

Шешуі. Берілген функцияның туындысын табу үшін (2)-формуланы және күрделі функцияның туындысын табу формуласын қолданамыз: $f'(x) = (e^{5x})' = e^{5x}\cdot(5x)' = 5e^{5x}$.

Жауабы: $5e^{5x}$.

Натурал логарифм дегеніміз негізі e болатын логарифм екені белгілі: $\ln x = \log_e x$. Негізгі логарифмдік тепе-теңдік бойынша $e^{\ln a} = a$, өйткені $e^{\ln a} = e^{\log_e a} = a$. Сондықтан кез келген $y = a^x$ көрсеткіштік функциясын былай жаза аламыз: $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}$ немесе

$$a^x = e^{x\ln a}. \qquad (3)$$

2-теорема. *Кез келген a оң саны үшін $y = a^x$ функциясы анықталу облысының әрбір нүктесінде дифференциалданады және*

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad (4)$$

Дәлелдеу. $y = a^x$ функциясын $a^x = e^{x \ln a}$ түрінде жазып және (2)-формуланы қолданып, оның туындысын анықтайық:

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

МЫСАЛ

2. $y = f(x)$ функциясының туындысын табайық:
1) $f(x) = 7^x$; 2) $f(x) = 4^{-3x}$.

Шешуі. Көрсеткіштік функцияның туындысын табу формуласы (4) пен күрделі функцияның туындысын табу формуласын қолданамыз:
1) $(7^x)' = 7^x \ln 7$; 2) $(4^{-3x})' = 4^{-3x} \cdot \ln 4 \cdot (-3x)' = -3 \cdot 4^{-3x} \ln 4$.

Жауабы: 1) $7^x \ln 7$; 2) $-3 \cdot 4^{-3x} \ln 4$.

МЫСАЛ

3. $y = xe^x$ функциясының өспелі (кемімелі) болатынын анықтап, экстремумын зерттейік.

Шешуі. Ол үшін функцияның туындысын табамыз:
$y' = (xe^x)' = x' \cdot e^x + x\,(e^x)' = e^x + xe^x = e^x\,(1 + x)$ немесе $y' = e^x\,(1 + x)$.
$e^x > 0$ болғандықтан кез келген x үшін y' таңбасы $1 + x$ өрнегінің таңбасымен бірдей. Демек, $(-1; +\infty)$ аралығында $y' > 0$. $y = xe^x$ функциясы R жиынында үзіліссіз болғандықтан ол $x = -1$ нүктесінде үзіліссіз. Ендеше, $[-1; +\infty)$ аралығында функция өседі. Ал $(-\infty; -1)$ аралығында $y' < 0$, онда $(-\infty; -1]$ аралығында функция кемиді. Туынды $x_0 = -1$ нүктесінде нөлге тең және осы нүктеден өткенде таңбасын минустан плюске ауыстырады. Сондықтан $x_0 = -1$ нүктесі минимум нүктесі болады.

Жауабы: $[-1; +\infty)$ — өседі, $(-\infty; -1]$ — кемиді, $x = -1$ минимум нүктесі.

Сендер логарифмдік функцияның туындысын табуды үйренесіңдер.

$y = a^x$ көрсеткіштік функциясы графигінің кез келген нүктесінде жанама жүргізуге болады. Ал жанама функцияның кез келген нүктеде дифференциалданатынын көрсетеді. $y = a^x$ және $y = \log_a x$ функциялары өзара кері. Сондықтан логарифмдік функцияның графигі көрсеткіштік функцияның графигіне $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы және үзіліссіз функция болып табылады. Онда логарифмдік функция графигінің әрбір нүктесі арқылы жанама жүргізуге болады. Демек, логарифмдік функция анықталу облысының кез келген нүктесінде дифференциалданады.

Логарифмдік функцияның туындысын табу формуласын берместен бұрын өзара кері функциялардың туындылары арасындағы қатынасты қарастырайық.

3-теорема. *Егер $f(x)$ пен $g(x)$ функциялары өзара кері функциялар болса және осы функциялардың бірі, айталық, $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде нөлден өзгеше туындыға ие болса, онда осы функцияға кері функцияның x_0 нүктесінде нөлден өзгеше туындысы бар, ол туынды $g(x)$ функциясы туындысының кері шамасына тең, яғни*

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{5}$$

Дәлелдеу. Кері функцияның туындысы:

$$g'(x_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

формуласымен анықталады. ◼

Логарифмдік функцияның туындысы мына формуламен анықталады:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{6}$$

Өзара кері функциялардың туындыларының арасындағы қатынасты көрсететін (5)-формуланы қолданып (6)-формуланың ақиқат болатынын өздерің дәлелдеңдер.

$\ln e = 1$ болғандықтан $y = \ln x$ функциясының туындысын табу формуласы былай анықталады:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{7}$$

МЫСАЛ

4. $y = f(x)$ функциясының туындысын табайық:
1) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$; 2) $f(x) = \ln(2 + 5x)$.

Шешуі. 1) Логарифмдік функцияның туындысын табу формуласы (6) бойынша $\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)' = \dfrac{1}{x \ln \frac{1}{3}}$ аламыз.

2) (7) және күрделі функцияның туындысын табу формулаларын қолданамыз. Сонда $(\ln(2 + 5x))' = \dfrac{5}{2 + 5x}$.

Жауабы: 1) $\dfrac{1}{x \ln \frac{1}{3}}$; 2) $\dfrac{5}{2 + 5x}$.

МЫСАЛ

5. $y = x^2 \ln x$ функциясының өспелі (кемімелі) болатынын анықтап, экстремумға зерттейік.

Шешуі. Функцияның өсу және кему аралықтарын табу алгоритмін қолданамыз. Алдымен функцияның туындысын табайық:

$$y' = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = 2x\left(\ln x + \frac{1}{2}\right).$$

Функцияның туындысы нөлге тең нүктелерін анықтайық:

$$2x\left(\ln x + \frac{1}{2}\right) = 0, \text{ ендеше } x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$x > 0$ екенін ескеріп $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ және $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ аралықтарын аламыз. Осы аралықтардағы туындының таңбасын анықтайық: $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ аралығында $y' > 0$, олай болса, берілген функция $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ аралығында өседі. Ал $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ аралығында $y' < 0$, демек, бұл аралықта функция кемиді. Сонда $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ нүктесінде функция туындысының таңбасы минустан плюске ауысады. Сондықтан ол нүкте функцияның минимум нүктесі болады.

Жауабы: $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ — өседі, $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ — кемиді, $x_{\min} = 1$.

Сендер көрсеткіштік функцияның интегралын табуды үйренесіңдер.

Көрсеткіштік және дәрежелік функциялардың туындысын табу формулаларымен қатар интегралды табу формулалары қолданылады:

$$\int e^x dx = e^x + C; \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

МЫСАЛ

6. $y = -\frac{4}{x}$, $y = -1$, $x = 1$ және $x = 3$ қисықтарымен шектелген жазық фигураның ауданын есептейік.

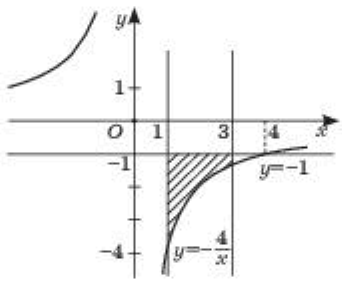
Шешуі. Берілген қисықтармен шектелген жазық фигура 63-суретте кескінделген.

Осы фигураның ауданын табу үшін интегралдау шектерін анықтаймыз. Бұл шектер есептің берілгенінде көрсетілген: $a = 1$, $b = 3$.

Жазық фигура жоғарыдан $y = -1$ функциясының графигімен, ал төменнен $y = -\frac{4}{x}$ функциясының графигімен шектелген. Сондықтан

$$S = \int_1^3 \left(-1 + \frac{4}{x}\right)dx = (-x + 4\ln|x|)\Big|_1^3 =$$

$$= -3 + 4\ln 3 + 1 - 4\ln 1 = 4\ln 3 - 2.$$



63-сурет

Жауабы: $4\ln 3 - 2$ (кв. бірл.).

1. Неліктен көрсеткіштік функцияның туындысын табу формуласын қорытып шығарғанда $y = a^x$ функциясынан $y = e^x$ функциясы бөлек көрсетіледі?
2. Логарифмдік функция туындысының формуласын қорытып шығару үшін қандай түрлендіруге сүйенеміз?
3. $y = e^x$ және $y = \ln x$ функциялары туындыларының арасында қандай қатынас бар?

Жаттығулар

А

22.1. $y = f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

1) $f(x) = 3^{x^2-7x}$; 2) $f(x) = 2^{x+3x^2}$;

3) $f(x) = 0{,}8^{1-x^3}$; 4) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{4-x}$.

22.2. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысының мәнін есептеңдер:

1) $f(x) = 7 + x - 5\ln x$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = 4 + \frac{1}{8}\ln 2x$, $x_0 = 3$.

22.3. Егер:

1) $f(x) = \log_{0,5}(2 + x)$ болса, онда $f'(1)$;

2) $f(x) = \log_3(5 + x)$ болса, онда $f'(4)$;

3) $f(x) = 0{,}2^{x-3}$ болса, онда $f'(4)$;

4) $f(x) = 2{,}5^{x-1}$ болса, онда $f'(2)$ мәнін нөлмен салыстырыңдар.

22.4. $y = f(x)$ функциясының графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $f(x) = x\ln x$, $x_0 = 0{,}5$; 2) $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$, $x_0 = 2$.

22.5. $y = f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын анықтаңдар:

1) $f(x) = 2\ln x + x^{-2}$; 2) $f(x) = x^2 \cdot e^x$;

3) $f(x) = x^3 \cdot e^{-3x}$; 4) $f(x) = x^3 - 3\ln(2x)$.

22.6. $y = f(x)$ функциясының берілген аралықта кемитінін дәлелдеңдер:

1) $f(x) = x\ln x$ және $\left(0; \frac{1}{e}\right)$;

2) $f(x) = x - \ln(2x - 1)$ және $(0{,}5; 1{,}5)$.

22.7. Берілген қисықтармен шектелген жазық фигураның ауданын есептеңдер:

1) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

2) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 4$, $x = 10$;

3) $y = -\frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = -0{,}3$, $x = -1$;

4) $y = -\frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -2$.

B

22.8. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = \frac{5^x}{x^2+1}$, $f'(1)$;
2) $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$, $f'(e)$;
3) $f(x) = e^{-x^2}$, $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

22.9. $y = f(x)$ функциясының интегралын табыңдар:

1) $f(x) = \frac{2}{2x-1}$;
2) $f(x) = e^{3x+2}$.

22.10. Егер:

1) $f(x) = \frac{x^2}{0,5^{1-2x}}$ болса, онда $f'(1)$;

2) $f(x) = \frac{3^{1-2x}}{x^{-4}}$ болса, онда $f'(2)$;

3) $f(x) = \ln(1{,}5 - x) - e^{x-1}$ болса, онда $f'(1)$;

4) $f(x) = \ln(2 - 3x) + x$ болса, онда $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ мәнін нөлмен салыстырыңдар.

22.11. 1) $f(x) = x \cdot e^{2x-1}$ функциясының $[-0{,}5; +\infty)$ аралығында өсетінін;

2) $f(x) = \log_5(1 - 3x)$ функциясының $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ аралығында кемитінін дәлелдеңдер.

22.12. $y = f(x)$ функциясының графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $f(x) = \ln(2x) + x^{-1}$, $x_0 = 0{,}5$;
2) $f(x) = e^{1+2x} - 4x^3$, $x_0 = -0{,}5$;
3) $f(x) = \ln(-0{,}5x) - x^2$, $x_0 = -2$;
4) $f(x) = e^{1-2x} - x^{-2}$, $x_0 = 0{,}5$.

22.13. $y = f(x)$ функциясының $[a; b]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәнін табыңдар:

1) $y = x + \ln(-x)$, $[-4; 0{,}5]$;
2) $y = x + e^{-x}$, $[-\ln 4; \ln 2]$.

Мұнда $\ln 2 \approx 0{,}7$ деп алыңдар.

22.14. Берілген қисықтармен шектелген жазық фигураның ауданын есептеңдер:

1) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $y = 4$, $x = e$; 2) $y = 1 + e^x$, $x = 0$, $x = -4$, $y = 3$.

C

22.15. 1) $f(x) = e^{-1-x} + \ln(1 - e^x)$ болса, онда $f'(-1)$;
2) $f(x) = e^{1+2x} \ln(-x)$ болса, онда $f'(-0,5)$ мәнін нөлмен салыстырыңдар.

22.16. 1) $y = 0,4^{1-5x}$ функциясының барлық нақты сандар жиынында өсетінін;
2) $f(x) = 2^{1-2x}$ функциясының барлық нақты сандар жиынында кемитінін;
3) $\varphi(x) = x^3 + e^{2+3x}$ функциясының барлық нақты сандар жиынында өсетінін;
4) $h(x) = e^{-x} - x^5$ функциясының барлық нақты сандар жиынында кемитінін дәлелдеңдер.

22.17. $y = f(x)$ функциясының графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $g(x) = e^{3x-6}$, $x_0 = 2$;
2) $f(x) = x^{-2} \cdot \ln(4x + 3)$, $x_0 = -0,5$;
3) $f(x) = x^{-3} \cdot \ln(2x - 3)$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = x^{-2} \cdot e^{1+2x}$, $x_0 = -0,5$.

22.18. $y = x + 2\ln x$ функциясының туындысы:
1) нөлге тең; 2) оң; 3) теріс; 4) теріс емес болатын x-тің мәндерін табыңдар.

22.19. $[2; e^2]$ аралығындағы $f(x) = x^2 - 2\ln x$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәнін табыңдар.

22.20. $y = e^{2x}$ функциясының графигімен, (0; 1) нүктесінде осы графикке жүргізілген жанамамен және $x = 1$ түзуімен шектелген жазық фигураның ауданын есептеңдер.

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

22.21. *Көрсеткіштік* және *логарифмдік функциялар* ұғымдарының даму тарихы бойынша хабарлама дайындаңдар.

ҚАЙТАЛАУ

22.22. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $((b^{-\frac{3}{7}} \cdot y^{-0,8})^3 \cdot b^{\frac{3}{7}} \cdot y^{0,4})^{-1}$; 2) $((a^{-\frac{2}{7}} \cdot y^{\frac{3}{14}})^{3,5} \cdot y^{\frac{7}{4}} \cdot a^{-3})^{-1}$.

22.23. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $4^{1-\log_2 1,5-\log_2 \frac{1}{3}} - \log_3 243$; 2) $\log_9 27 + \dfrac{\log_3 6}{\log_{18} 3} - \dfrac{\log_3 2}{\log_{54} 3}$.

22.24. x_0 нүктесіндегі $f(x)$ функциясының туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = (3x - 1)^2 - 2\sqrt{x^5}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = 6x^{\frac{7}{3}} - 5\sqrt[5]{x^2} - 3x + 1$, $x_0 = 1$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $y = \dfrac{x+2}{343 - 49^x}$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

A) $(-\infty;\ 1,5) \cup (1,5;\ +\infty)$; B) $(-\infty;\ 1,5) \cup (1,5;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$;
C) R; D) $(-\infty;\ -1,5) \cup (-1,5;\ +\infty)$.

2. $\log_{1,2}\left[\dfrac{25}{36}\cdot\left(\dfrac{6}{5}\right)^{3,2}\right]$ өрнегінің мәнін табыңдар:

A) $-1,2$; B) $1,2$; C) $-\dfrac{5}{6}$; D) $-5,2$.

3. $\left(\dfrac{1}{625}\right)^{-\log_5 a} - 49^{1+\log_7 a}$ өрнегін ықшамдаңдар:

A) $49a^2 - a^4$; B) $a^2 - 49a^4$; C) $a^4 - 49a^2$; D) $a^4 + 49a^2$.

4. $y = \log_{3,4}(-2x^2 + 3x - 1)$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

A) $(-1;\ -0,5)$; B) $(-\infty;\ 0,5) \cup (1;\ +\infty)$;
C) $(0,5;\ 1)$; D) $(-\infty;\ 0,5] \cup [1;\ +\infty)$.

5. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; 1; $4^{-\sqrt{3}}$; 8 сандарын өсу ретіне қарай орналастырыңдар:

A) $4^{-\sqrt{3}}$; 8; 1; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; B) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; $4^{-\sqrt{3}}$; 1; 8;

C) 8; 1; $4^{-\sqrt{3}}$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; D) $4^{-\sqrt{3}}$; 1; 8; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$.

6. $\log_{22} 9 = a$ және $\log_{22} 46 = b$ екені белгілі. $\log_{81} 414$ табыңдар:

A) $\dfrac{a+b}{2a}$; B) $\dfrac{a+b}{2b}$; C) $\dfrac{b-a}{2b}$; D) $\dfrac{a+b}{b}$.

7. $y = \log_7(\cos 2x)$ функциясының $x = \dfrac{\pi}{8}$ болғандағы туындысының мәнін есептеңдер:

A) $-\dfrac{2}{\ln 7}$; B) $\dfrac{2}{\ln 7}$; C) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{\ln 7}$; D) $2\ln 7$.

8. Абсциссасы $x = -1$ болатын нүктеде $y = xe^{-3x} + 4$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

A) $y = 4e^3x + 3e^3 + 4$; B) $y = 2e^3x + 3e^3$;
C) $y = 4e^3x - 5e^3 + 4$; D) $y = e^3x + 3e^3 - 4$.

9. $y = x^3 - 3\ln x$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар:

A) R — өседі;
B) $[1; +\infty)$ — өседі, $(0; 1]$ — кемиді;
C) $(0; 1]$ — өседі, $[1; +\infty)$ — кемиді;
D) $(0; +\infty)$ — өседі.

10. $y = 0,5x^2 - 6x + 2\ln x^4$ функциясының экстремум нүктелерін анықтаңдар:

A) $x_{max} = 4$, $x_{min} = 2$; B) экстремум нүктелері жоқ;
C) $x_{max} = 2$, $x_{min} = 4$; D) $x_{max} = 1$, $x_{min} = 8$.

11. $[-1; 2]$ кесіндісіндегі $y = x^2e^x$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәнін анықтаңдар:

A) $4e^2$; $\frac{1}{e}$; B) $\frac{1}{e}$; 0; C) e; 0; D) $4e^2$; 0.

12. $\int_1^2 \left(3^x - \frac{3}{x}\right)dx$ интегралын есептеңдер:

A) $\frac{6}{\ln 3} + 3\ln 2$; B) $\frac{3}{\ln 3} - \ln 8$;
C) $\frac{6}{\ln 3} - 3\ln 2$; D) $\frac{9}{\ln 3} - 3\ln 2$.

13. $y = 0,5^x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ қисықтарымен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар:

A) $2\ln 2 + 0,75$; B) $\frac{2\ln 2 + 1}{4\ln 2}$;
C) $\frac{1}{4\ln 2}$; D) $\frac{\ln 4 - 1}{4\ln 2}$.

Математикалық сауаттылық бойынша тест тапсырмалары

14. Жұмыс күні басталғанда Шолпан, Айгүл және Раушан майлық жасауға бірдей тапсырыс алды. Айгүл осы тапсырманы 8 сағ-та, Шолпан 9 сағ-та, Раушан 12 сағ-та орындайды. Шебер тапсырыстарды біріктіріп, жұмысты 8 сағ-та орындау керек екенін айтты. Олардың біріккен өнімділігін табыңдар. Олар осы жұмысты 8 сағта орындай ала ма:

A) $\frac{25}{72}$, жоқ; B) $\frac{23}{72}$, жоқ; C) $\frac{23}{72}$, орындайды;
D) $\frac{25}{72}$, орындайды; E) $\frac{7}{36}$, жоқ?

15. Салымшы депозитке 100 000 тг салмақшы болды. Бірінші банкте салым жылына 12%-ға, ал екінші банкте әр ай сайын 1%-ға өседі. Қай банктегі түсім артық және қаншаға артық болады:
A) бірінші банк, 680 тг-ге артық;
B) бірінші банк, 775 тг-ге артық;
C) екі банкте бірдей;
D) екінші банк, 682 тг-ге артық;
E) екінші банк, 648 тг-ге артық?

16. Марат, Дәурен, Азамат және Серік математикалық олимпиадада алғашқы төрт орынды алды. "Қайсы қандай орын алды?" деген сұраққа келесі жауаптар берілді:
1) Дәурен — екінші, Марат — үшінші;
2) Серік — екінші, Дәурен — бірінші;
3) Азамат — екінші, Марат — төртінші.
Егер әр жауаптың бір бөлігі дұрыс болса, онда әр баланың алған орындарын табыңдар:
A) Марат — III орын, Азамат — II орын, Дәурен — I орын, Серік — IV орын;
B) Марат — III орын, Азамат — I орын, Дәурен — II орын, Серік — IV орын;
C) Марат — IV орын, Азамат — I орын, Дәурен — II орын, Серік — III орын;
D) Марат — III орын, Азамат — I орын, Дәурен — IV орын, Серік — II орын;
E) Марат — IV орын, Азамат — II орын, Дәурен — I орын, Серік — III орын.

17. $f(x)$ — периодты функция, периоды $T = 4$ және $f(1) = 3$, $f(4) = 5$. $2f(0) - 3f(9)$ өрнегінің мәні:
A) 4; B) −1; C) −3; D) 2; E) 1.

18. Инфузория қарапайым жануары екіге бөліну арқылы көбейеді. Егер алты рет бөлінгеннен кейін саны 320 болса, онда алғашқы инфузория санын табыңдар:
A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Өрнек, өрнектерді тепе-тең түрлендіру, көрсеткіштік функция және оның қасиеттері, теңдеу, теңдеулер жүйесі, мәндес теңдеулер, мәндес теңдеулер жүйесі.

VII ТАРАУ КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР

§ 23. КӨРСЕТКІШТІК ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕЛЕРІ

Сендер *көрсеткіштік теңдеу* ұғымымен таны-сасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Теңдеу, көрсеткіштік теңдеу, дәреженің негізі, дәреженің көрсеткіші, бөгде түбір, теңдеуді шешу

Анықтама. *Айнымалысы дәреженің көрсеткішінде болатын теңдеуді* ***көрсеткіштік теңдеу*** *деп атайды.*

$2^x = \frac{1}{16}$; $\sqrt[3]{5^x} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}}$; $3^{x+1} + 3^x = 108$ және т.б.

Көрсеткіштік теңдеулер үш тәсілмен шығарылады:

1) бірдей негізге келтіру;
2) жаңа айнымалы енгізу тәсілі;
3) графиктік тәсіл.

Сендер көрсеткіштік теңдеуді бірдей негізге келтіру әдісімен шешуді үйренесіңдер.

АЛГОРИТМ

Бірдей негізге келтіру тәсілімен көрсеткіштік теңдеулерді шығару алгоритмі:

1) теңдеудің екі жақ бөлігін де бірдей негізге келтіру;
2) теңдеудің сол жақ бөлігіндегі дәреженің көрсеткішін оң жақ бөлігіндегі дәреже көрсеткішіне теңестіріп, мәндес теңдеу алу;
3) шыққан теңдеуді шешу;
4) табылған түбірлерді берілген теңдеуге қойып, тексеру;
5) берілген теңдеудің шешімін жазу.

МЫСАЛ

1. $27^x = \frac{1}{81}$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. 1) Теңдеудің екі жақ бөлігін де бірдей негізге, яғни 3 негізіне келтіреміз: $3^{3x} = 3^{-4}$;

2) дәрежелердің көрсеткіштерін теңестіреміз: $3x = -4$;

3) шыққан теңдеуді шешіп, $x = -\frac{4}{3}$ аламыз;

4) айнымалының табылған мәнінің берілген теңдеуді қанағаттандыратынын анықтаймыз: $27^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{81}$ немесе $\frac{1}{\sqrt[3]{27^4}} = \frac{1}{81}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{3^{12}}} = \frac{1}{81}$; $\frac{1}{81} = \frac{1}{81}$. Табылған мән теңдеуді қанағаттандырады.

Жауабы: $-\frac{4}{3}$.

Сендер көрсеткіштік теңдеуді жаңа айнымалыны енгізу әдісімен шешуді үйренесіңдер.

АЛГОРИТМ

Жаңа айнымалы енгізу тәсілі

Көрсеткіштік теңдеулерді жаңа айнымалы енгізу тәсілімен шығару алгоритмі:

1) айнымалыларды жаңа айнымалымен алмастыру арқылы алгебралық теңдеу алу;

2) шыққан теңдеуді шешу;

3) алгебралық теңдеудің табылған түбірлерін алмастырылған теңдікке қойып, алғашқы айнымалының мәндерін анықтау;

4) табылған мәндердің берілген теңдеуді қанағаттандыратынын тексеру;

5) берілген теңдеудің шешімін жазу.

МЫСАЛ

2. $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$ теңдеуінің түбірлерін табайық.

Шешуі. Алдымен теңдеудегі дәрежелерді түрлендіреміз:

$3^{2x+5} = 3^{2x} \cdot 3^5 = 243 \cdot 3^{2x}$ және $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$.

Сонда берілген теңдеу $243 \cdot 3^{2x} - 9 \cdot 3^x - 2 = 0$ түріне келеді.

$y = 3^x$ жаңа айнымалысын енгізсек, соңғы көрсеткіштік теңдеуді былай жазамыз: $243y^2 - 9y - 2 = 0$, бұдан $y_1 = \frac{1}{9}$, $y_2 = -\frac{2}{27}$ түбірлерін аламыз.

$y_2 = -\frac{2}{27}$ теріс, ал $3^x < 0$ болуы мүмкін емес, сондықтан $y_1 = \frac{1}{9}$ түбірін ғана аламыз.

Табылған $y = \frac{1}{9}$ мәнін $y = 3^x$ теңдігіне қоямыз: $\frac{1}{9} = 3^x$ немесе

$3^{-2} = 3^x$, бұдан $x = -2$.

Тексеру жүргіземіз: $3^{2\cdot(-2)+5} = 3^{-2+2} + 2$ немесе $3^1 = 1 + 2$, сонда $3 = 3$.

Жауабы: -2.

Сендер көрсеткіштік теңдеуді графиктік тәсілмен шешуді үйренесіңдер.

Графиктік тәсілді қолдану

Аталған тәсіл $a^x = b$ түріндегі көрсеткіштік теңдеудегі b санын a санының дәрежесі түрінде алмастыруға болмайтын жағдайда қолданылады. Мұндай теңдеудің түбірін анықтау үшін $f(x) = a^x$ және $g(x) = b$ функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтыққа салып, қиылысу нүктелерін анықтаймыз. Қиылысу нүктелерінің абсциссалары берілген көрсеткіштік теңдеудің түбірлері болады.

Көрсеткіштік теңдеулер жүйесін шешуді қарастырайық.

Сендер көрсеткіштік теңдеулер жүйесін шешуді үйренесіңдер.

МЫСАЛ

3. $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = \dfrac{11}{4}, \\ 2^x - 3^y = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешейік.

Шешуі. Екінші теңдеудің екі жақ бөлігін мүшелеп 2-ге көбейтеміз:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = \dfrac{11}{4}, \\ 2 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -\dfrac{6}{4}. \end{cases}$$

Енді жүйенің теңдеулерін мүшелеп қосамыз: $5 \cdot 2^x = \dfrac{5}{4}$ немесе $2^x = 2^{-2}$, бұдан $x = -2$.

$x = -2$ мәнін жүйенің екінші теңдеуіне қойып, y айнымалысының мәнін анықтаймыз: $2^{-2} - 3^y = -\dfrac{3}{4}$, $3^y = 1$, $3^y = 3^0$, $y = 0$.

Жауабы: $(-2; 0)$.

МЫСАЛ

4. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешейік.

Шешуі. 1-тәсіл. Теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуін мүшелеп екінші теңдеуге көбейтеміз.

Бұдан

$$2^x \cdot 3^y \cdot 2^y \cdot 3^x = 12 \cdot 18,$$
$$2^{x+y} 3^{x+y} = 216,$$
$$(2 \cdot 3)^{x+y} = (2 \cdot 3)^3$$

немесе

$$x + y = 3.$$

y айнымалысын x айнымалысы арқылы өрнектейміз: $y = 3 - x$.

Табылған y-тің өрнегін бірінші теңдеуге қоямыз:

$2^x \cdot 3^{3-x} = 12$, $\dfrac{2^x}{3^{x-3}} = 12$, $\dfrac{2^x}{3^x \cdot 3^{-3}} = 12$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{12}{27}$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ немесе

$x = 2$. Ендеше, $y = 3 - 2 = 1$.

Теңдеулер жүйесінің шешімі: $(2; 1)$.

2-тәсіл. Жүйенің бірінші теңдеуін мүшелеп екінші теңдеуге бөлеміз:

$\dfrac{2^x \cdot 3^y}{2^y \cdot 3^x} = \dfrac{12}{18}$, $2^x \cdot 3^y \cdot 2^{-y} \cdot 3^{-x} = \dfrac{2}{3}$, $2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \dfrac{2}{3}$,

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^1$ немесе $x - y = 1$.

Енді y айнымалысын x айнымалысы арқылы өрнектеп, $y = x - 1$ өрнегін теңдеулер жүйесіндегі теңдеулердің біреуіне қойып, теңдеулер жүйесінің шешімін $(2; 1)$ аламыз.

Жауабы: $(2; 1)$.

1. Көрсеткіштік теңдеуді бірдей негізге келтіріп шығару тәсілі оң және бірге тең емес дәреженің қандай қасиетіне негізделген?
2. Көрсеткіштік теңдеу әр уақытта бірдей негізге келтіру тәсілімен шығарыла ма? Жауабын түсіндіріңдер.
3. Егер $a \neq 1$ және p — кез келген оң сан болса, онда $a^x = p$ теңдеуінің бір және тек қана бір нақты $a > 0$ (рационал немесе иррационал) түбірі болады деген тұжырым дұрыс па? Жауабын түсіндіріңдер және мысал келтіріңдер.
4. "x кез келген нақты сан болғанда a^x түріндегі өрнекке қолданылатын амалдар бүтін оң көрсеткішті дәрежеге қолданылатын ережелер тәрізді орындалады" деген тұжырыммен келісесіңдер ме? Жауабын түсіндіріңдер.
5. Көрсеткіштік теңдеуді жаңа айнымалы енгізу арқылы шығару тәсілінің мәні неде?

Жаттығулар

А

Теңдеуді шешіңдер (23.1—23.4):

23.1. 1) $3^x = 81$; 2) $4^x = 256$; 3) $2^x = \frac{1}{32}$; 4) $5^{x+1} = 125$.

23.2. 1) $8^x = 16$; 2) $25^x = \frac{1}{5}$; 3) $4^{3-2x} = 4^{2-x}$; 4) $2^{x-2} = 1$.

23.3. 1) $2^x + 2^{x+1} = 12$; 2) $7^{x+2} - 7^x = 336$;
3) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$; 4) $5^{x-2} - 5^{x-1} + 5^x = 21$.

23.4. 1) $3^{2x+1} = 9^{2x}$; 2) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 2 = 0$;
3) $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 9 = 0$; 4) $25^x - 26 \cdot 5^x + 25 = 0$.

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (23.5-23.6):

23.5. 1) $\begin{cases} 5^x + 5^y = 30, \\ 5^x - 5^y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x - y = 1; \end{cases}$

23.6. 1) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 12, \\ 2^x - 3^y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 32, \\ x - y = 2. \end{cases}$

В

Теңдеуді шешіңдер (23.7–23.9):

23.7. 1) $(0,1)^{4x^2-2x-2} = (0,1)^{2x-3}$; 2) $(0,3)^{x^2-2x+2} = 0,09$;
3) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} = 5^{x+1} - 5^{x+2}$; 4) $3^{x+2} - 7^{x+2} = 0$.

23.8. 1) $(0,25)^{x^2-4} = 2^{x^2-1}$; 2) $27^{-1} \cdot 9^{2x} = 243$;

3) $\sqrt[4]{5} \cdot 5^{3x} = 125$; 4) $6^{x+1} \cdot \sqrt[3]{6} = 216$.

23.9. 1) $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 0$; 2) $x^2 \cdot 5^x - 5^{2+x} = 0$;

3) $x^3 \cdot 3^x + 3^{x+3} = 0$; 4) $x^3 \cdot 8^x - 8^{x+1} = 0$.

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (23.10-23.11):

23.10. 1) $\begin{cases} 2 \cdot 4^x + 3 \cdot 5^y = 11, \\ 5 \cdot 4^x + 4 \cdot 5^y = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 1, \\ 2^{3x} - 2^{3y} = 7. \end{cases}$

23.11. 1) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648, \\ 3^x \cdot 2^y = 432; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ y - x = 4. \end{cases}$

C

Теңдеуді шешіңдер (23.12-23.13):

23.12. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 1$; 2) $\sqrt{6-x}\,(5^{x^2-7,2x+3,4} - 25) = 0$;

3) $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 = 0$; 4) $\sqrt{x+3}\,(7^{x^2-6,5x+5} - 49) = 0$.

23.13. 1) $8^x + 3 \cdot 4^x = 12 + 2^{x+2}$;

2) $3^{1+3x} - 9^x = 3^{x+2} - 3$;

3) $16^x + 8^x - 4 \cdot 4^x + 2^x + 1 = 0$;

4) $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$.

23.14. 1) $5^x \cdot \sqrt[3]{8^{x-1}} = 500$;

2) $x^2 + 4x + 2^{\sqrt{x+2}} + 3 = 0$;

3) $\sqrt{4^{2x} - 3 \cdot 2^{2x}} = 10 - 2^{2x+1}$;

4) $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 6$;

5) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x - \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x = 14$;

6) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2$.

23.15. 1) $9 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{\left|1+\frac{1}{2}x\right|} = \frac{1}{81^x}$; 2) $2^{|x-1|} = 0,5^{1-x}$;

3) $27^{|x+2|} = 81^{x^2-1}$; 4) $(0,2)^{|x+3|} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$.

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (23.16-23.17):

23.16. 1) $\begin{cases} \sqrt[x-1]{49} = \sqrt[y-1]{343}, \\ 3^y = 9^{2x-y}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5 \cdot 3^{x-1} - 3 \cdot 2^y = -1, \\ 3^{x+1} + 5 \cdot 2^{y-1} = 14. \end{cases}$

23.17. 1) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 16^y - 4^x = 12, \\ 2^{x+1} - 4^y = 0. \end{cases}$

ҚАЙТАЛАУ

23.18. $f(x)$ функциясының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = \sin^2 3x + \cos^2 3x + e^{3x} - 3^{2x}$;
2) $f(x) = \sin^3 x + 2^{3x} - e^{3-x}$.

23.19. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $f(x) = \ln\frac{x-1}{2x+1}$; 2) $f(x) = \ln\frac{(x-1)^2}{x+2}$;

3) $f(x) = \ln\frac{(2x-3)^3}{(x+1)^2}$; 4) $f(x) = x^3 + \ln\frac{(2x-5)^5}{(2x+3)^4}$.

23.20. Бөліктеп интегралдау әдісін қолданып интегралды табыңдар:

1) $\int (x-3)\sin x dx$; 2) $\int x^2 \sin x dx$;

3) $\int x e^{3x} dx$; 4) $\int x \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Теңдеу, теңдеудің түбірі, мәндес теңдеулер, теңдеулер жүйесі, мәндес теңдеулер жүйесі, алгебралық теңдеулерді шешу тәсілдері, алгебралық теңдеулер жүйесін шешу тәсілдері, көрсеткіштік теңдеулер және оларды шешу тәсілдері, санның логарифмі және оның қасиеттері, логарифмдік функция, логарифмдік функцияның графигі және қасиеттері.

§24. ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕЛЕРІ

Сендер логарифмдік теңдеу ұғымымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР
Теңдеу, логарифмдік теңдеу, санның логарифмі, логарифмнің негізі, логрифм астындағы өрнек, айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны, теңдеуді шешу

Анықтама. *Айнымалысы логарифм белгісінің ішінде немесе логарифм негізінде болатын теңдеу **логарифмдік теңдеу** деп аталады.*

Логарифмдік теңдеулерге мысалдар:

1) $\log_2(9^{x-1}+5) = 4 + \log_2(3^{x+1}+2)$;

2) $\lg(x+6) - \lg(x-3) = 5 - \lg 125$;

3) $\lg\sqrt{x} = 4 - \sqrt{\lg x}$;

4) $\ln x = 3\ln(x+1)$;

5) $\log_x 5 = 7$.

Қарапайым логарифмдік теңдеудің түрі:

$$\log_a x = b, \qquad (1)$$

мұндағы a және b — берілген сандар, ал x — тәуелсіз шама.

Егер $a > 0$ және $a \neq 1$ болса, онда мұндай теңдеудің

$$x = a^b$$

түріндегі бір ғана түбірі болады.

Күрделі логарифмдік теңдеулерді шешу алгебралық теңдеулерді немесе (1) түріндегі теңдеуді шешуге әкеледі.

Логарифмдік теңдеуді шешудің тәсілдерін қарастырайық.

Сендер логарифмдік теңдеуді логарифмнің анықтамасын қолдану тәсілімен шешуді үйренесіңдер.

1. *Логарифмнің анықтамасын қолдану арқылы шығарылатын теңдеулер*

МЫСАЛ

1. $\log_x(x^3 - 5x + 10) = 3$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Логарифмнің анықтамасы бойынша $x^3 - 5x + 10 = x^3$, онда $x = 2$.

Табылған айнымалының мәнін теңдеуге қойып тексереміз:

$$\log_2(2^3 - 5 \cdot 2 + 10) = \log_2 8 = 3.$$

Демек, $x = 2$ мәні теңдеуді қанағаттандырады.

Жауабы: 2.

Логарифмдік функцияның анықталу облысы оң нақты сандар жиыны екені белгілі. Сондықтан логарифмдік теңдеулерді шығару кезінде алдымен айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынын анықтайды. Одан кейін берілген теңдеу шығарылып, табылған айнымалы мәндерінің мүмкін мәндер жиынына тиісті болатыны тексеріледі.

Сендер логарифмдік теңдеуді бірдей негізге келтіру тәсілімен шешуді үйренесіңдер.

2. *Потенциалдауды қолдану үшін логарифмдік теңдеуді* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *түріне келтіру*

МЫСАЛ

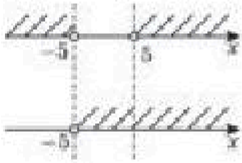
2. $\lg(x+5) - \lg(x^2-25) = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиынын табамыз. Ол үшін жүйе құрамыз:

$$\begin{cases} x+5>0, \\ x^2-25>0 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} x+5>0, \\ (x-5)(x+5)>0. \end{cases}$$

$(5; +\infty)$ аралығы — x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиыны (64-сурет).

Берілген теңдеуді түрлендіріп $\lg(x+5) = \lg(x^2-25)$ теңдеуін аламыз. Потенциалдау арқылы $x+5 = x^2-25$ немесе $x^2-x-30=0$ теңдеуіне келеміз. Бұдан $x_1 = 6$ және $x_2 = -5$. Енді шыққан мәндердің $(5; +\infty)$ аралығына тиісті болатынын тексеріп, логарифмдік теңдеудің түбірі $x = 6$ екенін анықтаймыз.



64-сурет

Жауабы: 6.

Сендер логарифмдік теңдеуді жаңа айнымалыны енгізу әдісімен шешуді үйренесіңдер.

3. *Жаңа айнымалы енгізу тәсілі*

МЫСАЛ

3. $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $\log_2 x$ өрнегін y арқылы өрнектейік. Сонда берілген теңдеудің орнына $y^2 - y - 2 = 0$ теңдеуін аламыз, теңдеудің түбірлері $y_1 = 2$; $y_2 = -1$.

Енді x айнымалысының мәндерін анықтаймыз:

$$\log_2 x = 2,\ x_1 = 4;\ \log_2 x = -1,\ x_2 = \frac{1}{2}.$$

x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиыны оң сандар. Ендеше, айнымалының табылған екі мәні де берілген теңдеуді қанағаттандырады.

Жауабы: 4; $\frac{1}{2}$.

Сендер логарифмдік теңдеуді мүшелеп логарифмдеу әдісімен шешуді үйренесіңдер.

4. *Мүшелеп логарифмдеу тәсілі*

МЫСАЛ

4. $x^{\log_2 x - 2} = 8$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Берілген теңдеуді былай жазайық: $x^{\log_2 x} \cdot x^{-2} = 8$ немесе $x^{\log_2 x} = 8x^2$.

Шыққан теңдеуді негізін 2-ге тең етіп логарифмдейік:

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 8 + \log_2 x^2,$$
$$\log_2^2 x = 3 + 2\log_2 x,$$
$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0.$$

Демек, 1) $\log_2 x = 3$, осыдан $x_1 = 8$;

2) $\log_2 x = -1$, осыдан $x_2 = \frac{1}{2}$.

Тексеру: 1) $8^{\log_2 8 - 2} = 8$ немесе $8^{3-2} = 8$, $8 = 8$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)-2} = 8$ немесе $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$, $8 = 8$.

Жауабы: 8; $\frac{1}{2}$.

Практикада негіздері әртүрлі логарифмдерден тұратын логарифмдік теңдеулер кездеседі. Мұндай жағдайда жаңа негізге көшу формуласы қолданылады.

МЫСАЛ

5. $\log_2 x + \frac{4}{\log_x 2} = 5$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиыны $(0; 1) \cup (1; +\infty)$ аралығы екені бірден байқалады. Жаңа негізге көшу формуласын қолданып $\log_x 2$ өрнегін негізі 2 болатын логарифмге алмастырамыз: $\log_x 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 x}$.

Сонда берілген теңдеу мына түрге келеді:

$$\log_2 x + \frac{4}{\frac{\log_2 2}{\log_2 x}} = 5 \text{ немесе } \log_2 x + 4\log_2 x = 5. \text{ Демек, } 5\log_2 x = 5$$

немесе $\log_2 x = 1$, бұдан $x = 2$; $2 \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ болғандықтан, 2 саны берілген теңдеудің түбірі болады.

Жауабы: 2.

Анықтама. *Егер айнымалы дәреженің көрсеткішінде де, логарифм белгісінің ішінде де болса, мұндай теңдеуді* ***көрсеткіштік логарифмдік теңдеу*** *деп атайды.*

Көрсеткіштік логарифмдік теңдеуді шешу үшін теңдеудің екі жағын логарифмдеу тәсілі арқылы логарифмдік теңдеуге келтіріледі.

МЫСАЛ

6. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. 1-тәсіл. Теңдеуді $\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162$ түрінде жазамыз. $a^{\log_a b} = b$ тепе-теңдігін қолданып мына теңдеуді аламыз: $x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162$, осыдан $x^{\log_3 x} = 81$.

3 негізі бойынша теңдеудің екі жағын логарифмдейміз. Сонда $\log_3^2 x = 4$, бұдан $\log_3 x = -2$ және $\log_3 x = 2$ немесе $x_1 = \frac{1}{9}$ және $x_2 = 9$.

Тексеру: 1) $3^{\log_3^2 \frac{1}{9}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \frac{1}{9}} = \left(3^{\log_3 \frac{1}{9}}\right)^{\log_3 \frac{1}{9}} + 3^{-2\log_3 \frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} + 3^{-2(-2)} = 81 + 81 = 162$;

2) $3^{\log_3^2 9} + 9^{\log_3 9} = (3^2)^2 + (3^2)^2 = 81 + 81 = 162$.

2-тәсіл. x айнымалысын $x = 3^{\log_3 x}$ түрінде жазсақ, берілген теңдеу $3^{\log_3^2 x} + \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = 162$ немесе $3^{\log_3^2 x} + 3^{\log_3^2 x} = 162$ түріне келеді. Бұдан $2 \cdot 3^{\log_3^2 x} = 162$ немесе $3^{\log_3^2 x} = 81$, немесе $3^{\log_3^2 x} = 3^4$. Демек, соңғы теңдеуге мәндес $\log_3^2 x = 4$ теңдеуі немесе $\log_3 x = 2$ және $\log_3 x = -2$ теңдеулер жиыны шығады.

Сонда $x_1 = 3^2 = 9$ және $x_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Жауабы: $\frac{1}{9}$; 9.

Сендер логарифмдік теңдеулер жүйесін шешуді үйренесіңдер.

Логарифмдік теңдеулер жүйесін шешу үшін алгебралық теңдеулер жүйесін шешу тәсілдері (алмастыру, алгебралық қосу, жаңа айнымалы енгізу) қолданылады.

МЫСАЛ

7. $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешейік.

Шешуі. Теңдеулер жүйесін шешу үшін жаңа айнымалылар енгіземіз: $\lg x = a$, $\lg y = b$.

Сонда мына теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ a^2 + b^2 = 5. \end{cases}$$

Соңғы теңдеулер жүйесін алмастыру тәсілімен шешу арқылы $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ және $a_2 = -1$, $b_2 = -2$ аламыз. $\lg x = a$ және $\lg y = b$ алмастыруына көшіп, x және y айнымалыларының мәнін табамыз: $\lg x = 2$, $\lg y = 1$ және $\lg x = -1$, $\lg y = -2$. Онда $x_1 = 100$, $y_1 = 10$ және $x_2 = 0{,}1$, $y_2 = 0{,}01$.

Жауабы: (100; 10) және (0,1; 0,01).

7-мысалдағы жауаптың ақиқат болатынын өздерің тексеріңдер.

МЫСАЛ

8. $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешейік.

Шешуі. Теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуіне көрсеткіштік функцияның қасиетін, ал екінші теңдеуіне потенциалдауды қолданамыз. Сонда мына теңдеулер жүйесі шығады: $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 30. \end{cases}$

$a = \sqrt{x}$ және $b = \sqrt{y}$ жаңа айнымалыларын енгізіп, рационал теңдеулер жүйесіне келеміз: $\begin{cases} 2a - b = 4, \\ a \cdot b = 30, \end{cases}$

Бұл теңдеулер жүйесінің шешімдері $a = 5$ және $b = 6$ болады. Онда $\sqrt{x} = 5$, $\sqrt{y} = 6$ немесе $x = 25$ және $y = 36$.

Айнымалының мәндерін берілген теңдеулер жүйесіне қойып, оның шешімін, яғни (25; 36) сандар жұбын аламыз.

Жауабы: (25; 36).

?

1. Логарифмдік теңдеулерді шешу барысында логарифмдік функцияның қандай қасиеті міндетті түрде ескерілуі қажет?
2. $\log_a x = b$ және $\log_x a = b$ теңдеулерін шешудің ең тиімді тәсілін анықтаңдар.

Жаттығулар

A

Теңдеулерді шешіңдер (**24.1—24.3**):

24.1. 1) $\log_3(2x - 1) = 2$; 2) $\ln(3x - 5) = 0$;
3) $\log_7(4 - x) = 1$; 4) $\lg(2x - 1) = \lg 3$.

24.2. 1) $\lg(3 - x) = \lg(x + 2)$; 2) $\lg x + \lg(x - 1) = \lg 2$;
3) $\log_5(x + 1) = \log_5(4x - 5)$; 4) $\log_2(4 - x) = \log_2(1 - 2x)$.

24.3. 1) $\lg(5 - x) + \lg x = \lg 4$; 2) $\lg(x + 1) + \lg(x - 1) = \lg 3$;
3) $\ln(6 - x) + \ln x = \ln 5$; 4) $\lg x + \lg(x - 3) = 1$.

24.4. Теңдеудің ең үлкен бүтін түбірін табыңдар:
1) $\lg(x^2 - x) = 1 - \lg 5$; 2) $\log_6(x^2 - 2x) = 1 - \log_6 2$;
3) $2\log_3^2 x - 7\log_3 x + 3 = 0$; 4) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$.

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (24.5—24.7):

24.5. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 80, \\ \log_2 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 2, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

24.6. 1) $\begin{cases} \log_2 (x + y) = 3, \\ \log_{15} x = 1 - \log_{15} y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 (xy) = 2 + \log_3 2, \\ \log_3 (x + y) = 2. \end{cases}$

24.7. 1) $\begin{cases} 2^{\log_2 (3x - y)} = 5, \\ \log_9 \left(x^2 - y^2\right) - \log_9 (x - y) = 0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{\log_3 (x - y)} = 1, \\ \log_3 (2x - 1) + \log_3 y = 1. \end{cases}$

B

Теңдеулерді шешіңдер (24.8—24.11):

24.8. 1) $\log_3 \sqrt{2x + 1} = 1;$ 2) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2x - 2} = -2;$

3) $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2x + 3}{x - 2} = 1;$ 4) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3x - 5} = 0.$

24.9. 1) $\lg \sqrt{3x + 1} + \lg \sqrt{x + 4} = \lg 12;$

2) $\lg(x - 2) - \lg \sqrt{x - 4} = \lg 3;$

3) $(x^2 - 4) \log_3 (1 - x^2 - 3x) = 0;$

4) $(x^2 - x - 2) \log_2 (x^2 - 4x + 4) = 0.$

24.10. 1) $\lg x + \lg x^2 + \lg x^3 = 6;$ 2) $\frac{\lg x}{1 - \lg x} = 3;$

3) $\log_2 \log_2 \log_2 x = 0;$ 4) $10^{x + \lg 2} = 20.$

24.11. 1) $\log_3 (5^{2x} - 2 \cdot 5^x) = 2 \cdot \log_9 15;$ 2) $\log_2 (2^{2(x + 1)} + 2^{4x}) = 2\log_4 5;$

3) $\log_3 (3^x - 8) = 2 - x;$ 4) $\log_7 (6 + 7^{-x}) = 1 + x.$

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (24.12-24.13):

24.12. 1) $\begin{cases} \log_3 (y - x) = 1, \\ 3^{x+1} \cdot 2^y = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 (x - y) = 1, \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 72. \end{cases}$

24.13. 1) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}} (y - x) = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}} (x - y) = 2. \end{cases}$

24.14. 1) $\begin{cases} 10^{2 - \lg(x - y)} = 25, \\ \lg (x - y) + \lg (x + y) = 1 + 2\lg 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 10^{1 + \lg(x + y)} = 50, \\ \lg(x - y) + \lg(x + y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$

C

Теңдеулерді шешіңдер (24.15—24.17):

24.15. 1) $x^{\log_3 x - 2} = 27;$ 2) $x^{\log_2 x - 3} = 16;$

3) $x^{3 - \log_3 x} = 9;$ 4) $x^{\log_5 x + 2} = 125.$

24.16. 1) $\log_{2x+3} \frac{1}{4} + 2 = 0;$ 2) $\log_{\frac{2x-1}{x+2}} 3 - 1 = 0;$

3) $\log_{\sqrt{6-x}} 3 - 2 = 0;$ 4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{x+2}}} 5 + 2 = 0.$

24.17. 1) $4^{\log_8(2x-2)} \cdot 0{,}5^{\log_8(2x-2)} = \sqrt[3]{16};$

2) $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) - \frac{9}{4} = \left(\log_x \sqrt{5}\right)^2;$

3) $\log_{x+4}(x^4 + x^2 + 2x)\log_{x+1}(x + 4) = 2;$

4) $(x + 1)^{\log_3(x-2)} + 2(x - 2)^{\log_3(x+1)} = 3x^2 + 6x + 3.$

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (24.18—24.20):

24.18. 1) $\begin{cases} \log_8(x + y) + \log_8(7 - y) = 1 + \log_8 5, \\ 2^{\log_2(x-y)} = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^{\log_3(3y-x+24)} = 27, \\ \log_2(2x - 2y) - \log_2\left(5 - y^2\right) = 1. \end{cases}$

24.19. 1) $\begin{cases} \log_2^2 y + \log_2 x \cdot \log_2 y - 2\log_2^2 x = 0, \\ 9x^2y - xy^2 = 64; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2\log_3^2 x + \log_3 x \cdot \log_3 y - \log_3^2 y = 0, \\ xy + \dfrac{x^2}{y} = 28. \end{cases}$

24.20. 1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 5, \\ 2\log_9 x - \log_3 y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_4 x = y - 1, \\ x^{\frac{y}{6}} = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^{\frac{1}{x}} = 10, \\ \lg y = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

ҚАЙТАЛАУ

24.21. Функцияның графигін салыңдар:

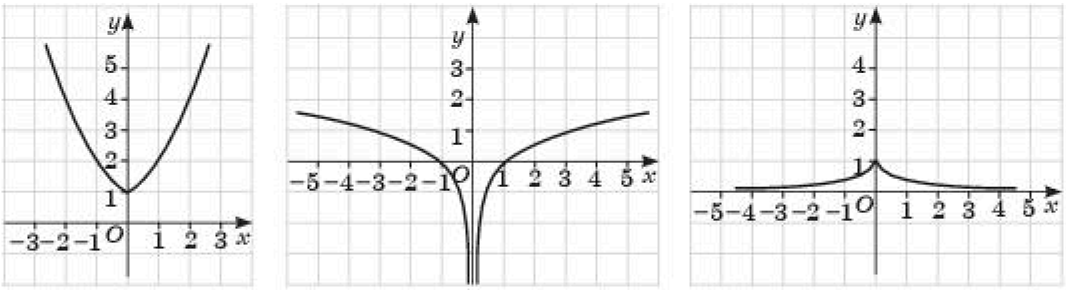
1) $y = \ln x - 1$; 2) $y = \ln|x - 1|$;

3) $y = \ln|2 - x|$; 4) $y = \ln|x + 2|$.

24.22. Берілген функциялардың графиктерімен шектелген фигураның ауданын табыңдар:

1) $y = 6 - x$, $x = 0$ және $y = 2^x$; 2) $y = 5 - 2x$, $x = 0$ және $y = 3^x$.

24.23. Графигі 65-суретте берілген функцияның аналитикалық формуласын жазыңдар:



1) 2) 3)

65-сурет

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Теңсіздік, теңсіздіктің қасиеттері, теңсіздіктер жүйесі, көрсеткіштік функция, көрсеткіштік функцияның қасиеттері, көрсеткіштік теңдеулер және олардың жүйелері.

§25. КӨРСЕТКІШТІК ТЕҢСІЗДІКТЕР

Сендер көрсеткіштік теңсіздіктерді шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Теңсіздік, көрсеткіштік теңсіздік, дәреженің негізі, дәреженің көрсеткіші, мәндестік, айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны, теңсіздікті шешу

Анықтама. *Айнымалысы дәреженің көрсеткішінде болатын теңсіздікті* ***көрсеткіштік теңсіздік*** *деп атайды.*

Көрсеткіштік теңсіздіктерді шешу $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)}$) немесе $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \leqslant a^{g(x)}$) түріндегі теңсіздіктерді шешуге келтіріледі. Ал ондай теңсіздіктерді шешу үшін мына тұжырымдар қолданылады:

1) егер $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ болса, онда $a > 1$ жағдайында $f(x) > g(x)$ теңсіздігін аламыз;

2) егер $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ болса, онда $0 < a < 1$ жағдайында $f(x) < g(x)$ теңсіздігін аламыз.

Көрсеткіштік теңсіздіктерді (немесе олардың жүйесін) шығару кезінде теңсіздіктердің қасиеттері, көрсеткіштік функцияның бірсарындылығы және айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны ескеріледі.

МЫСАЛ

1. $5^{3x-2} < 5^{x+3}$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. Көрсеткіштік функцияның бірсарындылық қасиетіне сәйкес негізі бірден үлкен болғанда функцияның кіші мәніне аргументтің, яғни көрсеткіштің кіші мәні сәйкес келеді: $3x - 2 < x + 3$. Осы теңсіздікті шешеміз: $2x < 5$ немесе $x < 2{,}5$.

Жауабы: $(-\infty;\ 2{,}5)$.

МЫСАЛ

2. $3^{\frac{x}{2}} < 9$ теңсіздігін қанағаттандыратын x-тің ең үлкен бүтін мәнін анықтайық.

Шешуі. Түрлендіруді қолдану арқылы берілген теңсіздікке мәндес теңсіздік аламыз: $3^{\frac{x}{2}} < 3^2$, бұдан $\frac{x}{2} < 2$ немесе $x < 4$.

Берілген теңсіздіктің шешімдер жиыны $(-\infty;\ 4)$ аралығы болады. Демек, берілген теңсіздікті қанағаттандыратын айнымалының ең үлкен бүтін мәні $x = 3$.

Жауабы: 3.

МЫСАЛ

3. $(x+1)^{x^2-36} < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын x-тің ең үлкен бүтін мәнін табайық.

Шешуі. Көрсеткіштік функцияның анықтамасына сәйкес теңсіздіктің сол жақ бөлігіндегі өрнектің $x + 1 > 0$ жағдайында ғана мәні болады және дәреженің негізі 1-ден өзгеше, яғни $x + 1 > 1$ немесе $0 < x + 1 < 1$. $x + 1 > 0$ болғандықтан $x > -1$ шартының орындалуы тиіс.

$x + 1 > 1$ және $0 < x + 1 < 1$ жағдайларын қарастырайық.

1) $x + 1 > 1$, яғни $x > 0$ болса, онда

$$\begin{cases} (x+1)^{x^2-36} < 1, \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} (x+1)^{x^2-36} < (x+1)^0, \\ x > 0. \end{cases}$$

$(x+1)^{x^2-36} < (x+1)^0$ теңсіздігінен көрсеткіштік функцияның қасиетіне сәйкес $x^2 - 36 < 0$ теңсіздігін аламыз. $x^2 - 36$ өрнегін көбейтінді түрінде жазайық: $x^2 - 36 = (x+6)\cdot(x-6)$. Сонда соңғы теңсіздіктер жүйесі мынадай теңсіздіктер жүйесіне ауысады:

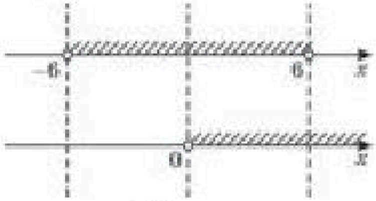
$$\begin{cases} x^2 - 36 < 0, \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} (x-6)(x+6) < 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Жүйенің әрбір теңсіздігінің шешімдер жиынын координаталық түзуге кескіндеп, жүйенің шешімдер жиыны $(0;\ 6)$ аралығы болатынын анықтаймыз (65-сурет).

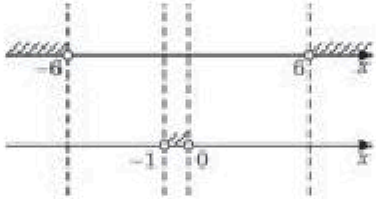
2) $0 < x + 1 < 1$, бұдан $-1 < x < 0$. Енді мына теңсіздіктер жүйесіне көшеміз:

$$\begin{cases} x^2 - 36 > 0, \\ -1 < x < 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} (x-6)(x+6) > 0, \\ -1 < x < 0. \end{cases}$$

Соңғы теңсіздіктер жүйесін 1)-жағдайға сәйкес шешеміз (66-сурет). Теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын x-тің бірде-бір мәнінің жоқ екенін 66-суреттен көруге болады.



65-сурет



66-сурет

Сонымен, берілген теңсіздікті қанағаттандыратын x-тің ең үлкен мәні $(0;\ 6)$ аралығынан табылады және ол 5 саны.

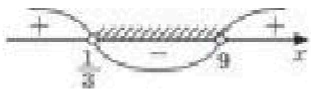
Жауабы: 5.

МЫСАЛ

4. $3^{\sqrt{x+1}+1} - 28 + 3^{2-\sqrt{x+1}} < 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын x-тің ең үлкен бүтін мәнін табайық.

Шешуі. $3^{\sqrt{x+1}} = y$ алмастыруын енгізсек, берілген теңсіздік $3y - 28 + \frac{9}{y} < 0$ түріне ие болады.

Соңғы теңсіздіктің екі жақ бөлігін y-ке көбейтеміз (бұл жағдайда теңсіздіктің таңбасы өзгермейді, себебі көрсеткіштік функция әр уақытта нөлден үлкен). Сонда $3y^2 - 28y + 9 < 0$ шығады. Теңсіздікті интервалдар әдісімен шешу арқылы $\frac{1}{3} < y < 9$ аламыз (67-сурет).



67-сурет

Демек, $3^{\sqrt{x+1}}$ өрнегі $\left(\frac{1}{3};9\right)$ аралығында орналасқан. Енді x айнымалысының мәнін табу үшін $\frac{1}{3} < 3^{\sqrt{x+1}} < 9$ қос теңсіздігін шешеміз және $3^{-1} < 3^{\sqrt{x+1}} < 3^2$, $3 > 1$. $y = 3^x$ функциясының өспелі екенін ескерсек, $-1 < \sqrt{x+1} < 2$ теңсіздігін аламыз. Арифметикалық түбірдің қасиеті бойынша $\sqrt{x+1} > -1$ теңсіздігі әр уақытта ақиқат. Сондықтан тек қана $x + 1 < 4$ теңсіздігін шешу керек. Одан $x < 3$. Берілген теңсіздіктің мүмкін болатын мәндер жиыны $x > -1$ екенін ескерсек, $-1 < x < 3$.

Осы аралықтағы x-тің ең үлкен бүтін мәні 2.

Жауабы: 2.

1. Көрсеткіштік теңсіздіктерді шешу барысында қойылатын негізгі талаптарды атаңдар.
2. Көрсеткіштік теңсіздікті шешу жолы мен бір айнымалысы бар сызықтық теңсіздікті шешу жолында қандай ұқсастық бар?

Жаттығулар

A

25.1. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $3^x > \frac{1}{27}$; 2) $2^x < \frac{1}{8}$; 3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$;

4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{16}$; 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x} < 25$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 9$.

25.2. Теңсіздікті қанағаттандыратын x-тің ең үлкен бүтін мәнін табыңдар:

1) $5^{x-1} < 25$; 2) $3^{3-x} \geqslant 9$; 3) $6^{2x} \leqslant \frac{1}{36}$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \geqslant 4$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} \leqslant 81$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

25.3. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 5^x > 25, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} < \frac{1}{27}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8 > \left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}, \\ 3^{4x} > 81. \end{cases}$

B

Теңсіздіктерді шешіңдер (**25.4—25.5**):

25.4. 1) $3^{-2x} < \sqrt{3}$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2x}{3}} > 25$; 3) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}$;

4) $2^{\frac{3x}{2}+3} < 16$; 5) $5^{\frac{x+1}{3}} \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$; 6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} > \frac{9}{4}$.

25.5. 1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\frac{9}{49}\right)^{x+1,5}$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geqslant \left(\frac{8}{27}\right)^{x+2}$;

3) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{-x^2+8x}$; 4) $(0,2)^{\frac{6x-1}{3-x}} < \left(\frac{1}{5}\right)^2$;

5) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{x}{4-x}} > 49$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} \geqslant 4$.

Теңсіздікті қанағаттандыратын x-тің ең үлкен бүтін мәнін табыңдар (**25.6-25.7**):

25.6. 1) $2^{3x} < \sqrt[5]{2}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x+1}{2}} > 4$; 3) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} \leqslant 7$; 4) $3^{\frac{2x+1}{5}} < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

25.7. 1) $5^{2x+1} - 5^{x+2} \leqslant 5^x - 5$; 2) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 \leqslant 0$;
3) $250 \cdot 5^{3-x} - 2 \cdot 5^{x-3} > 0$; 4) $147 \cdot 7^{x-2} - 3 \cdot 7^{2-x} \leqslant 0$.

25.8. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 7^{\frac{x-5}{2}} \leqslant 7\sqrt{7}, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3} < 3\frac{3}{8}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+5x} > 1, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-2} < 27. \end{cases}$

C

25.9. Теңсіздікті қанағаттандыратын x-тің ең үлкен бүтін мәнін табыңдар:

1) $9^{x+1} - 3^{x+3} < 3^x - 3$; 2) $13 \cdot 2^{x+4} - 208 \cdot 2^{-2x-3} < 0$;
3) $7 \cdot 3^{x-2} + 20 \cdot 3^{2-x} < \frac{41}{3^{x-2}}$; 4) $\frac{440}{6^x} - 2 \cdot 6^x > 8 \cdot 6^{-x}$.

Теңсіздікті қанағаттандыратын x-тің ең кіші бүтін мәнін табыңдар (**25.10-25.11**):

25.10. 1) $7^{2x-1} - 7^{x+1} \leqslant 7^{x-1} - 7$; 2) $3^{2x+2} - 3^{x+4} < 3^x - 9$;
3) $2^{2x+1} - 2^{x+3} \leqslant 2^{x+1} - 8$; 4) $5^{2x} - 5^{x+2} < 5^x - 25$.

25.11. 1) $2^{x+3} + 3 \cdot 5^x < 3 \cdot 2^x + 5^{x+1}$; 2) $2^{2x+1} - 3^{2x+1} < 3^{2x} - 7 \cdot 2^{2x}$;
3) $5^{x+1} - 3^{x+2} > 2 \cdot 5^x - 2 \cdot 3^{x-1}$; 4) $3^x + 10^{x-2} > 19 \cdot 3^{x-2} + 10^{x-3}$.

Теңсіздікті шешіңдер (**25.12-25.13**):

25.12. 1) $2^{\sqrt{x+1}} - 1 < 3 \cdot 2^{2-\sqrt{x+1}}$; 2) $2 \cdot 3^{\sqrt{x+1}} - 5 > 3^{1-\sqrt{x+1}}$;
3) $5^{\sqrt{x-2}} > 5^{1-\sqrt{x-2}} + 4$; 4) $2 \cdot 7^{\sqrt{2x-3}} > 7^{1-\sqrt{2x-3}} + 13$.

25.13. 1) $(x-3)^{x^2-9} > 1$; 2) $(x-2)^{x^2-1} > 1$;
3) $(x-1)^{\frac{2x-7}{x+1}} \geqslant 1$; 4) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^{x^2-\frac{1}{4}} > 1$.

25.14. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 2^{x+2} - 0{,}75 \cdot 2^{x+2} > 1, \\ 0{,}2^x \leqslant 0{,}04^{x^2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-2)^{2x^2-11x+9} < 1, \\ (0{,}3)^{\sqrt{4x^2-3x+2}} > (0{,}3)^{\sqrt{x}}. \end{cases}$

ҚАЙТАЛАУ

25.15. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sqrt{x-2} > x - 2$; 2) $\sqrt{2x+1} > x - 2$;
3) $\sqrt{6x+16} > x$; 4) $\sqrt{4-x} < 2 - x$.

25.16. Функцияның өсу аралықтарын табыңдар:

1) $y = xe^{2x}$; 2) $y = x\ln x$.

25.17. Абсциссасы $x_0 = 0$ болатын нүкте арқылы өтетін $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $y = x - 2\sqrt{x+4}$; 2) $y = \sqrt{2x+1}$;

3) $y = (x + 1)e^{3x}$; 4) $y = (x + e)\ln(x + e)$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Логарифм, логарифмнің қасиеттері, логарифмдік функция және оның қасиеттері, логарифмдік теңдеулер, логарифмдік теңдеулер мен олардың жүйесін шешу, теңсіздік, теңсіздіктің негізгі қасиеттері, теңсіздіктерді шешу, мәндес теңсіздіктер.

§26. ЛОГАРИФМДІК ТЕҢСІЗДІКТЕР

Сендер логарифмдік теңсіздіктерді шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Теңсіздік, логарифмдік теңсіздік, логарифмнің негізі, дәреженің көрсеткіші, мәндестік, айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны, теңсіздікті шешу

Анықтама. *Айнымалысы логарифм таңбасының ішінде немесе логарифмнің негізінде болатын теңсіздікті* ***логарифмдік теңсіздік*** *деп атайды.*

Берілген логарифмдік теңсіздікті дұрыс сандық теңсіздікке айналдыратын айнымалының кез келген мәні *логарифмдік теңсіздіктің шешімі* деп аталады.

Логарифмдік теңсіздікті шешу дегеніміз — оның барлық шешімін табу немесе шешімі болмайтынын дәлелдеу.

Шешімдері бірдей болатын немесе шешімдері болмайтын бір айнымалысы бар екі логарифмдік теңсіздік *мәндес теңсіздіктер* деп аталады.

Логарифмдік теңсіздіктерді шешу $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ($\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$) және $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ ($\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$) түріндегі теңсіздіктерді шешуге әкелінеді. Ал мұндай теңсіздіктерді шешу кезінде логарифмдік функцияның анықталу облысын және қасиеттерін ескере отырып келесі тұжырымдарды қолданамыз:

1) $a > 1$ болғанда $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ теңсіздігі

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad (1)$$

теңсіздіктер жүйесімен мәндес;

2) $0 < a < 1$ болғанда $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ теңсіздігі

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \qquad (2)$$

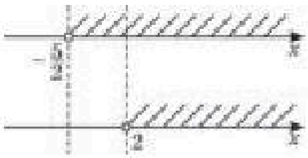
теңсіздіктер жүйесімен мәндес болады.

МЫСАЛ

1. $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 5) < -2$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. Берілген логарифмдік теңсіздікті шешу үшін алдымен теңсіздіктің оң жағындағы -2 санын негізі $\frac{1}{3}$ болатын логарифм арқылы жазамыз: $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$.

Сәйкесінше берілген теңсіздік мына түрге көшеді: $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 5) < \log_{\frac{1}{3}} 9$. Мұндағы $a = \frac{1}{3}$, яғни $a \in (0; 1)$. Демек, (2) теңсіздіктер жүйесін қолданып мына теңсіздіктер жүйесіне көшеміз:



68-сурет

$$\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ 2x + 5 > 9 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} x > -\frac{5}{2}, \\ x > 2. \end{cases}$$

Соңғы теңсіздіктер жүйесінің шешімі $(2; +\infty)$ аралығы болады (68-сурет).

Жауабы: $(2; +\infty)$.

МЫСАЛ

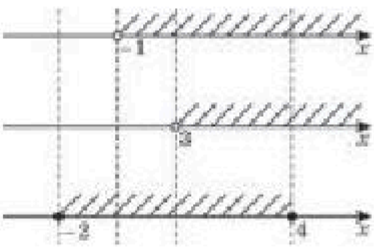
2. $\lg(x + 1) < 1 - \lg(2x - 6)$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. Теңдеуде берілген логарифмдердің мағынасы $x + 1 > 0$ және $2x - 6 > 0$ жағдайында болады.

Логарифмдік функцияның қасиеттерін қолданып берілген логарифмдік теңсіздікті түрлендіреміз: $\lg(x + 1) + \lg(2x - 6) < 1$, $\lg((x + 1)(2x - 6)) < \lg 10$.

Шыққан теңсіздіктегі $a = 10$, демек, берілген теңсіздік мына теңсіздіктер жүйесіне мәндес:

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ 2x - 6 > 0, \\ (x + 1)(2x - 6) < 10 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} x > -1, \\ x > 3, \\ (x - 4)(x + 2) < 0. \end{cases}$$



69-сурет

Теңсіздіктер жүйесінің әрбір теңсіздігінің шешімін координаталық түзуге салып, олардың ортақ бөлігін анықтаймыз (69-сурет). Сонымен берілген логарифмдік теңсіздіктің шешімі $(3; 4]$ аралығы.

Жауабы: $(3; 4]$.

МЫСАЛ

3. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$ теңсіздігін шешеміз.

Шешуі. Логарифмдік функцияның анықтамасы бойынша x және $2x$ негіздері оң және 1-ге тең болмауы керек. Демек, $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \dfrac{1}{2}$.

Барлық логарифмдерді бірдей 2 негізіне келтірейік:

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x};\ \log_{2x} 2 = \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{1 + \log_2 x}.$$

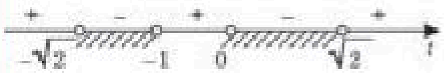
Енді соңғы екі теңдікті ескеріп берілген теңсіздікті былай жазамыз:

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1 + \log_2 x} \cdot (2 + \log_2 x) > 1.$$

Өйткені $\log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x$.

$\log_2 x = t$ айнымалысын енгіземіз: $\dfrac{1}{t} \cdot \dfrac{1}{1+t} \cdot (2 + t) > 1$, бұдан

$$\frac{-t^2 + 2}{t(t+1)} > 0 \text{ немесе } \frac{t^2 - 2}{t(t+1)} < 0.$$



70-сурет

Соңғы теңсіздікті интервалдар әдісімен шығарсақ, $-\sqrt{2} < t < -1$ немесе $0 < t < \sqrt{2}$ аламыз (70-сурет).

t-ны $\log_2 x$-пен алмастырамыз:

1) $-\sqrt{2} < \log_2 x < -1$ немесе $\log_2 2^{-\sqrt{2}} < \log_2 x < \log_2 \dfrac{1}{2}$, бұдан $2^{-\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{2}$;

2) $0 < \log_2 x < \sqrt{2}$ немесе $\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 2^{\sqrt{2}}$, бұдан $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$.

Жауабы: $\left(2^{-\sqrt{2}}; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(1; 2^{\sqrt{2}}\right)$.

МЫСАЛ

4. $y = \dfrac{\sqrt{10 + 3x - x^2}}{\log_3(x^2 - 2x) - 1}$ функциясының анықталу облысын табайық.

Шешуі. Берілген функция алгебралық бөлшек болғандықтан $\log_3(x^2 - 2x) - 1 \neq 0$.

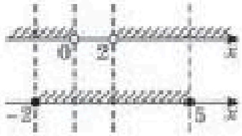
$10 + 3x - x^2$ өрнегі квадрат түбір таңбасының ішінде орналасқан. Сондықтан $10 + 3x - x^2 > 0$ немесе $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Сонымен қатар, логарифмдік функцияның анықталу облысын ескеріп мына теңсіздіктер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} \log_3(x^2 - 2x) - 1 \neq 0, \\ x^2 - 2x > 0, \\ x^2 - 3x - 10 < 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \neq 0, \\ x(x - 2) > 0, \\ (x + 2)(x - 5) < 0. \end{cases}$$

Бірінші теңсіздіктен $x \neq -1$ және $x \neq 3$ шығады.

Соңғы теңсіздіктер жүйесінің екінші және үшінші теңсіздіктерін интервалдар әдісімен шығарып, шешімдерінің қиылысуын анықтаймыз: $x \in [-2; 0) \cup (2; 5]$ (71-сурет).



71-сурет

Шыққан аралықтардан $x = 3$ және $x = -1$ мәндерін алып, берілген функцияның анықталу облысы болатын аралықтарды анықтаймыз.

Жауабы: $[-2;-1) \cup (-1; 0) \cup (2; 3) \cup (3; 5]$.

1. Логарифмдік теңсіздікті шешу үшін басты назар неге аударылады?
2. Неге көп жағдайда логарифмдік теңсіздікті шешу теңсіздіктер жүйесін қарастыруға әкеледі?

Жаттығулар

A

Логарифмдік теңсіздікті шешіңдер **(26.1—26.4)**:

26.1. 1) $\log_5(3 + 8x) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(7 - x) > -2$;
3) $\log_2(x - 3) \leqslant 3$; 4) $\lg(4x - 1) \leqslant 1$.

26.2. 1) $\log_2(2x + 5) > \log_2(x - 7)$; 2) $\log_5(3x - 2) > \log_5(x + 6)$;
3) $\log_3(3x - 1) < \log_3(2x + 3)$; 4) $\log_{\frac{1}{9}}(4x - 3) \geqslant \log_{\frac{1}{9}}(x + 3)$.

26.3. 1) $\log_2(2x - 1) > \log_2(x + 1)$; 2) $\log_5(3x + 1) > \log_5(x - 2)$;
3) $\log_{\frac{1}{7}}(12 - x) \geqslant -2$; 4) $\log_{0,2}(x - 2) > \log_{0,2}(3 - x)$.

26.4. 1) $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \leqslant 0$; 2) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$;
3) $\log_{0,1}^2 x + 3\log_{0,1} x > 4$; 4) $2 - \lg^2 x \geqslant \lg x$.

26.5. Қай теңсіздікте алмастыру дұрыс орындалмағанын көрсетіңдер:
1) $\log_{0,5}(x - 2) > 1$ болса, онда $x - 2 < 0,5$;
2) $\log_{0,2}(x - 2) > \log_{0,2}3$ болса, онда $x - 2 < 3$;
3) $\ln(x + 5) > \ln 5$ болса, онда $x + 5 > 5$;
4) $\ln^2(x - 3) < 4$ болса, онда $-2 < \ln(x - 3) < 2$.

26.6. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар:
1) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x}{x - 1}}$; 2) $f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{x - 1}{x + 5}}$.

B

Логарифмдік теңсіздікті шешіңдер (26.7—26.9):

26.7. 1) $\lg(x^2 + 2x + 2) < 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) > -2$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3x - 1) < -1$; 4) $\log_2(x^2 + 10) < 4$.

26.8. 1) $2^{\log_3 \frac{x-1}{3x+3}} \leqslant \frac{1}{4}$; 2) $3^{\log_2 \frac{x-1}{x+1}} < \frac{1}{9}$;

3) $(5x + 1)\lg(4 - x) \leqslant 0$; 4) $(3 - x)\lg(2x - 1) \geqslant 0$.

26.9. 1) $\log_{\frac{1}{6}}\left(\log_2 \sqrt{6 - x}\right) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \frac{x+1}{x-1}\right) \geqslant 0$;

3) $\log_{0,5}\log_5 \frac{x-2}{x+2} \geqslant \log_{0,5}1$; 4) $\log_{2,5}(\log_3(9^x - 6)) \geqslant 0$.

26.10. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x) = \sqrt{\log_{2,1} \frac{3x-1}{5-x}} + \sqrt{x-4}$;

2) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2} + \sqrt{\ln(x + x^2)}$;

3) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x - 2)} + \sqrt[4]{x+1}$.

26.11. Қай жаттығуда алмастырудың дұрыс орындалмағанын көрсетіңдер:

1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(x - 2) > -2$ болса, онда $\begin{cases}(x-1)(x-2) > 0,\\(x-1)(x-2) < 5;\end{cases}$

2) $3^{3x} - 4 \cdot 3^x \leqslant 0$ болса, онда $0 < x \leqslant \log_9 4$;

3) $\sqrt{\log_5(x - 2)} > 2$ болса, онда $x - 2 > 625$.

C

26.12. Логарифмдік теңсіздікті шешіп, шешімі болатын x-тің екі мәнін көрсетіңдер:

1) $\log_{0,1}(x - 2) - \lg x > \log_{0,1}3$; 2) $\log_{0,5}x - \log_2(x - 3) < \log_{0,5}4$;

3) $\log_{0,2}x - \log_5(x - 2) < \log_{0,2}3$; 4) $\lg x - \log_{0,1}(x - 1) > \log_{0,1}0,5$.

Логарифмдік теңсіздікті шешіңдер (26.13—26.15):

26.13. 1) $(\log_2 x - 4)(5x^2 + x - 6) \geqslant 0$; 2) $(\log_3 x + 3)(x^2 + 2x - 8) \geqslant 0$;

3) $\frac{2 - x}{(x+4)\log_{0,3}(2x^2 + 6x + 5)} \leqslant 0$; 4) $\log_7\left(3 - \frac{1}{x-1}\right) + \log_7 \frac{1}{x} \geqslant 0$.

26.14. 1) $\log_{1-x}(2x+3) \geqslant 1$; 2) $\log_{x-1}(x-8) \leqslant 1$;

3) $2\log_{2x}\sqrt{x+1} < 0$; 4) $\log_{3x}(2{,}5x+1) \geqslant 0$.

26.15. 1) $8^{\log_2 x} - 2x^2 > x - 2$; 2) $x^{\frac{1}{\lg x}} \cdot \lg x < 1$;

3) $x^3 > 2^{15\log_{2\sqrt{2}} 3} \cdot 3^{\frac{1}{\log_{\sqrt{2}} 3}}$; 4) $x^{-64\log_5^2 x - 5\log_5 x^4} \leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{2+\log_{0,5} 8}$;

5) $x \cdot \log_2 x - \frac{4}{\log_x 2} < 0$; 6) $x \cdot \log_5 x < \frac{5-x}{\log_x 5}$.

$y = f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар (**26.16-26.17**):

26.16. 1) $f(x) = \lg(4 - x^2) + \sqrt{\frac{1+\lg^2 x}{\lg x^2} - 1}$;

2) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \log_3 (x-3)} + \sqrt{x^2 - 25}$.

26.17. 1) $f(x) = \frac{15 + x^2}{\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(5x - x^2\right) - 1}}$; 2) $f(x) = \frac{\sqrt{17 + 15x - 2x^2}}{\log_x (x+3)}$.

ҚАЙТАЛАУ

26.18. "Жанды геометрия" немесе "GeoGebra" бағдарламасын қолданып функцияның графигін салыңдар және асимптоталарының теңдеуін жазыңдар:

1) $f(x) = x\ln(x + 2e)$; 2) $f(x) = (2x - 3) \cdot \ln(x + 3)$;

3) $f(x) = (2x - 3) \cdot 2^x$; 4) $f(x) = (2x + 1) \cdot 3^x$.

26.19. Теңдеуді комплекс сандар жиынында шешіңдер:

1) $z^4 + 4z^2 - 12 = 0$; 2) $z^4 - 5z^2 - 14 = 0$.

26.20. Функцияның екінші туындысын табыңдар:

1) $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$; 2) $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{-x}$;

3) $f(x) = x \cdot \ln x$; 4) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $11^{x-1} - 11^{x+2} + 1330 = 0$ теңдеуін шешіңдер:

A) 4; B) –1; C) 3; D) 1.

2. $0{,}25^{2+0{,}5x^2} > 32^x$ теңсіздігін қанағаттандыратын ең үлкен бүтін санды табыңдар:

A) –1; B) –2; C) 3; D) 4.

3. $y = \log_6(x^2 + 6x) - 3$ функциясы теріс мәнді қабылдайтын x-тің мәндерін табыңдар:

A) $(-6; 0)$;
B) $(-\infty; -18) \cup (12; +\infty)$;
C) $(-18; 12)$;
D) $(-18; -6) \cup (0; 12)$.

4. $\begin{cases} 3^y = 27^x, \\ \log_2(y - x^2) = 1 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер:

A) $(-1; -3)$, $(-2; -6)$;
B) $(1; 3)$;
C) $(2; 6)$;
D) $(1; 3)$, $(2; 6)$.

5. $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geqslant 0, \\ \log_4^2 x - \log_4 x - 6 < 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

A) $(2; 64)$;
B) $[2; 64)$;
C) $(-\infty; -3] \cup (64; +\infty)$;
D) $\left(\frac{1}{16}; 2\right]$.

6. $\frac{1}{125} \leqslant 5^{-x+5} < 3125$ теңсіздігінің шешімдер санын табыңдар:

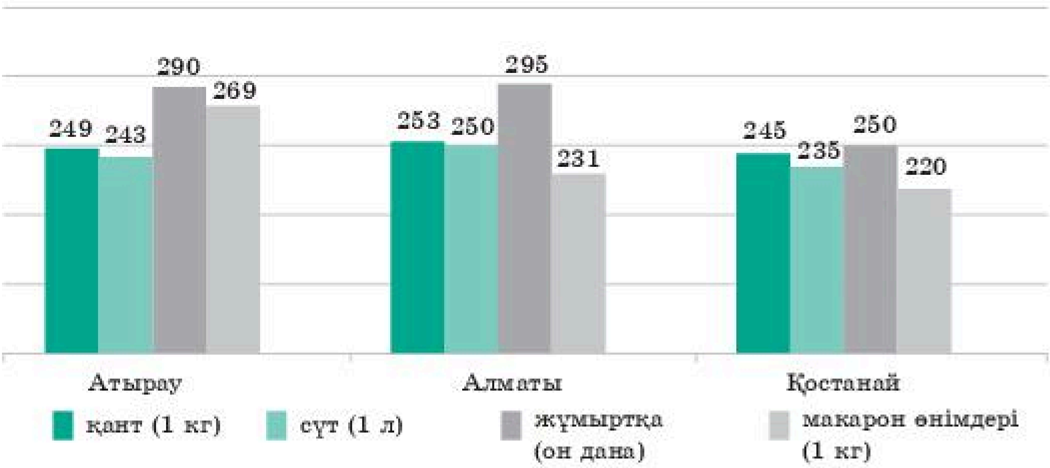
A) 7;
B) 9;
C) 8;
D) 6.

7. $\lg(x^2 - 15x) \leqslant 2$ теңсіздігінің бүтін шешімдерінің санын табыңдар:

A) 10;
B) 12;
C) 8;
D) 26.

Математикалық сауаттылық бойынша тест тапсырмалары

8. Диаграммада үш қала бойынша азық-түлік тағамдарының орташа бағасы (теңгемен) берілген:



72-сурет

Алматы қаласы бойынша 2 кг қант, 1 л сүт, 3 дана жұмыртқа, 2 кг макарон өнімдеріне жіберілген бағаны табыңдар:

A) 2297 тг; B) 2023 тг; C) 2103 тг; D) 2263 тг; E) 2193 тг.

9. Жанармай құю стансысында дисконт картасы арқылы бензинге 5% жеңілдік беріледі. Жүргізушінің ақшасы 57 л бензинге жетеді. Дисконт картасы көмегімен сатып алатынын бензин мөлшерін табыңдар:

A) 61 л; B) 59 л; C) 58 л; D) 60 л; E) 62 л.

10. Мұрат 7 қадам алға және 3 қадам кейін жүре отырып, барлығы 259 қадам жасады. Мұрат алға қанша қадам жасағанын табыңдар:

A) 110; B) 108; C) 107; D) 106; E) 105.

11. Екі санның бірі 50%-ға кемітіліп, екіншісі 20%-ға арттырылған. Осы сандардың көбейтіндісі қанша пайызға өзгергенін табыңдар:

A) 40%-ға кемиді; B) 30%-ға кемиді; C) 20%-ға кемиді.
D) 50%-ға кемиді; E) 10%-ға артады.

12. Емделуші 8 күн бойы дәріні күніне 0,5 г-нан 3 рет қабылдауы керек. Бір қаптамада 0,25 г-нан 10 дәрі бар. Емделуші кем дегенде қанша қаптама алуы қажет екенін табыңдар:

A) 4; B) 5; C) 6; D) 7; E) 8.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Теңдеу, сызықтық теңдеу, теңдеуді шешу, туынды, түрлендіру, интеграл, алғашқы функцияны табу ережелері, интеграл қасиеттері, дифференциалдық теңдеу, дифференциалдық теңдеудің реті, дифференциалдық теңдеуді шешу, жалпы шешім, дербес шешім.

VIII ТАРАУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

§27. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ТУРАЛЫ ЖАЛПЫ МАҒЛҰМАТ. АЙНЫМАЛЫЛАРЫ АЖЫРАТЫЛАТЫН БІРІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Дифференциалдық теңдеулер туралы негізгі ұғымдармен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Теңдеулер, дифференциалдық теңдеулер, дифференциал теңдеудің реті, дифференциал теңдеудің шешімі, жалпы шешімі, дербес шешімі

Анықтама. *Аргументті, осы аргументтің белгісіз функциясын және осы функцияның туындысын байланыстыратын теңдеулер* ***дифференциалдық теңдеулер*** деп аталады.

Анықтама. *Дифференциалдық теңдеуге кіретін туындының ең үлкен ретін* ***дифференциалдық теңдеудің реті*** деп атайды.

Бірінші реттік дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі:

$$F(x;\ y;\ y') = 0 \text{ немесе } y' = f(x;\ y). \qquad (1)$$

МЫСАЛ

1. 1) $x^2y' + 2xy = y$ — бірінші ретті дифференциалдық теңдеу;
2) $y'' - 2xyy' = x$ — екінші ретті дифференциалдық теңдеу;
3) $y^{(IV)} - xy'' + 2y' = 1 - x$ — төртінші ретті дифференциалдық теңдеу.

Анықтама. ***Дифференциалдық теңдеудің шешімі*** *деп тәуелсіз y айнымалының орнына $y = f(x)$-ті қойғанда ақиқат теңдікті беретін $y = f(x)$ дифференциалданатын функциясын айтады.*

МЫСАЛ

2. $y = x^2$ функциясы, мұндағы $x \in (-\infty; +\infty)$, $2y - xy' = 0$ дифференциал теңдеуінің шешімі болып табылады. Расында да, берілген теңдеуге функцияның мәнін қойғанда, $2 \cdot x^2 - x \cdot (x^2)' = 0$ теңдігі немесе $2x^2 - 2x^2 = 0$ шығады.

Дифференциалдық теңдеудің шешімін табу процесі дифференциалдық теңдеуді *интегралдау* деп аталады.

Сондықтан бірінші реттік дифференциалдық теңдеудің шешімін табу барысында бір параметрге тәуелді бір функцияны ғана емес, бірнеше функциялар жиынын аламыз.

МЫСАЛ

3. $y' = \cos x$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Алдымен туындыны келесі түрде жазамыз: $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Сонда берілген теңдеу мынадай түрге көшеді: $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ немесе $dy = \cos x dx$. Енді соңғы теңдіктің екі жақ бөлігін интегралдаймыз.

$\int dy = \int \cos x dx$. Сонда $y = \sin x + C$ аламыз.

Жауабы: $y = \sin x + C$.

ЕСТЕ САҚТАҢДАР!

$\int y' dx = \int dy$.

Дифференциалдық теңдеулердің жалпы және дербес шешімдері анықтамаларымен танысасыңдар.

1-мысалдағы $y' = \cos x$ теңдеуінің жалпы шешімі $y = \sin x + C$ болады.

Анықтама. *C тұрақтысының кез келген мәнінде (1) теңдеуінің шешімі болатын x пен кез келген C тұрақтысына тәуелді $y = f(x; C)$ функциясы* ***дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

4. $y' = x$ теңдеуінің жалпы шешімін табайық.

Шешуі. $y' = \dfrac{dy}{dx}$ екені белгілі. Сондықтан берілген теңдеу келесі түрге көшеді: $\dfrac{dy}{dx} = x$ немесе $dy = xdx$. Соңғы теңдіктің екі жақ бөлігін интегралдаймыз. Сонда $\int dy = \int xdx$ немесе $y = \dfrac{x^2}{2} + C$.

Жауабы: $y = \dfrac{x^2}{2} + C$.

Анықтама. *Тұрақтының $C = C_0$ нақты мәнінде $y = f(x; C)$ теңдеуінің жалпы шешімінен алынатын $y = f(x; C_0)$ функциясы (1)* ***дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімі*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

5. $y(2) = 3$ болғанда $y' = x^2$ теңдігінің дербес шешімін табайық.

Шешуі. Теңдеудің екі жақ бөлігін интегралдаймыз және $\int y' dx = \int dy$ теңдігін қолданып, жалпы шешімін табамыз:

$$\int y' dx = \int x^2 dx \text{ немесе } \int dy = \int x^2 dx, \text{ немесе } y = \frac{x^2}{2} + C.$$

Енді $y(2) = 3$ шартын ескеріп, берілген теңдеудің дербес шешімін табамыз: $3 = \dfrac{2^3}{3} + C$ немесе $C = \dfrac{1}{3}$.

Сонда берілген дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі: $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{3}$.

Жауабы: $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{3}$.

Егер $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ болса, онда $y' = \cos x$ теңдеуінің дербес шешімі $y = \sin x + \frac{3}{2}$ болатынын өздерің дәлелдеңдер.

Айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеулерді шешуді үйренесіңдер.

Анықтама. $$f(y)dy = g(x)dx \qquad (2)$$
түріндегі теңдеу ***айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу*** *деп аталады.*

(2)-теңдеудегі x және y айнымалыларынан тұратын өрнектер теңдік таңбасымен бөлінеді де теңдік таңбасының екі жақ бөлігінде орналасады, мұндағы $f(y)$ және $g(x)$ функциялары — үздіксіз функциялар.

Айнымалылары ажыратылатын теңдеудің жалпы интегралы $\int f(y)dy = \int g(x)dx$ түріндегі өрнек болып табылады.

Егер осы теңдіктің интегралдары элементар функциялар арқылы өрнектелсе, онда анықталмаған $\Phi(x;\ y) = 0$ функциясы түрінде, кей жағдайда анықталған y функциясы түрінде дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін алуға болады.

МЫСАЛ

6. $ydy = x^3dx$ теңдеуін шығарайық.

Шешуі. Берілген теңдеу айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу болып табылады. Сондықтан теңдеудің екі жақ бөлігін интегралдаймыз:
$$\int ydy = \int x^3dx.$$
Анықталмаған интегралды табамыз.

$\int ydy = \frac{y^2}{2} + C_1$ және $\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C_2$.

Сонда $\frac{y^2}{2} + C_1 = \frac{x^4}{4} + C_2$. Осыдан $y^2 = \frac{x^4}{2} + C$ немесе $y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + C}$.

Жауабы: $y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + C}$.

Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулерді шешуді үйренесіңдер.

Анықтама. $$f_1(x)\cdot g_1(y)dx + f_2(x)\cdot g_2(y)dy = 0 \qquad (3)$$
түріндегі теңдеу ***айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер*** *деп аталады.*

Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін (3)-теңдеудің екі жақ бөлігін $f_2(x)\cdot g_1(y)$ өрнегіне бөлеміз:
$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 \text{ немесе } \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy. \qquad (4)$$

МЫСАЛ

7. $x(y-6)dx = dy$ теңдеуін шығарайық.

Шешуі. Берілген теңдеу айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу болғандықтан теңдеудің екі жақ бөлігін $y - 6 \neq 0$ өрнегіне бөлеміз.

Сонда берілген теңдеу $xdx = \dfrac{dy}{y-6}$ түріне келеді. Соңғы теңдеудің екі жақ бөлігін интегралдаймыз: $\int xdx = \int \dfrac{dy}{y-6}$.

Бұдан $\dfrac{x^2}{2} = \ln|y-6| + C$ немесе $\ln|y-6| = \dfrac{x^2}{2} - C$. Мұндағы C тұрақтысы теріс және оң мәндерді қабылдайтын болғандықтан $\ln|y-6| = \dfrac{x^2}{2} + C$ түрінде жазуға болады. Бұл дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы, ал оның жалпы шешімі $y = 6 + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$.

Жауабы: $y = 6 + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$.

МЫСАЛ

8. $y' + (2y+1)\text{ctg}x = 0$ дифференциалдық теңдеуін шығарайық.

Шешуі. Берілген теңдеудегі туындыны келесі түрде жазамыз:

$$\frac{dy}{dx} + (2y+1)\text{ctg}x = 0.$$

Алынған дифференциалдық теңдеуге айнымалыларды ажырату амалын қолданамыз. Ол үшін екінші қосылғышты теңдіктің оң жақ бөлігіне көшіреміз:

$$\frac{dy}{dx} = -(2y+1)\text{ctg}x.$$

Дифференциалдық теңдеуді айнымалылары ажыратылған теңдеулер түрінде жазамыз: $\dfrac{dy}{2y+1} = -\text{ctg}x\,dx$.

Соңғы теңдеудің екі жақ бөлігін интегралдаймыз $\int \dfrac{dy}{2y+1} = -\int \text{ctg}x\,dx$.

Әр интегралды жаңа айнымалыны енгізу тәсілімен шығарамыз.

$$\int \frac{dy}{2y+1} = \left| \begin{array}{l} 2y+1=t, \text{ бұдан } d(2y+1)=dt \text{ немесе} \\ 2dy=dt, \text{ немесе } dy=0{,}5dt \end{array} \right| = \int \frac{0{,}5dt}{t} = 0{,}5\ln|t| = 0{,}5\ln|2y+1|.$$

$$-\int \text{ctg}x\,dx = -\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \text{ бұдан } d(\sin x) = dt \\ \text{немесе } \cos x\,dx = dt \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + \ln|C| =$$
$$= -\ln|\sin x| + \ln|C|.$$

Сонда $0{,}5\ln|2y+1| = -\ln|\sin x| + \ln|C|$ аламыз. Логарифмнің қасиеттерін қолданып, теңдеудің екі жақ бөлігін түрлендіреміз.

$\ln|2y+1|^{0{,}5} = -\ln|\sin x| + \ln|C|$, яғни $\ln\sqrt{|2y+1|} = \ln\left|\dfrac{C}{\sin x}\right|$ немесе $\sqrt{|2y+1|} = \left|\dfrac{C}{\sin x}\right|$.

Демек, жалпы интеграл $\sqrt{|2y+1|} \cdot \sin x = C$, мұндағы C — тұрақты.

Нәтижесінде жалпы интеграл түріндегі дифференциалдық теңдеудің шешімін анықтадық.

Жауабы: $\sqrt{|2y+1|} \cdot \sin x = C$, мұндағы C — тұрақты.

Физикалық есептерді шығаруда дифференциалдық теңдеулерді қолдануды үйренесіңдер.

МЫСАЛ

9. Радийдің ыдырау жылдамдығы радийдің массасына пропорционал. Егер 1600 жылдан кейін радийдің массасының жартысы қалатын болса, онда радийдің ыдырау заңдылығын табайық.

Шешуі. x — радий массасы және t — уақыт (жылдармен есептегенде) болсын. $x = f(t)$ заңдылығын табайық.

Есептің шарты бойынша $x' = kx$ немесе $\frac{dx}{dt} = kx$ дифференциалдық теңдеуін құрастырамыз. Шыққан теңдеу айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу болып табылады. Демек, $\frac{dx}{x} = kdt$ теңдеуін аламыз.

Бұдан $\ln x = kt + C$. Бастапқы кезеңде $t = 0$ болғанда радийдің массасы x_0. Онда сәйкес C-ның мәнін табамыз. Сонда $\ln x_0 = k \cdot 0 + C$ немесе $C = \ln x_0$. Бұдан $\ln x - \ln x_0 = kt$, яғни $\ln \frac{x}{x_0} = kt$ шығады. Енді 1600 жылдан кейін k шарт бойынша жартылай кемитінін анықтаймыз, яғни $\ln \frac{1}{2} = 1600k$ немесе $k = -\frac{\ln 2}{1600} \approx -0{,}00043$.

Сонда $\ln \frac{x}{x_0} = -0{,}00043t$ немесе $\frac{x}{x_0} = e^{-0{,}00043t}$.

Бұдан $x = x_0 \cdot e^{-0{,}00043t}$.

Жауабы: $x = x_0 \cdot e^{-0{,}00043t}$.

1. Дифференциалдық теңдеулердің алгебралық теңдеулерден айырмашылығы неде?
2. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін қандай жағдайларда табуға болады?
3. Қандай дифференциалдық теңдеу айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу деп аталады?
4. Қандай дифференциалдық теңдеуді айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу деп атайды?

Жаттығулар

А

27.1. Кестені толтырыңдар:

34-кесте

Дифференциалдық теңдеу	Дифференциалдық теңдеудің реті
$y''' - 3xyy' = x - y$	
$xy'' + xy' = 2x - y$	
$4y'''' - 3xy'' = x^3 - y$	
$y - x^2y' = 2x - 1$	

27.2. Кестені толтырыңдар:

35-кесте

Дифференциалдық теңдеу	Айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу	Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу
$yy' = x - 1$		
$xy' = (x^2 + x)y$		
$ydy = (2x^2 - x + 3)dx$		
$x^2dy = 2dx$		
$ydy = (x^2 - x)(1 + y^2)dx$		
$(y + 1)dy = (3x^2 - 2x)dx$		
$dy = xe^x dx$		

27.3. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңдар:

1) $y' = y$;
2) $y' = 2x \cdot y$;
3) $y' = 2x - 3$;
4) $y' = 3x^2 + 2x - \pi$.

27.4. 1) $y(2) = 3$ шарты бойынша $y' = 2x - 1$;
2) $y(1) = 2$ шарты бойынша $y' = 3x^2 - 4$;
3) $y(0) = -2$ шарты бойынша $y' = 3x^2 - 4x$;
4) $y(-1) = 4$ шарты бойынша $y' = 2x - 3x^2$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңдар.

B

27.5. 1) $y(1) = -2$ шарты бойынша $y' = \frac{x}{y}$;
2) $y(1) = 1$ шарты бойынша $y' = 3yx^2$;
3) $y(0) = 2$ шарты бойынша $2y' = y^{-1}\cos x$;
4) $y(1) = \pi$ шарты бойынша $y' = \frac{1}{1 + x^2}$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңдар.

27.6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңдар:

1) $y' = 2x\cos^2 y$;
2) $y' = 4x\sin^2 y$;
3) $y' = e^{2x} + 4x$;
4) $y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$.

27.7. 1) $y = 5e^{3x}$ функциясы $y' = -2y$ теңдеуінің шешімі болатынын дәлелдеңдер.

2) $y = 1{,}7e^{-2x}$ функциясы $y' = -2y$ теңдеуінің шешімі болатынын дәлелдеңдер.

3) $y = \pi e^{-5x}$ функциясы $y' = -5y$ теңдеуінің шешімі болатынын дәлелдеңдер.

27.8. 3000 тұрғыны бар кешенде тұмау эпидемиясы $\frac{dy}{dt} = 0{,}001y(3000 - y)$ теңдеуімен көрсетілген, мұндағы y — t уақытта ауырып қалғандар, t — апта саны. Бастапқыда кешенде тұмау эпидемиясына шалдыққан адамдар саны 3-ке тең болса, онда екі аптадан кейін тұмау эпидемиясына шалдыққандар саны қаншаға жетеді ($e \approx 2{,}72$)?

C

27.9. Қатты дене температурасы 20°C бөлмеде 100°C-тан 60°C-қа дейінгі температурада 20 мин-та суиды. Дененің суу заңдылығын табыңдар. Бөлмедегі температура тұрақты. Ньютон заңы бойынша суу жылдамдығы температураның айырмашылығына тең. Қанша уақытта дене 30°C-қа дейін суиды?

27.10. 1) Моторлы қайық көлде 20 км/сағ жылдамдықпен қозғалады. Қозғалыс барысында қайықтың моторы сөнеді және 40 с кейін қайықтың жылдамдығы 8 км/сағ-қа дейін кемиді. Судың ағыс кедергісі қайықтың қозғалыс жылдамдығына тура пропорционал. Мотор тоқтағаннан кейін 2 с өткендегі қайықтың жылдамдығын табыңдар.
2) Моторлы қайық 30 км/сағ жылдамдықпен қозғалады. Егер судың кедергісі қайықтың қозғалыс жылдамдығына тура пропорционал және пропорционалдық коэффициенті ($-1\frac{2}{3}$)-ге тең болса, мотор тоқтағаннан кейін 3 с өткендегі қайықтың жылдамдығын табыңдар.

27.11. Сыйымдылығы C конденсатор U ток кернеуі және кедергісі R болатын желіге қосылады. Желіге қосқаннан кейінгі t уақыттағы конденсатордың q зарядын табыңдар.

27.12. 1) m миллиграмм C радиоактивті затынан 20 минуттік радиоактивті ыдыраудан кейін n миллиграмм қалды. C затының жартылай ыдырау периодын табыңдар.
2) A радиоактивті затының бір грамы бар. Егер A затының жартылай ыдырау периоды 3 минутқа тең болса, онда қанша минуттан кейін оның массасы 0,125 г болады?

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

27.13. Биология (химия, физика) бойынша практикалық есептерді шешу барысында дифференциалдық теңдеулер теориясын қолдану туралы хабарлама дайындаңдар.

ҚАЙТАЛАУ

27.14. Функцияның алғашқы функциясын табыңдар:

1) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} + 2x$; 2) $f(x) = \dfrac{4}{\sin^2 2x} + e^{4x}$;

3) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1} + e^{-x}$; 4) $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x} - 2e^{-x}$.

27.15. 1) $M(4;5)$ нүктесі арқылы өтетін параболаға жанамамен, $y = x^2 - 4x + 5$ функциясының графигімен және ордината осімен шектелген фигураның ауданын табыңдар.
2) Функцияның графиктерімен шектелген фигураның ауданын табыңдар:

$y = \sin^2 x$, $y = \cos^2 x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

27.16. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 0$; 2) $\log_3(3x + 5) \leqslant 3$;

3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-3x+2} > 1$; 4) $7^{x^2} < \left(\dfrac{1}{49}\right)^{x-4}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Теңдеу, сызықтық теңдеу, теңдеудің шешімі, туынды, алғашқы функция, интеграл, алғашқы функцияны табу ережелері, интегралдың қасиеті, дифференциалдық теңдеулер, дифференциал теңдеудің реті, дифференциалдық теңдеудің шешімі, жалпы шешімі, дербес шешімі.

§28. ЕКІНШІ РЕТТІ ТҰРАҚТЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ БІРТЕКТІ СЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Екінші ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулерді ($ay'' + by' + cy = 0$, мұндағы a, b, c — тұрақты шамалар) шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР
Теңдеу, дифференциалдық теңдеу, дифференциалдық теңдеудің реті, дифференциалдық теңдеудің шешімі, жалпы шешім, дербес шешім

$ay'' + by' + cy = 0$ (1) түріндегі сызықтық дифференциалдық теңдеулерді қарастырайық, мұндағы a, b, c — тұрақтылар.

Дифференциалдық теңдеудің шешімі туындылары берілген функцияға ұқсас функция болуы тиіс. Мұндай ерекшелік көрсеткіштік функцияда бар. Мысалы, $y(x) = e^{kx}$ функциясы.

Теорема. Егер k_0 саны $ak^2 + bk + c = 0$ (2) теңдеуінің түбірі болса, онда $y(x) = e^{k_0 x}$ функциясы (1) теңдеудің шешімі болады.

Дәлелдеуі. $y(x) = e^{k_0x}$ болсын. Туындыларды табамыз: $y'(x) = (e^{k_0x})' = k_0 \cdot e^{k_0x}$ және $y''(x) = (k_0e^{k_0x})' = k_0^2 \cdot e^{k_0x}$. Енді y'', y' және y өрнектерін (1) теңдеуге қоямыз. Сонда $ak_0^2 \cdot e^{k_0x} + bk_0 \cdot e^{k_0x} + c \cdot e^{k_0x} = 0$ немесе $e^{k_0x} \cdot (ak_0^2 + bk_0 + c) = 0$.

k_0 саны (2) теңдеуінің түбірі болғандықтан $e^{k_0x} \cdot (ak_0^2 + bk_0 + c)$ өрнегі нөлге тең. Демек, $y(x) = e^{k_0x}$ функциясы (1) теңдеуінің шешімі болады.

$ak^2 + bk + c = 0$ теңдеуі (1) дифференциалдық теңдеуінің *сипаттамалық теңдеуі* деп аталады.

Екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі $ak^2 + bk + c = 0$ сипаттамалық теңдеуінің түбірлеріне байланысты. Берілген сипаттамалық теңдеу квадрат теңдеу болғандықтан оның түбірі әртүрлі екі нақты сан немесе бірдей екі нақты сан немесе комплекс сандар болуы мүмкін.

(1) екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімінің мүмкін болатыны 36-кестеде көрсетілген (Тұжырымдардың дәлелдеуі жоғары математикада қарастырылады).

36-*кесте*

Екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеулер		
$ak^2 + bk + c = 0$ сипаттамалық теңдеуінің түбірлері	$ak^2 + bk + c = 0$ сипаттамалық теңдеуінің дискриминанты	Жалпы шешімі
k_1, k_2 түбірлері нақты сандар және әртүрлі	$D > 0$	$y(x) = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
k_1, k_2 түбірлері нақты сандар және тең	$D = 0$	$y(x) = (C_1x + C_2)e^{k_1x}$
k_1, k_2 түбірлері комплекс сандар	$D < 0$	$y(x) = e^{\alpha x}[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)]$

МЫСАЛ

1. $y'' - 7y' + 6y = 0$ дифференциалдық теңдеуді шешейік.

Шешуі. Алдымен сәйкес келетін сипаттамалық теңдеуді жазамыз: $k^2 - 7k + 6 = 0$. Теңдеудің екі түбірі бар: $k_1 = 1$ және $k_2 = 6$. Сондықтан жалпы шешімі $y(x) = C_1e^x + C_2e^{6x}$, мұндағы C_1 және C_2 — кез келген нақты сандар.

Жауабы: $y(x) = C_1e^x + C_2e^{6x}$.

МЫСАЛ

2. $y'' + 4y' + 4y = 0$ дифференциалдық теңдеуді шешейік.

Шешуі. Алдымен сәйкес келетін сипаттамалық теңдеуді жазайық: $k^2 + 4k + 4 = 0$. Теңдеудің бір түбірі: $k_1 = -2$ бар. Сондықтан жалпы шешімі: $y(x) = (C_1x + C_2)e^{-2x}$, мұндағы C_1 және C_2 — кез келген тұрақтылар.

Жауабы: $y(x) = (C_1x + C_2)e^{-2x}$.

МЫСАЛ

3. $y'' + 6y' + 58y = 0$ дифференциалдық теңдеуді шешейік.

Шешуі. Алдымен сәйкес келетін сипаттамалық теңдеуді жазайық: $k^2 + 6k + 58 = 0$.

Теңдеудің екі комплекс түбірі бар: $k_{1,2} = -3 \pm 7i$. Сондықтан жалпы шешімі: $y(x) = e^{-3x}(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x)$, мұндағы C_1 және C_2 — кез келген тұрақтылар.

Жауабы: $y = e^{-3x}(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x)$.

Гармоникалық тербелістің теңдеуін құруды және шешуді үйренесіңдер.

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (1)$$

(1) — еркін гармоникалық тербеліс теңдеуі, s тербелмелі шамасының t уақытына тәуелділігін береді.

Алайда, әдетте *тербеліс теңдеуі* деп осы теңдеудің дифференциалдық түрдегі жазылуын қабылдайды.

(1) теңдеуін уақыт бойынша екі рет дифференциалдайық:

$$\frac{ds}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) \text{ немесе } \frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0. \qquad (2)$$

(2) теңдеуі *еркін гармоникалық тербелістің дифференциалдық теңдеуі* деп аталады.

(1) теңдеуі (2) дифференциалдық теңдеуінің шешімі болып табылады.

(2) теңдеуі — екінші ретті дифференциалдық теңдеулер болғандықтан, толық шешім алу үшін екі бастапқы шарт қажет. Яғни (1) теңдеуіне енетін A және φ_0 тұрақтысы. Мысалы, $t = 0$ болғандағы тербеліс амплитудасы мен фазасы.

1. Екінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің қандай мүмкін жағдайлары бар?
2. Екінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің түрі неге байланысты болады?
3. Қандай жағдайда тұрақты коэффициенттері бар екінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімі гармоникалық тербеліс теңдеуі болып табылады?

Жаттығулар

A

28.1. Кестені толтырыңдар:

37-кесте

Дифференциалдық теңдеу	Сипаттама теңдеуі
$y'' - 4y = 0$	
$y'' - 23y = 0$	
$y'' + 25y = 0$	
	$k^2 + 8k = 0$
$y'' + 6y' - 16y = 0$	
	$2k^2 - 8k + 24 = 0$
$2y'' + 4y' + 19y = 0$	
$3y'' - 8y' + 28y = 0$	

28.2. Дифференциалдық теңдеуді шешіңдер:

1) $y'' - 4y = 0$; 2) $y'' - 16y = 0$;
3) $y'' + 25y = 0$; 4) $y'' + 36y = 0$.

28.3. Дифференциалдық теңдеуді шешіңдер:

1) $y'' - 6y' + 9y = 0$; 2) $y'' + 8y' + 16y = 0$;
3) $y'' - 2y' - 8y = 0$; 4) $y'' + 4y' - 12y = 0$.

28.4. Дифференциалдық теңдеуді шешіңдер:

1) $y'' - 2y' + 10y = 0$; 2) $y'' + 8y' + 25y = 0$;
3) $y'' + 6y' + 45y = 0$; 4) $y'' - 4y' + 53y = 0$.

28.5. Екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеуді шешіңдер:

1) $y'' + 5y' - 6y = 0$; 2) $y'' - 3y' - 10y = 0$;
3) $y'' - 4y' + 12y = 0$; 4) $y'' + 8y' + 36y = 0$.

B

28.6. 1) $y(0) = 1$, $y(1) = 2$ шарты бойынша $y'' - 6y' + 9y = 0$;
2) $y(0) = 3$, $y(1) = 4$ шарты бойынша $y'' + 2y' + y = 0$;
3) $y(0) = 2$, $y(1) = 1$ шарты бойынша $y'' - y' - 2y = 0$;
4) $y(0) = 2$, $y(1) = 0$ шарты бойынша $y'' - 2y' - 8y = 0$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңдар.

28.7. 1) $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ шарты бойынша $y'' + y = 0$;

2) $y(0)=2$, $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=-1$ шарты бойынша $y''+16y=0$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табыңдар.

C

28.8. Шешімі:

1) $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$;
2) $y = e^{-x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$;
3) $y = e^{x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)$;
4) $y = e^{2x}(C_1\cos 2\sqrt{3}x + C_2\sin 2\sqrt{3}x)$

болатын екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеуді құрастырыңдар.

28.9. Шешімі гармоникалық тербеліс теңдеуі болатын екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеуді жазыңдар:

1) $y = \cos(2x - 1)$;
2) $y = 2\sin(2x - 3)$;
3) $y = e^{2x}\cdot\sin(\sqrt{3}x - 5)$;
4) $y = e^{-x}\cdot\sin(2\sqrt{2}x - 1)$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $y' = 3 - 2x - 3x^2$ дифференциалдық теңдеуінің шешімі:

A) $y = 3x - x^2 - 3x^3 + C$;
B) $y = 3x - 2x^2 - x^3 + C$;
C) $y = 3x - x^2 - x^3 + C$;
D) $y = 3x^{-1} - x^2 - x^3 + C$;
E) $y = x - 2x^2 - x^3 + C$.

2. $y' = 5y$ дифференциалдық теңдеудің шешімі:

A) $y = 5x$;
B) $y = e^{5x+C}$;
C) $y = 3 - e^{5x}$;
D) $y = C - e^{5x}$;
E) $y = x - e^{5x}$.

3. $y' = y\cos x$ дифференциалдық теңдеудің шешімі:

A) $y = xe^{\sin x}$;
B) $y = e^{2\sin x + C}$;
C) $y = e^{-\sin x}$;
D) $y = C\cdot e^{\sin x}$;
E) $y = C\cdot e^{\cos x}$.

4. $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ болғандағы $\frac{dy}{dx} = 4xe^{-y}$ дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі:

A) $y = 4e^{x}$;
B) $y = 2e^{2x}$;
C) $y = \ln x$;
D) $y = \ln x^2$;
E) $y = \ln 2x^2$.

5. $y'' - 5y' + 20y = 0$ екінші ретті дифференциалдық теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі:

A) $2k^2 - 5k - 20 = 0$;
B) $2k^2 - 5k + 20 = 0$;

C) $k^2 - 5k + 20 = 0$; D) $2k^2 - 5k + 10 = 0$;
E) $k^2 + 5k - 20 = 0$.

6. $y'' + 32y = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі:

A) $y = C_1\cos4\sqrt{2}x + C_2\sin4\sqrt{2}x$; B) $y = C_1\cos2\sqrt{2}x + C_2\sin2\sqrt{2}x$;
C) $y = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x$; D) $y = C_1\cos8\sqrt{2}x + C_2\sin8\sqrt{2}x$;
E) $y = e^x(C_1\cos4\sqrt{2}x + C_2\sin4\sqrt{2}x)$.

7. Жалпы шешімі $y = e^{5x}(C_1\cos4x + C_2\sin4x)$ болатын екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеуі:

A) $y'' - 10y' + 25y = 0$; B) $y'' - 10y' + 41y = 0$;
C) $y'' - 10y' + 42y = 0$; D) $y'' + 10y' + 41y = 0$;
E) $y'' - 10y' + 45y = 0$.

8. $y'' - 6y' + 34y = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі:

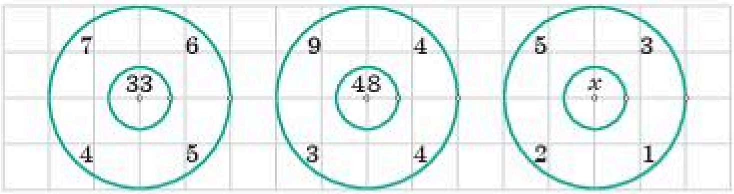
A) $y = e^{-2x}(C_1\cos5x + C_2\sin5x)$; B) $y = e^{3x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$;
C) $y = e^{3x}(C_1\cos5x + C_2\sin5x)$; D) $y = e^{-3x}(C_1\cos5x + C_2\sin5x)$;
E) $y = e^{6x}(C_1\cos5x + C_2\sin5x)$.

Математикалық сауаттылық бойынша тест тапсырмалары

9. Ғимараттың алдына 8,5 × 4,5 м тіктөртбұрыш пішінді гүлзар салынған. Бұталардың арасындағы қашықтық — 50 см. Гүлзардың периметрі бойынша отырғызылған раушан бұталарының санын табыңдар:

A) 50; B) 56; C) 54; D) 53; E) 52.

10. Суреттегі кіші дөңгелектегі сандар белгілі бір заңдылықпен орналасқан (73-сурет). x-тің мәнін табыңдар:



73-сурет

A) 13; B) 10; C) 16; D) 12; E) 14.

11. 1-ден 10 000-ға дейінгі натурал сандарды жазуға қажет барлық цифр санын табыңдар:

A) 39 884; B) 38 894; C) 38 584; D) 38 694; E) 38 889.

12. Кітаптың ортасынан бірнеше парақ түсіп қалған. Оның сол жақ бетінің нөмірі 62, оң жақ бетінің нөмірі 87. Кітаптың соңғы бетінің нөмерін анықтаңдар:

A) 144; B) 146; C) 148; D) 152; E) 150.

13. Әсем мен Қуаныш бір мектепте оқиды. Қуаныш мектептен 2 км жерде тұрады, ал Әсем 1 км жерде тұрады. Егер Қуаныш пен Әсем бір көшеде тұратын болса, олардың үйлерінің арақашықтығын табыңдар:

A) 2 км; B) 1 км немесе 3 км; C) 1 км;
D) 3 км; E) 4 км.

10-11-СЫНЫПТАРДАҒЫ АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

Есептеулер

1. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\frac{1}{2\sqrt{30}+11} - \frac{1}{2\sqrt{30}-11}$;
2) $(\sqrt{15} + \sqrt{45})^2 - 30\sqrt{3}$;

3) $\left(\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{-1} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \cdot ((\sqrt{2})^{-1} - (2\sqrt{2})^{-1})^2$;

4) $5^{\log_2 4 - \lg 20 - \lg 5}$;
5) $9^{2-\log_3 4{,}5 - \log_3 2} + \log_3 243$;

6) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[256]{2}$;
7) $\log_9 3 + \frac{\log_3 6}{\log_{18} 3} - \frac{\log_3 2}{\log_{54} 3}$;

8) $\log_6 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2 - \log_6 2$.

2. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = (2x - 1)^2 - 4\sqrt{x^5}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = 3x^{\frac{7}{3}} - 5\sqrt[5]{x^2} + 2x$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = (3x + 4) \cdot e^{2x}$, $x_0 = -1$.

3. Абсциссасы x_0 болатын нүктеде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентінің мәнін табыңдар:

1) $y = e^{2x}$, $x_0 = 2$;
2) $y = \frac{x}{x+1} - \sqrt{6-x}$, $x_0 = 2$;

3) $y = \ln\frac{x}{x+1}$, $x_0 = 3$;
4) $y = e^{2x^2 - x}$, $x_0 = 1$.

4. x_0 нүктесіндегі $f''(x)$ функциясының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = e^{2x-1}$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = \ln 4x$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \sin^2 3x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

5. Берілген аралықта $y = f(x)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $y = xe^x$, $[0; 3]$;
2) $y = x\ln x$, $[2; 3]$;

3) $y = \sqrt{x} - x$, $[0; 4]$;
4) $y = \frac{1}{x} + x$, $[0{,}5; 4]$.

Тепе-тең түрлендірулер

Өрнекті ықшамдаңдар (**6—10**):

6. 1) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} + \frac{\sqrt{a}}{3+\sqrt{a}}\right) \cdot \frac{a + 6\sqrt{a} + 9}{a}$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{y}}{x+y}-\dfrac{2y}{x-y}$.

7. 1) $\left(\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{1+b+a^2}-\dfrac{\sqrt{b}\cdot(\sqrt{1+a^2}-\sqrt{b})^2}{(1+a^2)^2-b^2}\right)^{-1}-10^{\log_{100}(1+a^2)}$;

2) $2^{\log_2 x}+\sqrt{\dfrac{4}{x}-2+\dfrac{1}{4x^{-1}}}+\sqrt{\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{2}}$.

8. 1) $((a^{-\frac{3}{7}}\cdot y^{-0,4})^3\cdot a^{\frac{3}{7}}\cdot y^{0,2})^{-1}$; 2) $((a^{-\frac{2}{7}}\cdot y^{\frac{1}{14}})^{3,5}\cdot y^{\frac{5}{4}}\cdot a^{-1})^{-1}$.

9. 1) $\dfrac{x-y}{x^{0,5}-y^{0,5}}-\dfrac{x^{1,5}-y^{1,5}}{x-y}$; 2) $\dfrac{\sqrt{y}}{x^{0,5}-y^{0,5}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^{0,5}+y^{0,5}}$.

10. 1) $(\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}})^2-2a$; 2) $(\sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}})^2+2\sqrt{y^2-x}$.

Өрнектің мәнін табыңдар (**11-12**):

11. 1) $2\log_{\frac{a^2}{b}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\frac{a^2}{b}}b$, егер $\log_a b=-2$;

2) $\log_{\sqrt{ab}}\left(\dfrac{a}{b}\right)+\log_{a^2b^2}b+\log_{ab}\sqrt{a}$, егер $\log_a b=2$.

12. 1) $\log_7 12$, егер $\log_7 2=a$, $\log_7 3=b$;

2) $\log_{12}14$, егер $\log_7 2=a$, $\log_7 3=b$;

3) $\log_5 60$, егер $\log_5 2=a$, $\log_5 3=b$;

4) $\log_3 1500$, егер $\log_3 5=a$, $\log_3 2=b$.

Функцияның шегі және туындысы

13. Функцияның шегін есептеңдер:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg}2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{4x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{\ln(1+4x^2)}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{\ln^2(1+2x)}$.

14. $y=f(x)$ функциясы үзіліссіз болатындай a параметрінің мәнін табыңдар:

1) $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x\leqslant 2,\\ ax-6, & x>2;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}4+x, & x\leqslant 1,\\ 2x^2-a, & x>1;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{2x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$

15. $f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

1) $f(x) = 2x(|x| - 1)$; 2) $f(x) = x^2|x - 2| + 2x^2$.

16. $f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

1) $f(x) = \sin^2 2x + \cos^2 2x - 2^{2x}$; 2) $f(x) = \sin^3 2x + \cos 3x - e^{2-x}$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{ctg} 3x + e^x$; 4) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x + \arccos x + \sqrt{x}$.

17. $x = 2$ болғанда $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ функциясының екінші туындысының мәнін есептеңдер.

18. $f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

1) $f(x) = \ln\dfrac{2x - 1}{3x + 2}$; 2) $f(x) = \ln\dfrac{(x - 1)^3}{x + 3}$;

3) $f(x) = \ln\dfrac{(x + 3)^4}{(x - 1)^2}$; 4) $f(x) = x + \ln\dfrac{(x - 5)^5}{(x + 1)^4}$.

19. $f'(x) = 0$ болатындай нүктелерді табыңдар:

1) $f(x) = \sqrt{3} + 3x^2 - x^3$; 2) $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{2x}$;

3) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x - 2\pi$; 4) $f(x) = \pi + x + \sin^2 2x$.

Интеграл

20. $y = f(x)$ функциясының координаталар басы арқылы өтетін алғашқы функциясын жазыңдар:

1) $f(x) = 2x - 3$; 2) $f(x) = -3x^2 + 1$;

3) $f(x) = 5 - 3\sin x$; 4) $f(x) = 2\cos x - 3x^2$.

21. Анықталмаған интегралды табыңдар:

1) $\int(2x - 1)^4 dx$; 2) $\int(5 - 2x)^{-3} dx$; 3) $\int\sqrt{\sin x}\cos x dx$;

4) $\int(x + e^{2x})dx$; 5) $\int\sin(2 - 3x)dx$; 6) $\int\cos^2(x - 3)dx$;

7) $\int\dfrac{3}{\cos^2 3x}dx$; 8) $\int\dfrac{2x}{3 + x^2}dx$.

22. Бөліктеп интегралдау әдісімен интегралды табыңдар:

1) $\int(x + 1)e^x dx$; 2) $\int x^5 e^{x^2} dx$; 3) $\int x\sin x dx$;

4) $\int xe^{2x} dx$; 5) $\int x^2 \sin x dx$; 6) $\int x\cos^2\dfrac{x}{2}dx$.

23. Анықталған интегралды есептеңдер:

1) $\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{1 + x^4}$; 2) $\int\limits_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos 5x dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \cdot \sin 2x dx$;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{x + \cos x}dx$; 5) $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x + x^2}$; 6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^x dx$.

24. а) Функциялар графиктерімен шектелген жазық фигураның ауданын есептеңдер:

1) $y = 2^x$, $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = 0$;

2) $y = 2^x - 1$, $y = 0$, $x = 2$, $y = \frac{1}{x^2}$;

3) $y = 3 - x^2$, $y = 1 + |x|$.

ә) Ox осі бойымен айналдырғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін есептеңдер:

1) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 3$;

2) $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$.

Теңдеулер мен теңсіздіктер

25. Теңдеуді шешіңдер:

1) $(x + 1)^{x^2 - x} = (x + 1)^2$;

2) $(x - 1)^{x^2 + x} = (x - 1)^6$;

3) $|x - 3|^{3-x} = |3 - x|^2$;

4) $\log_{x+2}(3x^2 - 12) = 2$;

5) $\log_{5 - x^2}(2x^2 - 8x - 2) = 1 + \log_{5 - x^2}$;

6) $\log_{\frac{x-3}{x+1}} 2 = 1$.

26. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $x^{4x^2} < x$, $x > 0$;

2) $|x + 5|^{x^2 - 4x + 3} > 1$;

3) $\log_{2x-3} x > 1$;

4) $\log_{x^2}(3x + 4) \geqslant 1$.

27. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sqrt{2x - 1} > x - 2$;

2) $\sqrt{x + 1} > x - 1$;

3) $\sqrt{9x - 20} > x$;

4) $\sqrt{14 - x} > 2 - x$;

5) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$;

6) $\sqrt{x^2 - 10x + 24} > x - 4$.

28. 1) $\frac{x - 3}{2} \geqslant \frac{(\sqrt{x - 5})^2}{x - 6}$ теңсіздігінің ең кіші бүтін мәнін табыңдар;

2) $\frac{6 - x}{\sqrt{x^2 - 8x + 7}} \geqslant 0$ теңсіздігінің ең үлкен бүтін мәнін табыңдар;

3) $(x^2 + 2x - 8) \cdot \sqrt{x^2 + x - 2} \leqslant 0$ теңсіздігін шешіңдер;

4) $5^{0,5\log_5^2 x} \geqslant 5 \cdot x^{0,25\log_5 x}$ теңсіздігін шешіңдер.

29. $f'(x) \geqslant 0$ теңсіздігін шешіңдер:

1) $f(x) = \frac{1}{3}\cos3x + \sin x$;

2) $f(x) = 2\sin\frac{1}{2}x - \sqrt{3}x$;

3) $f(x) = 3\cos^2 x + 2\sin^2 x - x$;

4) $f(x) = \sin^2 3x - \frac{1}{12}\cos6x + x$;

5) $f(x) = \arccos3x + 2x + 3$;

6) $f(x) = \operatorname{arcctg}2x + 2x - 1$.

30. $f'(x) = a$ теңдеуін шешіңдер:

1) $f(x) = 3e^{x+4}$, $a = \frac{3}{e}$; 2) $f(x) = 4 + \frac{1}{3}e^{-6x-13}$, $a = -2$;

3) $f(x) = 2e^{-7x+9}$, $a = -14$; 4) $f(x) = 7 - e^{0,1x-3}$, $a = 0,1$.

Функция және оның графигі

31. Функция графигінің асимптоталарын табыңдар:

1) $y = \frac{x-2}{x-1}$; 2) $y = \frac{5-x}{x+3}$; 3) $y = \frac{x^2+5}{x-2}$; 4) $y = \frac{2x^2-x}{x+2}$.

32. Функция графигінің иілу нүктелерінің координаталарын табыңдар:

1) $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$; 2) $y = \frac{2x^2}{x-1}$; 3) $y = \frac{2x^3}{5-x^2}$; 4) $y = 2 - 5x + 2x^3$.

33. Функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар:

1) $y = x^2 + 10x - 10\sqrt{3}$; 2) $y = \lg(x^2 - 4x)$;

3) $y = x^3 - 6x^2 + 9$; 4) $y = xe^x$.

34. 1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ функциясы $x > 2$ болғанда өсетінін;

2) $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ функциясы $x < 0$ және $0 < x < 2$ аралықтарында кемитінін дәлелдеңдер.

35. Абсциссасы $x_0 = 0$ болатын нүктеде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін құрастырыңдар:

1) $y = x - 2\sqrt{x+1}$; 2) $y = \sqrt{3x+1}$;

3) $y = xe^{2x}$; 4) $y = x\ln(x + e)$.

36. Функцияның сындық нүктелерін табыңдар:

1) $f(x) = x - 2\sin x$; 2) $f(x) = x + \cos 2x$;

3) $f(x) = (x + 2)e^{1-x}$; 4) $f(x) = \cos x \cdot e^{2x}$.

37. "Жанды математика" немесе "GeoGebra" бағдарламасын қолданып $f(x)$ функциясының графигін салыңдар және асимптоталарын табыңдар:

1) $y = \frac{\sqrt{x+4}}{x-1}$; 2) $f(x) = x \cdot \ln(x + 2)$.

38. Берілген түзуге параллель болатын $f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

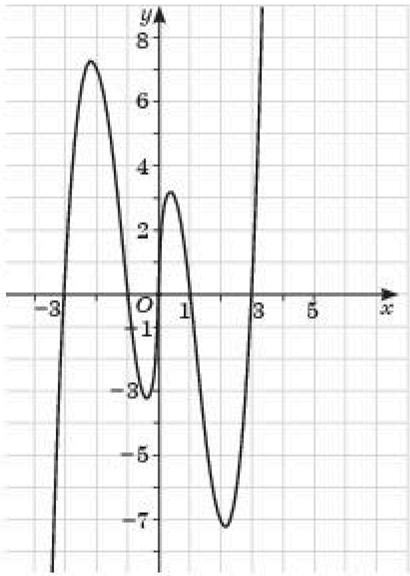
1) $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $y = \frac{3}{4}x + 2$ түзуі;

2) $f(x) = \sqrt{3-2x}$, $y = -x - 6$ түзуі.

39. Функцияны зерттеп, графигін салыңдар:

1) $f(x) = \sin^2 x + \sin x$;
2) $f(x) = \cos^2 x - \cos x$;
3) $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^x$;
4) $f(x) = (x + 1) \cdot \ln x$.

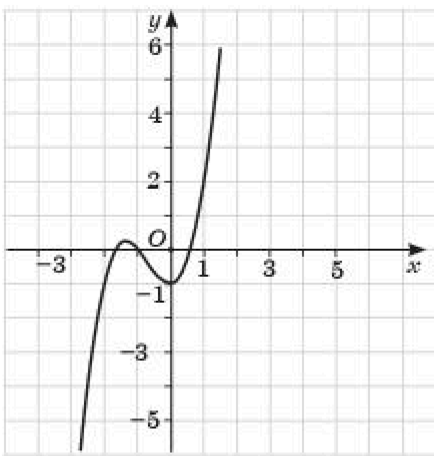
40. $y = f'(x)$ функциясының графигі берілген (74-сурет).



74-сурет

График бойынша:
1) $f'(x)$ мәні 0-ге тең болатын нүктелерді;
2) $f(x)$ функциясы өсетін аралықтарды;
3) $f(x)$ функциясы кемитін аралықтарды;
4) $f(x)$ функциясының минимум нүктелерін табыңдар.

41. $y = f'(x)$ функциясының графигі берілген (75-сурет).



75-сурет

График бойынша:

1) минимум нүктелерін; 2) максимум нүктелерін; 3) функцияның экстремумдарын табыңдар.

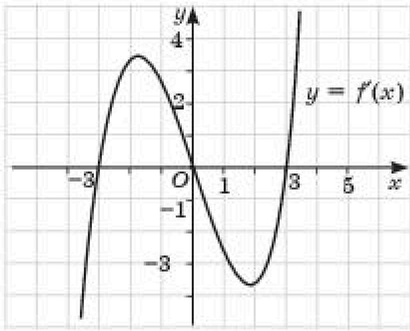
42. Функцияны зерттеңдер және “Жанды математика” немесе “GeoGebra” бағдарламасын қолданып, графигін салыңдар:

1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

3) $y = x + \frac{2}{x}$; 4) $y = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$;

5) $y = (x + 3) \cdot e^{x-1}$; 6) $y = (x^2 + 2x) \cdot \ln x$.

43. $y = f'(x)$ функциясының графигі берілген (76-сурет).



76-сурет

Функцияның максимум нүктелерін және минимум нүктелерін табыңдар.

44. Нүкте түзусызықты $s = 3t^2 - \frac{3}{2}t$ заңымен қозғалады, мұндағы $s(t)$ — метрмен, t — секундпен берілген. Уақыттың $[1; 5]$ аралығының қандай мезетінде жылдамдық ең үлкен мәнге ие болады және жылдамдықтың шамасы қандай?

45. 1) Ұзындығы 120 см сымнан ауданы ең үлкен болатындай тіктөртбұрыш жасау керек. Осы тіктөртбұрыштың қабырғаларының ұзындықтарын табыңдар.

2) Ауданы ең үлкен болатын және периметрі a-ға тең тіктөртбұрыштың қабырғаларының ұзындықтарын табыңдар.

46. 1) Квадраттарының қосындысы ең кіші болатындай 12 санын екі оң қосылғыштарға жіктеңдер.

2) Көбейтіндісінің мәні ең үлкен болатындай 18 санын екі оң қосылғыштарға жіктеңдер.

3) Квадраттарының қосындысы ең кіші болатындай 16 санын екі оң қосылғыштардың көбейтіндісі түрінде жазыңдар.

47. 1) Нүкте түзусызықты $x(t) = t^2 + 2t + 5$ заңымен қозғалады. Нүктенің бес секундтағы жылдамдығын табыңдар.

2) Нүкте түзусызықты $x(t) = 5t + 6t^2 - t^3$ заңымен қозғалады. $t = 2$ с мезетіндегі нүктенің үдеуін табыңдар.

48. Ауданы 800 м^2 болатын тіктөртбұрыш пішінді жер телімі үш жағынан қоршалған. Қоршаудың ұзындығын табыңдар.

49. Ауданы 12,5 м^2 болатын тіктөртбұрыш пішінді терезенің бір жағы жарты дөңгелекті береді. Терезенің периметрі ең кіші болатындай жарты дөңгелектің радиусы қандай болу керек?

50. $f(x) = \sqrt{2 - x}$ функциясының графигіне жүргізілген жанамамен және координаталық осьтермен шектелген үшбұрыштың ауданы ең кіші болу үшін жанама графиктің қандай нүктесінен өтуі керек?

Дифференциалдық теңдеулер

51. Теңдеуді шешіңдер:

1) $y' = \dfrac{x^4 - 2}{x^3}$; 2) $y' = (1 + x^2)(1 + y^2)$;

3) $y' = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2}$; 4) $y\cos y \cdot y' = -2x$.

52. Берілген шартты қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңдар:

1) $x^2y' = -y^2$, $y(-1) = 1$; 2) $(1 + e^x)yy' - 0{,}5e^x = 0$, $y(0) = 0$;

3) $ydx + \operatorname{ctg}xdy = 0$, $y(\frac{\pi}{3}) = -1$; 4) $\cos^2x \cdot \ln ydy = ydx$, $y(\pi) = 1$.

53. Дифференциалдық теңдеуді шешіңдер:

1) $y' - y \cdot \operatorname{ctg}x = \sin x$; 2) $yy' = 1 + 3x\ln x$;

3) $y' - y = e^x$; 4) $(1 + x^2)y' + 4xy = 3$.

54. Тұрақты коэффициенттері бар екінші дәрежелі сызықтық біртекті теңдеуді шешіңдер:

1) $y'' - 5y' - 6y = 0$; 2) $y'' - 2y' - 8y = 0$;

3) $y'' + 3y' - 10y = 0$; 4) $y'' + 4y' - 12y = 0$.

55. 1) Түзусызықты жол бойындағы пойыздың жылдамдығы 72 км/сағ. Егер пойыз тежеле бастағаннан бастап қозғалыстың кедергі күші пойыздың салмағының 0,2-сіне тең болса, онда ол қанша уақыттан кейін және қандай қашықтықта тоқтайды?

2) Координат осьтері арасында орналасқан жанама кесіндісі жанасу нүктесінде екі жартыға бөлінетін болса, онда осы нүкте арқылы өтетін қисықтың теңдеуін жазыңдар.

3) Температурасы 20°C суда дене 10 мин ішінде 100°C-тан 60°C-қа дейін салқындайды. Ньютон заңы бойынша салқындау жылдамдығы дене мен салқындататын ортаның температураларының айырымына пропорционал болса, онда дене қанша уақытта 30°C-қа дейін салқындайды?

Комплекс сандар

56. Амалдарды орындаңдар:
1) $3(2 + 3i) - (3 - 5i)$;
2) $4(1 + 3i) - (2 + 5i)$;
3) $(2,1 - i) - (3,1 - 5i)$;
4) $6(2 + 3i) - 2(2 + 5i)$.

57. Комплекс сандарға амалдар қолданыңдар:
1) $(2 + 3i)(3 - i)$;
2) $(1 - 3i)(3 - 2i)$;
3) $(1 - 2i)^2$;
4) $(2 - i)^2 + 5i$.

58. Комплекс сандар түйіндес болатындай x және y-тің нақты мәндерін табыңдар:
1) $5 - yi$ және $x + 2i$;
2) $3 + 2yi$ және $2x + 4i$.

59. Өрнекті көбейткіштерге жіктеңдер:
1) $25 + 9x^2$;
2) $4x^2 + 16y^2$;
3) $x^2 - 4x + 5$;
4) $x^2 - 6x + 25$.

60. Берілген бір түбірі бойынша коэффициенттері нақты сандар болатын квадрат теңдеуді құрастырыңдар:
1) $2i$;
2) $2 - i$;
3) $3 - 2i$;
4) $-2 + 4i$.

Комбинаторика және ықтималдық теориясының элементтері

61. 1) 2, 6, 7 цифрларынан 10 000 санынан кіші қанша сан құрастыруға болады? Олардың қаншасы тақ?
2) 4, 5, 9 цифрларынан 10 000 санынан кіші қанша сан құрастыруға болады? Олардың қаншасы жұп?

62. 1) 3, 5, 5, 7 цифрларын мүмкін болатын алмастыруларды қолдану арқылы құрастырылған төрттаңбалы сандардың қосындысының мәнін табыңдар;
2) 3, 3, 4, 8 цифрларын мүмкін болатын алмастыруларды қолдану арқылы құрастырылған төрттаңбалы сандардың қосындысының мәнін табыңдар.

63. 20 заттың төртеуінде ақау бар. Барлық заттарды сапаға тексеру үшін олардың арасынан кездейсоқ үшеуі алынады. Таңдалған заттар құрамында ақауы бар заттар санының таралу қатарын құрастырыңдар.

64. 1) Цифрлары қайталанбайтындай 2, 3, 4 цифрларынан қанша үштаңбалы сан құрастыруға болады?
2) Цифрлары қайталанбайтындай 0, 2, 3, 5 цифрларынан қанша үштаңбалы сан құрастыруға болады?
3) 100 сыйлық жиынтығының елуінде кәмпит, қырық бесінде алма, отыз бесінде мандарин, жиырмасында кәмпит, алма және мандарин, жиырма бесінде кәмпит және алма, он бесінде алма және мандарин бар. Кәмпит пен мандарин бар жиынтықтар санын табыңдар.

65. Теңдеуді шешіңдер:

1) $C_{2n+1}^{n-1} : C_{2n}^{n+1} = 1\frac{2}{3}$; 2) $A_{2x}^{x-1} : A_{2x}^{x+1} = \frac{1}{30}$; 3) $C_n^3 : A_n^2 = 2$.

66. $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ формуласын қолданып, өрнектің мәнін табыңдар:

1) $1{,}02^8$; 2) $1{,}002^{15}$; 3) $0{,}998^{10}$; 4) $0{,}97^{11}$.

67. 200 лотерея билетінің 25-інде ұтыс бар. Бір билет сатып алынған. Сатып алынған билетте: 1) ұтыс болуының; 2) ұтыс болмауының ықтималдығын табыңдар.

68. 200 лотерея билетінің 20-сында ұтыс бар. Бес билет сатып алынған. Сатып алынған билеттердің екеуінде ұтыс болуының ықтималдығын табыңдар.

69. 1) Оталдыру барысында қозғалтқыштың іске қосылуының ықтималдығы 0,95. Мәшинені жүргізу үшін үштен артық оталдырудың ықтималдығын табыңдар.

2) Жеті парақшада *а, а, б, е, г, р, л* әріптері жазылған. Әріптерді біртіндеп алып, бірінен соң бірі қойылды. Шыққан сөздің "алгебра" сөзі болуының ықтималдығын табыңдар.

70. 1) Радиусы 4 см-ге тең дөңгелекте нүкте белгіленген. Белгіленген нүктенің радиусы 2 см болатын іштей сызылған дөңгелекке тиісті болмауының ықтималдығын табыңдар.

2) $[-3; 11]$ аралығынан кездейсоқ бір сан алынған. Алынған сан $x^2 - 5x - 6 < 0$ теңсіздігінің шешімі болуының ықтималдығын табыңдар.

3) $[-4; 11]$ аралығынан кездейсоқ бір сан алынған. Алынған сан $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ теңсіздігінің шешімі болуының ықтималдығын табыңдар.

4) $[-3; 10]$ аралығынан кездейсоқ бір бүтін сан алынған. Алынған сан $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ теңсіздігінің шешімі болуының ықтималдығын табыңдар.

Практикаға бағытталған тапсырмалар

71. Егер мәшинеге оқушыларды алтыдан отырғызса, онда төрт оқушыға орын жетпейді, ал егер жетіден отырғызса, онда үш орын бос қалады. Барлығы қанша оқушы және мәшинелердегі орындар саны қанша?

72. Төрт адамнан тұратын жанұя Алматы қаласына жиналды. Алматыға пойызбен немесе өз көлігімен баруға болады. Бір адамға пойыз билеті 3460 тг. Көлік әрбір 100 км жолға 11 л бензин жұмсайды. Жолдың ұзындығы 600 км, 1 л бензин 176 тг тұрады.

1) Төрт адам Алматыға көлікпен барып-қайту үшін кем дегенде қанша теңге жұмсалады?

2) Жанұя пойызбен баратын болса, онда жолға қанша теңге жұмсайды және көлікке қарағанда қаншаға артық болады?

73. Думан "Алгебра және анализ бастамалары" оқулығын ашқанда сол және оң жақ беттерінің нөмірлерінің қосындысы 49-ға тең болатынын байқады. Осы нөмірлердің көбейтіндісі неге тең?

74. 1) Оқушы мектеп асханасында күнделікті тамаққа ботқа, бір стақан шәй немесе алма шырыны және бір тәтті нан алады. Ботқа 650 тг, тәтті нан 55 тг, шай 35 тг, алма шырыны 165 тг тұрады. Оқушының қалалық көлікке төлейтін бағасы 40 тг.

1) Күніне оқушыға қанша теңге керек?

2) Мектепте бес күндік оқу. Егер жанұяда екі бала және олар үш күн шай, екі күн алма шырынын алатын болса, онда ата-ана әр балаға қанша теңгеден беруі керек?

3) Егер жанұяда екі бала болса, онда бір аптадағы шығыс қанша теңгені құрайды?

75. Әлия азық-түлік пен олардың мөлшерін кестеге жазды. Бес дүкендегі әр азық-түліктің бір килограмының бағаларын кестеге енгізген.

1) Қай дүкеннен азық-түлік алған тиімді және қанша теңге кетеді?

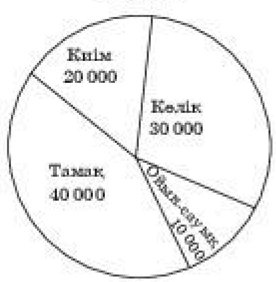
2) Қай дүкенде азық-түлік бағалары қымбат және қанша теңге артық?

38-*кесте*

	1	2	3	4	5
Шұжық (200 г)	1250	1280	1250	1200	1300
Қызанақ (2 кг)	590	540	570	590	560
Қияр (1 кг)	660	670	720	680	700
Картоп (2 кг)	120	140	110	130	130
Сәбіз (0,5 кг)	90	100	80	100	90

76. Гимназияның қоғамдық-гуманитарлық бағытындағы сыныбында оқушылар неміс, француз және ағылшын тілдерін оқиды. Ағылшын тілін барлық оқушылар, неміс тілін 22 оқушы, француз тілін 13 оқушы, неміс және француз тілдерін 9 оқушы оқиды. Сыныпта қанша оқушы бар?

77. 77-суретте Дәулеттің теңгемен алынған шығысы көрсетілген. Дәулет көлікке жалпы шығыстың қанша пайызын жіберген?



77-сурет

Олимпиадалық есептер

78. Кез келген a, b, c оң сандары үшін $a(1 - b) > \frac{1}{4}$; $b(1 - c) > \frac{1}{4}$; $c(1 - a) > \frac{1}{4}$ теңсіздігі ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

***79.** Егер $a > 0$, $b > 0$, $ay + bx > 0$ және $x \neq y$ болса, онда $\frac{(a + b)xy}{ay + bx} < \frac{ax + by}{a + b}$ теңсіздігі ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

80. Егер $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$ болса, онда $\frac{a + c}{a - c} + \frac{b + c}{b - c} = -2$ болатынын дәлелдеңдер.

81. Мұғалім бір парақ қағазға 100 санын жазды. Сыныптағы 25 оқушының әрқайсысы жазылған санға 1-ді қосады немесе 1-ді азайтады. Нәтижесінде 80 саны шығуы мүмкін бе?

***82.** $n! < \left(\frac{n + 1}{2}\right)^n$, $n \geq 2$ теңсіздігін шешіңдер.

***83.** 1) a параметрінің қандай нақты мәндерінде $(a - 2)\sin 2x - 3 > 0$ теңсіздігі x-тің барлық нақты мәндерінде ақиқат болады?

2) a параметрінің қандай нақты мәндерінде $(a - 1)\cos(x - 2) < 2$ теңсіздігі x-тің барлық нақты мәндерінде ақиқат болады?

***84.** a параметрінің қандай нақты мәндерінде $\log_{3x^2+2}(x^2 - 3x + 7) \geq 1$ теңсіздігінің шешімі $(x + 1)^2 - 4a^2(x + 1) + 3a^4 \geq 0$ теңсіздігінің де шешімі болады?

85. $\log_{x+1}\log_3\log_{x+2}(x^3 + 10x^2 + 8x - 1) = 0$ теңдеуін шешіңдер.

86. a параметрінің қандай нақты мәндерінде $\log_{a-3}(|x| + 4) \geq 2$ теңсіздігі x-тің барлық нақты мәндерінде ақиқат болады?

87. Геометриялық мағынасын қолданып, анықталған интегралды есептеңдер:

1) $\int_0^2 ||x - 1| - 1|\,dx$; 2) $\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}\,dx$; 3) $\int_3^6 \sqrt{6x - x^2}\,dx$.

ГЛОССАРИЙ

Анықталған интеграл	$\int_a^b f(x)dx$ өрнегі a-дан b-ға дейінгі $f(x)$ функциясының *анықталған интегралы* деп аталады
Анықталмаған интеграл	$f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының жиынтығы $F(x) + C$ берілген $f(x)$ функциясының *анықталмаған интегралы* деп аталады
Алғашқы функция	Кез келген X жиынында өзгеретін x үшін $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда берілген жиында $f(x)$ функциясы үшін $F(x)$ функциясы *алғашқы функция* деп аталады
Бас жиын	Зерттеуге жататын барлық объектілердің немесе бір объектіге бірдей жағдайларда жүргізілетін барлық бақылаулардың мүмкін болатын нәтижелерінің жиынтығы *бас жиын* деп аталады
Дәрежелік функция	$y = x^r$ түрінде берілген функция *дәрежелік функция* деп аталады. Мұндағы x — тәуелсіз айнымалы, r — кез келген рационал сан
Дененің көлемін табу формуласы	$V = \pi\int_a^b y^2dx$ — *дененің көлемін табу формуласы*
Дискретті вариациялық қатар	*Дискретті вариациялық қатар* деп сәйкес келетін жиіліктері немесе бөлінділері бойынша варианталардың бөліну жиынтығын айтады
Дифференциалдық теңдеу	Аргументті, осы аргументтің белгісіз функциясын және осы функцияның туындысын байланыстыратын теңдеулер *дифференциалдық теңдеулер* деп аталады
Дифференциалдық теңдеудің реті	Дифференциалдық теңдеуге кіретін туындының ең үлкен ретін *дифференциалдық теңдеудің реті* деп атайды
Дифференциалдық теңдеудің шешімі	*Дифференциалдық теңдеудің шешімі* деп тәуелсіз y айнымалының орнына $y = f(x)$-ті қойғанда ақиқат теңдікті беретін $y = f(x)$ дифференциалданатын функциясын айтады
e саны	$e = 2,7182818289...$
Жорамал сан	Егер комплекс санның нақты бөлігі нөлге тең болса, яғни $x = \mathrm{Re}\ z = 0$ болса, онда комплекс сан *жорамал сан* деп аталады
Интегралдау	Анықталмаған интегралдың мәнін табу операциясы функцияны *интегралдау* деп аталады
Иррационал теңдеу	*Иррационал теңдеу* деп айнымалысы түбір таңбасының ішінде немесе бөлшек көрсеткішті дәреженің негізі болатын теңдеуді айтады
Иррационал теңдеулер жүйесі	Құрамында иррационал теңдеуі бар жүйені *иррационал теңдеулер жүйесі* деп атайды
Иррационал теңсіздік	Айнымалысы түбір таңбасының ішінде немесе бөлшек көрсеткішті дәреженің негізі болатын теңсіздікті *иррационал теңсіздік* деп атайды

Интервалды вариациялық қатар	*Интервалды вариациялық қатар* деп кездейсоқ шаманың мәндерін сәйкес жиіліктерімен немесе олардың әрқайсысына шама мәндерінің түсу жиіліктерімен түрленудің реттелген интервалдарының жиынтығын айтады
Комплекс сан	*Комплекс сандар* деп $z = x + iy$ түріндегі сандарды айтады. Мұндағы x, y — нақты сандар, i саны $i^2 = -1$ қатынасын қанағаттандыратын — жорамал сан
Комплекс санның алгебралық түрі	$z = x + iy$ түрінде жазылған комплекс сан өрнегі *комплекс санның алгебралық түрі* болып табылады
Қисықсызықты трапеция	Үзіліссіз теріс емес $y = f(x)$ функциясының графигімен, Ox осімен және $x = a$, $x = b$ түзулерімен шектелген жазық фигура *қисықсызықты трапеция* деп аталады
Көрсеткіштік теңдеу	Айнымалысы дәреженің көрсеткішінде болатын теңдеуді *көрсеткіштік теңдеу* деп атайды
Көрсеткіштік теңсіздік	Айнымалысы дәреженің көрсеткішінде болатын теңсіздікті *көрсеткіштік теңсіздік* деп атайды
Көрсеткіштік функция	$y = a^x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$ түрінде берілген функция *көрсеткіштік функция* деп аталады
Санның логарифмі	Оң және 1-ден өзгеше a негізі бойынша b оң *санының логарифмі* деп b саны алынатындай a саны шығарылатын дәреженің көрсеткішін айтады
Логарифмдік теңдеу	Айнымалысы логарифм белгісінің ішінде немесе логарифмнің негізінде болатын теңдеу *логарифмдік теңдеу* деп аталады
Логарифмдік теңсіздік	Айнымалысы логарифм таңбасының ішінде немесе логарифмнің негізінде болатын теңсіздікті *логарифмдік теңсіздік* деп атайды
Логарифмдік функция	Көрсеткіштік функцияға кері функция *логарифмдік функция* деп аталады
Натурал логарифм	Негізі e болатын санның логарифмі *натурал логарифм* деп аталады
Ньютон-Лейбниц формуласы	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
n-ші дәрежелі арифметикалық түбір	a санының *n-ші дәрежелі арифметикалық түбірі* деп n-ші дәрежесі a-ға тең теріс емес b санын айтады
n-ші дәрежелі түбір	a санының *n-ші дәрежелі түбірі* деп n-ші дәрежесі a санына тең болатын b санын айтады
Ондық логарифм	Негізі 10 болатын санның логарифмі *ондық логарифм* деп аталады
Өзара тең комплекс сандар	Екі комплекс санның нақты бөліктері және жорамал бөліктері тең, яғни $x_1 = x_2$ және $y_1 = y_2$ болса, онда $z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сандары *өзара тең* деп аталады

Жалғасы

Рационал көрсеткішті дәреже	a оң санының $\frac{m}{n}$ (мұндағы $\frac{m}{n}$ — қысқартылмайтын бөлшек) *рационал көрсеткішті дәрежесі* деп a^m санынан алынған n-ші дәрежелі түбірдің мәнін айтады
Таңдама	Бас жиыннан кездейсоқ түрде іріктелген объектілер жиынтығы немесе объектіні бақылау нәтижелерінің жиынтығы *таңдама жиынтық* немесе *таңдау* деп аталады
Таңдама көлемі	Таңдамадағы объектілер немесе бақылаулар саны *таңдама көлемі* деп аталады
Түйіндес комплекс сандар	$z = x + iy$ және $\bar{z} = x - iy$ түріндегі комплекс сандар *өзара түйіндес комплекс сандар* деп аталады

ЖАУАПТАРЫ

10-СЫНЫПТЫҢ АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1. 1) $\frac{5\pi}{12}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}$; 4) $-\frac{5\pi}{4}$. **2.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{9\pi}{14}$; 5) $-\frac{\pi}{3}$; 6) $7-2\pi$; 7) $\frac{5\pi}{2}-8$; 8) $4\pi-12$. **3.** 1) $\frac{3\sqrt{2}}{2}+8$; 2) -18; 3) -3; 4) 2. **4.** 1) 3; 2) $-\frac{7}{18}$. **5.** 1) 9; 2) 16; 3) -18. **6.** 1) $y_{\text{ең үлкен}}(3)=0$; $y_{\text{ең кіші}}(2)=-25$; 2) $y_{\text{ең үлкен}}(3)=596$; $y_{\text{ең кіші}}(2)=58$; 3) $y_{\text{ең кіші}}(4)=-2$; $y_{\text{ең үлкен}}(0)=0$; 4) $y_{\text{ең кіші}}(1)=2$; $y_{\text{ең үлкен}}(4)=4{,}25$. **7.** 1) $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2x}}$; 2) $f'(x)=6\sin^2 2x\cdot\cos 2x-3\sin 3x+\frac{2}{x^2}$; 3) $f'(x)=4\operatorname{tg}2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}-\frac{3}{\sin^2 3x}$; 4) $f'(x)=\frac{2}{1+4x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 5) $f'(x)=\frac{7}{(3x+2)^2}+3$; 6) $f'(x)=\sin 2x+2x\cos 2x-\frac{3}{2\sqrt{2-3x}}$. **8.** $\frac{\sqrt{5}}{25}$. **9.** 1) 0; 2; 2) -1; 0; 1; 3) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$. **10.** 1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) -3. **11.** 1) 6; 2) 0; 3) $[-6;-3]\cup[1;2]$. **12.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$; 2) $\varnothing$; 3) R; 5) $\varnothing$; 6) R. **13.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{4}+0{,}5\pi n$, $n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **14.** 1) $\left\{\pm\arccos\frac{1}{4}+(2n\mp1)\pi, n\in Z\right\}$; 3) $\left\{\frac{\pi n}{5}, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z\right\}$; 5) $\{-1;3\}$; 6) $\varnothing$; 7) $\{0;3\}$; 8) $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$; 9) $\left\{-1; \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$; *Нұсқау:* $y=x+\frac{1}{x}$ алмастыру енгізіледі, сонда $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$; 10) $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}; 2\pm\sqrt{6}\right\}$.
15. 1) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; 2) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$; 3) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$.
16. 1) $y=1$, $x=2$; 2) $y=-3$, $x=-3$; 3) $x=2$, $y=x+2$; 4) $x=-1$, $y=x-3$. **17.** 1) $M(0;0)$; 2) иілу нүктелері жоқ; 3) $M(0;0)$; 4) $M(0;4)$. **18.** 1) $(-\infty;-1)$, $(-1;+\infty)$ — өседі; кему аралықтары жоқ; 2) өсу аралықтары жоқ, $(-\infty;-3)$, $(-3;3)$, $(3;+\infty)$ — өседі; 3) $(-\infty;-5)$, $(-5;5)$, $(5;+\infty)$ — өседі; кему аралықтары жоқ; 4) $(-\infty;-2)$; $(-2;0]$ — кемиді; $[0;2)$, $(2;+\infty)$ — өседі. **19.** а) 1) $y=2{,}5x+1$; 2) $y=1{,}5x+1$; 3) $y=-\frac{1}{4}x+1{,}5$, $y=4x+1{,}5$; 4) $y=\frac{1}{2}x+1$. ә) 1) $y=\frac{3}{4}x+1\frac{1}{4}$; 2) $y=-x+2$. **20.** 1) $\approx\pm2$; 2) -3 және 0; 3) $M(-1;-3{,}8)$, $T(1;-3{,}8)$; 4) -7; -2; -1. **21.** *min* — (-3); 3, *max* — 0. **23.** $t=8$ с, $\upsilon=63{,}5$ м/с. **24.** 1) $a=60$ м; 2) 30 см. **25.** 150 м; 300 м. **26.** 384 м^2. **27.** 4 см; 2 см. **28.** 1) 22; 22; 2) 49; 49. **29.** $K(-2;2)$ немесе $K(2;2)$. **30.** 1) $a=-2$; 2) $a=1$. **31.** z^4-3z^2-4z-8 — бөлінді; (-9) — қалдық. **32.** 1) $(y-3)(y+3)(y-1)(y+1)$; 2) $(y-2)(y+2)(y+3)$; **33.** 1) $a=-1$; $c=-4$; 2) $a=4$; $c=3$. **34.** 1) -1; 2,5; 2) 2; 3. **35.** 1) -4; 2) 42. **36.** 1) $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$; *нұсқау*: теңдеудің екі жақ бөлігінде $y^3\neq0$ бөлу және топтау; одан кейін $z=y+\frac{1}{y}$ алмастыруын енгізу керек. Сонда $y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$; 2) $\varnothing$. **37.** 1) $3\cdot3\cdot4=36$; 2) 24; 3) 27.

38. 1) 15; 2) 14. **39.** 1) $27 \cdot C_6^3 = 540$; 2) 2835. **40.** 1) $\frac{C_4^2}{C_6^2} = 0,4$; 2) $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$ $= 0,99 \cdot 0,99 \cdot 0,98 = 0,990\ 498$. **41.** 1) $\frac{10}{200} \cdot \frac{9}{199} \cdot \frac{8}{198} = \frac{1}{55 \cdot 199} = \frac{1}{10\,945}$; 2) $\frac{10}{200} \cdot \frac{190}{199} + \frac{90}{200} \cdot \frac{10}{199} = \frac{19}{2 \cdot 199} + \frac{9}{2 \cdot 199} = \frac{14}{199}$. **42.** 1) 40; 2) 24 с — 33 с; 3) 27; 4) 13. **43.** 1) 1 450 000 тг; 2) Y, 1 695 000 тг. **45.** 4. **46.** 1) 600 000 тг; 2) 24%. **47.** 1) 220 тг немесе 235 тг; 2) 2260 тг. **48.** 1) 13 көк шар; 2) 11 шар. **49.** $y = x^2 - 3$, $y(10) = 97$. **50.** 1) 850 см^3; 2) 2550 см^3; 3) 10 см-ге.

I тарау. Алғашқы функция және интеграл

1.1. 1) $1,5x^2 + C$; 2) $\frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$; 3) $\frac{x^4}{12} + x + C$; 4) $-\frac{1}{x} + C$. **1.2.** 1) $-2\cos x + C$; 3) $3\sin x + 4\cos x + C$; 4) $-5\cos x + 2\sin x + C$; 5) $\frac{x^8}{8} + 6\sqrt{x} + C$; 6) $\frac{x^4}{4} - 8\sqrt{x} + C$; 7) $-\frac{1}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + C$; 8) $\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + C$. **1.3.** 1) $\frac{1}{2}x^6 + 7\sqrt{x} + C$; 2) $\frac{3}{5}\sin 5x + \frac{1}{x} + C$; 3) $-8\cos x + \operatorname{ctg} 2x + C$; 5) $-\frac{1}{2x^6} - 7\operatorname{tg} x + C$. **1.5.** 1) $\frac{x^2}{2} + x + 3$; 2) $\frac{x^2}{2} + 4x + 9$; 3) $-\cos x + 1$; 4) $\sin x - 1$. **1.6.** 1) $-\frac{1}{x}$. **1.8.** 3) $\frac{1}{2}\sin 2x - \sqrt{2x-3} + 2x + C$; 4) $-\sqrt{5-3x} - \frac{1}{5}\cos 5x + x + C$. **1.11.** 1) $\frac{(x-1)^4}{4} + C$; 2) $-\frac{1}{6}(1 - 2x)^3 + C$. **1.12.** 1) $\frac{x^2}{2} - \operatorname{tg} x + 1$. **1.14.** 2) $x^5 - x^4 - x^2 + 5$; 3) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x + 1$. **1.15.** 1) $\frac{1}{4}\sin(4x - 5) - \frac{1}{3}x^{-6} + 3x + C$; 2) $\cos(2 - x) + \frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + C$; 4) $\sqrt{2x} + 1,5\operatorname{ctg} 2x - 0,5x^2 + C$. **1.20.** 1) $(-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$; 2) R; 3) $(-\infty; -3] \cup [1; 4)$; 4) $[-4; -1) \cup (1; 4]$. **1.21.** 1) $10(2x - 7)^4 + 8x$; 2) $12(3x^2 - 5x)^3(6x - 5) - 6x^5$; 3) $2 + 3\sin 6x$; 4) $-3\sin 6x - 3x^2$. **2.1.** 1) $\frac{(1+x)^6}{6} - \frac{(1+x)^5}{5} + C$; 2) $\frac{(x-3)^7}{7} + \frac{(x-3)^6}{2} + C$. **2.2.** 1) $2\sin\sqrt{x} + C$; 2) $-10\cos\sqrt{x} + C$. **2.3.** 1) $x\sin x + \cos x + C$; 2) $-2x\cos x + 2\sin x + C$. **2.4** 1) $\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$; 2) $-\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C$. **2.5.** 1) $\frac{(2x-1)^9}{36} + \frac{(2x-1)^8}{32} + C$; 2) $\frac{(3x+1)^{10}}{90} - \frac{(3x+1)^9}{81} + C$. **2.6.** 1) $\frac{2}{5}\sqrt{(4+x)^5} - \frac{8}{3}\sqrt{(4+x)^3} + C$; 2) $\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} + 2\sqrt{(x-3)^3} + C$. **2.7.** 1) $\frac{x^2}{4}\sin 4x + \frac{x}{8}\cos 4x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$; 2) $x\sin(x + 2) + \cos(x + 2) + C$; 3) $-\frac{1}{2}(x^2 - 3x)\cos 2x + \frac{1}{4}(2x - 3) \cdot \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$. **2.8.** 1) $\frac{\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$; 2) $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$. **2.9.** 1) $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$; 2) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$. **2.10.** 1) $0,5 \cdot (x^2 - 1) \cdot \arcsin x + \frac{\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}}{4} + C$; 2) $0,5 \cdot (x^2 - 1) \cdot \arccos x - \frac{\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}}{4} + C$. **2.11.** 1) $\frac{\pi x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + C$. 2) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} 2x - \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} 2x + C$. **2.13.** 1) R; 2) $[-0,5; 0,5]$; 3) $[1; +\infty)$; 4) 1. **2.14.** 1) $5\operatorname{tg}^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 2x^{-3}$; 2) $-2\sin 4x - 2$; 3) $3x^2\sin 2x + 2x^3\cos 2x$; 4) $2x(x^{-2} - 1)\sin 2x^2 - 2x^{-3}\sin^2 x^2$. **3.1.** 1) $2\frac{1}{3}$ кв. бірл. **3.2.** 3) $\sqrt{3}$ кв. бірл. **3.3.** 2) 4 кв. бірл. **3.4.** 2) $10\frac{2}{3}$ кв. бірл.

3.5. 1) $\sqrt{2}$ кв. бірл. **3.6.** 1) $\frac{1}{12}$ кв. бірл. **3.7.** 1) $20\frac{1}{4}$ кв. бірл; 7) 8 кв. бірл; 8) $21\frac{3}{32}$ кв. бірл. **3.9.** 1) $15\frac{1}{3}$ кв. бірл. **3.12.** 1) 24,5 кв. бірл; 2) 36 кв. бірл. **3.13.** 1) $4\frac{2}{3}$ кв. бірл; 2) $2\sqrt{3}$ кв. бірл.; 3) 54 кв. бірл. **3.17.** 1) $\frac{2}{1+4x^2} - x^{-2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}$; 3) $\frac{\sin x}{\cos^2 x} - 1$; 4) $\frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2} - \frac{1}{3x^2}$. **4.1.** 1) −20; 2) 21; 3) 28. **4.3.** 1) $\frac{\pi-2}{4}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) 2. **4.4.** 1) $\frac{1}{6}$. **4.5.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4.6.** 1) $-\frac{15}{8}$; 4) $\frac{31}{35}$. **4.7.** 1) 10; 4) 24. **4.9.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) $-\frac{2}{3}$. **4.12.** 1) $-\frac{4}{5}$. **4.13.** 1) 119,25; 4) $\frac{10}{81}$. **4.14.** 4) −3,5. **4.15.** 4) (−3; 3,5). **4.16.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) 2. **4.17.** 1) π; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) π.

4.18. 1) $f'(x) = \begin{cases} 4x, & x > 3, \\ -2x, & x < 3; \end{cases}$ 2) $f'(x) = \begin{cases} 5-2x, & x > 2, \\ \frac{1}{2\sqrt{2-x}}, & x < 2. \end{cases}$ **4.20.** 1) $F(x) = x^2 + 1,5x^4 + C$; 2) $F(x) = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(2x+1)^3} - x^4 + C$; 3) $F(x) = 2\sin 3x - 2x^2 + C$; 4) $F(x) = -\cos 2x - x^2 + C$.

5.1. 1) 9 кв. бірл; 2) 8 кв. бірл. **5.3.** 1) $\frac{8}{3}$ кв. бірл; 4) $\frac{1}{9}$ кв. бірл. **5.5.** 1) $\frac{8}{3}$ кв. бірл. **5.6.** 1) ≈2,59 кв. бірл; 2) ≈2,66 кв. бірл. **5.7.** 1) $\frac{32\pi}{5}$ куб бірл. **5.9.** 2) $\frac{4}{27}$ кв. бірл. **5.10.** 1) 4,5 кв. бірл. **5.13.** 2) $\frac{1}{3}$ кв. бірл. **5.14.** $\frac{2\pi}{3}$ куб бірл. **5.15.** $8R + \frac{16}{3}a$. **5.17.** $\frac{4}{3}$ кв. бірл. **5.18.** $\frac{4}{3}$ кв. бірл. **5.20.** 5π куб. бірл. **5.24.** 0,5 кв. бірл. **5.25.** 2 : 7. **5.26.** 1) 324 т; 2) $\frac{a+2b}{6}h^2$ т. **5.29.** 1) $y_{\text{ең үлкен}} = -\frac{2}{7}$; $y_{\text{ең кіші}} = -\frac{4}{31}$; 2) $y_{\text{ең үлкен}} = 2$; $y_{\text{ең кіші}} = -2$. **5.30.** 1) $\frac{9\pi}{4}$; 2) 2π; 3) 2π; 4) $\frac{\pi}{4}$. *Нұсқау*. 4) Интеграл астындағы функцияны келесідей белгілейміз: $y = \sqrt{2x - x^2}$. Бұдан $y^2 = 2x - x^2$, мұндағы $y > 0$, немесе $x^2 - 2x + y^2 = 0$. Енді теңдеудің екі жақ бөлігіне 1 санын қосып, екімүшенің квадратын айырамыз. $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$ немесе $(x-1)^2 + y^2 = 1$, мұндағы $y > 0$. Шыққан теңдеу радиусы 1-ге тең және центрі $A(1; 0)$ нүктесі болатын шеңбер, мұндағы $y > 0$. Интегралдау шектері 1-ден 2-ге дейін болғандықтан бұл радиусы 1-ге тең дөңгелектің төрттен бір бөлігін береді. Демек, $\int_1^2 \sqrt{2x - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

II тарау. Математикалық статистиканың элементтері

6.1. $n = 25$;

Варианта	1	2	3	4	5
Вариантаның жиілігі	6	4	6	5	4
Салыстырмалы жиілік	0,24	0,16	0,24	0,2	0,16

6.2. $n = 25$;

Варианта	4	5	6	7	8	9
Вариантаның жиілігі	5	5	3	0	7	7
Салыстырмалы жиілік	0,2	0,2	0,12	0	0,28	0,2
%-бен берілген жиілік	20%	20%	12%	0	28%	20%

6.3. 1) 3; 4; 5, таңдау көлемі — 50.

2) Жиіліктің таралу кестесін құрамыз, сосын салыстырмалы жиіліктердің пайызбен алынған вариациялық қатарын құрастырамыз.

Варианта	2	3	4	5	Барлығы: 4
Вариантаның жиілігі	3	20	22	5	Қосындысы: 50
Салыстырмалы жиілік	0,06	0,40	0,44	0,1	Қосындысы: 1

6.4. 1) 3; 4; 5, таңдау көлемі — 50.

2) Жиіліктің таралу кестесін құрамыз, сосын салыстырмалы жиіліктердің пайызбен алынған вариациялық қатарын құрастырамыз.

Варианта	3	4	5	Барлығы: 4
Вариантаның жиілігі	20	23	7	Қосындысы: 50
Салыстырмалы жиілік	0,40	0,46	0,14	Қосындысы: 1
%-бен берілген жиілік	40%	46%	14%	Қосындысы: 100%

6.5. 1) $n = 25$; 2) $n = 30$.

6.6. 1) 54;55; 56; 57; 58; 59; 60, таңдау көлемі – 25.

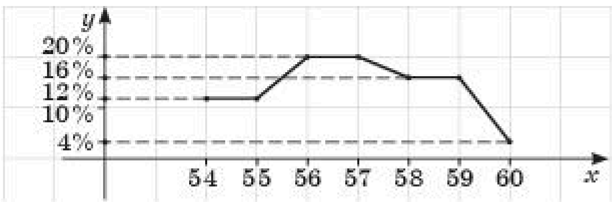
2) Жиіліктің таралу кестесін құрамыз, сосын салыстырмалы жиіліктердің пайызбен алынған вариациялық қатарын құрастырамыз.

Варианта	54	55	56	57	58	59	60	Барлығы: 7
Вариантаның жиілігі	3	3	5	5	4	4	1	Қосындысы: 25
Салыстырмалы жиілік	0,12	0,12	0,2	0,2	0,16	0,16	0,04	Қосындысы: 1
%-бен берілген жиілік	12	12	20	20	16	16	4	Қосындысы: 100%

Салыстырмалы жиіліктердің вариациялық қатары: 0,04; 0,12; 0,16; 0,2.

3) Пайызбен берілген салыстырмалы жиіліктердің вариациялық қатары: 4%; 12%; 16%; 20%.

4) Пайызбен берілген салыстырмалы жиіліктердің полигоны (үлестіру көпбұрышы) 78-суретте берілген.



78-сурет

6.7. 1) 56; 57; 58; 59; 60; 61; 62, таңдау көлемі — 25.

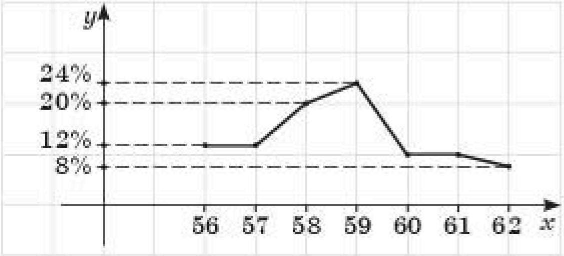
2) Жиіліктің таралу кестесін құрамыз, сосын салыстырмалы жиіліктердің пайызбен алынған вариациялық қатарын құрастырамыз.

Варианта	56	57	58	59	60	61	62	Барлығы: 7
Вариантаның жиілігі	3	3	5	6	3	3	2	Қосындысы: 25
Салыстырмалы жиілік	0,12	0,12	0,2	0,24	0,12	0,12	0,08	Қосындысы: 1
%-бен берілген жиілік	12	12	20	24	12	12	8	Қосындысы: 100%

Салыстырмалы жиіліктердің вариациялық қатары: 0,08; 0,12; 0,2; 0,24.

3) Пайызбен берілген салыстырмалы жиіліктердің вариациялық қатары: 8%; 12%;20%; 24%.

4) Пайызбен берілген салыстырмалы жиіліктердің полигоны (үлестіру көпбұрышы) 79-суретте берілген.



79-сурет

6.8. 1) $x + \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$; 2) $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x-1} + C$; 3) $-\frac{x^{-2}}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + C$; 4) $x^2 - \frac{\operatorname{tg} 2x}{2} + C$.

6.9. 1) Жұп; 2) жұп; 3) жұп та емес, тақ та емес; 4) жұп. **6.10.** 1) $12 - 2\sqrt{2}$; 2) $\frac{\pi^3}{36} - \frac{1}{4}$.

7.1.

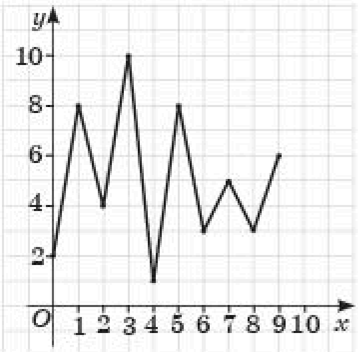
Мұғалімдердің санаты (x)	0	1	2	3
Мұғалімдер саны (n)	6	5	9	5

7.2. $n = 50$. Мода — 3.

Варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Барлығы: 10
Жиілігі	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Қосындысы: 50

7.3. 4.42.

7.4. 80-сурет.



80-сурет

7.5. Интервал қадамының ұзындығын табамыз: $i = \frac{54 - 30}{3} = 8$.

Оқушылар массасы	[30 ; 38)	[38; 46)	[46; 54]
Оқушылар саны (n)	4	6	5

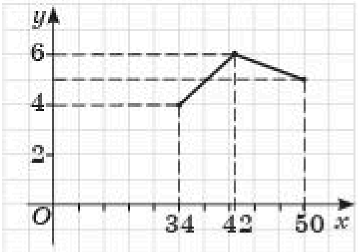
Әр интервал және жалпы алғандағы оқушылардың массасын есептейміз. Сонда бірінші интервал бойынша: $30 + 30 + 35 + 36 = 131$;

екінші интервал бойынша: $38 + 44 + 40 + 42 + 39 + 46 = 249$;
үшінші интервал бойынша: $46 + 48 + 50 + 52 + 54 = 250$.

Оқушылар массасы	[30; 38)	[38; 46)	[46; 54]
Оқушылар саны (n)	4	6	5
Жалпы масса	131	249	250

7.6.

Оқушылар массасы	[30; 38)	[38; 46)	[46; 54]	Барлығы: 3
Оқушылар саны (жиілігі) (n)	4	6	5	Қосындысы: 15
Салыстырмалы жиілік	$\frac{4}{15} \approx 0,27$	$\frac{6}{15} = 0,4$	$\frac{5}{15} \approx 0,33$	Қосындысы: 1
%-бен берілген жиілік	27%	40%	33%	Қосындысы: 100%



81-сурет

7.7.

Баға (мың тг)	[2—3)	[3—6)	[6—9)	[9—12)	[12—15)	[15—18]
Түрлер саны	3	8	19	7	11	2
Салыстырмалы жиілік	0,06	0,16	0,38	0,14	0,22	0,04
% -бен алынған салыстырмалы жиілік	6	16	38	14	22	4

7.8. 1) $(-\infty; -1]$ және $[0; 1]$ — өседі, $[1; +\infty)$ және $[-1; 0]$ — кемиді.

7.9. 1) Асимптоталары болмайды; 2) $x = -1$, $x = 1$, $y = -2$; 3) $y = -\frac{1}{5}x$, $x = 0$; 4) $y = -\frac{1}{4}x$, $x = 0$.

7.10. 1) 4 кв. бірл; 2) $\frac{64}{15}\pi$ куб бірл.

8.1. Жиіліктің таралу кестесін құрамыз, сосын салыстырмалы жиіліктердің пайызбен алынған вариациялық қатарын құрастырамыз.

Варианта	8	9	10	11	12	13	14	Барлығы: 7
Варианталың жиілігі	4	5	5	10	7	6	3	Қосындысы: 40
Салыстырмалы жиілік	0,1	0,125	0,125	0,25	0,175	0,15	0,075	Қосындысы: 1
% -бен берілген жиілік	10	12,5	12,5	25	17,5	15	7,5	Қосындысы: 100%

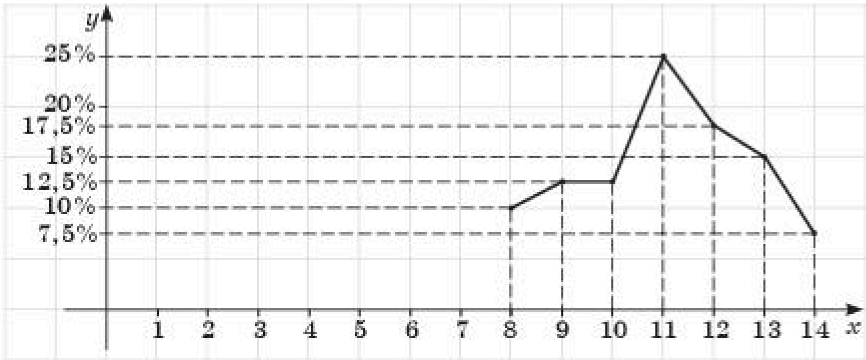
Таңдау көлемі — 40.

8.2. Жиіліктің таралу кестесін құрамыз, сосын салыстырмалы жиіліктердің пайызбен алынған вариациялық қатарын құрастырамыз.

Варианта	8	9	10	11	12	13	14	Барлығы: 7
Вариантаның жиілігі	4	5	5	10	7	6	3	Қосындысы: 40
Салыстырмалы жиілік	0,1	0,125	0,125	0,25	0,175	0,15	0,075	Қосындысы: 1
%-бен берілген жиілік	10	12,5	12,5	25	17,5	15	7,5	Қосындысы: 100%

4) мода — 11; медиана — 11; математикалық күтім — $\overline{X} = 11{,}025$.

5) Пайызбен берілген салыстырмалы жиіліктердің полигоны (үлестіру көпбұрышы) 82-суретте берілген.



82-сурет

8.3. $\overline{D} \approx 2{,}9744$; $\overline{\sigma} \approx 1{,}7246$. *Нұсқау.* Вариантаның салыстырмалы жиілігінің кестесін қолданып, дисперсия мен орташа квадраттық ауытқуды табамыз:

Варианта	8	9	10	11	12	13	14
Вариантаның жиілігі	4	5	5	10	7	6	3
Салыстырмалы жиілік	0,1	0,125	0,125	0,25	0,175	0,15	0,075

$\overline{X} = 8 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}125 + 10 \cdot 0{,}125 + 11 \cdot 0{,}25 + 12 \cdot 0{,}175 + 13 \cdot 0{,}15 + 14 \cdot 0{,}075 =$ $= 11{,}025$.

$\overline{X^2} = \dfrac{1}{40}(8^2 \cdot 4 + 9^2 \cdot 5 + 10^2 \cdot 5 + 11^2 \cdot 10 + 12^2 \cdot 7 + 13^2 \cdot 6 + 14^2 \cdot 3) =$

$= 64 \cdot 0{,}1 + 81 \cdot 0{,}125 + 100 \cdot 0{,}125 + 121 \cdot 0{,}25 + 144 \cdot 0{,}175 + 169 \cdot 0{,}15 +$
$+ 196 \cdot 0{,}075 \approx 124{,}525$.

Формула бойынша

$\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 124{,}525 - 11{,}025^2 = 124{,}525 - 121{,}5506 \approx 2{,}9744$.

$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} = 1{,}7246$.

8.4. 1) 19; 2) құлаш — 14; мода — 8; медиана — 13;

3) $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 \approx 36{,}8$. *Нұсқау.* Үлестірім кестесін құрастырамыз.

Варианта	5	8	18	19
Вариантаның жиілігі	15	11	19	5
Салыстырмалы жиілік	0,3	0,22	0,38	0,1

$\overline{X} = 5 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}22 + 18 \cdot 0{,}38 + 19 \cdot 0{,}1 = 12$.

$\overline{X^2} = \frac{1}{50}(5^2 \cdot 15 + 8^2 \cdot 11 + 18^2 \cdot 19 + 19^2 \cdot 5) = 25 \cdot 0{,}3 + 64 \cdot 0{,}22 + 324 \cdot 0{,}38 +$
$+ 361 \cdot 0{,}1 = 180{,}8.$

Онда $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 180{,}8 - 12^2 \approx 36{,}8.$

8.5. 1) 9; 2) таңдау көлемі — 16; құлаш — 8; мода — 12; медиана — 12;
3) $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 13.$ $\overline{\sigma} \approx 3{,}61.$ *Нұсқау.* Үлестірім кестесін құрастырамыз.

Варианта	4	8	12
Вариантаның жиілігі	5	2	9
Салыстырмалы жиілік	0,3125	0,125	0,5625

$\overline{X} = 4 \cdot 0{,}3125 + 8 \cdot 0{,}125 + 12 \cdot 0{,}5625 = 9.$

$\overline{X^2} = \frac{1}{16}(4^2 \cdot 5 + 8^2 \cdot 2 + 12^2 \cdot 9) = 16 \cdot 0{,}3125 + 64 \cdot 0{,}125 + 144 \cdot 0{,}5625 =$
$= 5 + 8 + 81 = 94.$

Онда $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 94 - 9^2 = 13.$ $\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} = \sqrt{13} \approx 3{,}61.$

8.6. ≈39,8034; ≈6,0309. *Нұсқау.* Орта мәнді есептеп, салыстырмалы жиіліктердің вариациялық қатарын құрастырамыз:

$x_1^* = \frac{0+6}{2} = 3,\ x_2^* = \frac{6+12}{2} = 9,\ x_3^* = \frac{12+18}{2} = 15,\ x_4^* = \frac{18+24}{2} = 21.$

Орта мән	3	9	15	21
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,3	0,3	0,2

$\overline{X} = 3 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}3 + 21 \cdot 0{,}2 = 12.$

$\overline{X^2} = \frac{1}{20}(3^2 \cdot 4 + 9^2 \cdot 6 + 15^2 \cdot 6 + 21^2 \cdot 4) = 9 \cdot 0{,}2 + 81 \cdot 0{,}3 + 225 \cdot 0{,}3 + 441 \cdot 0{,}2 =$
$= 181{,}8.$

Онда $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 181{,}8 - 12^2 = 37{,}8.$

$n = 20 < 30$ болғандықтан $\overline{\overline{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{D} = \frac{20}{19} \cdot 37{,}8 \approx 39{,}8034.$

Демек, $\overline{\overline{\sigma}} = \sqrt{\overline{\overline{D}}} = \sqrt{39{,}8034} \approx 6{,}0309.$

8.7. $\overline{\overline{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{D} \approx 169{,}054;$ ≈13,0021. *Нұсқау.* Интервалды жиіліктің кестесін құрастырамыз.

Интервалдар	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90]
n_i	3	4	7	6	5
$\frac{n_i}{n}$	0,12	0,16	0,28	0,24	0,2

Орта мәнді есептеп, салыстырмалы жиіліктердің вариациялық қатарын құрастырамыз:

$x_1^* = \frac{40+50}{2} = 45,\ x_2^* = \frac{50+60}{2} = 55,\ x_3^* = \frac{60+70}{2} = 65,$

$x_4^* = \frac{70+80}{2} = 75,\ x_5^* = \frac{80+80}{2} = 85.$

Орта мән	45	55	65	75	85
$\frac{n_i}{n}$	0,12	0,16	0,28	0,24	0,2

$\overline{X} = 45 \cdot 0{,}12 + 55 \cdot 0{,}16 + 65 \cdot 0{,}28 + 75 \cdot 0{,}24 + 85 \cdot 0{,}2 = 67{,}4.$

$\overline{X^2} = 2025 \cdot 0{,}12 + 3025 \cdot 0{,}16 + 4225 \cdot 0{,}28 + 5625 \cdot 0{,}24 + 7225 \cdot 0{,}2 = 4705.$

Онда $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 4705 - 4542{,}76 = 162{,}24.$

$n = 25 < 30$ болғандықтан $\overline{\overline{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{D} = \frac{25}{24} \cdot 162{,}24 = 1{,}042 \cdot 162{,}24 \approx 169{,}054.$

Демек, $\overline{\overline{\sigma}} = \sqrt{\overline{\overline{D}}} = \sqrt{169{,}054} \approx 13{,}0021.$

8.9. 1) 9938; 2) 3136; 3) 41; 4) 137.

8.10. 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{18}$.

8.11. 1) 4; 2) 36 және 49; 3) 18; 4) 12.

III тарау. Дәреже және түбір. Дәрежелік функция

9.1. 1) 560; 2) 30; 3) $a^2|bc^3|$; 4) $m^2|k^3t|$. **9.2.** 1) $\frac{7}{15}$; 2) $1\frac{3}{7}$; 3) $\frac{3}{10}$; 4) 3. **9.3.** 1) $2a^2$; 2) $2\sqrt[6]{2}\,a^2|b^3c|$; 3) $4m^2n^3p$; 4) $\frac{2}{3}x^2|y^3|$. **9.4.** 1) $\sqrt[4]{3}$; 2) $\sqrt[4]{2}$; 3) $\sqrt[4]{7}$; 4) $\sqrt[15]{11}$; 5) $\sqrt[4]{a^3}$; 6) $\sqrt[12]{a^5}$; 7) $\sqrt[15]{mn}$; 8) [illegible]. **9.5.** 1) $12\frac{1}{2}$; 2) $41\frac{1}{3}$; 3) $11\frac{7}{16}$; 4) 2,5. **9.6.** 1) $\frac{8}{15}$; 2) 1,42; 3) 55; 4) 24. **9.7.** 1) 3; 2) 2; 3) 250; 4) 3. **9.8.** 1) 3; 2) −11; 3) $4\sqrt[3]{3}$; 4) $-\sqrt[3]{2}$. **9.10.** 1) $4\sqrt{11}$; 2) $-2\sqrt{13}$; 3) 0; 4) 1. **9.11.** 1) $a\sqrt[3]{a}$; 3) [illegible]. **9.12.** 1) 5; 2) 0,25; 3) 0; 4) 84. **9.13.** 1) $2\sqrt{5}$; 2) 4; 3) 0,5; 4) 3; 7) $2^{\frac{5}{8}}$; 8) $3^{\frac{7}{24}}$. **9.14.** 1) $\sqrt[4]{a}$; 2) $\sqrt{x}$; 8) b^3. **9.17.** 1) Иә; 2) жоқ; 3) жоқ; 4) иә. **9.18.** 1) 0,5; 2) 9. **10.4.** 1) 1; 2) 16; 3) 2; 4) 3. **10.6.** 1) $23\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{29}{5}$. **10.8.** 1) 7; 2) 0,2; 3) 0,5; 4) 0,4; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{5}{8}$. **10.10.** 2) $\frac{1}{216}$. **10.11.** 1) $\frac{10}{3}$; 2) −46,5; 4) 31. **10.12.** 1) $\sqrt[12]{a}$; 4) xy. **10.14.** 1) 1,74; 2) $\frac{8}{9}$; 3) 0. **10.16.** 1) $a^{\frac{1}{3}}b$; 2) $\frac{4}{a + \sqrt{a} + 1}$. **10.17.** 1) 0; 2) x^4. **10.20.** 1) 4; 2) 2; 3) болмайды; 4) 6. **10.21.** 1) $(0; 1) \cup (2; 4]$; 2) $(-3; 2) \cup (2; 4)$. **10.22.** 1) 4; 2) 4; 3) 10; 4) $1\frac{1}{3}$. **11.1.** 1) 8; 2) $\frac{71}{25}$; 4) 30. **11.2.** 1) 2; 3) 32; 4) 60. **11.3.** 2) $\sqrt{5} - 1$; 4) $1 + \sqrt{7}$; 7) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$; 8) $-1 + \sqrt{10}$. **11.5.** 1) $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$; 3) $\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{10} - 2)}{12}$. **11.6.** 1) 5; 2) 2. **11.12.** 1) 25 км/сағ; 2) 14 км/сағ және 2 км/сағ. **11.13.** 1) $\frac{x}{2y}$; 2) $\frac{10bc^2}{3a}$. **11.14.** 1) 0,5; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) 1; 4) 6. **12.10.** 1) $(4; +\infty)$; 2) $(-3; 3)$. **12.11.** 1) $[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n]$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$. **13.6.** 2) $\frac{8}{6}$. **13.8.** 2) $-3x^{-\frac{1}{3}} + C$; 3) $-\frac{1}{6x^3} - \frac{3}{4x} + C$. **13.13.** 2) $\frac{8}{3}$ кв. бірл. **13.16.** 1) $\frac{2\sqrt[6]{12}}{3}x^{1,5} + \pi x + C$. **13.20.** 1) $\frac{17}{15}$ кв. бірл; 2) 0,5 кв. бірл. **13.21.** $a = \frac{4}{3}$. **13.22.** 1) $\{3\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\{4; 5\}$; 4) $\varnothing$. **13.23.** 1) 7; 2) 27; 3) 2; 4) 18. **13.24.** 1) $x \in (-\infty; -2]$; $x \in [1; 4]$ — кемиді, $x \in [-2; 1]$; $x \in [4; +\infty]$ — өседі; 2) $x = 1$; 3) $p \in (0; 9)$.

IV тарау. Иррационал теңдеулер мен теңсіздіктер

14.1. 3) 1; 4) 3; 6. **14.2.** 3) 6; 4) 8. **14.3.** 1) 9; 2) 2. **14.4.** 2) 1; 3) 625. **14.5.** 1) (4; 1); 2) (4; 9); (9; 4). **14.6.** 1) 3; 2) 7; 3) 2; 6; 4) 6. **14.7.** 1) $\varnothing$; 2) 6; 9; 3) 25. **14.8.** 2) 1; 3) 5; 4) 7. **14.9.** 1) 0; 1; 4) $7+\sqrt{73}$. **14.10.** 2) $\frac{125}{27}$; -1; 3) ±1; 4) 64. **14.11.** 1) (1; 27), (27; 1). **14.12.** 2) (1; 81); (81; 1). **14.13.** 1) 3; 2) 1024; 3) $\varnothing$; 4) 9. **14.14.** 1) 4; 4) 3; 5. **14.15.** 1) 25. **14.16.** 2) (2; 8); (8; 2). **14.17.** 1) (5; 7); 2) (3; 1,5); $\left(\frac{24}{23}; 24\right)$. **14.19.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in Z$; 2) $\operatorname{arctg}5+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in Z$. **14.20.** 1) $(-\infty; -4]\cup[4; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2)\cup[3; +\infty)$. **14.21.** 1) $[-3; -2)$; 2) $[-2; 3)$; 3) $(-\infty; -2{,}5)\cup(1; +\infty)$; 4) $\left[-5; -2\frac{2}{3}\right]\cup[1; 5]$. **15.1.** 1) $[4; +\infty)$; 3) $(27; +\infty)$. **15.2.** 2) $[-15; 1]$; 4) $[0{,}5; 5)$. **15.3.** 3) $(31{,}5; +\infty)$; 4) $[3; 12]$. **15.4.** 1) $(-3; -2]\cup[1; 2)$. **15.5.** 2) $(4; +\infty)$; 4) $[-27; 9)$. **15.6.** 1) $[12; +\infty)$; 4) [illegible]. **15.7.** 2) $\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{34}-1\right); +\infty\right)$. **15.8.** 1) $[2{,}5; 15)$; 2) $\left(\frac{17}{3}; +\infty\right)$. **15.11.** $\{4\}\cup[5; 7]$. **15.12.** $\left[\frac{7}{4}; 4\right]$. **15.13.** 1) $-0{,}25$; 2) 9; 3) $\sqrt{2}-2$; 4) 1. **15.14.** 1) $-\frac{4\pi}{3}$; 2) $-\frac{9\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$. **15.15.** 1) $f'(x)=\frac{2}{1+4x^2}+3x^2$; 2) $f'(x)=-\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}+4x^{-5}$. **15.16.** 1) $[-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1]$.

V тарау. Комплекс сандар

16.4. 1) $\sqrt{11}$; 2) $2\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{8{,}5}$; 4) $\sqrt{7}$. **16.7.** 1) $\sqrt{29}$; 2) $2\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{8}$; 4) $\sqrt{23}$. **16.9.** 1) $z_1=-4+3i$, $|z_1|=5$; $z_2=5+4i$, $|z_2|=\sqrt{41}$; $z_3=-4-3i$, $|z_3|=5$; $z_4=3-2i$, $|z_4|=\sqrt{13}$; $z_5=-3i$, $|z_5|=3$; $z_6=1$, $|z_6|=1$; $z_7=i$, $|z_7|=1$. 2) $z_8=3-4i$; $z_9=-1-5i$. **16.10.** 1) $\sqrt{16+4\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{41-8\sqrt{5}}$; 3) $\frac{\sqrt{31}}{3}$; 4) $0{,}5\sqrt{19-6\sqrt{2}}$. **16.11.** 1) $x=12$, $y=-3\sqrt{5}$; 2) $x=-4\sqrt{2}$, $y=4$; 3) $x=1{,}5$, $y=-2\sqrt{2}-1$; 4) $x=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$, $y=2\sqrt{2}$. **16.12.** 1) 1; 2) $2\cdot|\cos\alpha|$; 3) $2\cdot|\cos2\alpha|$; 4) $2\cdot|\sin3\alpha|$. **16.14.** 1) $|z-3|<2$; 2) $|z-3-2i|<2$. **16.15.** 1) $\frac{x^4}{4}-x^2+2x+C$; 2) $\cos(1-x)+C$; 3) $\frac{x^2}{2}-\frac{\sin(1-4x)}{4}+C$; 4) $2x-\frac{\operatorname{tg}3x}{3}+C$. **16.16.** 1) $2\frac{1}{3}$ кв. бірл.; 2) $2\frac{1}{3}$ кв. бірл. **16.17.** 1) $\left[-\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$; 2) $[0; 4]$. **17.1.** 1) $-5-3i$; 2) $2-7i$; 3) $-2+6i$; 4) $-2-11i$; 5) $-4+9i$; 6) $-2+5i$. **17.2.** 1) $6+8i$; 2) $8-4i$; 3) $3-4i$; 4) $-5+7i$. **17.3.** 1) $\frac{7-5i}{5}$; 2) $\frac{1}{3}\cdot(1-2\sqrt{2}i)$; 3) $\frac{-7+7i}{5}$; 4) $\frac{25-19i}{29}$; 5) $\frac{1+8i}{5}$; 6) $\frac{-5+27i}{13}$. **17.4.** 1) $22-9i$; 2) $1{,}5+\frac{9\sqrt{3}}{2}i$; 3) $\frac{14}{5}+\frac{22}{5}i$; 4) $\frac{12+8i}{13}$; 5) $\frac{19+5i}{5}$; 6) $\frac{-18-6i}{5}$. **17.5.** 1) -11; 2) $\frac{1+63\sqrt{3}}{7}-\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}+10\right)i$. **17.6.** 1) $\pm(3-4i)$; 2) $\pm(7+5\sqrt{2}i)$; 3) $\pm(\sqrt{1{,}5}+0{,}5i)$; 4) $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{6}-2}{2}}\right)$; 5) $\pm(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)$; 6) $\pm(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i)$. **17.7.** 1) $\sqrt{1160}$; 2) $\sqrt{148}$. **17.8.** 1) $x=3$, $y=1$; 2) $x=\frac{19}{9}$, $y=\frac{2}{3}$; 3) $x=0{,}4$,

$y = 0{,}6$; 4) $x = -1$, $y = 1{,}5$. **17.9.** 1) $-14 - i$; 2) $-12 + 53i$; 4) $-4 + 14i$. **17.10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ кв. бірл.; **17.11.** 1) $-0{,}5$; 2) -1; 4) $\frac{1}{4}(1 - \sqrt{3})$. **17.12.** 1) $\frac{(2x-3)\sin 2x + \cos 2x}{2} + C$; 2) $(2 - x^2 - 2x)\cos x + (2x + 2)\sin x + C$. **18.1.** 1) $\pm 2i$; 3) $\pm\sqrt{11}\,i$; 7) $\frac{-1 \pm \sqrt{87}i}{4}$; 8) $\frac{3 \pm \sqrt{33}i}{3}$. **18.2.** 1) $x^2 + 9 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 13 = 0$; 3) $x^2 + 6x + 13 = 0$; 4) $x^2 - 10x + 74 = 0$. **18.3.** 1) $(x + 1 - 3i)(x + 1 + 3i)$; 2) $(x - 2 - i)(x - 2 + i)$; 4) $(x - 1{,}5 - 1{,}5i)(x - 1{,}5 + 1{,}5i)$. **18.4.** 1) $\pm\frac{\sqrt{14}}{3}i$; 2) $\pm\frac{\sqrt{31}}{2}i$; 3) $\pm\sqrt{5{,}5}\,i$; 4) $\frac{\pm\sqrt{13\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}i$; 6) $\frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{163}i}{6}$. **18.5.** 1) $x^2 + 15 = 0$; 2) $x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 7 = 0$; 3) $x^2 + 6\sqrt{5}\,x + 49 = 0$; 4) $x^2 - 4x + 22 = 0$. **18.6.** 1) $(x + 2i)(x - 2i)\times$ $\times(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; 2) $(x + i)(x - i)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$. **18.7.** 1) $\pm(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)$; 2) $\pm\left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{9}{2}}i\right)$; 3) $\pm\left(\sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{7}{2}}i\right)$; 4) $\pm\left(\sqrt{\frac{13}{2}} - \sqrt{\frac{13}{2}}i\right)$; 5) ± 2; $\pm 2i$; 6) ± 1; $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. *Нұсқау.* 6) Теңдеудің сол жақ бөлігінде тұрған өрнекті көбейткіштерге жіктейміз: $(z^3 - 1)\times$ $\times(z^3 + 1) = 0$, немесе $(z - 1)(z^2 + z + 1)(z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$. Әр көбейткішті нөлге теңестіріп, теңдеудің комплекс сандар жиынындағы түбірлерін табамыз. **18.8.** 1) $\{2; i\}$; 2) $\{2; -i\}$; 3) $\{3; 2i\}$; 4) $\{-3 \pm 2\sqrt{2} + i\}$; 5) $\{3 + i; 2 + i\}$; 6) $\{8 - 2i; 2 - 2i\}$. **18.9.** 1) $\{0; 1; -0{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{3}\,i\}$; 2) $\{0; 2; -1 \pm i\sqrt{3}\}$. *Нұсқау.* 1) теңдеу құрастырамыз $x + iy = (x - iy)^2$, немесе $x + iy = x^2 - 2xyi - y^2$. Нақты және жорамал бөліктері тең болса, онда екі комплекс санның тең болатынын ескеріп, келесі теңдеулер жүйесін аламыз: $\begin{cases} x = x^2 - y^2, \\ y = -2xy. \end{cases}$ Жүйені шешіп, $y = 0$ және $x = 0$ немес $x = 1$ екенін аламыз.

Егер $y \neq 0$ болмаса, онда екінші теңдеуді y-ке қысқартамыз. Сонда $1 = -2x$ немесе $x = -0{,}5$ шығады.

Шыққан x-тің мөнін жүйенің бірінші теңдеуіне қойып, $-0{,}5 = 0{,}25 - y^2$ теңдеуін аламыз. Бұдан $y = \pm 0{,}5\sqrt{3}$. Демек, берілген теңдеудің түбірлері: $-0{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{3}\,i$. **18.11.** 1) $(4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3})$; 2) $(1{,}5; 3)$; 3) $(1 - 2\sqrt{5}; 1 + 2\sqrt{5})$. **18.12.** 1) $x - 1$; 2) $x + 1$; 3) $\frac{1 - a}{\sqrt{a}}$; 4) $-a^{0,5} - 2a^{-1,5}$. **18.13.** 1) $[4; 5]$; 2) $\left[-2\frac{9}{11}; -2\right] \cup [3; +\infty)$.

VI тарау. Көрсеткіштік және логарифмдік функциялар

19.2. 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$. **19.3.** 1) $(-2; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; 3) $(3; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$. **19.4.** 1) 1; 3; 9; 27; 81; ...; 2) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; ...; 3) $\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[4]{9}$; $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[4]{27}$; ... . **19.5.** 1) өспелі; 2) өспелі; 3) кемімелі; 4) өспелі. **19.6.** 1) $y = 2^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. **19.19.** 1) $\{\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + 2\pi n\}$; $n \in Z$; 2) $\{\pm\arccos(1 - \sqrt{2}) + 2\pi n\}$, $n \in Z$. **19.20.** 1) $\left[-\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in Z$; 2) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. **19.21.** 1) $x^5 - x^3 + \operatorname{arctg} x + C$; 2) $\frac{\sin 2x}{2} - \frac{(2x+1)^4}{8} + C$. **20.2.** 4) -2; 6) -3. **20.3.** 3) 2; 4) 1. **20.4.** 5) $\log_{\frac{2}{3}}\frac{8}{27} = 3$; 6) $\lg 0{,}001 = -3$. **20.5.** 4) $10^5 = 100000$; 6) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$. **20.6.** 3) n; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $-\frac{3}{2}$. **20.7.** 2) -1; 4) 0,5. **20.8.** 3) 0,5; 4) 0. **20.9.** 1) $\approx -0{,}699$; $\approx -1{,}301$; $\approx 2{,}301$. **20.10.** 1) -2; 2) 6; 3) 2; 4) 1.

20.11. 3) $3(\lg|m| + \lg|n|)$; 6) $\lg 7 + 8\lg|a| + \lg b + \frac{1}{8}\lg c$. **20.12.** 4) -3; 5) $\frac{9}{4}$; 6) 8. **20.13.** 1) $\frac{5}{16}$; 2) 2; 4) 1. **20.14.** 1) 4; 2) -21; 3) 2; 4) $\frac{1}{2}$. **20.16.** 2) 9; 4) 0,25. **20.19.** 1) $2 - 2a$; 2) $\frac{3c}{2a+c}$. **20.20.** 1) 8; 4) $\sqrt[3]{5}$; 5) 8; 6) 25. **20.21.** 1) -3; 3) 0,5; 5) $-\frac{1}{3}$. **20.26.** 1) 1; 4) 9; 7) 1. **20.27.** 1) $\frac{1}{3}$; 4) 5. **20.28.** 1) 2; 3) 2; 5) 4. **20.30.** 1) $k = 3$; 2) $k = -0,5$; 3) $k = \frac{1}{3}$. **20.31.** 1) $(0;\ 4)$; 2) $(-3; -1)$; 3) $(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n)$, $n \in Z$. **21.5.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(8; +\infty)$; 3) $\left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$; 4) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **21.6.** 1) $(-\infty;\ 2)$; 2) $(-\infty;\ 2,5)$; 3) $\left(-\infty;\ \frac{11}{4}\right)$; 4) $(-\infty;\ 1,2)$. **21.7.** 1) $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$; 2) $(5;\ +\infty)$; 3) $(1;\ +\infty)$; 4) $(-2;\ 3)$. **21.10.** 1) $[-2;\ 3)$; 2) $(-2,25;\ 3]$; 3) $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ 5]$; 4) $[0,7;\ 1)$. **21.11.** 1) $(-4; 0)\cup(3; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{8}{5}; \frac{2}{3}\right]$; 3) $(-\infty; -1)\cup(0; 2]$; 4) $(-3; 1]$. **21.12.** 1) $(-1; 2)\cup(2; 3)$; 2) $(-\infty; -5)\cup(0; 7)\cup(7; +\infty)$; 3) $(2; 3)\cup(3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4)\cup(-4; 8)$. **21.14.** 1) $(2; 3)\cup(3; +\infty)$. **21.16.** 1) $\{\pm 2; \pm i\sqrt{3}\}$; 2) $\{\pm 3; \pm 2i\}$; 3) $\{7\}$; 4) $\{-3; 1; -1 \pm i\sqrt{3}\}$. **21.17.** 1) $y = 2^x$; 2) $y = \sqrt{x+2}$. **21.18.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{18}$. **22.1.** 1) $3^{x^2-7x}(2x - 7)\ln 3$. **22.2.** 2) $\frac{1}{24}$. **22.4.** 2) $y = \frac{3}{4}x - 1,5 + \ln 8$. **22.5.** 1) $(0; 1]$ — кемиді, $[1; +\infty)$ — өседі; 2) $(-\infty; -2]$ және $[0; +\infty)$ — өседі; $[-2; 0]$ — кемиді. **22.7.** 3) $\ln\frac{10}{3}$ кв. бірл. **22.8.** 1) 2,5 ($\ln 5 - 1$). **22.9.** 2) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$. **22.10.** 4) $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -2 < 0$. **22.12.** 2) $y = -x + 1$. **22.14.** 1) $4e - 5$ кв. бірл; 2) $7 + \frac{1}{e^4}$ кв. бірл. **22.17.** 2) $y = 16x + 8$. **22.20.** $\frac{e^2}{2} - 2,5$ кв. бірл. **22.22.** 1) $y^2 b^{\frac{6}{7}}$; 2) $a^4 y^{-2,5}$. **22.23.** 1) 11; 2) 3,5. **22.24.** 1) $f'(1) = 7$; 2) $f'(1) = 9$.

VII тарау. Көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулер мен теңсіздіктер

23.1. 1) 4; 2) 4; 3) -5; 4) 2. **23.2.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) 2. **23.3.** 1) 2; 2) 1; 3) 2; 4) 2. **23.4.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 1; 4) 0; 2. **23.5.** 1) $(2;\ 1)$; 2) $(3;\ 2)$. **23.6.** 1) $(1;\ 1)$; 2) $(3;\ 1)$. **23.7.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 2; 3) 0; 4) -2. **23.8.** 1) $\pm\sqrt{3}$; 2) 2; 3) $\frac{11}{12}$; 4) $1\frac{2}{3}$. **23.9.** 1) $\pm\sqrt{3}$; 2) ± 5; 3) -3; 4) 2. **23.10.** 1) $(1; 0)$; 2) $(1; 0)$. **23.11.** 1) $(3; 4)$; 2) $(2; 6)$. **23.12.** 1) 0; 2) 6; 0,2; 3) -2; 4) -3; 0,5; 6. **23.13.** 3) 0; 4) 1. **23.14.** 1) 3; 3) 1; $\log_4\frac{25}{3}$; 4) ± 2. **23.15.** 1) $\frac{2}{5}$; 2) $[1; +\infty)$; 3) $-\frac{5}{4}$; 2; 4) $\varnothing$. **23.16.** 1) $(3;\ 4)$; 2) $(1;\ 1)$. **23.17.** 1) $(3;\ 2)$; 2) $(1;\ 1)$. **23.18.** 1) $f'(x) = 3e^{3x} - 2 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3$; 2) $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x + 3 \cdot 2^{3x}\ln 2 + e^{3-x}$. **23.19.** 1) $f'(x) = 3e^{3x} - 2 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3$; 2) $f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x + 3 \cdot 2^{3x}\ln 2 + e^{3-x}$. **23.20.** 1) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x+1}$; 2) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$; 3) $\frac{6}{2x-3} - \frac{2}{x+1}$; 4) $3x^2 + \frac{10}{2x-5} - \frac{8}{2x+3}$. *Нұсқау.* Логарифмнің қасиеттерін қолданып, логарифмдік функцияны түрлендіреміз, функцияның туындысын табамыз. 3) $f(x) = \ln\frac{(2x-3)^3}{(x+1)^2} = 3\ln(2x-3) - 2\ln(x+1)$ және функцияның туындысын табамыз. **23.21.** 1) $(3 - x)\cos x + \sin x + C$; 2) $\frac{x^3}{3}\ln 3x - \frac{x^3}{9} + C$; 3) $\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + C$; 4) $\frac{x^2}{2} - x\sin x - \cos x + C$. **24.2.** 1) 0,5; 2) 2; 3) 2; 4) −3. **24.3.** 1) 1; 4; 2) −1; 2; 3) 1; 5; 4) 5. **24.4.** 1) 2; 2) 3; 4) 9. **24.5.** 1) (8; 4); (4; 8); 2) (1; 2); (2; 1). **24.6.** 1) (5; 3); (3; 5); 2) (6; 3); (3; 6). **24.7.** 1) (2; 1); 2) (2; 1). **24.8.** 1) 4; 2) 33; 3) −3; 4) 2. **24.9.** 1) 5; 2) 5; 8. **24.10.** 1) 10; 2) $\sqrt[4]{1000}$; 3) 4; 4) 1. **24.11.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 0. **24.12.** 1) (0; 3); 2) (3; 1). **24.13.** 1) (2; 6); 2) (5; 2). **24.14.** 1) (7; 3); 2) (4,5; 0,5). **24.15.** 1) $\frac{1}{3}$; 27; 2) $\frac{1}{2}$; 16; 3) 3; 9; 4) $\frac{1}{125}$; 5. **24.16.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) −7; 3) 3; 4) 3. **24.17.** 1) 9; 2) $\sqrt[3]{5}$; 5; 3) 1; 4) 11. **24.18.** 1) (6; 2); (7; 3); 2) (3; 2). **24.19.** 1) (2; 2); 2) (3; 9). **24.20.** 1) (4; 16); 2) (27; 81); 4) (1; 10); (−1; 0,1). **24.22.** 1) $10 - \frac{3}{\ln 2}$; 2) $4 - \frac{2}{\ln 3}$. **24.23.** 1) $y = 2^{|x|}$; 2) $y = \ln|x|$; 3) $y = 2^{-|x|}$. **25.1.** 1) $(-3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3)$; 3) $(-\infty; -3)$; 4) $(-\infty; -1)\cup(2; +\infty)$; 5) $(-\infty; 5)$; 6) $(-4; +\infty)$. **25.2.** 1) 2; 2) 1; 3) −1; 4) 0; 5) 3; 6) 2. **25.3.** 1) $(11; +\infty)$; 2) (1; 9). **25.4.** 1) $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; 2) $(3; +\infty)$; 3) $\left(\frac{5}{12}; +\infty\right)$; 4) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; 5) $[-2; +\infty)$; 6) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. **25.5.** 1) (−1; 3); 2) [−3; 2]; 3) $\left(\frac{1}{5}; 3\right]$; 4) $\left(\frac{7}{8}; 3\right]$; 5) (4; 8); 6) (−2; −1]. **25.6.** 1) 0; 2) −3; 3) 1; 4) −2. **25.7.** 1) 1; 2) 1; 3) 4; 4) 1. **25.8.** 1) $(-\infty; 3)$; 2) (−5; 0). **25.9.** 1) 0; 2) −2; 3) 2; 4) 1. **25.10.** 1) 0; 2) −1; 3) 0; 4) 1. **25.11.** 1) 2; 2) 2; 3) 3; 4) 5. **25.12.** 1) [−1; 3); 3) $(3; +\infty)$; 4) $(2; +\infty)$. **25.13.** 3) $(1; 2]\cup[3,5; +\infty)$; 4) $(-0,5; 0,5)\cup(0,5; +\infty)$. **25.14.** 1) (0; 0,5]; 2) $\varnothing$. **25.15.** 1) (2; 3); 2) $[-0,5; 3 + \sqrt{6})$; 3) $[-2\frac{2}{3}; 8)$; 4) $(-\infty; 0)$. **25.16.** 1) $[-0,5; +\infty)$; 2) $[\frac{1}{e}; +\infty)$. **25.17.** 1) $y = 0,5x - 4$; 2) $y = x + 1$; 3) $y = 4x + 1$; 4) $y = 2x + e$. **26.1.** 1) $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; 2) (−2; 7); 3) (3; 11]; 4) $\left(\frac{1}{4}; \frac{11}{4}\right]$. **26.2.** 3) $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$; 4) $\left[\frac{3}{4}; 2\right]$. **26.3.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(2; +\infty)$; 3) [−37; 12); 4) (2; 2,5). **26.4.** 1) $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$; 2) (0,008; 0,04); 4) [0,01; 10]. **26.6.** 1) [−1; 0); 2) $(-\infty; -5)$. **26.7.** 1) (−4; 2); 2) $(-2; -1) \cup (2; 3)$; 4) $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$. **26.8.** 1) (1; 2]; 2) $\left(1; \frac{5}{3}\right)$. **26.9.** 1) (2; 5); 2) $[2; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3]$; 4) $[1; +\infty)$. **26.10.** 1) [4; 5); 2) [1; 2]. **26.13.** 1) $(0; 1]\cup[16; +\infty)$; 3) $(-4; -2)\cup(-1; 2)$. **26.14.** 1) $\left[-\frac{2}{3}; 0\right)$. **26.15.** 1) $(0; 1)\cup(2; +\infty)$; 2) $(0; 1)\cup[1; \sqrt[10]{10})$; 5) (1; 4); 6) (1; 2,5). **26.16.** 1) (1; 2); 2) [5; 6]. **26.18.** 1) $x = -2e$; 2) $x = -3$; 3) $y = 0$; 4) $y = 0$. **26.19.** 1) $\{\pm\sqrt{2}; \pm i\sqrt{6}\}$; 2) $\{\pm\sqrt{7}; \pm i\sqrt{2}\}$. **26.20.** 1) $f''(x) = 2e^{2x}(2x^2 + 4x + 1)$; 2) $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 5x + 1)$; 3) $f''(x) = \frac{1}{x}$; 4) $f''(x) = 2\ln x + 3$.

VIII тарау. Дифференциалдық теңдеулер

27.3. 1) $y = e^x + C$; 3) $y = x^2 - 3x + C$; 4) $y = x^3 + x^2 - \pi x + C$. **27.4.** 1) $y = x^2 - x + 1$; 2) $y = x^3 - 4x + 5$; 3) $y = x^3 - 2x^2 - 2$; 4) $y = x^2 - x^3 + 2$. **27.5.** 1) $y = \pm\sqrt{3 + x^2}$; 2) $y = e^{x^3 - 1}$; 3) $y = \pm\sqrt{\sin x + 4}$; 4) $y = \operatorname{arctg} x + \frac{3\pi}{4}$. **27.6.** 1) $y = \operatorname{arctg}(x^2 + C)$; 2) $y = \operatorname{arcctg}(C - 2x^2)$;

3) $y = 0{,}5e^{2x} + 2x^2 + C$; 4) $y = \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x + C)$. **27.8.** 865. **27.9.** $T = 20^\circ + 80^\circ \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, 60 мин. *Нұсқау.* Ньютон заңы бойынша $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$ немесе $\frac{dT}{T - 20} = kdt$, мұндағы t — уақыт, T — дененің температурасы.

Бұдан $\ln(T - 20) = k \cdot t + \ln C$.

$t = 0$, $T = 100^\circ$ болғанда $\ln(100 - 20) = k \cdot 0 + \ln C$, сонда $C = 80$. $t = 20$, $T = 60^\circ$ болғанда $\ln(60 - 20) = k \cdot 20 + \ln 80$, сонда, $k = -\frac{1}{20}\ln 2$. Демек, $T - 20 = 80 \cdot e^{-\frac{1}{20}t \cdot \ln 2} = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$ немесе $T = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. $T = 30^\circ$ болғанда $30 = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$ немесе $10 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, яғни $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. Онда $\frac{t}{20} = 3$, немесе $t = 60$ мин. **27.10.** 1) $\approx 1{,}28$ км/сағ. 2) $500 \cdot e^{-5}$ м/мин $\approx$ $\approx 3{,}37$ м/мин.

Нұсқау. 1) Қайыққа әсер ететін судың кедергі күші $F = -kv$, мұндағы k — пропорционалдық коэффициенті. Екінші жағынан Ньютон заңы бойынша $F = ma$, мұндағы $a = v'$ — үдеу.

Демек, $ma = -kv$ немесе $v' = -\frac{k}{m}v$. Коэффициенттері ажыратылатын теңдеуді шығарамыз $\ln v = -\frac{kt}{m} + C$ немесе $v = e^{-\frac{kt}{m} + C}$.

$t = 0$ жағдайында $v_0 = 20$ км/сағ болатын алғашқы шартты ескереміз. Сонда $C = \ln 20$ немесе $v = 20e^{-\frac{kt}{m}}$.

$t = 40\,с = \frac{40}{3600} = \frac{1}{90}$ сағ жағдайындағы қосымша шартты ескерсек, қайық жылдамдығы $v = 8$ км/сағ. Сонда $8 = 20e^{-\frac{k \cdot 1}{m \cdot 90}}$ немесе $e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{90}$.

Онда $v = 20 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-90t}$ км/сағ. Мотор тоқтаған соң 2 мин-тан кейінгі жылдамдықты табамыз. $t = 2$ мин $= \frac{2}{60}$ сағ $= \frac{1}{30}$ с. $v = 20 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-90 \cdot \frac{1}{30}} = 20 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{3} = 20 \cdot \frac{8}{125} = \frac{32}{25} \approx$ $\approx 1{,}28$ км/сағ.

27.11. $q = UC \cdot (1 - e^{-\frac{t}{CR}})$. *Шешуі.* Физикадан I ток күші кернеу арқылы өтетін q электр мөлшерінен t уақыты бойынша алынған туынды екені белгілі. Яғни, $I = q'$. t уақыты кезінде q конденсаторының зарядына U тізбегінің кернеуі мен $\frac{q}{C}$ конденсатордың кернеуі арасындағы айырмаға тең E электр қозғаушы күші әсер етеді, мұндағы I ток күші.

Демек, $E = U - \frac{q}{C}$.

Ом заңы бойынша $I = \frac{E}{R}$. Онда $q' = \frac{U - \frac{q}{C}}{R}$, немесе $q' = \frac{1}{CR} \cdot (UC - q)$. $x = UC - q$ белгілеп, яғни $-q' = x'$, $x' = -\frac{1}{CR} \cdot x$ теңдеуін аламыз.

$t_0 = 0$ жағдайында $x = UC$ болатын алғашқы шарты бар айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу алынды.

Алынған дифференциалдық теңдеуді шығарып, $\ln x = \frac{1}{CR} \cdot t$ аламыз, яғни $x = UCe^{-\frac{t}{CR}}$ немесе $UC - q = UCe^{-\frac{t}{CR}}$. Демек $q = UC(1 - e^{-\frac{t}{CR}})$.

27.12. 1) $T = \dfrac{20\ln 2}{\ln\dfrac{m}{n}}$; 2) 9 мин. **27.14.** 1) $F(x) = 2\mathrm{tg}x + x^2 + C$; 2) $F(x) = -2\mathrm{ctg}2x + \frac{1}{4}e^{4x} + C$; 3) $F(x) = 2\ln(x^2 + 1) - e^{-x} + C$; 4) $F(x) = \ln^2 x + 2e^{-x} + C$. **27.15.** 1) $21\frac{1}{3}$ кв. бірл.; 2) 1 кв. бірл. **27.16.** 1) $(1;\ \sqrt[3]{5})$; 2) $\left(-1\frac{2}{3};\ 7\frac{1}{3}\right]$; 3) $(1; 2)$; 4) $(-4; 2)$. **28.2.** 1) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$; 2) $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}$; 3) $y = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x$; 4) $y = C_1\cos 6x + C_2\sin 6x$. **28.3.** 1) $y = (C_1 + C_2x)e^{3x}$; 2) $y = (C_1 + C_2x)e^{-4x}$; 3) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{4x}$; 4) $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{2x}$. **28.4.** 1) $y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$; 2) $y = e^{-4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$; 3) $y = e^{-3x}(C_1\cos 6x + C_2\sin 6x)$; 4) $y = e^{2x}(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x)$. **28.5.** 1) $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{x}$; 2) $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-2x}$; 3) $y = e^{2x}(C_1\cos 2\sqrt{2}\,x + C_2\sin 2\sqrt{2}\,x)$; 4) $y = e^{-4x}(C_1\cos 2\sqrt{5}\,x + C_2\sin 2\sqrt{5}\,x)$. **28.6.** 1) $y = e^{3x}(1 + (2e^{-3} - 1)x)$; 2) $y = e^{-x}(3 + (2e - 3)x)$; 3) $y = \dfrac{2e^3 - e}{e^3 - 1}e^{-x} + \dfrac{2 - e}{1 - e^3}e^{2x}$; 4) $y = \dfrac{2}{1 - e^6}e^{4x} + \dfrac{2e^6}{e^6 - 1}e^{-2x}$. **28.7.** 1) $y = \cos x + 2\sin x$; 2) $y = 2\cos 4x - \sin 4x$. **28.8.** 1) $y'' + 6y' + 13y = 0$; 2) $y'' + 2y' + 17y = 0$; 3) $y'' - 2y' + 26y = 0$; 4) $y'' - 4y' + 16y = 0$. **28.9.** 1) $y'' + 4y = 0$; 2) $y'' + 2y = 0$; 3) $y'' - 4y' + 7y = 0$; 4) $y'' - 2y' + 9y = 0$.

Нұсқау. 4) $y = e^{-x}\cdot\sin(2\sqrt{2}x - 1)$ гармониялық тербелісте $\sin(2\sqrt{2}x - 1)$ өрнегін $\sin(\alpha - \beta)$ формуласы бойынша жіктейміз.

Сонда $y = e^{-x}\cdot\sin(2\sqrt{2}\,x - 1) = e^{-x}(\sin 2\sqrt{2}x\cdot\cos 1 - \sin 1\cdot\cos 2\sqrt{2}\,x)$. Бұдан $C_1 = -\sin 1$, $C_2 = \cos 1$ аламыз және сипаттамалық теңдеудің түбірлері $(-1 \pm 2\sqrt{2}\,i)$.

Демек, дифференциалдық теңдеудің түрі келесідей болады: $y'' - 2y' + 9y = 0$.

10-11-СЫНЫПТАРДЫҢ АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1. 1) 22; 2) 60; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 1; 5) 6; 6) $2^{\frac{255}{256}}$; 7) 2,5; 8) 0. **2.** 1) $f'(1) = 2$; 2) $f'(1) = -6$; 3) $f'(1) = 7$; 4) $f'(-2) = 5 \cdot e^{-2}$. **3.** 1) $2e^4$; 2) $\frac{13}{36}$; 3) $\frac{1}{12}$. 4) $3e$. **4.** 1) $4e$; 2) -1; 3) -18. **5.** 1) $y_{\text{ең үлкен}}(3) = 3e^3$; $y_{\text{ең кіші}}(0) = 0$; 2) $y_{\text{ең кіші}}(2) = 2\ln 2$; $y_{\text{ең үлкен}}(3) = 3\ln 3$; 3) $y_{\text{ең кіші}}(4) = -2$; $y_{\text{ең үлкен}}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$. **6.** 1) $\frac{2\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-3}$; 2) 2. **7.** 1) $\sqrt{b}$; 2) $x + \frac{2x-3}{2\sqrt{x}}$, $x \in [4; +\infty)$, $x + \frac{5}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0; 4)$. **8.** 1) $ya^{\frac{6}{7}}$; 2) $a^2y^{-1,5}$. **9.** 1) $\frac{\sqrt{xy}}{x^{0,5}+y^{0,5}}$; 2) $\frac{x+y}{x-y}$. **10.** 1) $2\sqrt{a^2-x}$; 2) $2y$. **11.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $-\frac{1}{6}$. **12.** 1) $2a+b$; 2) $\frac{a+1}{2a+b}$; 3) $1+2a+b$; 4) $1+3a+2b$. **13.** 1) 1; 2) 2,5; 3) 2; 4) 4,5; 5) 1,5; 6) -1; 7) 2; 8) 0,5. **14.** 1) $a = 3$; 2) $a = -3$; 3) $a = 0$; 4) $a = 0,5$. **15.** 1) $f'(x) = \begin{cases} 4x-2, & x > 0, \\ -4x-2, & x < 0; \end{cases}$ 2) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 2, \\ -3x^2+8x, & x < 2. \end{cases}$ **16.** 1) $f'(x) = -2 \cdot 2^{-2x} \cdot \ln 2$; 2) $f'(x) = 6\sin^2 2x \cdot \cos 2x - 3\sin 3x + e^{2-x}$; 3) $f'(x) = 4\operatorname{tg}2x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{3}{\sin^2 3x} + e^x$; 4) $f'(x) = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **17.** $-\frac{2\sqrt{5}}{25}$. **18.** 1) $\frac{2}{2x-1} - \frac{3}{3x+2}$; 2) $\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+3}$; 3) $\frac{4}{x+3} - \frac{2}{x-1}$; 4) $1 + \frac{5}{x-5} - \frac{4}{x+1}$. **19.** 1) 0; 2; 2) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$; 4) $(-1)^n\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$; $n \in Z$. **20.** 1) $x^2 - 3x$; 2) $x - x^3$; 3) $5x + \cos x - 3$; 4) $2\sin x - x^3$. **21.** 1) $\frac{(2x-1)^5}{10} + C$; 2) $\frac{(5-2x)^{-2}}{4} + C$; 3) $\frac{2\sin x\sqrt{\sin x}}{3} + C$; 4) $\frac{x^2}{2} + \frac{e^{2x}}{2} + C$; 5) $\frac{\cos(2-3x)}{3} + C$; 6) $\frac{2x+\sin(2x-6)}{4} + C$; 7) $\operatorname{tg}3x + C$; 8) $\ln(3+x^2) + C$. **22.** 1) $xe^x + C$; 2) $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^4 - 2x^2 + 2) + C$; 3) $-x\cos x + \sin x + C$; 4) $\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} + C$; 5) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$; 6) $0,25x^2 + 0,5x\sin x + 0,5\cos x + C$. **23.** 1) $\frac{\pi}{8}$; 2) 0; 3) 31,8; 4) $\ln\frac{\pi}{2}$; 5) $\ln\frac{4}{3}$; 6) $0,5(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$. **24.** а) 1) $2 + \frac{1}{\ln 2}$; 2) $\frac{1}{\ln 2} - 0,5$; 3) $2\frac{1}{3}$; ә) 1) $\frac{2\pi}{3}$ куб.бірл.; 2) $21,6\pi$ куб.бірл. **25.** 1) $\{-1; 0; 2\}$; 2) $\{-3; 0; 2\}$; 3) $\{1; 2; 4\}$; 4) $\{4\}$; 5) $\{-1\}$; 6) $\{-5\}$. **26.** 1) $(0,5; 1)$; 2) $(-\infty; -6) \cup (3; +\infty)$; 3) $(2; 3)$; 4) $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4]$. **27.** 1) $[0,5; 5)$; 2) $[-1; 3)$; 3) $(4; 5)$; 4) $(-2; 14]$; 5) $(-\infty; -2] \cup \left[5; \frac{74}{13}\right)$; 6) $(-\infty; 4)$. **28.** 1) 5; 2) 0; 3) $[-4; -2] \cup [1; 2]$; 4) $(0; 0,4) \cup [25; +\infty)$. **29.** 2) $\varnothing$; 3) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in Z$; 5) $\varnothing$; 6) R. **30.** 1) -5; 2) $-\frac{13}{6}$; 3) $\frac{9}{7}$; 4) $\varnothing$. **31.** 1) $y = 1$, $x = 1$; 2) $y = -1$, $x = -3$; 3) $x = 2$, $y = x + 2$; 4) $x = -2$, $y = 2x - 5$. **32.** 1) $M(0; 0)$; 2) иілу нүктелері жоқ; 3) $M(0; 0)$; 4) $M(0; 2)$. **33.** 1) $[-5; +\infty)$ — өседі; $(-\infty; -5]$ — кемиді; 2) $(4; +\infty)$ — өседі; $(-\infty; 0)$ — кемиді; 3) $(-\infty; 0]$ және $[4; +\infty)$ – өседі; $[0; 4]$ — кемиді; 4) $[-1; +\infty)$ — өседі; $(-\infty; -1]$ —кемиді. **35.** 1) $y = -2$; 2) $y = 1,5x + 1$; 3) $y = x$; 4) $y = x$.

36. 1) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$; 3) -1; 4) $\operatorname{arctg}2 + \pi n, n \in Z$. **37.** 1) $y = 0$, $x = 1$; 2) $x = -2$. **38.** 1) $y = \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{4}$; 2) $y = -x + 2$. **40.** 1) $-3, -1, 0, 1, 3$; 2) $[-3; -1]$, $[0; 1]$, $[3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3]$, $[-1; 0]$, $[1; 3]$; 4) $-3, 0, 3$. **43.** min — (-3), 3, max — 0. **44.** $t = 5$ с, $v = 28{,}5$ м/с. **45.** Шаршы, $a = 30$ см; 2) қабырғасы $\frac{a}{4}$ болатын шаршы. **46.** 1) 6; 6; 2) 9; 9; 3) $16 = 4 \cdot 4$. **47.** 1) 12 м/с; 2) $a = 0$. **48.** 80 м. **49.** $\frac{5}{\sqrt{4+\pi}}$ м^2. **50.** $M\left(\frac{4}{3}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. **51.** 1) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$; 2) $\operatorname{arctg}y = x + \frac{x^3}{3} + C$; 3) $\operatorname{arctg}y = \operatorname{arctg}x + C$; 4) $x^2 + y\sin y + \cos y = C$. **52.** 1) $x + y = 0$; 2) $2e^{y/2} = 1 + e^x$; 3) $y = -2\cos x$; 4) $\ln^2 y = 2\operatorname{tg}x$. **53.** 1) $y = (C + x)\sin x$; 2) $\frac{y^2}{2} = x + \frac{3}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 + C$; 3) $y = (C + x)e^x$; 4) $y(1 + x^2)^2 = x^3 + 3x + C$. **54.** 1) $y = C_1e^{6x} + C_2e^{-x}$; 2) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x}$; 3) $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{2x}$; 4) $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{2x}$. **55.** 1) $t \approx 10{,}2$ с; 2) $xy = 12$; 3) 30 мин. **56.** 1) $3 + 14i$; 2) $2 + 7i$; 3) $-1 + 4i$; 4) $8 + 8i$. **57.** 1) $9 + 7i$; 2) $-3 - 8i$; 3) $-3 - 4i$; 4) $3 + i$. **58.** 1) $x = 5$, $y = 2$; 2) $x = 1{,}5$, $y = -2$. **59.** 1) $(5 - 3xi)(5 + 3xi)$; 2) $(2x + 4yi)(2x - 4yi)$; 3) $(x - 2 - i)(x - 2 + i)$; 4) $(x - 3 - 4i)(x - 3 + 4i)$. **60.** 1) $x^2 + 4 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 5 = 0$; 3) $x^2 - 6x + 13 = 0$; 4) $x^2 + 4x + 20 = 0$. **61.** 1) 120, 40 тақ. *Нұсқау.* 2, 6, 7 цифрларынан құрастырылған 10^4 санынан кіші сандарға барлық біртаңбалы, екітаңбалы, үштаңбалы, төрттаңбалы сандар жатады. Олардың саны — $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$. Тақ сандар саны — $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40$; 2) 120, жұп сандар саны — 40. **62.** 1) 73 326. *Нұсқау.* $P(1;\ 2;\ 1) = \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = 12$. 3 және 5 цифрлары $P(2;\ 1) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ рет, ал 7 цифры $P_3 = 3! = 6$ рет кездеседі. Сондықтан барлық төрттаңбалы сандардың қосындысы: $1111 \cdot (3 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 7 \cdot 6) = 73\ 326$. 2) 59 994.

63.

X	0	1	2	3
P	$\frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} \approx 0{,}491$	0,421	0,084	$\frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{2}{18} = \frac{1}{285} \approx 0{,}004$

64. 1) 6; 2) 18; 3) 10. **65.** 1) 7; 2) 5; 3) 14. **66.** 1) $\approx 1{,}16$; 2) $\approx 1{,}03$; 3) $\approx 0{,}98$; 4) $\approx 0{,}67$. **67.** 1) $P(A) = \frac{25}{C_{200}^1} = \frac{25 \cdot 1! \cdot 199!}{200!} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$; 2) $P(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. **68.** $P(A) = \frac{C_{180}^3 \cdot C_{20}^2}{C_{200}^5} = \frac{5! \cdot 195!}{200!} \cdot \frac{180!}{3! \cdot 177!} \cdot \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{178 \cdot 179 \cdot 180 \cdot 19}{199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196} = 0{,}072$. **69.** 1) $P(A) = 0{,}95 + 0{,}05 \cdot 0{,}95 + 0{,}05 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}999\ 875$; 2) $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2520}$. **70.** 1) 0,75; 2) 0,5; 3) 0,4; 4) $\frac{9}{14}$. **71.** 46 оқушы, 7 мөшине. **72.** 1) 23 232 тг; 2) 4448 тг. **73.** 600. **74.** 1) 220 тг немесе 350 тг; 2) 960 тг; 3) 2720 тг. **75.** 1) Екіншісінде, 2336 тг қажет; 2) төртіншіде, 74 тг-ге. **76.** $22 + 13 - 9 = 26$ адам. **77.** 30%. **78.** *Шешуі.* a, b, c оң сандар және көбейтіндісі $\frac{1}{4}$-ден артық, онда $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$. $x(1 - x) = x - x^2 = -(x^2 - x) = -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$; өйткені $x(1 - x) < \frac{1}{4}$. Онда келесі теңсіздіктер ақиқат: $a(1 - a) < \frac{1}{4}$; $b(1 - b) < \frac{1}{4}$; $c(1 - c) < \frac{1}{4}$.

Егер теңсіздіктерді мүшелеп көбейтсек, онда $a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c) < \frac{1}{64}$. Немесе $a(1-b)\cdot b(1-c)\cdot c(1-a) < \frac{1}{64}$. Демек, $a(1-b)\cdot b(1-c)\cdot c(1-a) > \frac{1}{64}$ теңсіздігі мүмкін емес. Яғни $a(1-b) > \frac{1}{4}$; $b(1-c) > \frac{1}{4}$; $c(1-a) > \frac{1}{4}$ теңсіздіктері бір мезетте орындалмайды. **79.** *Шешуі.* $x^2 + y^2 > 2xy$ (1) ақиқат, бірақ $x \neq y$, онда $x^2 + y^2 > 2xy$. (1)-теңсіздіктің екі жағын $ab(ab > 0)$ көбейтеміз, сонда $ab(x^2 + y^2) > 2abxy$ (2). Енді (2) теңсіздігінің екі жағына $(a^2 + b^2)xy$ өрнегін қосамыз. $(a^2 + b^2)xy + ab(x^2 + y^2) > (a^2 + b^2)xy + 2abxy$ немесе $(a^2 + b^2)xy + ab(x^2 + y^2) = a^2xy + b^2xy + abxy^2\ aby^2 = ax(ay + bx) + by(bx + ay) = (ay + bx)(ax + by)$. Онда $(a^2 + b^2)xy + 2abxy = (a + b)^2xy$ теңдігі орындалады. Демек, $(ay + bx)(ax + by) > (a + b)^2xy$ (3). Өйткені $a + b > 0$ және $ay + bx > 0$, онда (3) теңсіздігін $(a + b)(ay + bx) > 0$ бөлеміз, сонда $\frac{(a+b)xy}{ay+bx} < \frac{ax+by}{a+b}$. **80.** *Шешуі.*

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$ болғандықтан $c = \frac{2ab}{a+b}$. Онда $\frac{a+c}{a-c} = \frac{a + \frac{2ab}{a+b}}{a - \frac{2ab}{a+b}} = \frac{a^2 + 3ab}{a^2 - ab} = \frac{a+3b}{a-b}$. Яғни $\frac{a+c}{a-c} = \frac{a+3b}{a-b}$. (1)

Тура осылай $\frac{b+c}{b-c} = \frac{b + \frac{2ab}{a+b}}{b - \frac{2ab}{a+b}} = \frac{b^2 + 3ab}{b^2 - ab} = \frac{b+3a}{b-a}$, яғни $\frac{b+c}{b-c} = \frac{b+3a}{b-a}$. (2)

(1) және (2) теңдіктерін қосамыз. Сонда $\frac{a+c}{a-c} + \frac{b+c}{b-c} = \frac{a+3b}{a-b} + \frac{b+3a}{b-a} = \frac{2a-2b}{b-a} = -2$. **81.** Жоқ. *Шешуі.* Бір санын қосу немесе азайту санның жұптылығын өзгертеді. Сондықтан 100 санын 25 рет өзгерткенде тақ сан шығады. Демек, нәтижесінде 80 саны шықпайды. **82.** *Шешуі.* Оң сандардың геометриялық ортасы олардың арифметикалық ортасынан артық болмағандықтан

$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} < \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{(n+1)n}{2n} = \frac{n+1}{2}$. Соңғы теңсіздікті n дәрежеге шығарсақ, $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n > 2$. **83.** 1) $\varnothing$; 2) (1; 3). **84.** $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

Шешуі. $3x^2 + 2 > 1$ ескеріп, $x^2 - 3x + 7 > 3x^2 + 2$ теңсіздігін шешеміз: $2x^2 + 3x - 5 < 0$. Яғни $-2{,}5 < x < 1$. $(x + 1)$ байланысты екінші теңсіздікті шешеміз. $(x + 1)^2 - 4a^2(x + 1) + 3a^4 = 0$ теңдеулерінің түбірлері a^2 және $3a^2$. Демек, $x + 1 < a^2$ немесе $x + 1 > 3a^2$. Сондықтан $x < a^2 - 1$ немесе $x > 3a^2 - 1$. Бірінші теңсіздіктің шешімі екінші теңсіздіктің шешіміне кіреді. Демек, $a^2 - 1 > 1$ немесе $3a^2 - 1 < -2{,}5$. Екінші теңсіздіктің шешімі бос жиын, бірінші теңсіздіктің шешімі — $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$. **85.** $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$. **86.** $4 < a < 5$. **87.** 1) 1; 2) 2π; 3) $2{,}25\pi$.

КІРІСПЕ

VII тарау. КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР

VIII тарау. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР