АЛГЕБРА
және АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

10

1-бөлім

Жалпы білім беретін мектептің
жаратылыстану-математика бағытындағы
10-сыныбына арналған оқулық

Қазақстан Республикасының
Білім және ғылым министрлігі бекіткен

Алматы "Мектеп" 2019

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72
А39

ШАРТТЫ БЕЛГІЛЕР:

? — жаңа тақырыпты игеру барысында қойылатын оқыту мақсаттары

✎ — өздігінен орындауға арналған тапсырмалар

■ — теореманың немесе қасиеттің дәлелдеуінің соңы

ABD — қосымша мағлұматтар

? — өзіндік тексеру сұрақтары

A — барлық оқушылардың орындауы міндетті жаттығулар

B — орта деңгейдегі жаттығулар

C — жоғары деңгейдегі жаттығулар

ҚАЙТАЛАУ — өткенді қайталауға арналған жаттығулар

Әбілқасымова А.Е. т.б.
А39 **Алгебра және анализ бастамалары:** Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық. 1-бөлім / А.Е. Әбілқасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский, З.Ә. Жұмағұлова. — Алматы: Мектеп, 2019 — 240 б., сур.

ISBN 978—601—07—1148—8

А $\frac{4306020503-081}{404(05)-19}$ 42(1)—19

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72

ISBN 978—601—07—1148—8

АЛҒЫ СӨЗ

Сендер 10-сынып "Алгебра және анализ бастамалары" оқулығында тригонометриялық функциялардың графиктері және қасиеттерімен танысасыңдар. Функцияның графигіне түрлендірулер қолдана отырып, функцияның графигін салуды, график бойынша функцияға зерттеу жүргізуді, құрамында арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенсі бар өрнектерді түрлендіруді, тригонометриялық теңдеулер мен олардың жүйелерін және тригонометриялық теңсіздіктерді, Горнер схемасын қолданып жоғары дәрежелі теңдеулерді шығаруды үйренесіңдер. Стохастика элементтері туралы мағлұматтар бойынша білімдеріңді кеңейтесіңдер.

Осы курста математикалық анализді қолданып математика есептерін шығарудың жаңа жолдарын, курстың әртүрлі бөлімдеріндегі есептерді шешу үшін қажет теңдеулер мен теңсіздіктерді, пәнаралық байланысқа қажетті математикалық білімдерді меңгересіңдер.

Оқулық он тараудан және оқу жылының басында 7—9-сыныптардағы алгебра, оқу жылының соңында 10-сыныптағы алгебра және анализ бастамалары курсын қайталауға арналған жаттығулардан тұрады. Тараулар параграфтарға бөлінген. Әр параграфта өздігінен орындауға арналған тапсырмалар; параграфтағы негізгі ұғымдарды, теория мен онда қарастырылған мысалдарды игеруді қажет ететін өзіндік тексеру сұрақтары берілген.

Оқулықтың әрбір параграфында А, В және С әріптерімен белгіленген үш деңгейлі жаттығулар ұсынылып отыр. Бірінші деңгейдегі жаттығуларды (А) барлық оқушылардың орындауы міндетті деп саналады. Екінші деңгейдегі жаттығулар (В) — орта деңгейдегі жаттығулар. Үшінші деңгейдегі жаттығулар (С), оның ішінде (*) белгісімен берілген жаттығулар дайындығы жоғары және математикаға қызығушылық танытқан оқушыларға арналған. А тобының жаттығуларындағы есептерді шығару дағдысын меңгеріп алған соң, В тобының жаттығуларын орындауға кірісу керек, С тобының жаттығулары оқушының қалауы бойынша орындалады. А, В, С топтарының жаттығуларынан кейін шешуі келесі параграфтың материалын меңгеруге септігін тигізетін қайталау жаттығулары ұсынылған.

Жаттығулардың дұрыс орындалғанын тексеру мақсатында оқулықтың соңында жауаптар берілген.

Оқулық сендерге математиканы әрі қарай оқуда практикалық дағды мен дәлелдеулер жүргізу біліктілігін жетілдіруге, абстракциялық және логикалық ойлауды, интуицияны дамытуға көмектеседі.

7—9-СЫНЫПТАРДАҒЫ АЛГЕБРА КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\frac{14p^4}{5q^3} \cdot \frac{15q^2(p-5)^2}{21p^2} : \frac{3p^2}{2q^6}$;

2) $\frac{25a^2(b-1)}{3^2 d} : \frac{5cd^3}{27ab} : \frac{a^3(b-1)}{c^3 d}$;

3) $\frac{24x^5y^4}{13ab^2} : \frac{4xy^2}{13a^2b} : \frac{3x^2(y-2)}{a^2b}$;

4) $a^4 \cdot \left(\frac{3a+b}{a} - 3\right)^2 + b^4 \cdot \left(\frac{a-2b}{b} + 2\right)^2 - 2(ab)^2$;

5) $3 + \left(\frac{28c}{c^2-49} + \frac{c-7}{c+7}\right) \cdot \frac{c}{c+7} - \frac{c}{c-7}$;

6) $4{,}5 + \frac{25x^2 - 4^{-1}}{5x + 2^{-1}} - 3x$;

7) $3{,}5 + \frac{9x^2 - 4^{-1}}{3x - 2^{-1}} - 2(x-1)$;

8) $\frac{2a-2}{a-2} + 1 - \left(\frac{8a}{a^2-4} + \frac{a-2}{a+2}\right) \cdot \frac{a}{a+2}$.

2. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^2 - 3(x-2) + 2x - 12 = 0$;

2) $3x^2 - 2(x^2 - 2x) + 2x - 11 = 5$;

3) $5x^2 - 3(x^2 + 2x) + 3x - 13 = 4$;

4) $x^2 - 4|x| + 2x - 7 = 1$;

5) $2x^2 - 3|x+3| + 5x - 8 = 0$;

6) $4x^2 + 5|x-1| + 4x + 11 = 1$.

3. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $1 - \frac{x}{x+2} = \frac{x}{x-3}$;

2) $x^2 + \frac{1-3x}{x+4} = 16 - \frac{3x-1}{x+4}$;

3) $\frac{36}{x^2 - 12x} - \frac{3}{x-12} = 3$;

4) $\frac{5}{2x+3} + \frac{3-2x}{x+2} = 10$;

5) $\frac{12}{x^2+2x} - \frac{3}{x^2+2x-2} = 1$;

6) $\frac{16}{x^2+5x-6} - \frac{20}{x^2+5x+6} = 1$.

4. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $(x-2)(x+3)(x-1)^2 \geqslant 0$;

2) $(2x-3)(x+5)(3x-1)^3 \leqslant 0$;

3) $|x-2|\,(x+4)(x-5)^2 \leqslant 0$;

4) $\frac{2}{a+3} + \frac{1}{a+1} < \frac{3}{a+2}$;

5) $\frac{2}{a-2} - \frac{1}{a+2} > 2$;

6) $\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+3} \leqslant \frac{1}{x+1}$.

5. Теңсіздікті квадраттық функцияның графигі арқылы және интервалдар әдісімен шығарыңдар:

1) $x^2 - 3x - 18 \geqslant 0$; 2) $-5x^2 - 12x + 17 \leqslant 0$; 3) $6x^2 - 13x - 5 > 0$.

6. Берілген теңсіздікті қанағаттандыратын ең үлкен натурал санды табыңдар:

1) $(3 - x)(x - 8)^2 > 0$; 2) $(x - 3)^2(x - 11) \leqslant 0$;

3) $(2x - 2,5)^2(3x - 13)^3 < 0$; 4) $\dfrac{x^2 - 81}{x + 5} < 0$;

5) $\dfrac{15x - x^2}{x - 5,5} \geqslant 0$; 6) $\dfrac{11x - x^2}{x + 6} > 0$.

7. Берілген теңсіздікті қанағаттандыратын ең кіші бүтін санды табыңдар:

1) $\dfrac{x + 3}{x - 7} \leqslant 0$; 2) $\dfrac{12 - 3x}{x - 2} \geqslant 0$; 3) $\dfrac{5 - 2x}{3x + 13} > 0$;

4) $\dfrac{x^2 - 121}{x + 1} \geqslant 0$; 5) $\dfrac{x^2 - 12x}{x - 2,5} \geqslant 0$; 6) $\dfrac{8x - x^2}{x + 6} \leqslant 0$.

8. Теңдеулер жүйесін алмастыру тәсілімен шешіңдер:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 - y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y = 4, \\ x^2 + y = 14; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 - 2y = 13; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x + 0,5y = 1,5, \\ x^2 - y = -12; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - y^2 = 1, \\ x - y = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy + 7 = 0, \\ x - y + 8 = 0. \end{cases}$

9. Теңдеулер жүйесін алгебралық қосу тәсілімен шешіңдер :

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7, \\ 3x^2 - y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - 1 = y^2, \\ 3y^2 = 2x^2 - 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10 = 0, \\ xy - 3 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy = \dfrac{1}{8}, \\ 2x^2 + 2y^2 = \dfrac{5}{8}; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 1 = 27, \\ 3x^2 - y^2 = 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ x^2 - 2xy + 1 = 0. \end{cases}$

10. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер (жауабын ондық үлеске дейін дөңгелектеңдер):

1) $\begin{cases} xy = 1, \\ y = 2x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = -2, \\ y = 2x^2 - 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = 2. \end{cases}$

11. Берілген жүйенің шешімін табыңдар:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = -1, \\ x^3 + y^3 = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 25, \\ 2x^2 - 2xy - y^2 = 11. \end{cases}$

12. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 + 1 = 0, \\ 3xy + 7y^2 = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 - 6 = 0, \\ 4 + 3xy - y^2 = 0. \end{cases}$

***13.** Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ |x| + y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| + |y| = 3, \\ |x| + y^2 = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| + |y| = 2, \\ xy - 1 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x| + |y| = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

14. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} -x^2 + 2x + 15 > 0, \\ x^2 - 12x + 27 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 6x + 16 \leqslant 0, \\ x^2 + x + 20 > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -x^2 + x + 12 \geqslant 0, \\ x^2 - 3x - 10 < 0. \end{cases}$

15. Теңсіздіктер жүйесімен берілген нүктелер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер:

1) $\begin{cases} x^2 - 7x \geqslant 0, \\ x + 4 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - x^2 < 0, \\ 4 - 3x \leqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y^2 + x^2 \leqslant 4, \\ 2 - x \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 0{,}5x^2 \geqslant 0, \\ y^2 + x^2 \leqslant 16. \end{cases}$

***16.** Теңсіздіктер жүйесімен берілген нүктелер жиынын координаталық жазықтықта кескіндеңдер:

1) $\begin{cases} |x| \geqslant 5, \\ y + 2x > 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + x^2 - 16 < 0, \\ y - |x| < 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ x^2 + y^2 - 9 \leqslant 0. \end{cases}$

17. Теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын бүтін сандардың қосындысының мәнін табыңдар:

1) $\begin{cases} |2x - 5| \leqslant 1, \\ x^2 + 2x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x - 4| \leqslant 2, \\ -x^2 + 5x > 0. \end{cases}$

18. 1) Пойыз белгілі бір уақытта 220 км жол жүруі керек. Екі сағаттан кейін ол 10 мин аялдады. Бекетке белгіленген уақытта жету үшін машинист пойыздың жылдамдығын 5 км/сағ арттырды. Пойыздың алғашқы жылдамдығын табыңдар.

2) Аралығы 240 км болатын *A* және *B* пункттерінің арасындағы жолды автокөлік тұрақты жылдамдықпен жүріп өтті. Автокөлік кейін қайтқанда жолдың бірінші жартысын бастапқы жылдамдықпен жүріп, екінші жартысында жылдамдығын 10 км/сағ арттырды. Нәтижесінде қайтар жолға 24 мин кем уақыт жұмсады. Автокөлік *A* пунктінен *B* пунктіне дейін қандай жылдамдықпен жүрді?

3) Пойыз 40 км/сағ жылдамдықпен жүріп келеді. Жолаушы қарсы келе жатқан пойыздың жанынан 3 с жүріп өткенін байқады. Егер пойыздың ұзындығы 75 м болса, оның жылдамдығы неге тең?

19. 1) Аралығы 50 км болатын A және B пункттерінен бір мезетте бір-біріне қарама-қарсы бағытта екі турист жолға шықты. Олар 5 сағаттан кейін кездесті. Кездескеннен кейін A пунктінен B пунктіне бара жатқан турист жылдамдығын 1 км/сағ кемітіп, екінші турист жылдамдығын 1 км/сағ арттырды. Екінші туристің A пунктіне жеткен уақытына қарағанда бірінші турист B пунктіне 2 сағ бұрын жетті. Әр туристің бастапқы жылдамдығын табыңдар.

2) Екі жұмысшы тапсырманы 12 сағ-та орындайды. Егер тапсырманың жартысын алдымен бірінші жұмысшы, екінші жартысын екінші жұмысшы орындаса, онда тапсырманы 25 сағ-та орындауға болады. Әр жұмысшы тапсырманы қанша уақытта орындайды?

3) Ұзындығы 60 м шеңбер бойымен бір бағытта екі нүкте қозғалады. Бірінші нүкте екіншіге қарағанда 5 с бұрын толық айналым жасайды және әрбір 60 с сайын екінші нүктені басып озып отырады. Әр нүктенің жылдамдығын табыңдар.

20. 1) Мыс пен қалайының екі қорытпасы берілген. Біріншінің құрамында 40% мыс, екіншісінде 68% қалайы бар. Осы қорытпаларды қосқанда құрамында 35% мыс болатын 8 кг қорытпа шығу үшін әр қорытпаның массасы қандай болуы керек?

2) Массасы 18 кг қоспа екі заттан тұрады. Бірінші заттан 40% және екінші заттан 25% алғаннан кейін екі заттың қоспадағы мөлшері бірдей болды. Қоспадағы әрбір заттың бастапқы мөлшерін табыңдар.

21. 1) Оң екітаңбалы санның цифрларының квадраттарының қосындысының мәні 13-ке тең. Егер берілген саннан 9 санын азайтса, онда осы санның кері ретпен жазылған цифрларынан тұратын сан шығады. Шыққан санды табыңдар.

2) Оң екітаңбалы сан осы санның цифрларының қосындысының мәнінен 9-ға артық. Квадраты осы санның бірлігіндегі цифрдың квадратынан 180-ге артық болса, берілген санды табыңдар.

22. Берілген функциялардың графигін салыңдар және мәндер жиынын көрсетіңдер :

1) $y = \begin{cases} x + 3, \text{ мұндағы } x < -2, \\ x^2 - 3, \text{ мұндағы } x \geqslant -2; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 2x - 2, \text{ мұндағы } x < -1, \\ x^2 - 1, \text{ мұндағы } x \geqslant -1; \end{cases}$

3) $y = 3\sqrt{x} - 2;$ 4) $y = 3 - \sqrt{x};$

5) $y = x^2 + 2|x|;$ 6) $y = -x^2 + 4|x|;$

7) $y = 3x - x \cdot |x|;$ 8) $y = x \cdot |x| - 2x.$

23. Функцияның графигін салыңдар және бар болған жағдайда оның ең үлкен немесе ең кіші мәнін көрсетіңдер :

1) $y = 2x^2 - 2x + 3$; 2) $y = -2x^2 - 4x + 5$;

3) $y = 4 - \sqrt{x - 2}$; 4) $y = -2 + \sqrt{3 - x}$.

24. Теңдеуді графиктік тәсілмен шешіңдер және түбірлерінің жуық мәндерін жазыңдар:

1) $x^2 - 6x = \frac{1}{x + 1}$; 2) $-3x^2 + 2x = \frac{x + 1}{x - 2}$.

***25.** Теңдеудің графигін салыңдар:

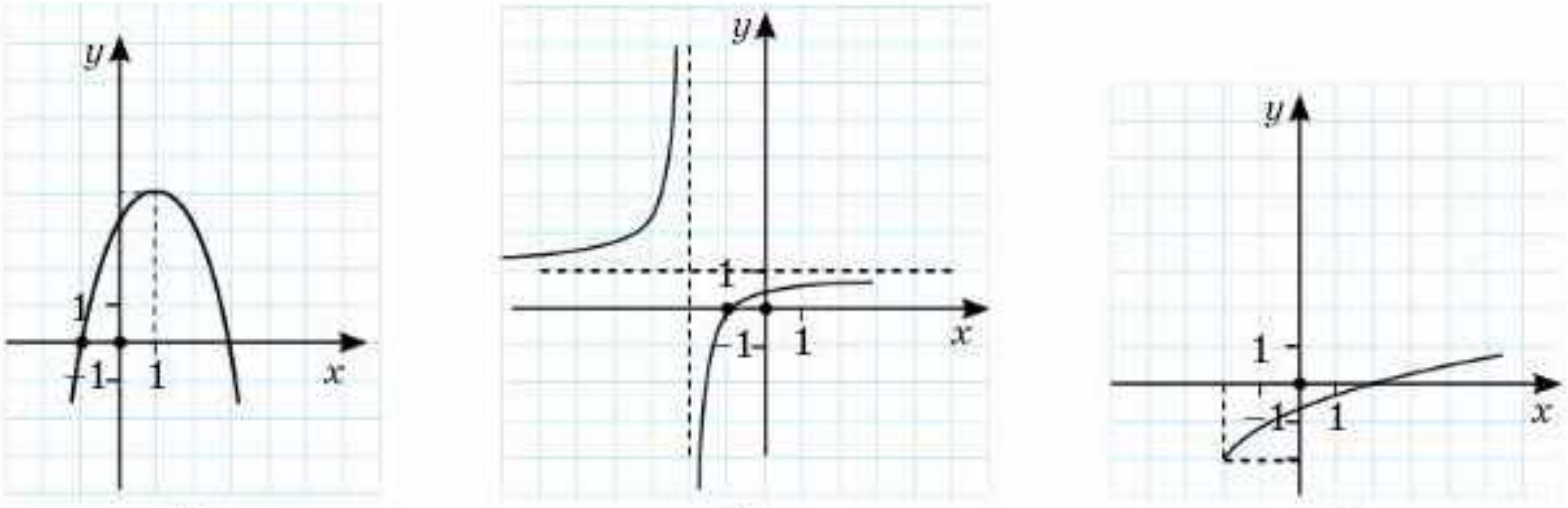
1) $\frac{y - x^2 + 3}{x + 1} = 0$; 2) $\frac{y - x^2 + 4x}{x - 2} = 0$; 3) $\frac{y^2 + x^2 - 25}{x^2 - 1} = 0$.

26. 1) $y = 2x^2$ функциясының графигі: а) Ox осі бойымен оңға 3 бірлікке; ә) Oy осі бойымен төмен 2 бірлікке; б) Ox осі бойымен солға 4 бірлікке және Oy осі бойымен төмен 3 бірлікке;

2) $y = \frac{1}{x}$ функциясының графигі: а) Ox осі бойымен оңға 3 бірлікке; ә) Oy осі бойымен төмен 2 бірлікке; б) Ox осі бойымен солға 4 бірлікке және Oy осі бойымен жоғары 3 бірлікке;

3) $y = 3\sqrt{x}$ функциясының графигі: а) Ox осі бойымен оңға 3 бірлікке; ә) Oy осі бойымен төмен 2 бірлікке; б) Ox осі бойымен солға 4 бірлікке және Oy осі бойымен төмен 3 бірлікке жылжыту арқылы алынған графикке сәйкес функцияның аналитикалық формуласын жазыңдар .

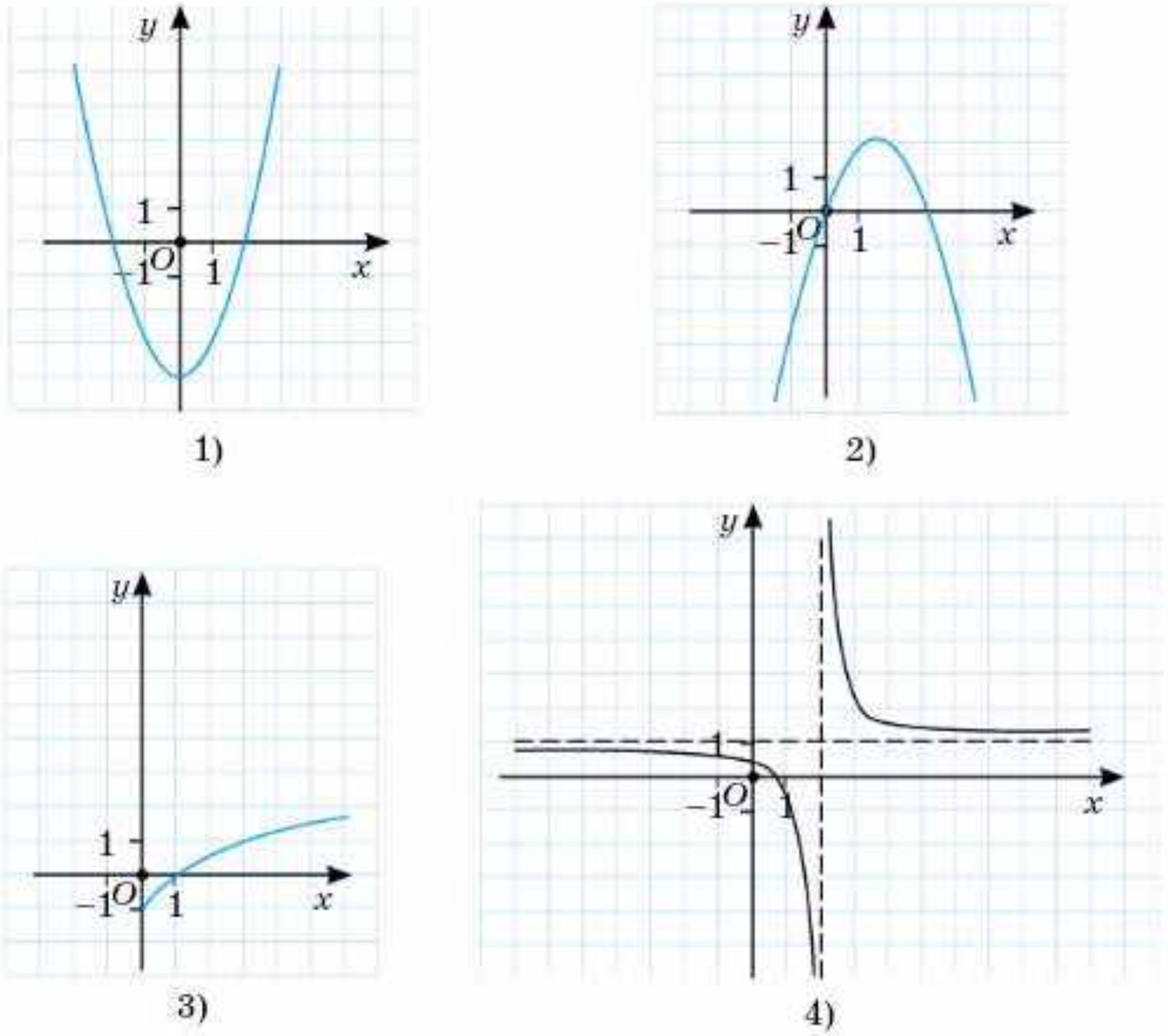
27. $y = f(x)$ функциясының графигі бойынша оның аналитикалық формуласын жазыңдар (1-сурет):



1) 2) 3)

1-сурет

28. $y = f\,(x)$ функциясының графигі бойынша оның аналитикалық формуласын жазыңдар және анықталу облысын, мәндер жиынын, өсу аралықтарын, кему аралықтарын көрсетіңдер (2-сурет):



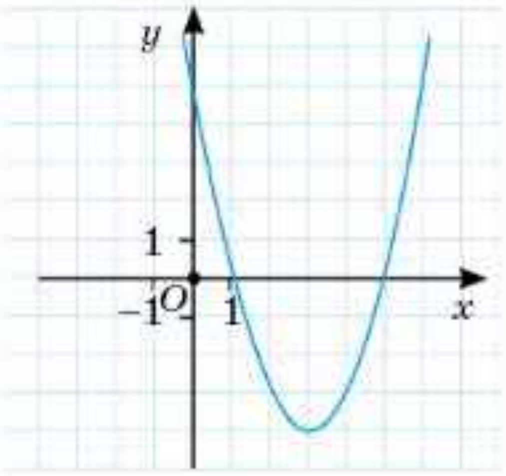
1)　2)　3)　4)

2-сурет

29. 3-суретте квадраттық функцияның графигі кескінделген. Функцияның:

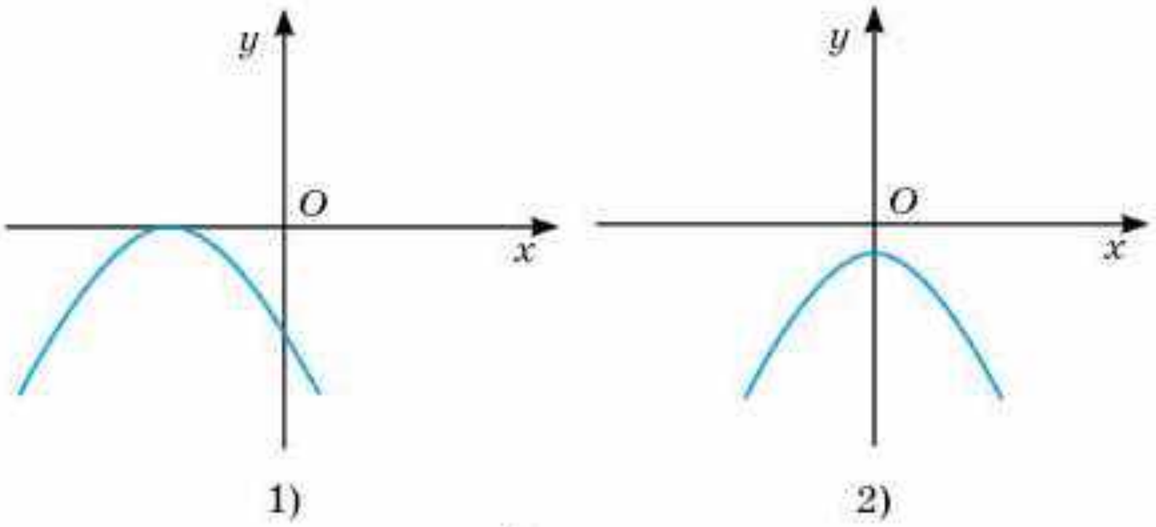
1) нөлдері мен бірсарындылық аралықтарын;
2) таңбатұрақтылық аралықтарын;
3) мәндер жиынын көрсетіңдер.

Симметрия осінің теңдеуін жазыңдар.



3-сурет

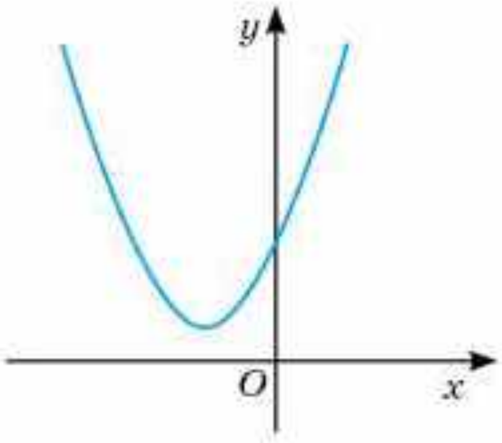
30. 4-суретте $y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функциясының графигі кескінделген және $D = b^2 - 4ac$. a, b, c және D сандарының таңбаларын анықтаңдар.



1)　2)

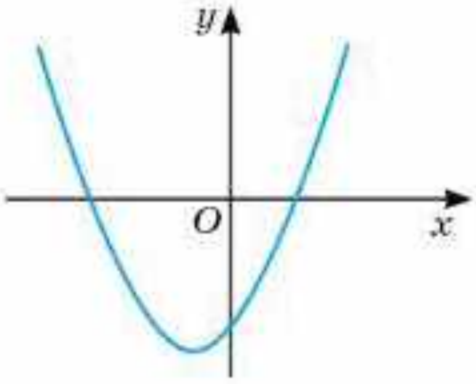
4-сурет

31. 5-суретте $y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функциясының графигі кескінделген және $D = b^2 - 4ac$. Ақиқат теңсіздіктерді көрсетіңдер.



1)

а) $ac > 0$;
ә) $Dc > 0$;
б) $Db > 0$;
в) $bc > 0$;
г) $aD > 0$.



2)

а) $ab > 0$;
ә) $Dc > 0$;
б) $Db > 0$;
в) $bc > 0$;
г) $aD > 0$.

5-сурет

32. Егер $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессиясында:
1) $a_1 = 9{,}5$; $a_2 = 11{,}5$; $n = 4$;
2) $a_1 = -21$; $a_2 = -16$; $n = 6$;
3) $a_1 = 23$; $a_2 = 19$; $n = 5$;
4) $a_1 = -2{,}9$; $a_2 = -4{,}9$; $n = 7$
болса, онда d және a_n-ді табыңдар.

33. 1) Егер арифметикалық прогрессияның бірінші және төртінші мүшелерінің қосындысының мәні 23-ке, үшінші және алтыншы мүшелерінің қосындысының мәні 31-ге тең болса, онда оның бірінші мүшесі мен айырымын табыңдар.

2) Егер геометриялық прогрессияның бірінші және үшінші мүшелерінің қосындысының мәні 49,2-ге, бірінші және үшінші мүшелерінің айырымының мәні −15,6-ға тең болса, онда оның бірінші мүшесі мен еселігін табыңдар.

3) $a_2 + a_4 = 3{,}4$ болса, онда арифметикалық прогрессияның алғашқы бес мүшесінің қосындысының мәнін табыңдар.

34. 1) $a_1 = -35$; $a_n = -15$; $d = 5$; $m = 6$;

2) $a_3 = -6{,}6$; $a_n = -7{,}3$; $d = 0{,}7$; $m = 20$ болса, арифметикалық прогрессиядағы n мен S_m-ді табыңдар.

35. 1) $d = -20$; $S_4 = 300$; 2) $d = 20$; $S_6 = 60$; 3) $d = 25$; $S_7 = 224$ болса, онда арифметикалық прогрессиядағы a_1-ді табыңдар.

36. 1) $b_1 = 0{,}7$; $b_3 = 2{,}8$; $n = 6$; 2) $b_1 = 0{,}6$; $b_2 = 1{,}8$; $n = 5$;

3) $b_1 = -0{,}2$; $b_2 = 1{,}4$; $n = 4$ болса, онда геометриялық прогрессияда q, b_n және S_n-ді табыңдар.

37. 1) $b_3 = \frac{9}{8}$; $q = -\frac{3}{4}$; 2) $b_5 = -16$; $q = \frac{2}{3}$; 3) $b_4 = 12{,}5$; $q = -\frac{5}{6}$ болса, онда геометриялық прогрессиядағы b_1 мен S_5-ті табыңдар.

38. 1) $\sqrt{3};\ -1;\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \dots;$ 2) $\sqrt{2}+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)+\dots$ шексіз геометриялық прогрессиясы мүшелерінің қосындысының мәнін табыңдар.

39. Төмендегі шексіз периодты бөлшекті жай бөлшек түрінде жазыңдар:
1) 2,(31); 2) 0,(103); 3) 2,3(41); 4) 45,0(23).

40. Санды өрнектің мәнін табыңдар:
1) $\cos30^\circ-\sin60^\circ+\mathrm{ctg}45^\circ-\mathrm{tg}60^\circ$;
2) $\sin210^\circ-\cos240^\circ-\mathrm{ctg}30^\circ-\mathrm{tg}135^\circ$;
3) $\cos45^\circ-\mathrm{tg}45^\circ-\sin135^\circ-\mathrm{ctg}135^\circ$;
4) $\sin360^\circ-\cos30^\circ+\mathrm{tg}210^\circ-\mathrm{ctg}60^\circ$;
5) $-2\cos720^\circ+\mathrm{tg}30^\circ-\mathrm{ctg}210^\circ+\sin120^\circ$;
6) $\mathrm{tg}0^\circ-2\mathrm{ctg}90^\circ-\sin0^\circ-3\cos90^\circ$.

41. Есептеңдер:
1) $2\sin\frac{\pi}{6}-4\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}-4\mathrm{ctg}\frac{4\pi}{3}$;
2) $-3\cos\frac{\pi}{2}+7\sin\frac{\pi}{2}-3\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{4}-5\mathrm{tg}0^\circ$;
3) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}-11\mathrm{ctg}\frac{9\pi}{4}$; 4) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}-5\sin\frac{\pi}{3}+6\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$.

42. Егер: 1) $\sin\alpha=0{,}4$ және $90^\circ<\alpha<180^\circ$ болса, онда $\cos\alpha$, $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$;
2) $\cos\alpha=-0{,}6$ және $180^\circ<\alpha<270^\circ$ болса, онда $\sin\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$, $\mathrm{tg}2\alpha$;
3) $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{8}$ және $180^\circ<\alpha<270^\circ$ болса, онда $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos2\alpha$-ны табыңдар.

43. Егер: 1) $\cos\alpha=\frac{7}{9}$ және $0^\circ<\alpha<90^\circ$ болса, онда $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha$;
2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ және $90^\circ<\alpha<180^\circ$ болса, онда $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\cos\alpha$-ны табыңдар.

44. Егер $\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin\beta=\frac{1}{8}$ және α, β бұрыштары I ширекке тиісті болса, онда $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$-ны табыңдар.

45. Егер $\sin\alpha=\frac{6}{7}$, $\sin\beta=\frac{7}{8}$ және α, β бұрыштары I ширекке тиісті болса, онда $\cos(\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$, $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$-ны табыңдар.

46. Есептеңдер:
1) $\dfrac{2\cos\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,60^\circ}{2\sin\frac{\pi}{6}+\cos60^\circ}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,30^\circ-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}}{3\,\mathrm{tg}\,45^\circ-2\cos0^\circ}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}30^\circ + \cos\dfrac{\pi}{6}}{\sin\dfrac{\pi}{2} - 4\operatorname{ctg}45^\circ}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}\sin 45^\circ + \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}}{5\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} - 4\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}}$.

47. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(2\pi + \alpha)$;

2) $\dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha}$;

3) $\cos(2\pi - \alpha) \cdot \left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 \cdot \operatorname{tg}(2\pi + \alpha) \cdot \left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2$;

4) $\dfrac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

48. α-ның кез келген мүмкін мәнінде берілген өрнектің мәні 2-ге тең болатынын дәлелдеңдер:

1) $2\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) - 2\sin(-\alpha) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(360^\circ - 2\alpha) \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right) -$
$- 2\cos\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$;

2) $2 \cdot \left(0{,}5 - 0{,}5\cos 4\alpha + \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}\right) - (1 - \sin^2 2\alpha) \cdot \dfrac{1}{\cos^2 2\alpha} +$
$+ \operatorname{ctg}3\alpha \operatorname{ctg}(90^\circ - 3\alpha)$.

49. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $2\operatorname{tg}9\alpha \cdot \operatorname{ctg}(\pi - 9\alpha) + \sin^2\dfrac{\alpha}{3} \cdot \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{3} + \sin^2\dfrac{\alpha}{3}$;

2) $2 + (0{,}5 + 0{,}5\cos 10\alpha) : (0{,}5 - 0{,}5\cos 10\alpha) \cdot \operatorname{tg}^2(\pi - 5\alpha)$;

3) $3 + \dfrac{\cos^2\alpha - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 - 8\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $\dfrac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - 1} - 1$.

50. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4\alpha\right)\sin(4\pi - 2\alpha)\cos(-2\alpha)}{\operatorname{ctg}(-4\alpha)\left(\cos^2 2\alpha - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right)} = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}4\alpha$;

2) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg}3\alpha;$

3) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) - 1 = 0;$

4) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\alpha;$

5) $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1;$

6) $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos\alpha + 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha} = -\operatorname{ctg}3\alpha;$

7) $\dfrac{\sin 9\alpha + \sin 8\alpha - \sin 7\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$

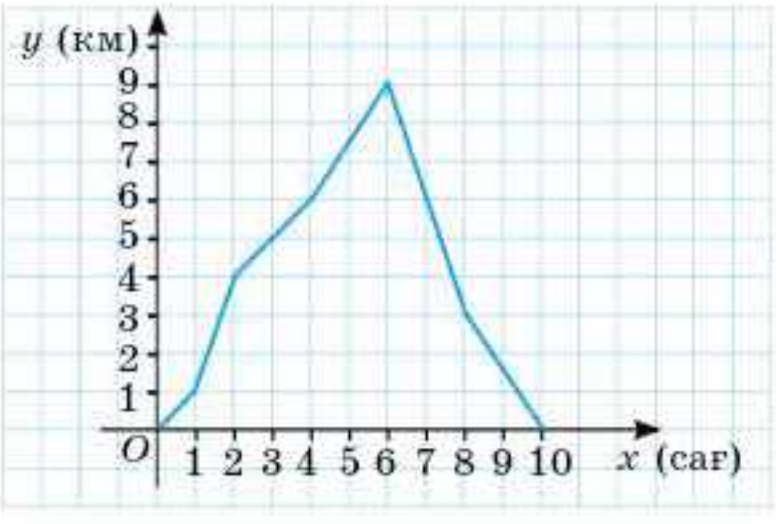
8) $\dfrac{2\cos\beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta}{\sin\beta \sin 2\beta + \cos 3\beta} = 4\cos 2\beta.$

Практикаға бағытталған тапсырмалар

51. Олжас мектептен 1 км қашақтықта, Айгүл 400 м қашықтықта тұрады. Айгүлдің бір қадамының ұзындығы 60 см, Олжастың бір қадамының ұзындығы 75 см. Олжас 10 с-та 12 қадам, Айгүл 10 қадам жасайды. Келесі сұрақтарға жауап беріңдер:

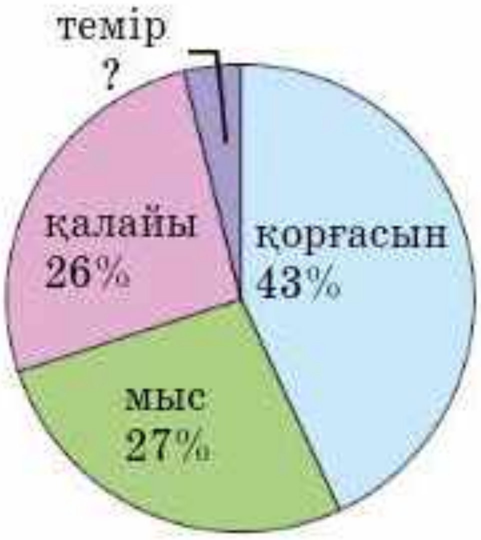
1) Айгүл, Олжас мектепке дейін қандай жылдамдықпен жүреді? Жылдамдықты м/мин-пен беріңдер.
2) Айгүл мен Олжас бір-бірінен қандай қашықтықта тұрады?
3) Айгүл мен Олжастың жақындау жылдамдығын табыңдар.
4) Егер Олжас пен Айгүл үйлерінен бір мезетте шығатын болса, онда қанша уақыттан кейін кездеседі? Жауапты бүтінге дейін дөңгелектеңдер және түсіндіріңдер.
5) Егер Олжас пен Айгүл үйлерінен бір мезетте шығатын болса, онда Олжас мектепке Айгүлден бұрын келуі үшін 10 с-та қанша қадам жасауы керек? Жауапты бүтінге дейін дөңгелектеңдер және түсіндіріңдер.

52. Жолаушы M пунктінен N пунктіне дейін барып, кейін қайтты. 6-суретте жолаушының қозғалыс графигі берілген. Абсцисса осі бойымен қозғалыс уақыты, ордината осі бойымен жолдың ұзындығы көрсетілген. Жолаушының қозғалыс графигін қолданып, келесі сұрақтарға жауап беріңдер:



6-сурет

1) Жолаушы қозғалысының ең үлкен жылдамдығы неге тең?
2) Жолаушы ең үлкен жылдамдықпен *M* пунктінен *N* пунктіне барып қайтуға қанша уақыт жіберген?
3) Жолаушының *M* пунктінен *N* пунктіне дейінгі қозғалысының орташа жылдамдығы неге тең?



7-сурет

53. Массасы 75 кг қоспаның құрамы 7-суретте берілген.

1) Қоспада қанша килограмм мыс пен қорғасын бар?
2) Қоспада қанша килограмм темір бар?
3) Қоспа құрамында темірдің пайыздық шамасы 10% болуы үшін осы қоспаға қанша килограмм темір қосу керек?
4) Қоспа құрамында темірдің пайыздық шамасы 10% болса, онда осы қоспа құрамында қалайының пайыздық шамасы қандай болады?

54. Марат әкесімен метро эскалаторымен түсті. Егер Марат қозғалыстағы эскалатордың баспалдағында тұратын болса, онда төменге 56 с-та, ал тоқтап тұрған эскалатормен түсетін болса, онда 42 с-та түсетінін байқады.

1) Қозғалыстағы эскалатордың жылдамдығы тоқтап тұрған эскалатормен жүріп келе жатқан әкесі мен баласының жылдамдығынан қанша кем?
2) Егер әкесі мен баласы тоқтап тұрған эскалаторда жүрген жылдамдығымен қозғалыстағы эскалатормен жүретін болса, онда олар қанша уақытта төменге түседі?
3) Эскалатор жүріп тұрғанда Марат жоғарыға 56 с-та көтерілгісі келсе, онда оның жылдамдығы қандай болуы керек?

Алматы метросы

55. 1-кестеде оқушылардың килограммен алынған массалары жазылған.

1-*кесте*

57	56	56	58	55
59	57	58	56	58
56	58	59	55	59
57	56	59	57	57
58	59	56	59	56

Кестені қолданып:

1) вариациялық қатарды жазыңдар;

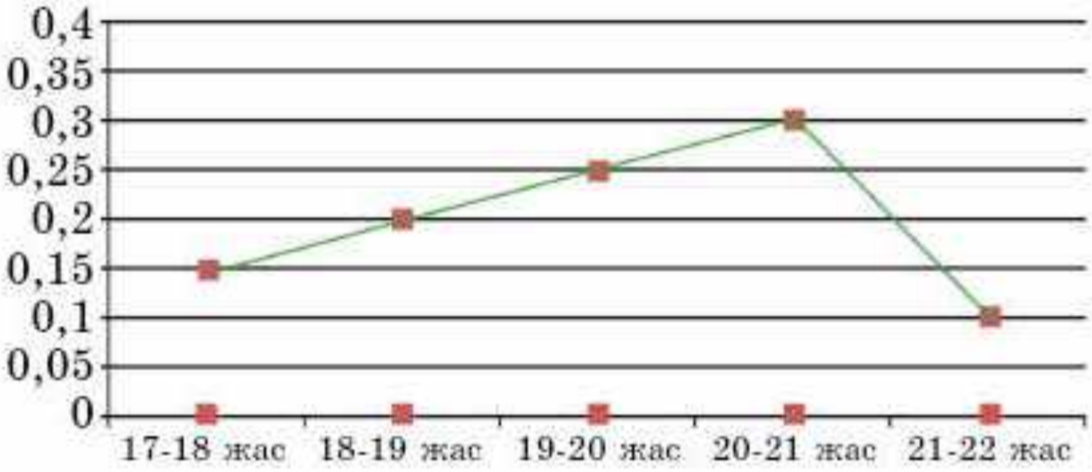
2) абсолюттік жиілік кестесін және салыстырмалы жиілік кестесін құрыңдар;

3) таңдау көлемі мен арифметикалық ортаны табыңдар;

4) дисперсияны есептеңдер.

56. 8-суретте берілген жиілік полигонымен колледж студенттерінің жасына қарай топтары көрсетілген.

20 жастан кіші студенттер тобының салыстырмалы жиілігін пайыз арқылы көрсетіңдер.



8-сурет

1

ФУНКЦИЯ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

§1. ФУНКЦИЯ

Функция бойынша білімдеріңді тереңдетесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, аргумент, жиын, анықталу облысы, мәндер жиыны

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Сендер *функция* деп x айнымалысының әрбір мәніне y айнымалысының бір ғана мәні сәйкес келетін y айнымалысының x айнымалысына тәуелділігін айтатынын білесіңдер.

x тәуелсіз айнымалысының барлық мәндері функцияның анықталу облысын құрайды. Анықталу облысын D әрпімен белгілейді.

y тәуелді айнымалысының барлық мәндері функцияның мәндер жиынын құрайды. Мәндер жиынын E әрпімен белгілейді.

Сандық функция дегеніміз — анықталу облысы мен мәндер жиыны, сандар жиыны, әдетте, нақты сандар жиыны болатын функция.

Анықтама. ***Анықталу облысы D болатын сандық функция*** *деп D жиынының кез келген x санына қандай да бір ереже бойынша x-тен тәуелді бір ғана y саны қойылатын сәйкестікті айтады.*

Функцияны латын және грек әріптерімен белгілеу қалыптасқан.

Қандай да бір f функциясын қарастырайық. Бұл функцияның мәні қайсыбір x санына тәуелді болғандықтан, $f(x)$ деп те жазуға болады.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Егер $y = f(x)$ болса, онда x саны — функцияның аргументі, y саны функцияның x нүктесіндегі мәні деп аталатынын білесіңдер.

f функциясының анықталу облысы $D(f)$ деп белгіленеді.

$y = f(x)$ функциясының анықталу облысы көрсетілмесе, онда функцияның анықталу облысы ретінде $f(x)$ өрнегінің анықталу облысы алынады.

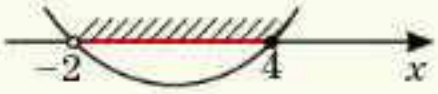
МЫСАЛ

1. $y = \frac{1}{x+2} - \sqrt{2x - x^2 + 8}$ функциясының анықталу облысын табайық.

Шешуі. Функцияның анықталу облысы көрсетілмеген, сондықтан ол $\frac{1}{x+2} - \sqrt{2x - x^2 + 8}$ өрнегінің анықталу облысымен бірдей болады. Өрнектің анықталу облысы x айнымалысының барлық мүмкін болатын мәндер жиынынан тұрады. Бөлшектің бөлімі нөлден өзгеше болғанда ғана $\frac{1}{x+2}$ өрнегінің мағынасы болады және түбір ішіндегі өрнек теріс емес болғанда арифметикалық квадрат түбірдің мағынасы бар. Сондықтан $y = \frac{1}{x+2} - \sqrt{2x - x^2 + 8}$ функциясының анықталу облысын табу үшін $\begin{cases} x + 2 \neq 0, \\ 2x - x^2 + 8 \geqslant 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін шығару керек.

Будан $\begin{cases} x \neq -2, \\ (x+2)(x-4) \leqslant 0. \end{cases}$

Сонда $D(f) = (-2;\ 4]$ (1.1-сурет).



1.1-сурет

Жауабы: $D(f) = (-2;\ 4]$.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

y-тің қабылдайтын барлық сандар жиыны $y = f(x)$ функциясының *мәндер жиыны* (облысы) деп аталатынын білесіңдер.

f функциясының мәндер жиыны $E(f)$ деп белгіленеді.

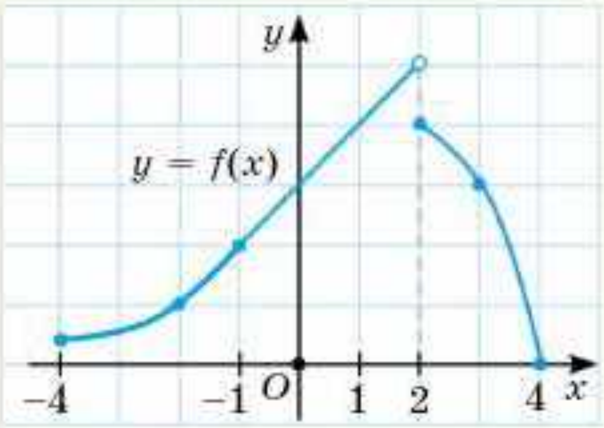
МЫСАЛ

2. $y = f(x)$ функциясы берілген.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, \text{ мұндағы } -4 \leqslant x \leqslant -1, \\ x + 3, \text{ мұндағы } -1 < x < 2, \\ 4x - x^2, \text{ мұндағы } 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$ функциясы үшін:

1) $f(-2)$, $f(1)$, $f(2)$ мәндерін есептейік;
2) $D(f)$ және $E(f)$-ні табайық.

Шешуі. 1) -2 саны $[-4;\ -1]$ сан аралығына тиісті болғандықтан, $f(-2)$ мәнін табу үшін $f(x) = -\frac{2}{x}$ формуласын қолданамыз. Сонда $f(-2) = 1$. Тура осылай $f(1) = 4$, $f(2) = 4$ аламыз. Оны графиктен де көруге болады (1.2-сурет).



1.2-сурет

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y = f(x)$ функциясының графигі қалай салынғанын түсіндіріңдер, мұндағы

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, \text{ мұндағы } -4 \leqslant x \leqslant -1, \\ x + 3, \text{ мұндағы } -1 < x < 2, \\ 4x - x^2, \text{ мұндағы } 2 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$

$D(f)$ анықталу облысы $[-4;\ -1]$, $(-1;\ 2)$ және $[2;\ 4]$ сан аралықтарынан тұрады. Оларды біріктіріп, $[-4;\ 4]$ сан аралығын аламыз. Демек, $D(f) = [-4;\ 4]$.

$E(f)$ мәндер жиынын табу үшін $y = f(x)$ функциясының графигін қолданамыз (1.2-сурет). Сонда $E(f) = [0;\ 5)$.

Жауабы: 1) $f(-2) = 1$, $f(1) = 4$, $f(2) = 4$;
2) $D(f) = [-4;\ 4]$, $E(f) = [0;\ 5)$.

1. Қандай сандық функцияларды білесіңдер? Ол функцияларды атаңдар және олардың әрқайсысы үшін анықталу облысы мен мәндер жиынын көрсетіңдер.
2. Сандық функцияның анықталу облысы бірнеше саннан тұруы мүмкін бе?
3. Сандық функцияның мәндер жиыны: 1) сан түзуі; 2) сан сәулесі болуы мүмкін бе? Мүмкін болса, осындай функцияларға мысал келтіріңдер.

Жаттығулар

А

Төмендегі функциялардың анықталу облысын табыңдар **(1.1—1.5)**:

1.1. 1) $y = 3x + 7$; 2) $y = 5x - 0,9$;
3) $y = 8 - 2x$; 4) $y = -1,4x + 13$.

1.2. 1) $y = 5x^2$; 2) $y = -7x^2$;
3) $y = x^2 - 9$; 4) $y = -x^2 + 4,2$.

1.3. 1) $y = x^2 + \frac{1}{x}$; 2) $y = x - \frac{3}{x+2}$;
3) $y = \frac{5}{x} + \frac{7}{x+2}$; 4) $y = \frac{x}{2x-3} + x^2$.

1.4. 1) $y = \frac{1}{x^2 + 2x}$; 2) $y = \frac{1}{7 - x^2}$;
3) $y = \frac{4}{5x^2 + 0,6}$; 4) $y = -\frac{8}{9x - 4,5}$.

1.5. 1) $y = \sqrt{x + 11}$; 2) $y = \sqrt{x - 23}$;
3) $y = \sqrt{19 + x}$; 4) $y = \sqrt{10 - x}$.

1.6. Анықталу облысы: 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0]$; 3) $[-2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -6) \cup (-6; +\infty)$ жиыны болатын $y = f(x)$ функциясының формуласын жазыңдар.

Төмендегі функциялардың мәндер жиынын табыңдар **(1.7—1.10)**:

1.7. 1) $y = 7 - 1,4x$; 2) $y = -9 + 3x$;
3) $y = \frac{7}{1,2x - 6}$; 4) $y = -\frac{1}{4,8 - 4x}$.

1.8. 1) $y = x^2 - 9x$; 2) $y = 3x - 2x^2$;
3) $y = x^2 - 7x + 12$; 4) $y = 30 - 11x - x^2$.

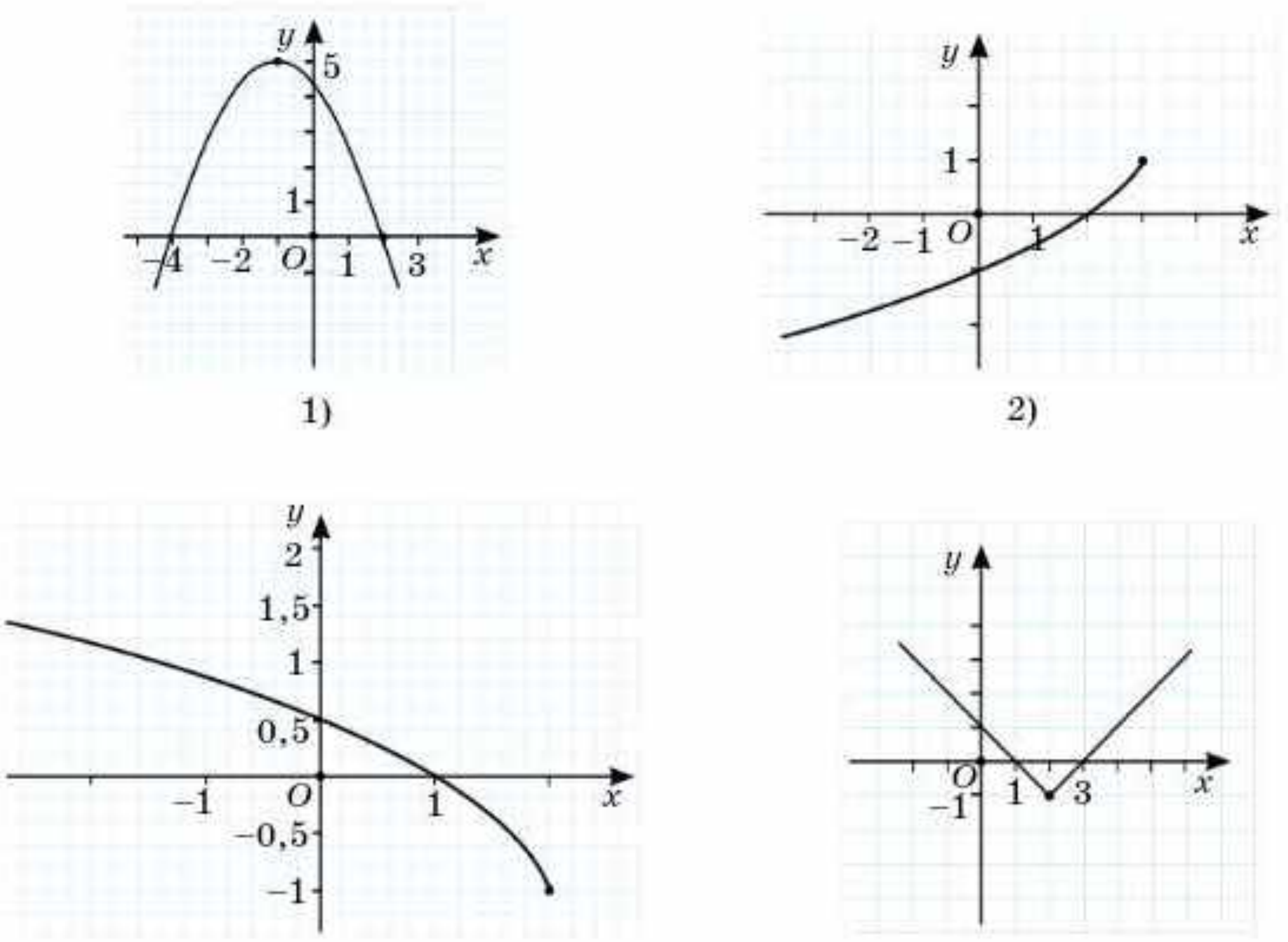
1.9. 1) $y = 2 + \sqrt{x}$; 2) $y = -\sqrt{x}$;

3) $y = -\sqrt{x} + 10$; 4) $y = -2{,}3 - \sqrt{x}$.

1.10. 1) $y = |x| + 4$; 2) $y = |x| - 11$;

3) $y = 6 - |x|$; 4) $y = -|x| - 2$.

1.11. 1.3-суреттегі графикті қолданып функцияның анықталу облысы мен мәндер жиынын табыңдар:



1) 2)

3) 4)

1.3-сурет

Төмендегі функциялардың анықталу облысын табыңдар **(1.12-1.13):**

1.12. 1) $y = \dfrac{15}{\sqrt{19 + x}}$; 2) $y = -\dfrac{21}{\sqrt{x - 17}}$;

3) $y = \dfrac{22}{\sqrt{9x - 12}}$; 4) $y = -\dfrac{x}{\sqrt{36 - 1{,}8x}}$.

1.13. 1) $y = \dfrac{\sqrt{x + 11}}{\sqrt{18 + x}}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{x - 1{,}3}}{\sqrt{1{,}2 + x}}$;

3) $y = \dfrac{\sqrt{25 - 2x}}{\sqrt{1{,}6 + 0{,}4x}}$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{4{,}2 - 0{,}7x}}{\sqrt{9x - 2{,}7}}$.

B

Төмендегі функциялардың анықталу облысын табыңдар **(1.14—1.18):**

1.14. 1) $y = \dfrac{3}{(x+4)(x-5)}$; 2) $y = \dfrac{5}{(3x+1)(7x-2)}$;

3) $y = \dfrac{10}{(6-5x)(9x-2)}$; 4) $y = \dfrac{8}{(11x+2)(10x+7)}$;

5) $y = \dfrac{x}{x^2+0,7x-0,3}$; 6) $y = \dfrac{3x}{x^2-0,3x-0,7}$;

7) $y = \dfrac{x-2}{1,56+2,5x+x^2}$; 8) $y = \dfrac{3-x}{-1+12x-27x^2}$.

1.15. 1) $y = \dfrac{2}{(x-4)\left(x^2-8x+12\right)}$; 2) $y = \dfrac{4}{(x+0,2)\left(x^2+0,4x+0,03\right)}$;

3) $y = \dfrac{1}{(3x-1)\left(20x^2-23x+6\right)}$; 4) $y = \dfrac{2}{(6x+1)\left(20x^2-7x-3\right)}$.

1.16. 1) $y = \dfrac{\sqrt{x-9}}{x^2-7x+10}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{11+x}}{x^2-3x-10}$;

3) $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{6+6,2x+x^2}$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{x+4}}{3-14x-5x^2}$.

1.17. 1) $y = \sqrt{\dfrac{5x+4}{7-8x}}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{9x-1}{16-6x}}$;

3) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-4}}$; 4) $y = \sqrt{\dfrac{9-x^2}{2-x}}$.

1.18. 1) $y = \dfrac{\sqrt{2x-13}}{\sqrt{x^2-12x+20}}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{4-8x}}{\sqrt{x^2-4,5x-9}}$;

3) $y = \dfrac{\sqrt{22-11x}}{\sqrt{-21+4x+x^2}}$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{18+6x}}{\sqrt{40-3x-x^2}}$.

1.19. Берілген функциялардың мәндер жиынын табыңдар:

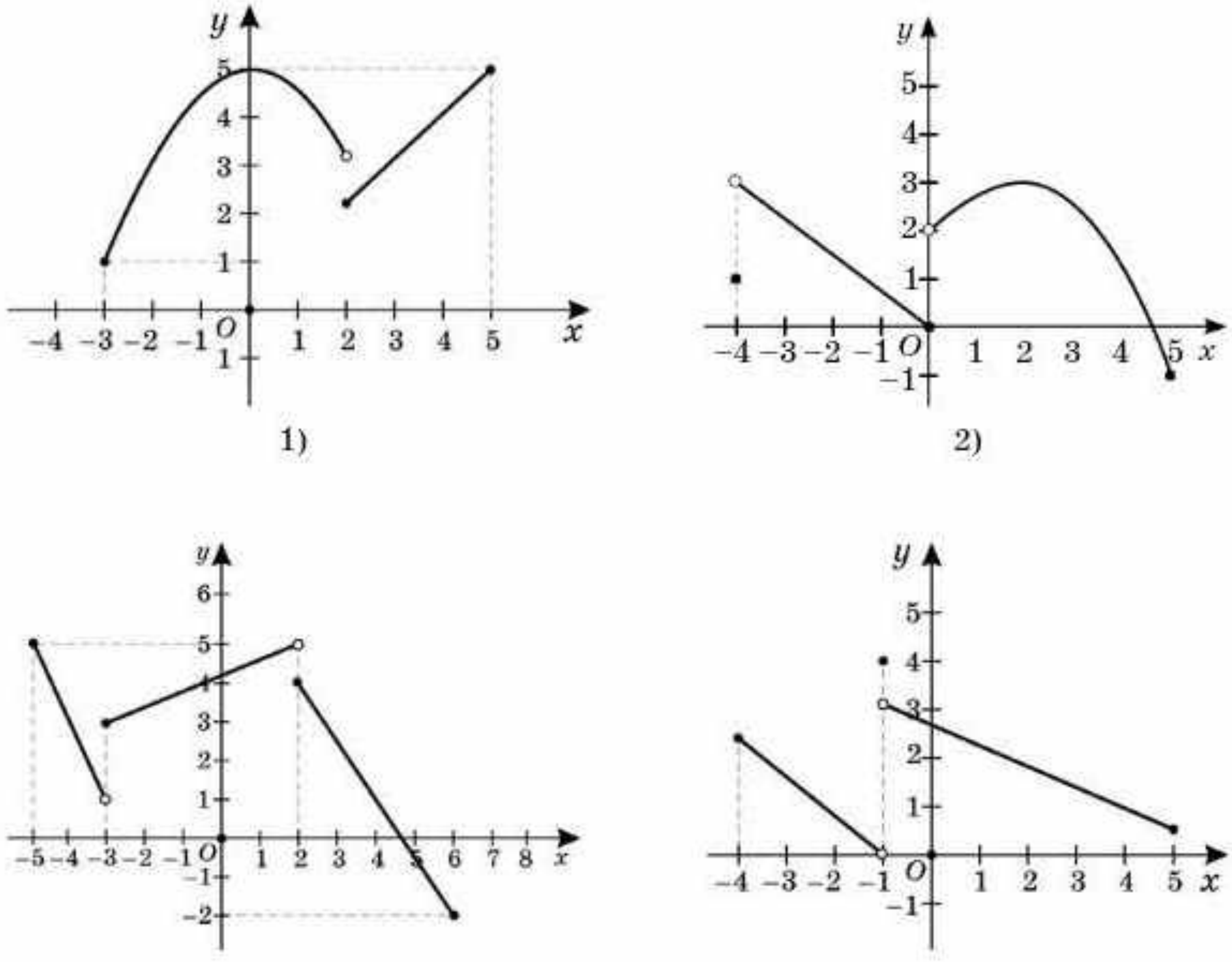
1) $y = |x+10|+5$; 2) $y = 4-|x-4|$;

3) $y = |x-1|+2$; 4) $y = 3-|x+3|$;

5) $y = |x+9|+x$; 6) $y = |x-9|+x$;

7) $y = |x-7|+6x$; 8) $y = |x-4|+3x$.

1.20. 1.4-суретте анықталу облысы $[a; b]$ сандық кесінді болатын функциялардың графиктері берілген. Графикті қолданып функцияның мәндер жиынын табыңдар.



1) 2) 3) 4)

1.4-сурет

C

1.21. Функцияның мәндер жиынын табыңдар:

1) $y = x^2 - 9|x| + x + 7$; 2) $y = x^2 + 11x - |x| + 16$.

1.22. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 4x + 12}}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{36 - x^2}{x^2 - 4x - 32}}$.

1.23. a параметрінің әрбір мәні үшін:

1) $y = ax^2 - 7x$; 2) $y = 4x - ax^2$;

3) $y = |x + 15| + ax$; 4) $y = |x - 21| + ax$

функциясының мәндер жиынын табыңдар.

1.24. $y = \sqrt{x-5} + \sqrt{ax+9}$ функциясының анықталу облысы: 1) сандық сәуле; 2) сандық кесінді; 3) барлық нақты сандар жиыны; 4) бір ғана сан; 5) бос жиын болатындай a параметрінің барлық мәндерін табыңдар.

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

1.25. Функция ұғымы математиканың басқа да ұғымдары сияқты бірден қалыптасқан жоқ, ұзақ даму жолынан өтті.

"Функция" термині алғашқы рет 1692 жылы Г. Лейбниц еңбегінде кездеседі

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716)

Функцияның ең алғашқы жалпы анықтамасы 1718 жылы И. Бернулли еңбегінде кездеседі

Иоганн Бернулли (1667—1748)

Қазіргі кездегі қолданыстағы функцияның анықтамасын 1837 жылы П. Дирихле берген

Дирихле Петер Густав Лежен (1805—1859)

ҚАЙТАЛАУ

1.26. $\left(\frac{3b}{a^2-ab}+\frac{4a}{b^2-ab}\right)\cdot\left(\frac{ab}{\sqrt{3}b-2a}+\frac{b^2}{2a-\sqrt{3}b}\right):\frac{\sqrt{3}b+2a}{a}=1$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

1.27. Қысқартылмайтын бөлшектің алымы бөлімінен 1-ге кем. Егер берілген бөлшекке өзара кері бөлшекті қосса, онда олардың қосындысының мәні $\frac{113}{56}$ болады. Бастапқы бөлшекті табыңдар.

1.28. $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}\leqslant 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын ең кіші және ең үлкен бүтін сандарды табыңдар.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, аргумент, функцияның анықталу облысы, функцияның мәндер жиыны, функцияның графигі, кесте.

§2. ФУНКЦИЯНЫҢ БЕРІЛУ ТӘСІЛДЕРІ

Функцияны беру тәсілдері туралы білімдеріңді тереңдетесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, тәсіл, аналитикалық тәсіл, баяндау тәсілі, графикпен беру, кестемен беру

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Функцияны беру дегеніміз аргументтің берілген мәндері үшін функцияның сәйкес мәндерін қалай табуға болатынын көрсету екенін білесіңдер.

Функцияның формуламен берілу тәсілі *аналитикалық тәсіл* деп аталады.

Аналитикалық тәсіл x аргументінің әрбір сандық мәні бойынша оған сәйкес y функциясының сандық мәнін (дәл немесе қандай да бір дәлдікпен алынған) табуға мүмкіндік береді.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y^2 + x^2 = 9$ және $|y| = x$ формулалары неліктен функцияны бермейді?

Аналитикалық тәсілмен берілген $y = kx + b$; $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$; $y = x^2$ функциялары қалай аталатынын еске түсіріңдер.

Егер x пен y-тің арасындағы тәуелділік формуламен, яғни $y = f(x)$ түрінде берілсе, онда *функция x-ке қатысты айқындалған түрде берілген* дейді.

Егер x және y арасындағы тәуелділік $F(x; y) = 0$ түріндегі теңдеумен берілсе, яғни формула y арқылы өрнектелмесе, онда $y = f(x)$ *функциясы айқындалмаған түрде берілген* дейді.

Функция өзінің анықталу облысының әртүрлі бөлігінде әртүрлі формулалармен берілуі мүмкін.

Мысалы, $y = \begin{cases} 3x, \text{ мұндағы } x \leqslant 0, \\ 1, \text{ мұндағы } x > 0. \end{cases}$

Аналитикалық тәсілмен берілген функция параметрмен (x және y айнымалылары t параметрімен өрнектелген) берілуі мүмкін. Мысалы,

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2. \end{cases}$$

Аналитикалық тәсіл — функцияны берудің ең кең тараған түрінің бірі.

Анықталу облысынан алынған кез келген x үшін функцияның мәнін есептеу мүмкіндігінің болуы функцияның аналитикалық тәсілмен берілуінің негізгі артықшылығы болып табылады.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Кесте арқылы берілген аргументтің мәніне сәйкес функцияның мәнін табуға болатындықтан, функцияны *кестемен беруге* болатынын білесіңдер.

Кестемен беру тәсілінде аргументтің кейбір мәндеріне сәйкес функцияның мәндері табылады. Бұл тәсіл функцияның анықталу облысы шектелген жиын болғанда ғана қолданылады.

Функцияны кесте арқылы беру тәсілі қосымша өлшемдер мен есептеулер жүргізбей, бірден нақты мәндерді анықтауға мүмкіндік береді. Кейбір жағдайларда кесте функцияны толық анықтамайды, оны аргументтің кейбір мәндері үшін ғана анықтайды және аргументтің өзгеруіне қарай функцияның өзгеруін көрнекі етпейді.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Төмендегі кестелердің қайсысы функцияны береді, қайсысы функцияны бермейді?

2-*кесте*

x	1	2	3
y	0,5	1	0,5

3-*кесте*

x	-1	-2	-1
y	-1	2	1

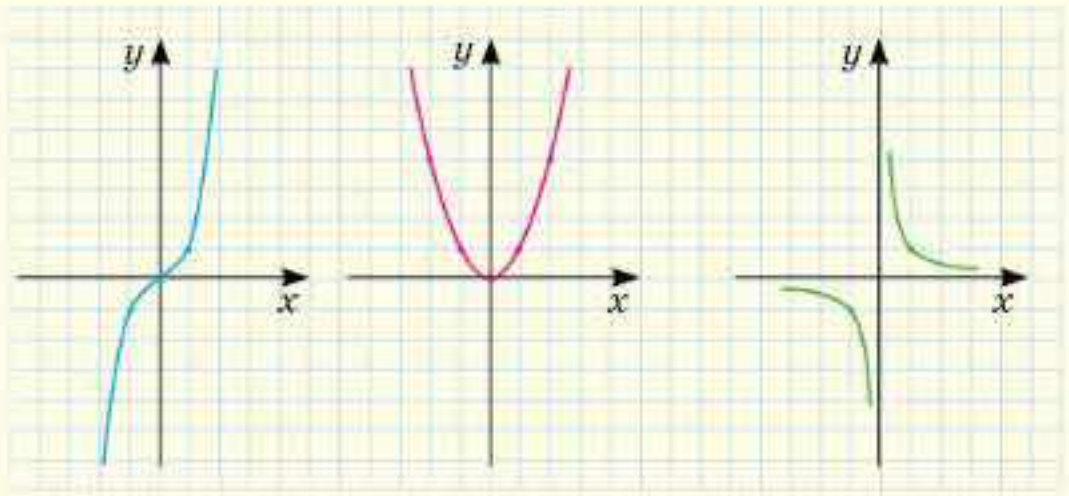
Функцияны графиктік тәсілмен беру ең көрнекі тәсіл болып табылады.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

$y = f(x)$ функциясының графигі деп координаталары берілген теңдікті қанағаттандыратын жазықтықтың барлық нүктелер жиынын айтатынын білесіңдер.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

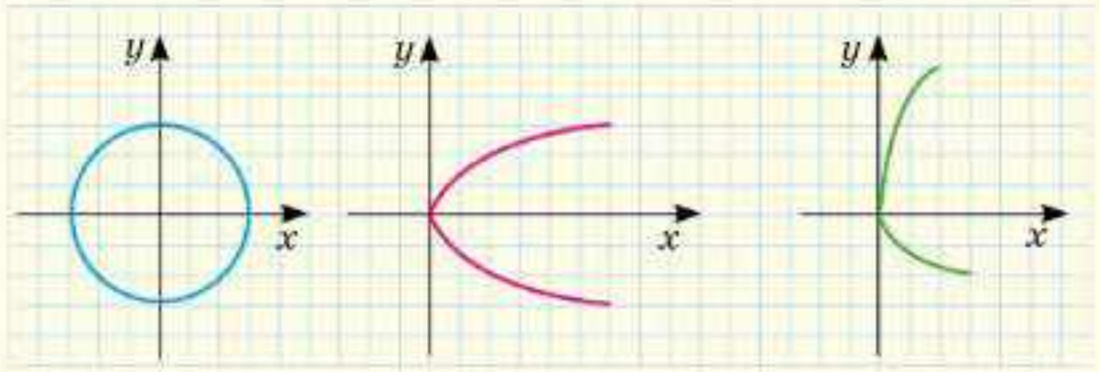
1) 2.1-суретте қандай функциялардың графиктері кескінделген?



а) ә) б)

2.1-сурет

2) Төмендегі графиктер неліктен функцияны бермейді (2.2-сурет)?



2.2-сурет

Функцияны берудің графиктік тәсілі аргументтің барлық мәндерін табуға мүмкіндік бермейді. Бірақ басқа тәсілдерге қарағанда артықшылығы — ол оның көрнекілігінде.

Функцияны берудің графиктік тәсілі техникада және физикада жиі қолданылады.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

График бойынша функцияның анықталу облысын қалай табуға болады?

Функцияның тұжырым арқылы берілуін *баяндау тәсілі* деп атайды.

МЫСАЛ

1. Бұл тәсілге Дирихле функциясы классикалық мысал болып табылады: “Егер x — рационал сан болса, онда функцияның мәні 1-ге тең; егер x — иррационал сан болса, онда функцияның мәні 0-ге тең”.

2. Бірқалыпты қозғалыс кезінде қозғалыс басталған уақыттан бастап жүріп өткен жол уақытқа тура пропорционал болатыны физика курсынан белгілі. Бұл сөйлем жолды уақытқа тәуелді сызықтық функция ретінде сипаттайды.

Функцияның баяндау тәсілінің артықшылығы аналитикалық тәсілмен беруге болмайтын функцияларды беру мүмкіндігі болып табылады.

Функция баяндау тәсілімен берілген: түзу координаталар осін (0; 3) және (–1,5; 0) нүктелерінде қиып өтеді. Осы функцияны графиктік тәсілмен көрсетіңдер.

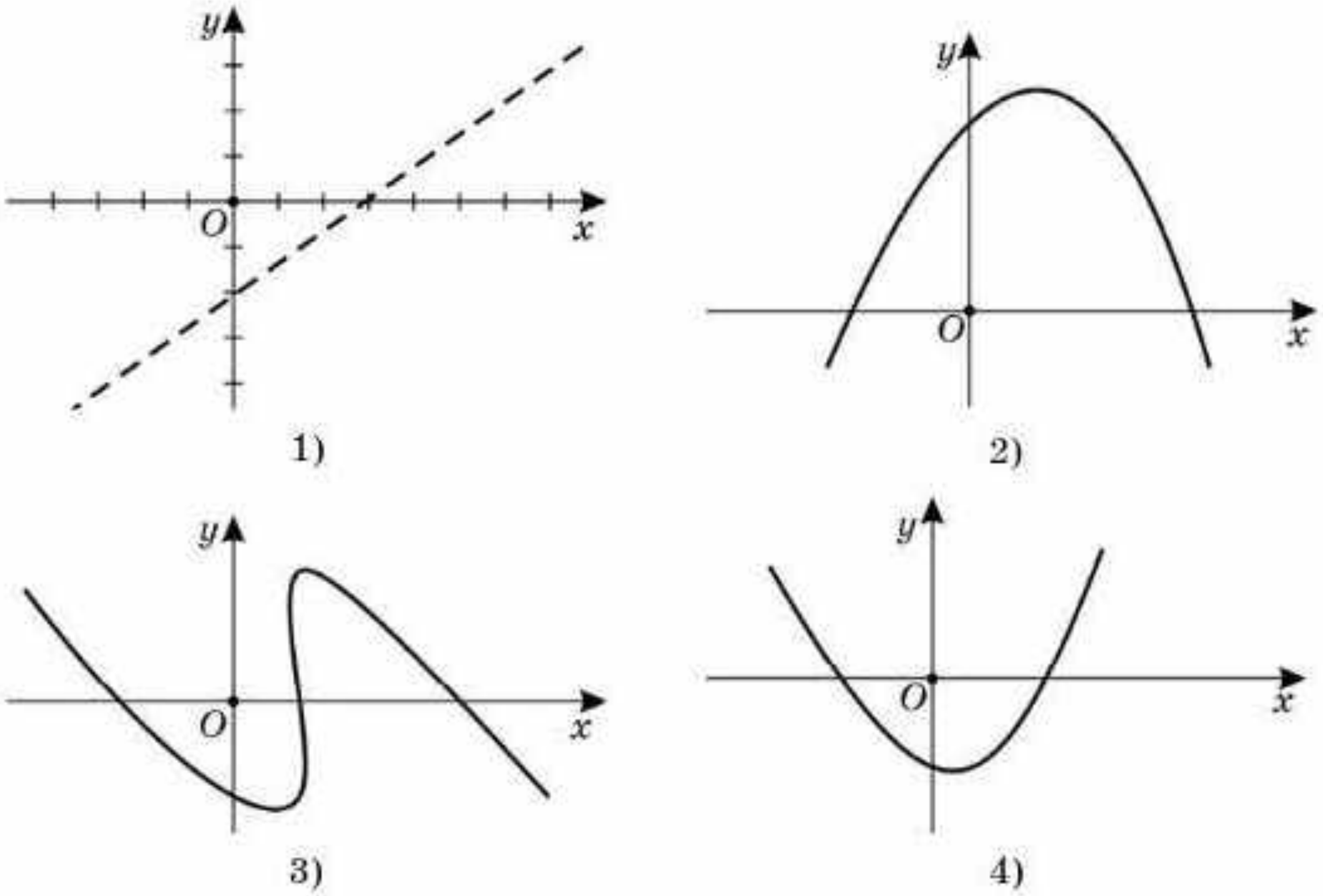
1. Қандай жағдайда функцияны кесте арқылы берген ыңғайлы?

2. Квадраттық функцияны аналитикалық, графиктік, баяндау тәсілдерімен және кесте арқылы беріңдер.

Жаттығулар

А

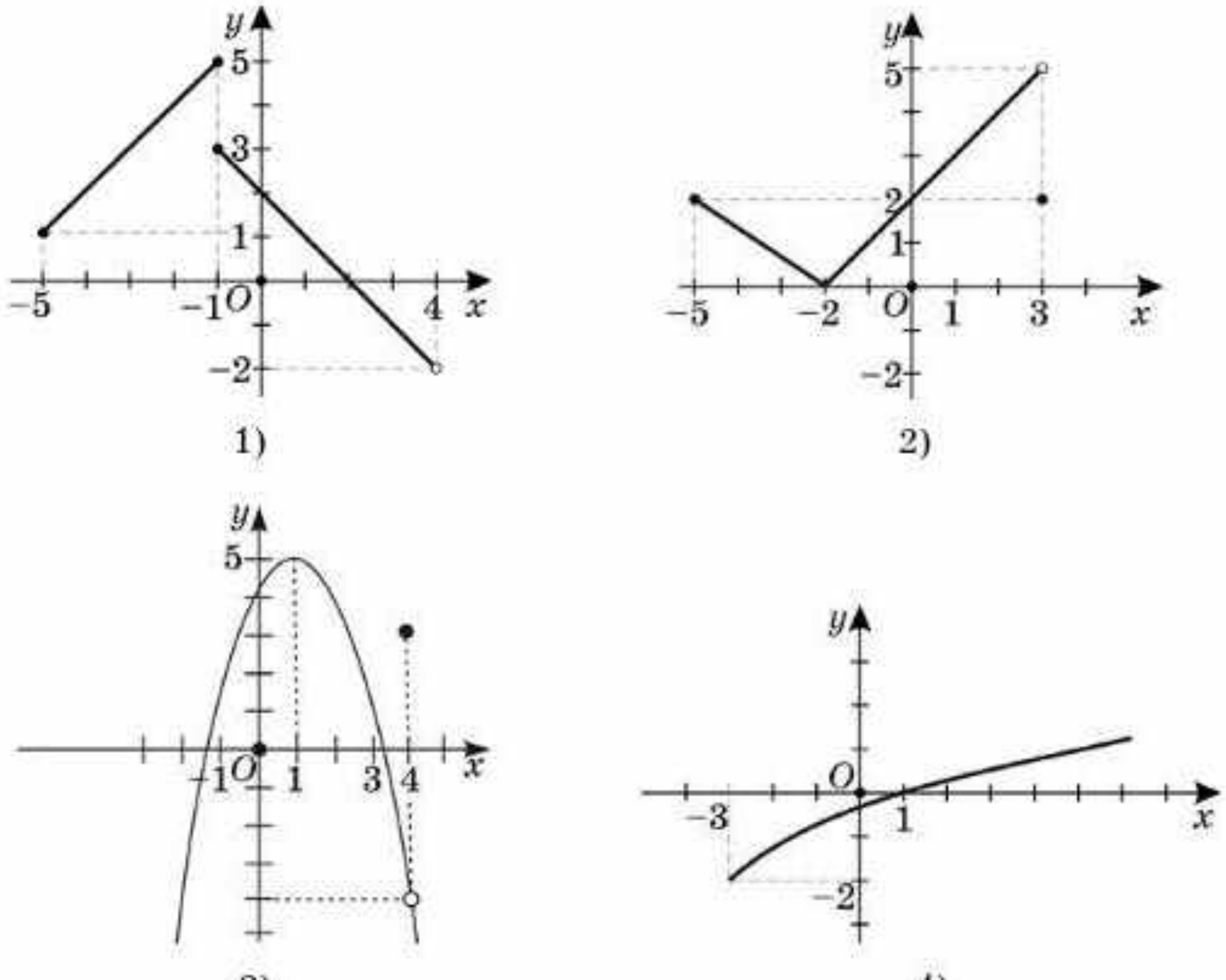
2.1. 2.3-суреттегі графиктердің қайсысы функцияның графигі болады?



1) 2) 3) 4)

2.3-сурет

2.2. Графигі 2.4-суретте кескінделген функцияның формуласын жазыңдар.



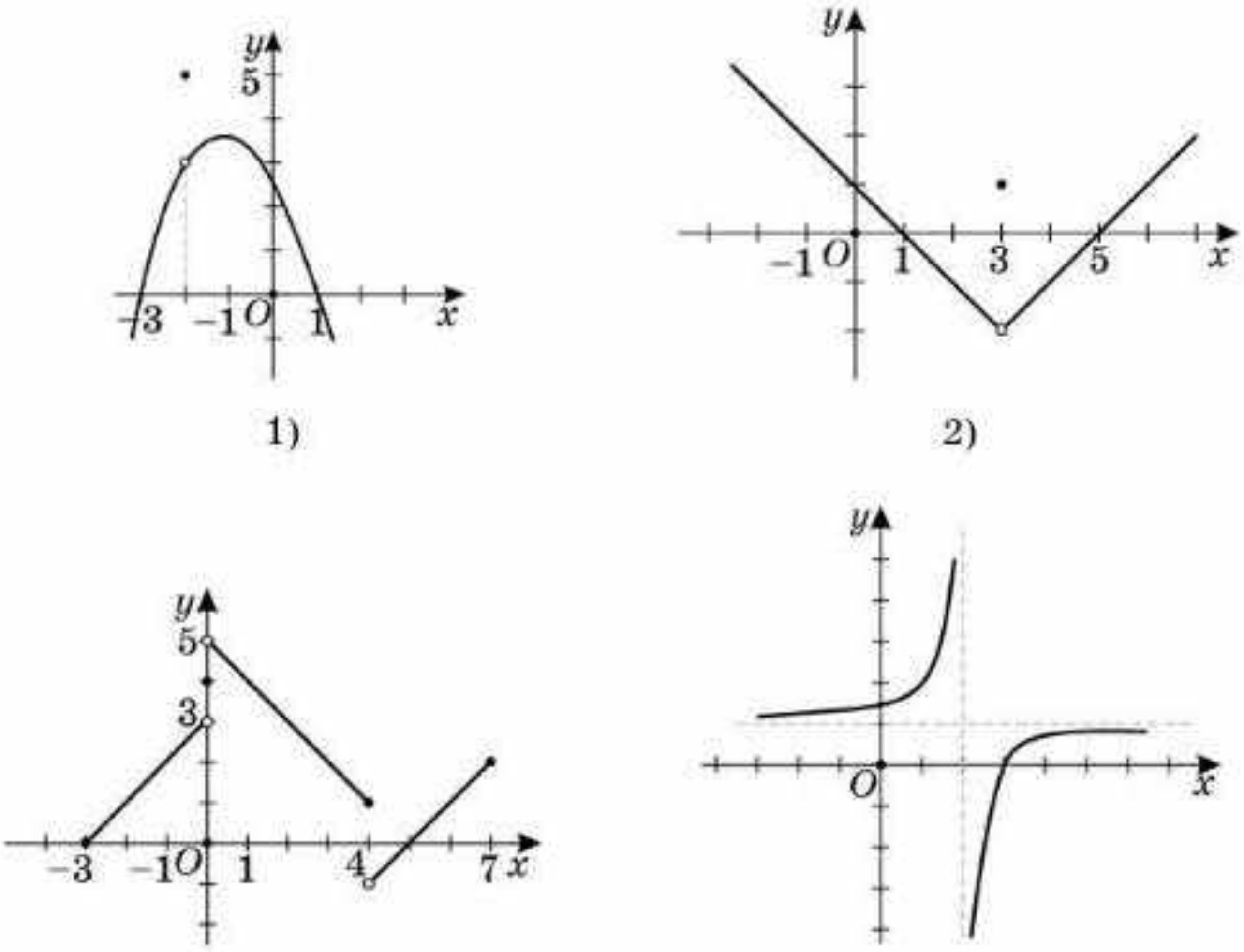
1) 2) 3) 4)

2.4-сурет

2.3. Функция $s = 3t^2 + 9t$ формуласымен берілген.
1) $s(1)$; $s(2)$; $s(3{,}5)$; $s(5)$-ті табыңдар;
2) егер $s = 210$; $s = 120$ болса, онда t-ны табыңдар.

2.4. Функция $s = 1{,}5t^2 + 6t$ формуласымен берілген.
1) $s(0{,}4)$; $s(1{,}6)$; $s(4)$; $s(6)$-ны табыңдар;
2) егер $s = 18$; $s = 72$ болса, онда t-ны табыңдар.

2.5. 2.5-суретте кескінделген функцияның графигін қолданып, оның: 1) анықталу облысын; 2) мәндер жиынын; 3) ордината осімен қиылысу нүктесін; таңбатұрақтылық аралықтарын табыңдар.



1) 2) 3) 4)

2.5-сурет

2.6. $y = f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндісінде анықталған және кестемен берілген. 4—7-кестелерді қолданып функцияның формуласын жазыңдар. Оның графигін салыңдар.

4-кесте

1)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	–2	–1	0	1	2	3	4

5-кесте

2)

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2

6-кесте

3)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	9	2	-3	-6	-7	-6	-3

7-кесте

4)

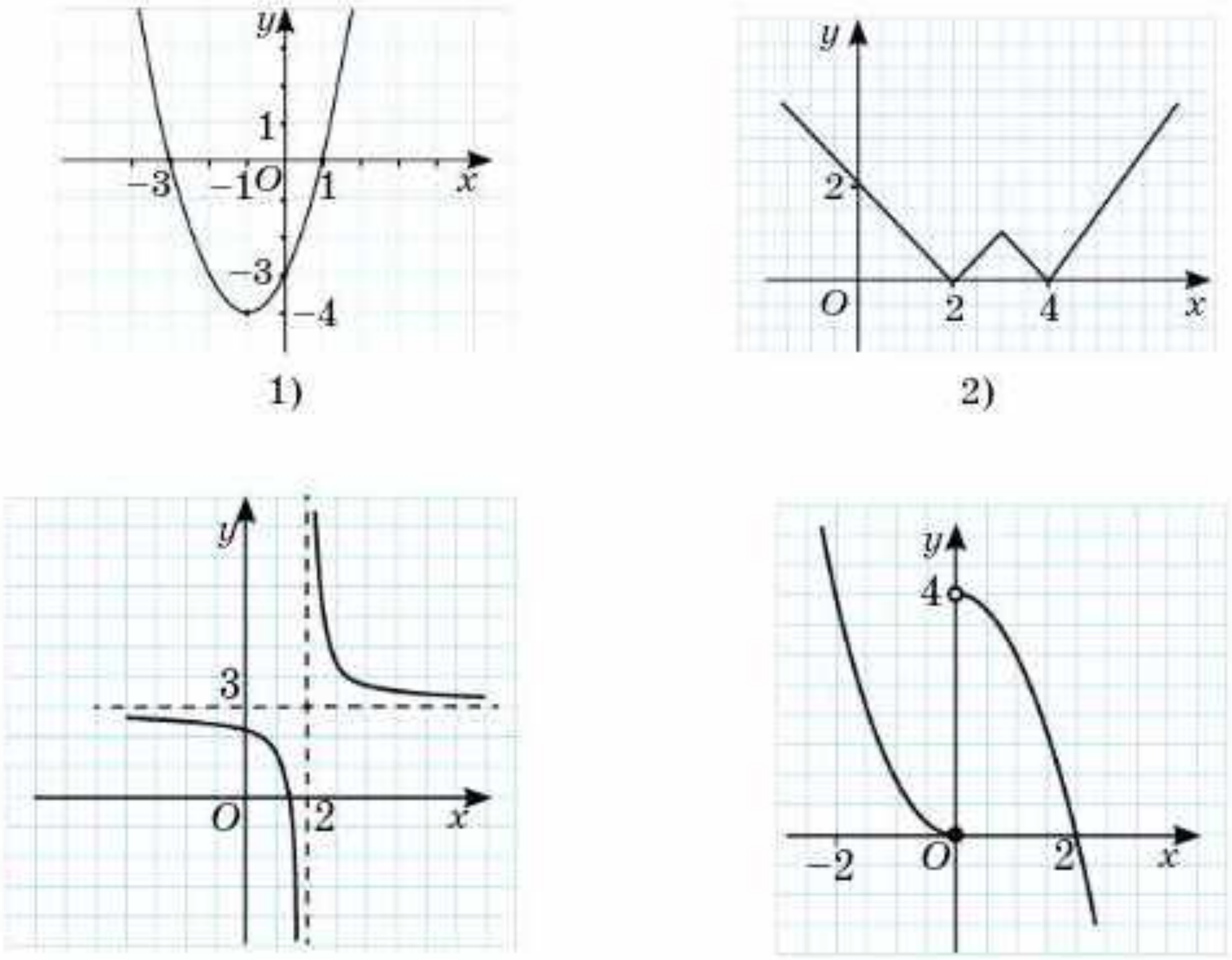
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	5	2	1	2	5	10

B

2.7. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ болсын. $y = f(-x)$, $y = f(x + 2)$, $y = f(1 - x)$ функцияларын аналитикалық тәсілмен беріңдер. Әр функцияның: 1) мәндер жиынын; 2) ордината осімен қиылысу нүктесінің координаталарын; 3) нөлдерін табыңдар.

2.8. $f(x) = -x^2 + x + 2$ болсын. $y = f(x + 2)$, $y = f(x) - 3$, $y = 5 - f(x)$ функцияларын аналитикалық тәсілмен беріңдер. Әр функцияның: 1) мәндер жиынын; 2) ордината осімен қиылысу нүктесінің координаталарын; 3) нөлдерін табыңдар.

2.9. Графигі 2.6-суретте кескінделген функцияның формуласын жазыңдар.



1) 2)

3) 4)

2.6-сурет

Төмендегі функциялардың графигін салыңдар **(2.10-2.11)**:

2.10. 1) $y = \begin{cases} x + 6, \text{ мұндағы } x < -3, \\ -x, \text{ мұндағы } x \geqslant -3; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 2x, \text{ мұндағы } x > 4, \\ 2 + x, \text{ мұндағы } x \leqslant 4; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 3x - 1, \text{ мұндағы } x \leqslant 0, \\ -4x - 1, \text{ мұндағы } x < 0; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} 12 - x, \text{ мұндағы } x > 3, \\ x^2, \text{ мұндағы } x \leqslant 3. \end{cases}$

2.11. 1) $y = \begin{cases} x + 4, \text{ мұндағы } x < -1, \\ 3x^2, \text{ мұндағы } x \geqslant -1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 5x^2, \text{ мұндағы } x > 1, \\ 6 - x, \text{ мұндағы } x \leqslant 1; \end{cases}$

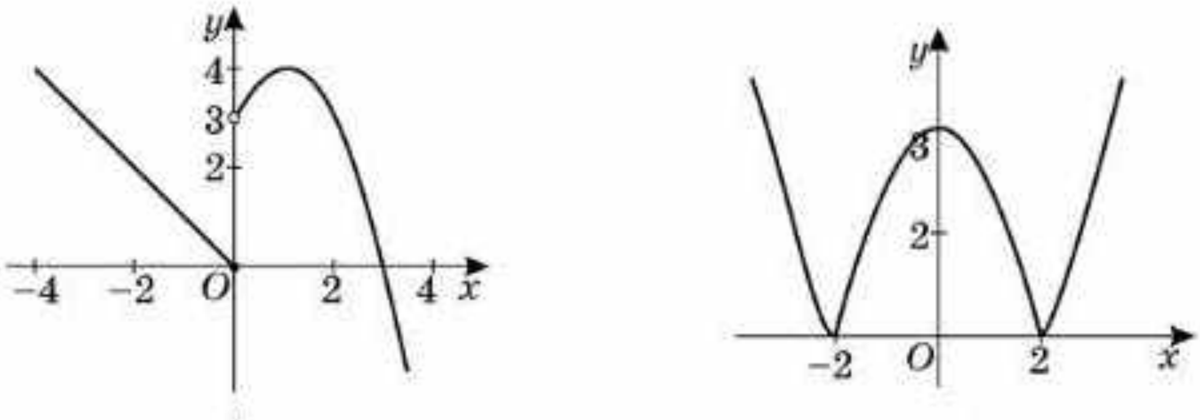
3) $y = \begin{cases} \frac{2}{x}, \text{ мұндағы } x \leqslant -2, \\ 0{,}5x, \text{ мұндағы } x > -2; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, \text{ мұндағы } x > 4, \\ (0{,}25x)^2, \text{ мұндағы } x \leqslant 4. \end{cases}$

2.12. 1) Абсцисса мен ординатаның қосындысының мәні екі еселенген абсциссаға тең; 2) ордината мен абсциссаның айырымының мәні екі еселенген ординатаға тең; 3) абсцисса мен үш еселенген ординатаның қосындысының мәні үш еселенген абсциссаға тең; 4) ордината мен абсциссаның айырымының мәні үш еселенген ординатаға тең болатын координаталық жазықтықтың нүктелер жиынын теңдеумен жазыңдар.

2.13. 1) Абсцисса мен екі еселенген ординатаның қосындысының мәні 8-ге; 2) ордината мен екі еселенген абсциссаның айырымының мәні 6-ға; 3) ордината мен абсциссаның қосындысының мәні абсциссаның квадратына; 4) ордината мен үш еселенген абсциссаның айырымының мәні абсциссаның екі еселенген квадратына тең болатын координаталық жазықтықтың нүктелер жиынын теңдеумен жазыңдар.

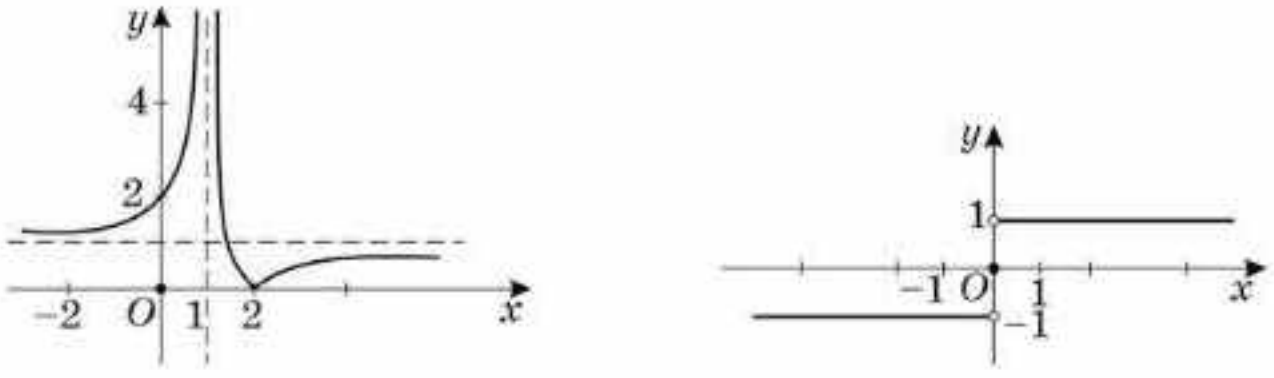
C

2.14. Графигі 2.7-суретте кескінделген функцияның формуласын жазыңдар:



1) 2)

2.7-сурет



3) 4)

2.7-сурет

x санының бүтін бөлігі, яғни x-тен артық болмайтын ең үлкен бүтін сан $[x]$ символымен белгіленеді.

x санының бөлшек бөлігі $\{x\}$ символымен белгіленеді.

$$\{x\} = x - [x].$$

2.15. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = [x + 5]$; 2) $y = [x - 7]$; 3) $y = 2 + [x + 4]$;

4) $y = \{x\} + 1$; 5) $y = 4 - \{x\}$; 6) $y = 6 + \{-x\}$;

7) $y = [2x] + 1$; 8) $y = \{2x\}$; 9) $y = \{0,5\ x\} + 1$.

2.16. x-тің 5; 7,5; −44; 1,9(3); $\sqrt{10}$; $5\sqrt{5} - \sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{180} - \sqrt{20}}{\sqrt{125}}$ мәндері үшін Дирихле функциясының мәндерін табыңдар:

$$d(x) = \begin{cases} 0, \text{ мұндағы } x \text{ иррационал сан;} \\ 1, \text{ мұндағы } x \text{ рационал сан.} \end{cases}$$

2.17. x-тің 0,7; 0,(5); 0,(63); 0,2(3); $\frac{1}{\pi}$; $\frac{\sqrt{50} + \sqrt{2}}{\sqrt{200}}$ мәндері үшін берілген функцияның мәндерін табыңдар:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ мұндағы } x \text{ рационал сан және қысқартылмайтын } \frac{m}{n} \\ \text{бөлшегімен өрнектелген;} \\ 0, \text{ мұндағы } x \text{ иррационал сан.} \end{cases}$$

ҚАЙТАЛАУ

2.18. $\left(\frac{x-3}{x^2-2x-8} - \frac{x-4}{x^2-x-6}\right) \cdot \left(\frac{12-x^2}{2x-7} + x\right)$ өрнегін ықшамдаңдар.

2.19. Моторлы қайық өзен ағысы бойымен 24 км және өзен ағысына қарсы 32 км жол жүріп, барлық жолға 6 сағ жіберді. Егер өзен ағысының жылдамдығы 2 км/сағ болса, моторлы қайықтың жылдамдығын табыңдар.

2.20. 1) $y = x^2 - x - 12$; 2) $y = -18 + 11x - x^2$ функциясының графигін салыңдар. Салынған графикті қолданып, параболаның төбесінің координаталарын; өсу және кему аралықтарын; функцияның нөлдерін; таңбатұрақтылық аралықтарын табыңдар.

2.21. $\dfrac{x^3 + x^2 - 30x}{x^3 - x^2 - 42x} \leqslant 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын бүтін сандарды табыңдар.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Сызықтық функция, квадраттық функция және олардың графиктері, кері пропорционалдық, координаталық жазықтық, нүктенің координаталары, фигураны түрлендіру түрлері, нүктеге және түзуге қатысты симметрия, параллель көшіру.

§3. $y = f(x + n)$ ЖӘНЕ $y = f(x) + n$ $(n \in R)$ ТҮРІНДЕГІ ФУНКЦИЯНЫҢ ГРАФИГІН САЛУ

? Параллель көшіру арқылы функциялардың графиктерін түрлендіруді орындауды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

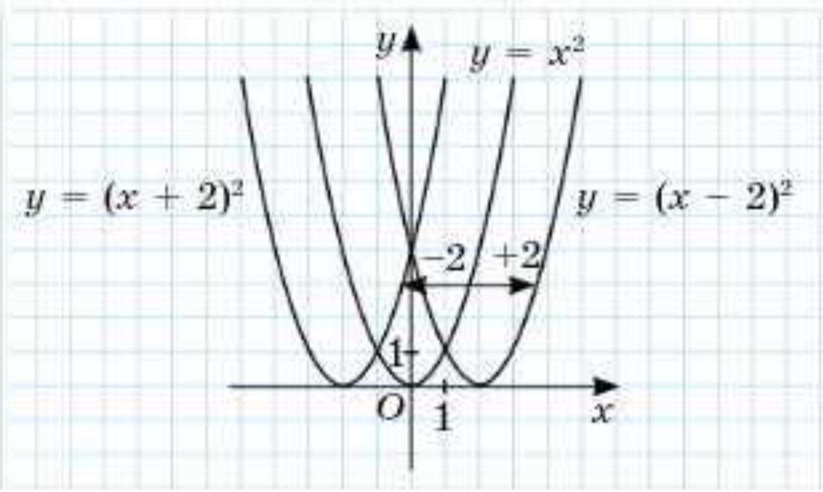
График, функция, параллель көшіру, абсцисса осі, ордината осі

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: $y = f(x)$ функциясының графигі дегеніміз координаталары берілген теңдікті қанағаттандыратын жазықтықтың барлық нүктелерінің жиыны, яғни $A(x; f(x))$ нүктелер жиыны екені белгілі.

$y = a(x + n)^2$ функциясының графигін $y = ax^2$ функциясының графигінен n оң сан болғанда Ox осі бойымен $|n|$ бірлік солға, n теріс сан болғанда $|n|$ бірлік оңға орын ауыстыру (жылжыту, параллель көшіру) арқылы алуға болады.

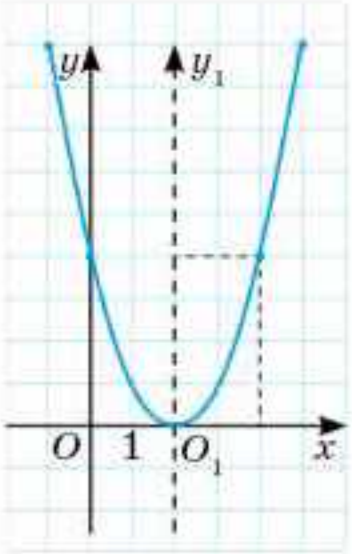
ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y = x^2$ функциясының графигін қолданып, $y = (x - 2)^2$ және $y = (x + 2)^2$ функциялары графиктерінің қалай салынғанын түсіндіріңдер (3.1-сурет).



3.1-сурет

xO_1y_1 координаталар жүйесінде $y = x^2$ функциясының графигі салынған. O_1y_1 ордината осі 2 бірлікке оңға жылжыту арқылы алынған (3.2-сурет).



3.2-сурет

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $y = (x - 2)^2$ формуласы 3.2-суреттегі xOy координаталар жүйесіндегі графиктің формуласы болатынын түсіндіріңдер. $y = x^2$ функциясының графигін жылжытпай, $y = (x + 2)^2$ функциясының графигін қалай салуға болады?

Функцияның графигін Ox осі бойымен оңға (солға) $|n|$ бірлікке жылжытқанда алынған график Oy осін сонша бірлікке солға (оңға) көшіргенде алынған графикпен бірдей.

Функциялардың графиктеріне жүргізілген түрлендірулердің ақиқаттығын дәлелдейік.

Дәлелдеуі. Алдымен xOy координаталар жүйесінен кез келген $A_0(x_0; y_0)$ нүктесін алайық (3.3-сурет).

Алынған нүктені Ox осі бойымен оңға қарай n ($n > 0$) бірлікке жылжытайық. Сонда A нүктесі $A_1(x_1; y_1)$ нүктесіне көшеді және $x_1 = x_0 + n$, $y_1 = y_0$ болады.

Керісінше, егер $A_0(x_0; y_0)$ және $A_1(x_1; y_1)$ нүктелері $x_1 = x_0 + n$ ($n > 0$), $y_1 = y_0$ қатынастарымен байланысты болса, онда $A_0(x_0; y_0)$ нүктесін Ox осі бойымен n бірлікке оңға жылжыту арқылы $A_1(x_1; y_1)$ нүктесін алуға болады.

$y = f(x)$ және $y = f(x - n)$ ($n > 0$) функцияларын қарастырайық. xOy координаталар жүйесінде функциялардың графиктерін салыстырайық. Ол үшін $y = f(x)$ функциясының графигінің бойынан кез келген $A_0(x_0; y_0)$ нүктесін аламыз. Ол $y_0 = f(x_0)$ теңдігі тура санды теңдік болатынын білдіреді.

Онда

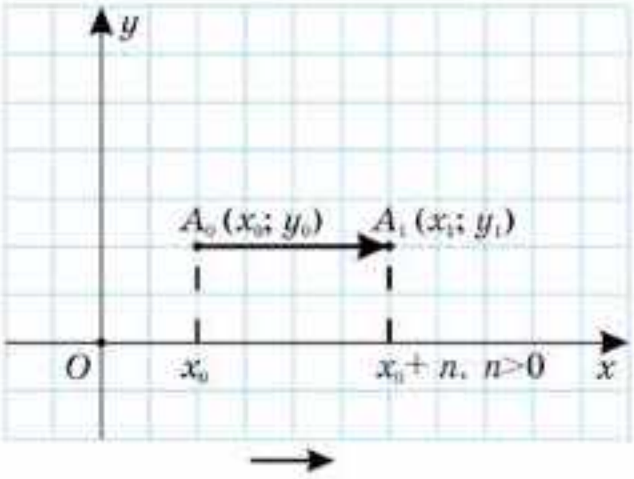
$$y_0 = f(x_0) = f((x_0 + n) - n) \qquad (1)$$

санды теңдігі де тура болады.

$y_1 = y_0$ және $x_1 = x_0 + n$ алмастыруларын енгізсек, (1) теңдік $y_1 = f(x_1) = f(x_1 - n)$ түріне келеді. Демек, $A_1(x_1; y_1)$ нүктесі $y = f(x - n)$ ($n > 0$) функциясының графигіне тиісті болады.

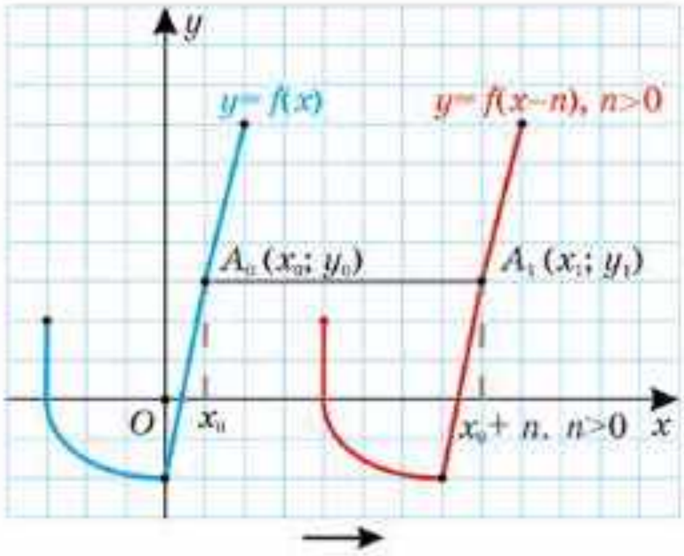
$A_0(x_0; y_0)$ және $A_1(x_1; y_1)$ нүктелерінің координаталары $x_1 = x_0 + n$ ($n > 0$) және $y_1 = y_0$ қатынасымен байланысты болғандықтан, $A_0(x_0; y_0)$ нүктесін Ox осі бойымен n бірлікке оңға жылжыту арқылы $A_1(x_1; y_1)$ нүктесін алуға болады.

$A_0(x_0; y_0)$ нүктесі кез келген нүкте болғандықтан, $y = f(x)$ функциясының графигіндегі барлық нүктелерді Ox осі бойымен n бірлікке оңға жылжыту арқылы $y = f(x - n)$ ($n > 0$) функциясының графигін алуға болады (3.4-сурет).



Оңға жылжыту
(ығысу, параллель көшіру)

3.3-сурет



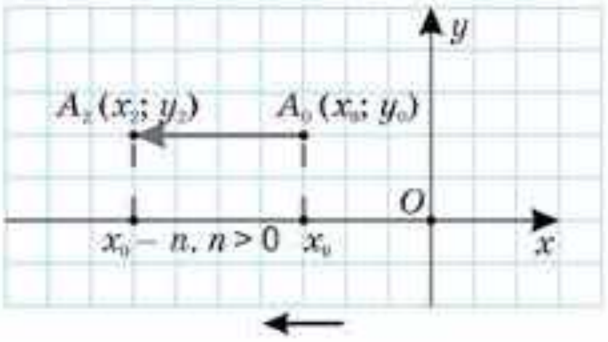
Оңға жылжыту
(ығысу, параллель көшіру)

3.4-сурет

ТҮСІНДІРІҢДЕР

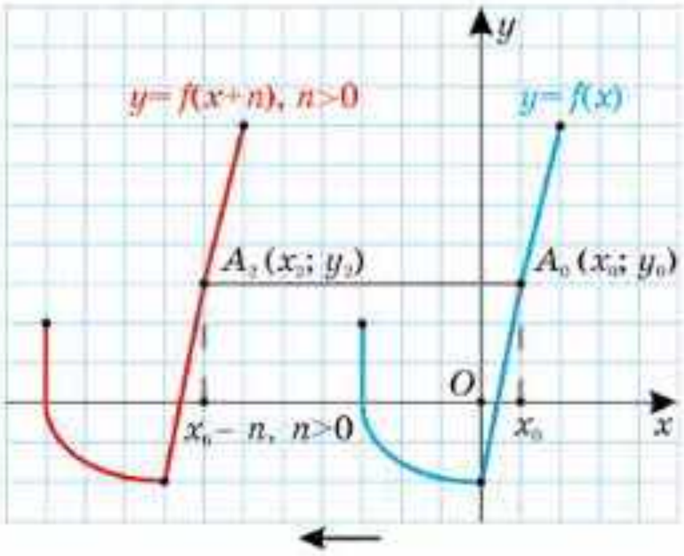
Егер $A_2(x_2;\ y_2)$ нүктесі $A_0(x_0;\ y_0)$ нүктесінен Ox осі бойымен n $(n > 0)$ бірлікке солға жылжыту арқылы алынса, онда $A_0(x_0;\ y_0)$ және $A_2(x_2;\ y_2)$ нүктелері қандай формуламен байланысқанын түсіндіріңдер (3.5-сурет).

$y = f(x + n)$ $(n > 0)$ функциясының графигін $y = f(x)$ функциясының графигінен Ox осі бойымен n бірлікке солға жылжыту арқылы алуға болатынын дәлелдеңдер (3.6-сурет).



Солға жылжыту
(ығысу, параллель көшіру)

3.5-сурет



Солға жылжыту
(ығысу, параллель көшіру)

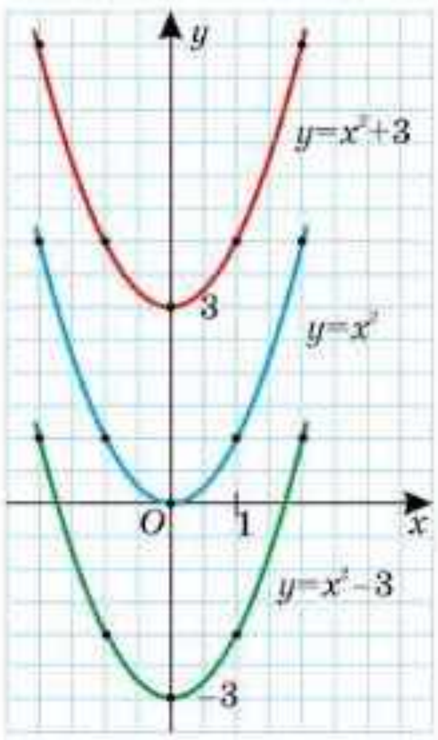
3.6-сурет

Сонымен, мына ережені аламыз:

$y = f(x + n)$, мұндағы $n \in R$, функциясының графигін алу үшін $y = f(x)$ функциясының графигін Ox осі бойымен n оң сан болғанда солға, n теріс сан болғанда оңға қарай $|n|$ бірлікке жылжыту керек.

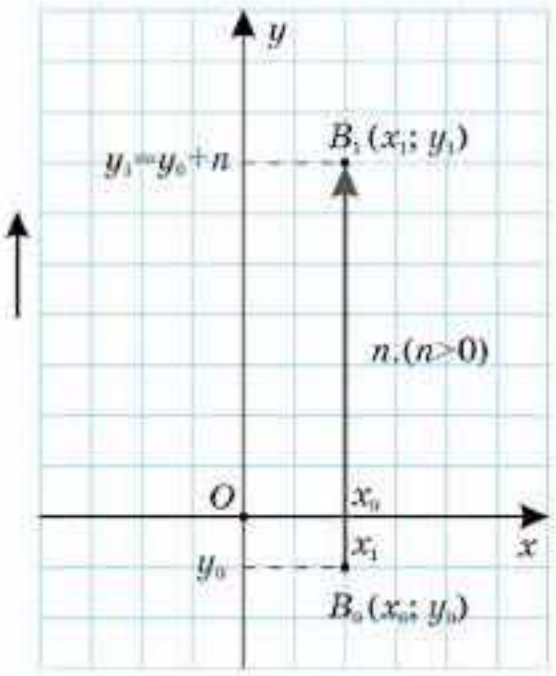
ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y = x^2$ функциясының графигін қолданып $y = x^2 - 3$ және $y = x^2 + 3$ функцияларының графиктерінің қалай салынғанын түсіндіріңдер (3.7-сурет).



Oy осі бойымен жылжыту
(ығысу, параллель көшіру)

3.7-сурет



Oy осі бойымен n $(n > 0)$
бірлікке жоғары жылжыту
(ығысу, параллель көшіру)

3.8-сурет

xOy координаталар жүйесінде кез келген $B_0(x_0;\ y_0)$ нүктесін қарастырайық (3.8-сурет).

Осы нүктені Oy осі бойымен жоғары n $(n > 0)$ бірлікке жылжытамыз. Сонда $B_1(x_1;\ y_1)$ нүктесін аламыз және $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0 + n$ болады.

Керісінше, егер $B_0(x_0;\ y_0)$ және $B_1(x_1;\ y_1)$ нүктелері $x_1 = x_0$ және $y_1 = y_0 + n$ $(n > 0)$ қатынасымен байланысты болса, онда $B_1(x_1;\ y_1)$ нүктесін $B_0(x_0;\ y_0)$ нүктесінен Oy осі бойымен жоғары n бірлікке жылжыту арқылы алуға болады.

$y = f(x)$ және $y = f(x) + n$ $(n > 0)$ функцияларын қарастырайық. Осы функциялардың графиктерін xOy координаталар жүйесінде салыстырайық. Ол үшін $y = f(x)$ функциясының графигінен кез келген $B_0(x_0;\ y_0)$ нүктесін аламыз. Онда $y_0 = f(x_0)$ теңдігі тура болады. Демек,

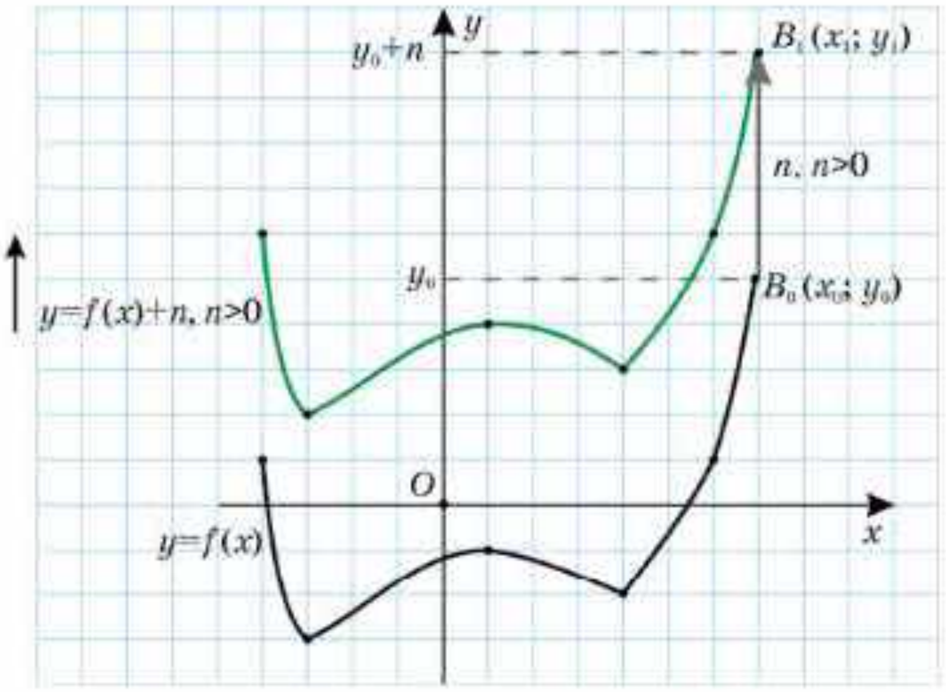
$$y_0 = f(x_0) = (f(x_0) + n) - n \text{ немесе } y_0 + n = f(x_0) + n \qquad (2)$$

санды теңдігі де тура.

$y_0 + n = y_1$ және $x_0 = x_1$ алмастыруларын енгізейік. Сонда (2)-теңдік $y_1 = f(x_1) + n$ түріне келеді. Олай болса, $B_1(x_1;\ y_1)$ нүктесі $y = f(x) + n$ $(n > 0)$ функциясының графигіне тиісті.

$B_0(x_0;\ y_0)$ және $B_1(x_1;\ y_1)$ нүктелерінің координаталары $x_1 = x_0$ және $y_1 = y_0 + n$ қатынасымен байланысты болғандықтан, $B_0(x_0;\ y_0)$ нүктесін Oy осі бойымен жоғары қарай n бірлікке жылжыту арқылы $B_1(x_1;\ y_1)$ нүктесін алуға болады.

$B_0(x_0;\ y_0)$ нүктесі кез келген нүкте болғандықтан, барлық нүктелерді, яғни $y = f(x)$ функциясының графигін Oy осі бойымен жоғары қарай n бірлікке жылжыту арқылы $y = f(x) + n$ $(n > 0)$ функциясының графигін алуға болады (3.9-сурет).



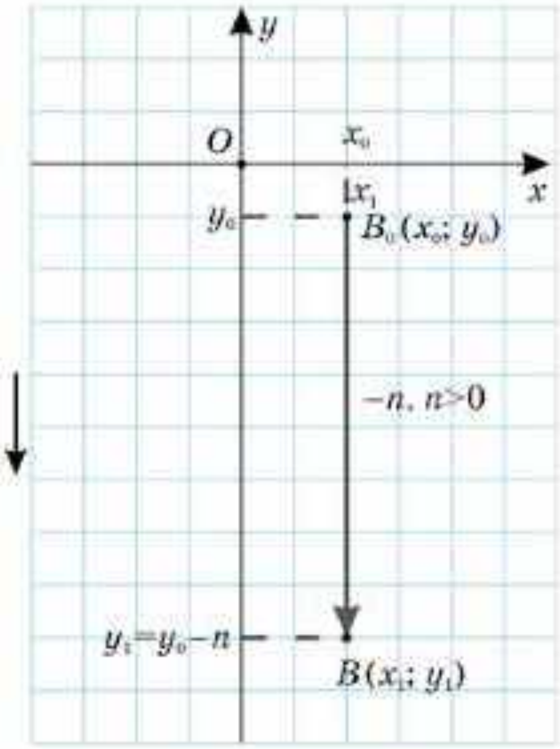
Oy осі бойымен n ($n > 0$) бірлікке жоғары жылжыту (ығысу, параллель көшіру)

3.9-сурет

ТҮСІНДІРІҢДЕР

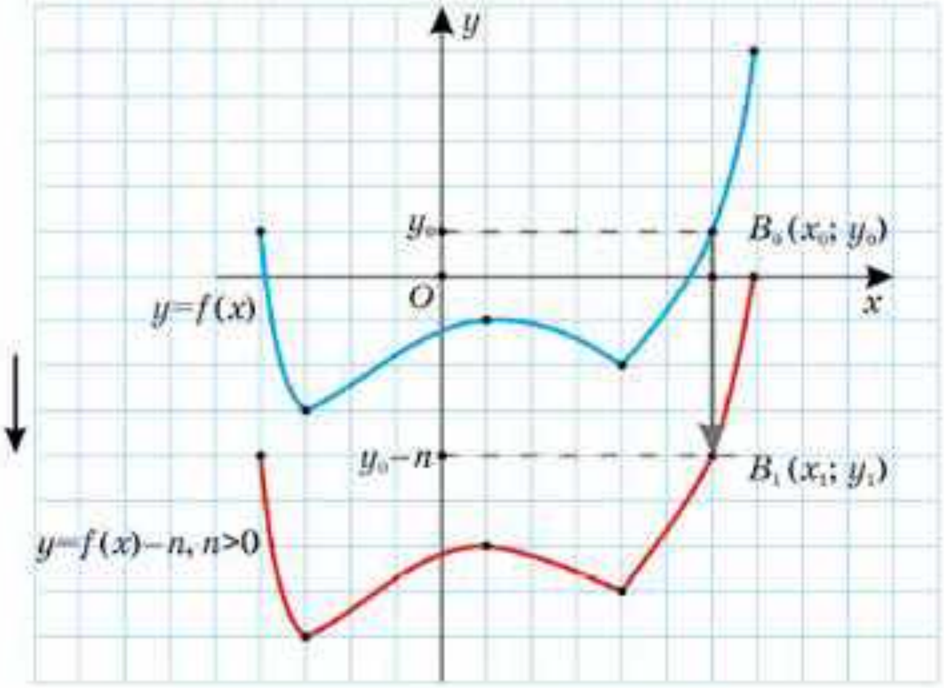
Егер $B_2(x_2;\ y_2)$ нүктесі $B_0(x_0;\ y_0)$ нүктесінен *Oy* осі бойымен төмен қарай n ($n > 0$) бірлікке жылжыту арқылы алынса, онда $B_0(x_0;\ y_0)$ және $B_2(x_2;\ y_2)$ нүктелері қандай формуламен байланысатынын түсіндіріңдер (3.10-сурет).

$y = f(x) - n$ ($n > 0$) функциясының графигін $y = f(x)$ функциясының графигінен *Oy* осі бойымен төмен қарай n бірлікке жылжыту арқылы алуға болатынын дәлелдеңдер (3.11-сурет).



Oy осі бойымен n ($n > 0$) бірлікке жылжыту (ығысу, параллель көшіру)

3.10-сурет



Oy осі бойымен n ($n > 0$) бірлікке жылжыту (ығысу, параллель көшіру)

3.11-сурет

Сонымен, мына ережені аламыз:

$y = f(x) + n$, мұндағы $n \in R$, функциясының графигін алу үшін $y = f(x)$ функциясының графигін Oy осі бойымен n оң сан болғанда жоғары, n теріс сан болғанда төмен қарай $|n|$ бірлікке жылжыту керек.

МЫСАЛ $y = \sqrt{x}$ функциясының графигін қолданып, $y = \sqrt{x+3} + 2$ функциясының графигін салайық.

Шешуі. 1) $y = \sqrt{x}$ функциясының графигін саламыз. Ол үшін кесте құрамыз:

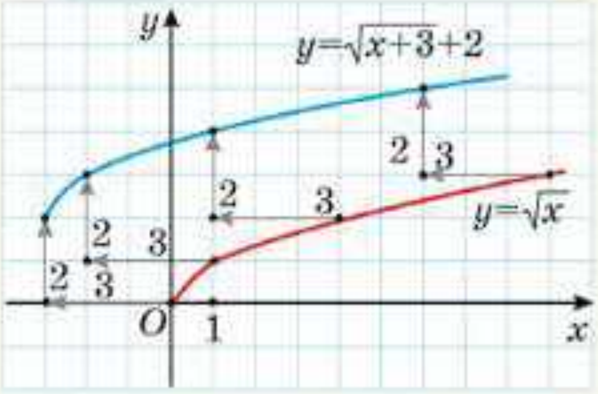
8-*кесте*

x	0	1	4	9
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3

2) 8-кестеде берілген нүктелерді координаталық жазықтықта белгілейміз және $y = \sqrt{x}$ функциясының өспелі әрі шектелмейтінін ескеріп, нүктелерді қисық сызықпен қосамыз (3.12-сурет).

3) Шыққан графикті Ox осі бойымен солға 3 бірлікке, одан кейін Oy осі бойымен жоғары 2 бірлікке жылжытамыз. Ол үшін алдымен жоғарыдағы кестенің көмегімен салынған нүктелерді жылжытып алып, оларды қисық сызықпен қосамыз.

Жүргізілген түрлендірулерді сызба түрінде көрсетуге болады: $y = \sqrt{x}\ \underset{\leftarrow}{3}\uparrow 2$.



Ox осі бойымен солға 3 бірлікке, Oy осі бойымен жоғары 2 бірлікке жылжыту (ығысу, параллель көшіру)

3.12-сурет

АЛГОРИТМ $y = f(x + n) + m$ функциясының графигін салу алгоритмі:

1) $y = f(x)$ функциясының графигін саламыз.

2) $y = f(x)$ функциясының графигін n оң сан болғанда Ox осі бойымен солға, n теріс сан болғанда оңға қарай $|n|$ бірлікке жылжытып, $y = f(x + n)$ функциясының графигін аламыз.

3) $y = f(x + n)$ функциясының графигін m оң сан болғанда Oy осі бойымен жоғары, m теріс сан болғанда төмен $|m|$ бірлікке жылжытып, $y = f(x + n) + m$ функциясының графигін аламыз.

?

1. n және m-нің қандай мәндерінде $y = f(x)$ функциясының графигін: а) төмен және солға; ә) жоғары және оңға; б) жоғары және солға; в) төмен және оңға қарай жылжыту арқылы $y = f(x + n) + m$ функциясының графигін алуға болады? Мысал келтіріңдер.
2. $y = f(x)$ функциясының графигін жылжытпай, $y = f(x) + m$ функциясының графигін қалай салуға болады?
3. $y = f(x)$ функциясының графигін жылжытпай, $y = f(x + n) + m$ функциясының графигін қалай салуға болады?

Жаттығулар

А

3.1. Егер A_1 нүктесі $A(2; 3)$ нүктесін:
1) оңға қарай 4 бірлікке; 2) солға қарай 2 бірлікке;
3) солға қарай 1,2 бірлікке; 4) оңға қарай 3,7 бірлікке
жылжыту арқылы алынса, онда A_1 нүктесінің координаталарын табыңдар.

3.2. Егер A_2 нүктесі $A(-2; 4)$ нүктесін:
1) оңға қарай 3 бірлікке; 2) солға қарай 3 бірлікке;
3) солға қарай 2,3 бірлікке; 4) оңға қарай 4,5 бірлікке жылжыту арқылы алынса, онда A_2 нүктесінің координаталарын табыңдар.

3.3. Егер B_1 нүктесі $B(1; -4)$ нүктесін:
1) жоғары қарай 3 бірлікке; 2) төмен қарай 2 бірлікке;
3) төмен қарай 3,2 бірлікке; 4) жоғары қарай 5,4 бірлікке жылжыту арқылы алынса, онда B_1 нүктесінің координаталарын табыңдар.

3.4. Егер B_2 нүктесі $B(-2; -1)$ нүктесін:
1) төмен қарай 3 бірлікке; 2) жоғары қарай 3 бірлікке;
3) жоғары қарай 4,3 бірлікке; 4) төмен қарай 7,5 бірлікке жылжыту арқылы алынса, онда B_2 нүктесінің координаталарын табыңдар.

3.5. $y = x$ функциясының графигін салыңдар. $y = x$ функциясының графигін қолданып бір координаталық жазықтыққа $y = x$ функциясының графигін:
1) 2 бірлік оңға; 2) 3 бірлік солға;
3) 2 бірлік жоғары; 4) 3 бірлік төмен қарай жылжытқанда шыққан функцияның графигін салыңдар.

3.6. $y = x^2$ функциясының графигін қолданып бір координаталық жазықтыққа:
1) $y = x^2 - 2$; 2) $y = x^2 + 2$; 3) $y = (x - 3)^2$; 4) $y = (x + 3)^2$
функцияларының графиктерін салыңдар.

3.7. $y = x^3$ функциясының графигін қолданып бір координаталық жазықтыққа:
1) $y = x^3 - 3$; 2) $y = x^3 + 3$; 3) $y = (x - 4)^3$; 4) $y = (x + 4)^3$
функцияларының графиктерін салыңдар.

3.8. $y = \frac{1}{x}$ функциясының графигін қолданып бір координаталық жазықтыққа:
1) $y = \frac{1}{x} - 2$; 2) $y = \frac{1}{x} + 2$; 3) $y = \frac{1}{x+2}$; 4) $y = \frac{1}{x-3}$
функцияларының графиктерін салыңдар.

3.9. $y = \sqrt{x}$ функциясының графигін қолданып бір координаталық жазықтыққа:

1) $y = \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{x-3}$; 3) $y = \sqrt{x} + 3$; 4) $y = \sqrt{x} - 3$ функцияларының графиктерін салыңдар.

B

3.10. 1) $y = x^2 - 3{,}5x$; 2) $y = -x^2 + 5x$; 3) $y = \frac{1}{x+5}$; 4) $y = \frac{1}{4-x}$ функциясының графигі қандай сызық болады? Функция графигін жылжытуды (ығысуды, параллель көшіруді) қолдану арқылы салыңдар.

3.11. Екімүшенің квадратын айырып квадраттық функцияның графигін салыңдар:

1) $y = x^2 - 3x + 1$; 2) $y = -x^2 + 4x + 2$;

3) $y = -2x^2 + 6x - 1$; 4) $y = 4x^2 - 8x + 1$.

3.12. Бүтін бөлігін айырып бөлшек-сызықтық функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \frac{2x-3}{x}$; 2) $y = \frac{x-3}{x+1}$; 3) $y = \frac{3x-2}{x-1}$; 4) $y = \frac{-2x+3}{x+2}$.

3.13. $y = \sqrt{x}$ функциясының графигін қолданып берілген функциялардың графигін салыңдар:

1) $y = \sqrt{x-2}$; 2) $y = \sqrt{x+3}$; 3) $y = \sqrt{x-1{,}2}$; 4) $y = \sqrt{x+2{,}5}$.

C

3.14. Берілген функциялардың графиктерін бір координаталық жазықтыққа салып, графиктердің қиылысу нүктелерінің санын табыңдар:

1) $y = x^2 + 2x - 3$ және $y = \frac{2x-5}{x-3}$;

2) $y = -x^2 + 4x - 2$ және $y = \frac{-2x+3}{x-3}$.

3.15. Берілген функциялардың графиктерін бір координаталық жазықтыққа салып, графиктердің қиылысу нүктелерінің санын көрсетіңдер:

1) $y = x^2 + 3x - 2$ және $y = \sqrt{x+2}$;

2) $y = x^2 - 4x + 2$ және $y = \sqrt{x-3}$;

3) $y = x^2 + 2x - 3$ және $y = |x-2|$;

4) $y = |x+4|$ және $y = \frac{-2x+3}{x-3}$.

3.16. $y = \sqrt{x}$ функциясының графигіне түрлендірулер қолданып төмендегі функциялардың графигін салыңдар:

1) $y = \sqrt{x-3} - 3$; 2) $y = \sqrt{x+1} - 1{,}5$;

3) $y = \sqrt{x+1{,}5} + 1$; 4) $y = \sqrt{x-2} + 2$.

ҚАЙТАЛАУ

3.17. 1) $y = x^2 - 3|x|$; 2) $y = x^2 + 4|x|$;

3) $y = 2x^2 + 5|x+3|$; 4) $y = 2x^2 - 4|x-1|$

функциясының графигін салыңдар.

3.18. Төмендегі функциялардың анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{-2x+3}{x-2}}$; 3) $y = \sqrt{\dfrac{3x-4}{2-x}}$.

3.19. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = 2x^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3x - y = 0, \\ y = 5 - x^2 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Сызықтық функция, квадраттық функция және олардың графиктері, кері пропорционалдық, координаталық жазықтық, нүктенің координаталары, фигураны түрлендіру түрлері, нүктеге және түзуге қарағанда симметрия.

§4. $y = af(x)$, $y = |f(x)|$, $a \in R$, ТҮРІНДЕГІ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ГРАФИКТЕРІН САЛУ

? *Oy* осі бойымен функция графигін сығу мен созуды орындауды; аналитикалық жазуында модуль таңбасы бар функциялардың графиктерін салуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

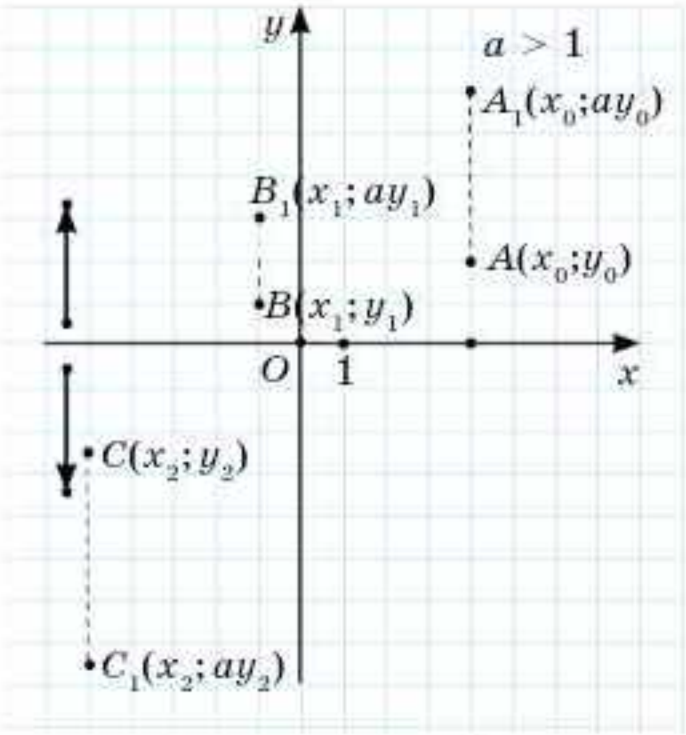
Графикті сығу, графикті созу, модуль, ордината осі

$a > 1$, $0 < a < 1$, $a = -1$ жағдайлары үшін $y = af(x)$ функциясының графигін салуды қарастырайық.

4.1-суретте $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ нүктелері және оларға сәйкес абсциссалары өзара тең, ординаталары a $(a > 1)$ есе үлкен болатын $A_1(x_0; ay_0)$, $B_1(x_1; ay_1)$, $C_1(x_2; ay_2)$ нүктелері белгіленген.

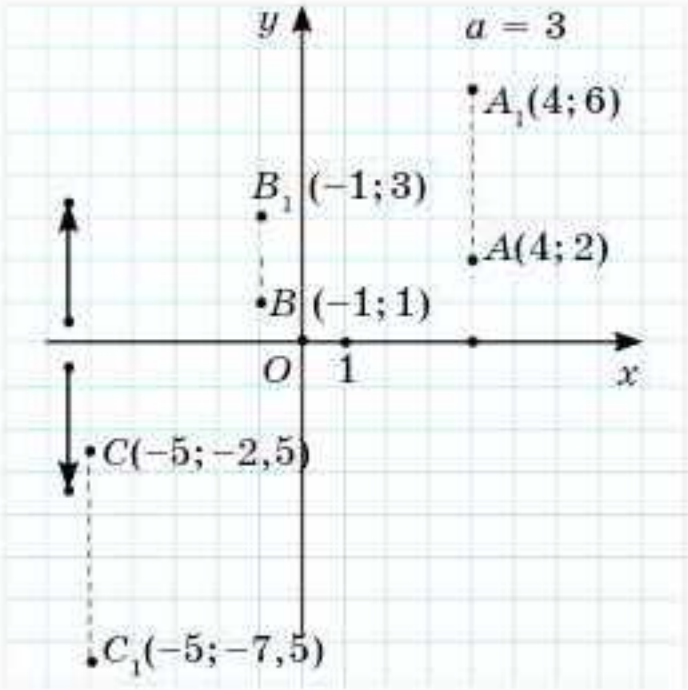
МЫСАЛ

1. 4.2-суретте $A(4; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(-5; -2{,}5)$ нүктелері және оларға сәйкес абсциссалары өзара тең, ординаталары 3 есе артық $A_1(4; 6)$, $B_1(-1; 3)$, $C_1(-5; -7{,}5)$ нүктелері берілген.



Oy осі бойымен a ($a > 1$) есе созу

4.1-сурет



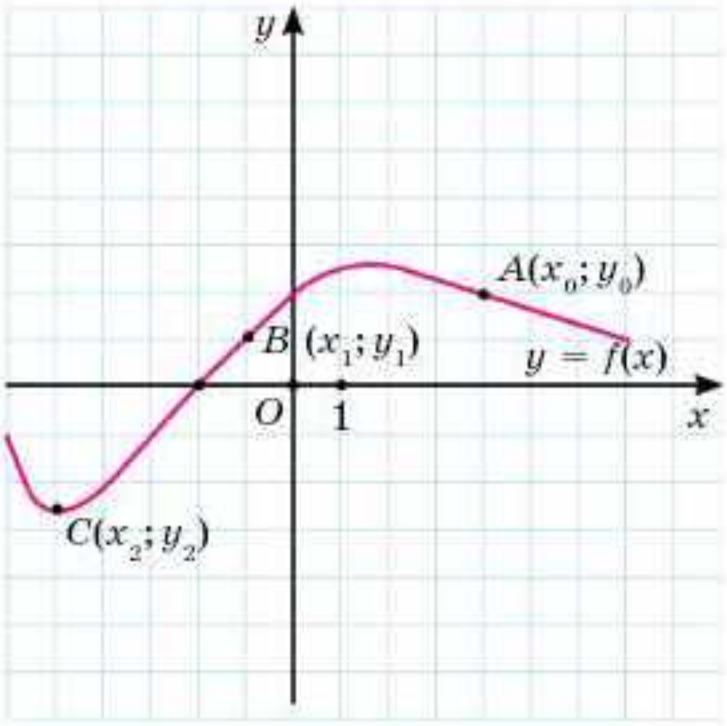
Oy осі бойымен 3 есе созу

4.2-сурет

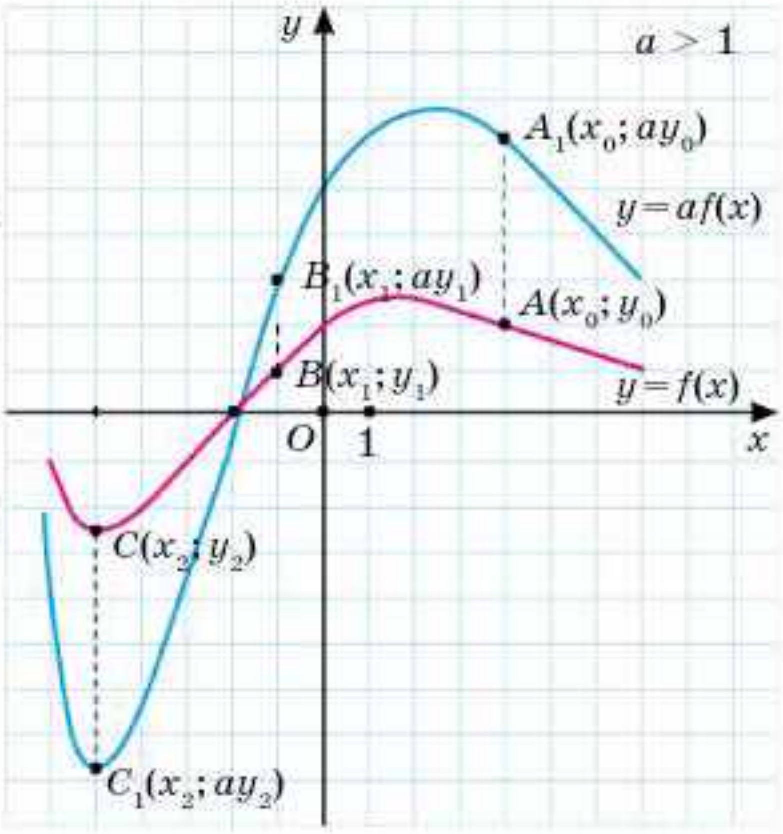
Мұндай жағдайда $A(x_0;\ y_0)$, $B(x_1;\ y_1)$, $C(x_2;\ y_2)$ нүктелері Oy осі бойымен a ($a > 1$) есе созу нәтижесінде сәйкесінше $A_1(x_0;\ ay_0)$, $B_1(x_1;\ ay_1)$, $C_1(x_2;\ ay_2)$ нүктелеріне көшеді.

$y = f(x)$ және $y = af(x)$ функцияларын қарастырайық. $y = f(x)$ функциясының графигі берілсін (4.3.1-сурет). $y = af(x)$ ($a > 1$) функциясының графигін салу керек. Аргументтің бірдей мәндерінде $y = f(x)$ функциясының сәйкес мәндерін a-ға көбейтіп, $y = af(x)$ функциясының мәндері алынатынын байқауға болады (4.3.2-сурет).

Басқаша айтқанда, кез келген $A(x_0;\ y_0)$ нүктесі $y = f(x)$ функциясының графигіне тиісті болса, онда $A_1(x_0;\ ay_0)$ нүктесі $y = af(x)$ функциясының графигіне тиісті. Демек, $y = af(x)$ ($a > 1$) функциясының графигі

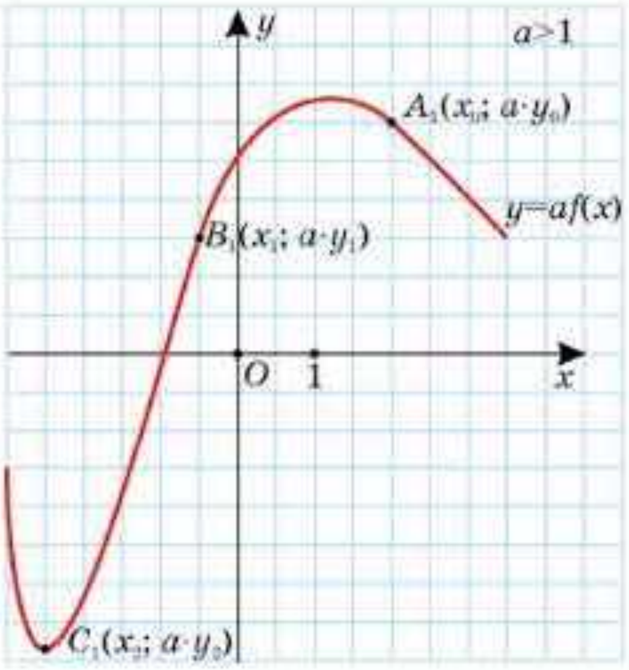


4.3.1-сурет

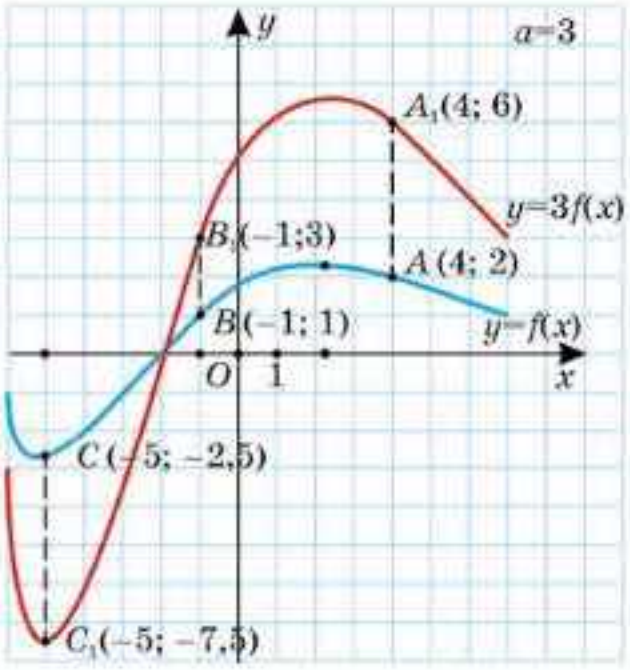


Oy осі бойымен a ($a > 1$) есе созу

4.3.2-сурет



4.3.3-сурет



4.4-сурет

$y = f(x)$ функциясының графигін Oy осі бойымен a есе созу арқылы алынады (4.3.3-сурет).

МЫСАЛ

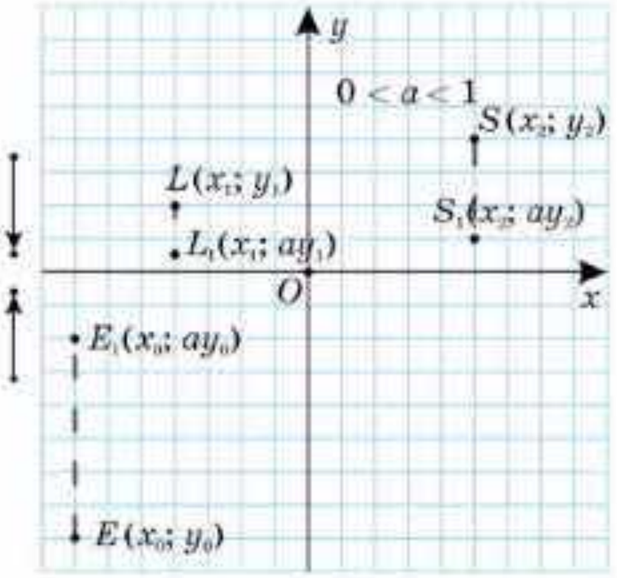
2. 4.4-суретте $y = f(x)$ функциясының графигін Oy осі бойымен 3 есе созу арқылы алынған $y = 3f(x)$ функциясының графигін салу жолы көрсетілген.

$0 < a < 1$ болғанда, $y = af(x)$ функциясының графигін салуды қарастырайық.

4.5-суретте $E(x_0; y_0)$, $L(x_1; y_1)$, $S(x_2; y_2)$ нүктелері және оларға сәйкес абсциссалары тең, ординаталары a-ға $(0 < a < 1)$ еселенген $E_1(x_0; ay_0)$, $L_1(x_1; ay_1)$, $S_1(x_2; ay_2)$ нүктелері көрсетілген.

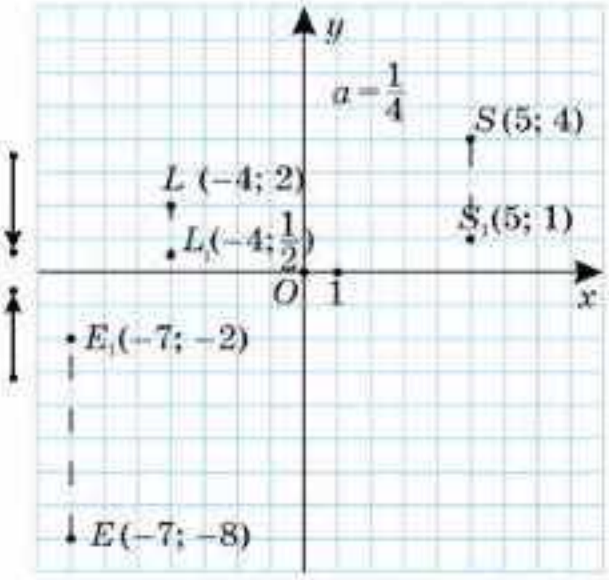
МЫСАЛ

3. 4.6-суретте $E(-7; -8)$, $L(-4; 2)$, $S(5; 4)$ нүктелері және оларға сәйкес абсциссалары өзара тең, ординаталары $\frac{1}{4}$-ге көбейтілген $E_1(-7; -2)$, $L_1\left(-4; \frac{1}{2}\right)$, $S_1(5; 1)$ нүктелері белгіленген.



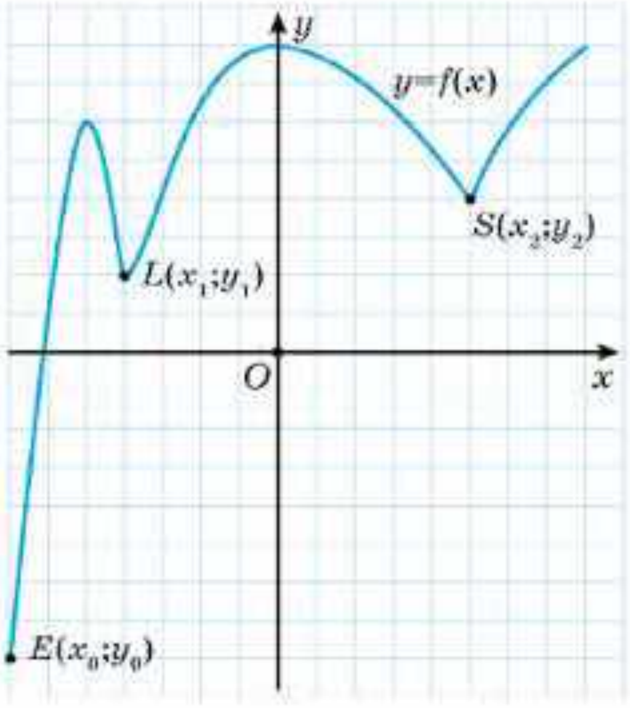
Oy осі бойымен $\frac{1}{a}$ $(0 < a < 1)$ есе сығу

4.5-сурет

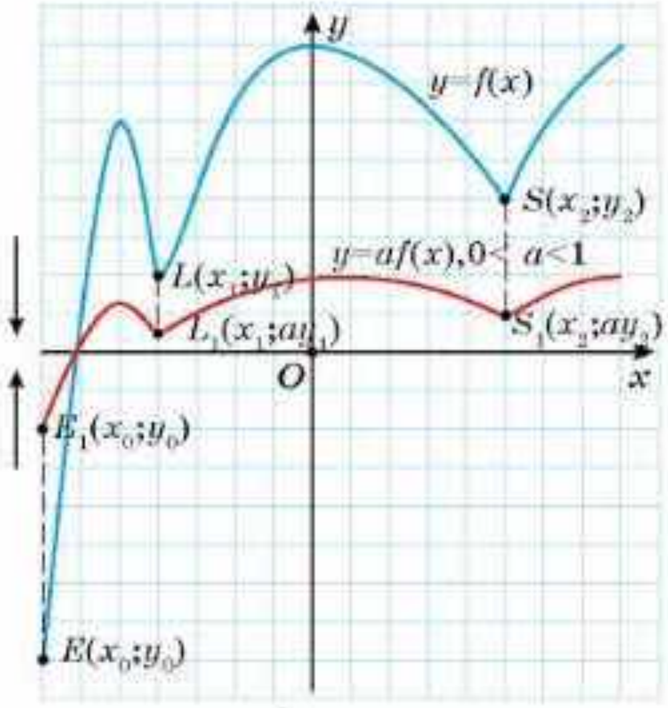


Oy осі бойымен 4 есе сығу

4.6-сурет



4.7.1-сурет



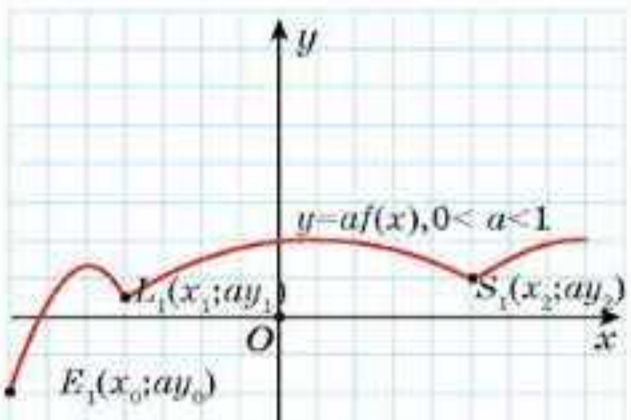
Oy осі бойымен $\frac{1}{a}$ $(0 < a < 1)$ есе сығу

4.7.2-сурет

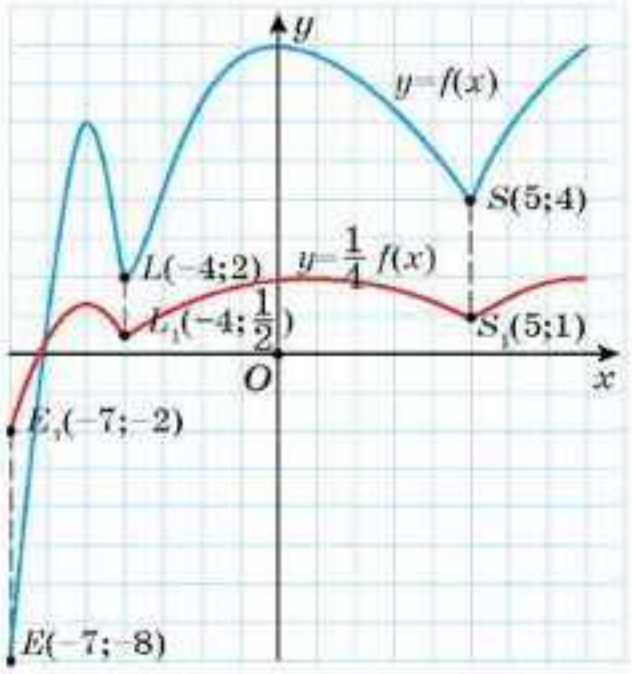
Мұндай жағдайда $E(x_0;\ y_0)$, $L(x_1;\ y_1)$, $S(x_2;\ y_2)$ нүктелері Oy осі бойымен $\frac{1}{a}$ $(0 < a < 1)$ есе сығу нәтижесінде сәйкесінше $E_1(x_0;\ ay_0)$, $L_1(x_1;\ ay_1)$, $S_1(x_2;\ ay_2)$ нүктелеріне көшеді.

$y = f(x)$ және $y = af(x)$ функцияларын қарастырайық. $y = f(x)$ функциясының графигі берілсін (4.7.1-сурет). $y = af(x)$, мұндағы $0 < a < 1$, функциясының графигін салу керек. Аргументтің бірдей мәндерінде $y = f(x)$ функциясының сәйкес мәндерін a-ға $(0 < a < 1)$ көбейтіп, $y = af(x)$ функциясының мәндерін аламыз (4.7.2-сурет).

Басқаша айтқанда, кез келген $A(x_0;\ y_0)$ нүктесі $y = f(x)$ функциясының графигіне тиісті болса, онда $A_1(x_0;\ ay_0)$ нүктесі $y = af(x)$, мұндағы $0 < a < 1$, функциясының графигіне тиісті. Демек, $y = af(x)$, мұндағы $0 < a < 1$, функциясының графигі $y = f(x)$ функциясының графигін Oy осі бойымен $\frac{1}{a}$ есе сығу арқылы алынады (4.7.3-сурет).

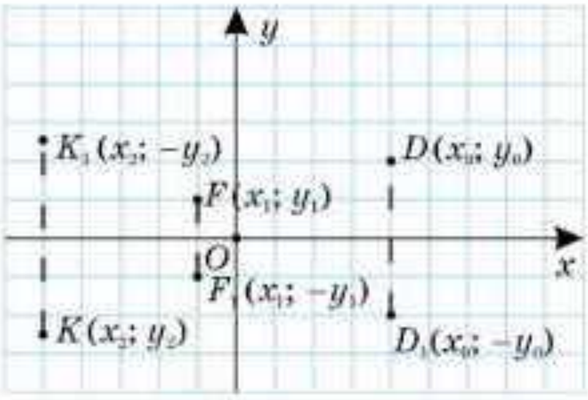


4.7.3-сурет



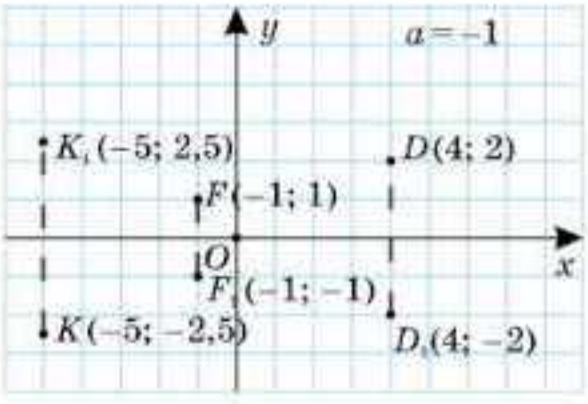
Oy осі бойымен 4 есе сығу

4.8-сурет



Ox осіне қарағанда симметриялы

4.9-сурет



4.10-сурет

МЫСАЛ

4. 4.8-суретте $y = f(x)$ функциясының графигін Oy осі бойымен 4 есе сығу арқылы алынған $y = \frac{1}{4} f(x)$ функциясының графигін қалай салуға болатыны көрсетілген.

$a = -1$ болғанда, $y = af(x)$, яғни $y = -f(x)$ функциясының графигін салайық.

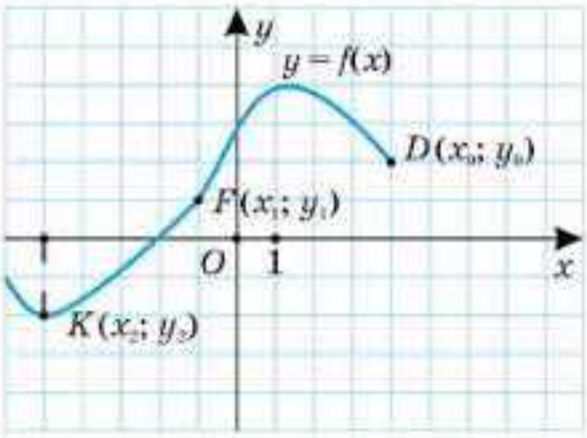
4.9-суретте $D(x_0; y_0)$, $F(x_1; y_1)$, $K(x_2; y_2)$ нүктелері және оларға сәйкес абсциссалары бірдей, ординаталары -1-ге көбейтілген $D_1(x_0; -y_0)$, $F_1(x_1; -y_1)$, $K_1(x_2; -y_2)$ нүктелері белгіленген.

МЫСАЛ

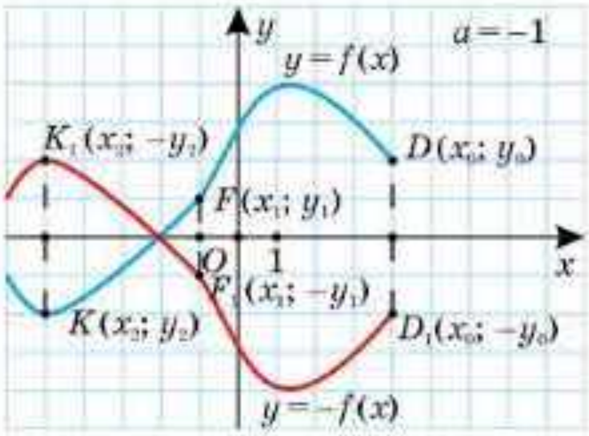
5. 4.10-суретте $D(4; 2)$, $F(-1; 1)$, $K(-5; -2,5)$ нүктелері және оларға сәйкес абсциссалары бірдей, ординаталары -1-ге көбейтілген $D_1(4; -2)$, $F_1(-1; -1)$, $K_1(-5; 2,5)$ нүктелері белгіленген.

$D_1(x_0; -y_0)$, $F_1(x_1; -y_1)$, $K_1(x_2; -y_2)$ нүктелері Ox осіне қарағанда $D(x_0; y_0)$, $F(x_1; y_1)$, $K(x_2; y_2)$ нүктелеріне симметриялы. Демек, нүктелердің абсциссалары бірдей, ординаталары қарама-қарсы сандар болса, ондай нүктелер Ox осіне қарағанда симметриялы болады.

$y = f(x)$ және $y = -f(x)$ функцияларын қарастырайық. $y = f(x)$ функциясының графигі берілсін (4.11.1-сурет). $y = -f(x)$ функциясының графигін салу керек. Аргументтің бірдей мәндерінде $y = f(x)$ және $y = -f(x)$ функцияларының сәйкес мәндері қарама-қарсы болады (4.11.2-сурет).

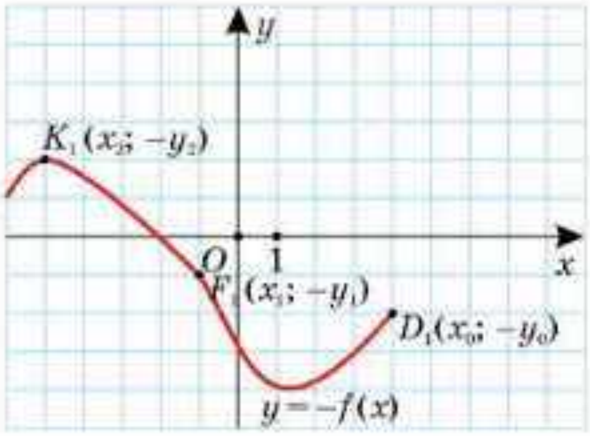


4.11.1-сурет

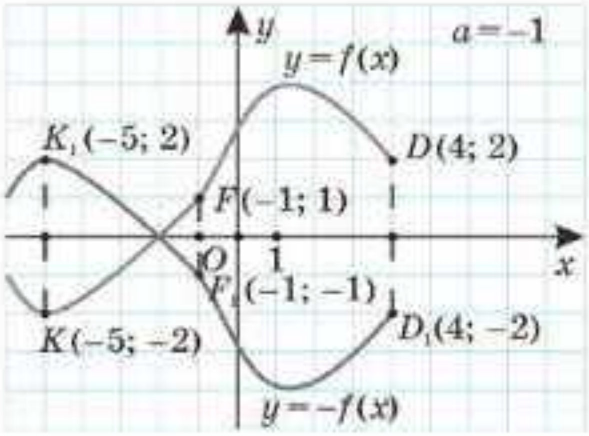


Ox осіне қарағанда симметриялы

4.11.2-сурет



4.11.3-сурет



4.12-сурет

Басқаша айтқанда, кез келген $A(x_0; y_0)$ нүктесі $y = f(x)$ функциясының графигіне тиісті болса, онда $A(x_0; y_0)$ нүктесіне Ox осіне қарағанда симметриялы нүкте $y = -f(x)$ функциясының графигіне тиісті. Демек, $y = -f(x)$ функциясының графигі $y = f(x)$ функциясының графигін Ox осіне қарағанда симметриялы бейнелеу арқылы алынады (4.11.3-сурет).

МЫСАЛ

6. 4.12-суретте $y = f(x)$ функциясының графигіне Ox осіне қарағанда симметрияны қолдану арқылы алынған $y = -f(x)$ функциясының графигін қалай салуға болатыны көрсетілген.

АЛГОРИТМ

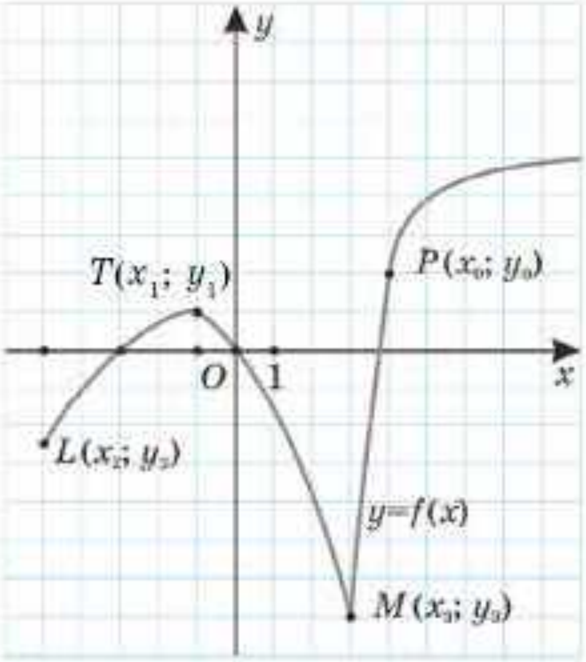
$y = f(x)$ функциясының графигін қолданып, $y = af(x)$ функциясының графигін салу алгоритмі:

1) $y = f(x)$ функциясының графигін саламыз;

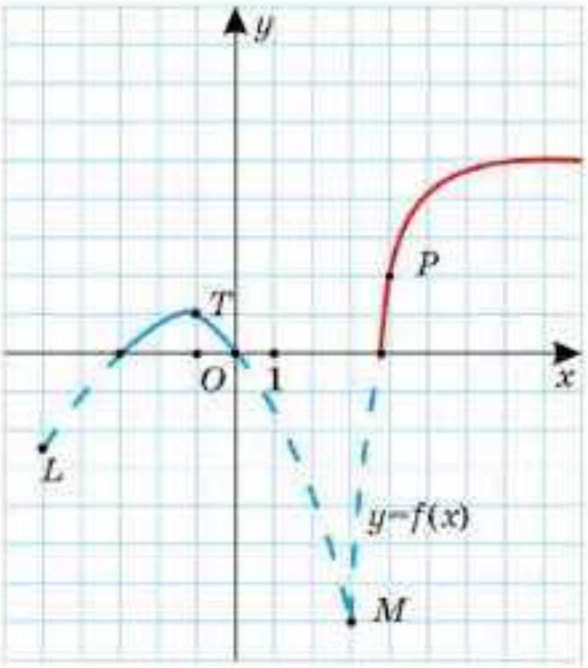
2) егер $|a| < 1$ болса, онда $y = f(x)$ функциясының графигін Oy осі бойымен $\left|\frac{1}{a}\right|$ есе сығамыз; егер $|a| > 1$ болса, онда $y = f(x)$ функция сының графигін Oy осі бойымен $|a|$ есе созамыз;

3) егер $a < 0$ болса, онда салынған графикті Ox осіне қарағанда симметриялы етіп бейнелейміз.

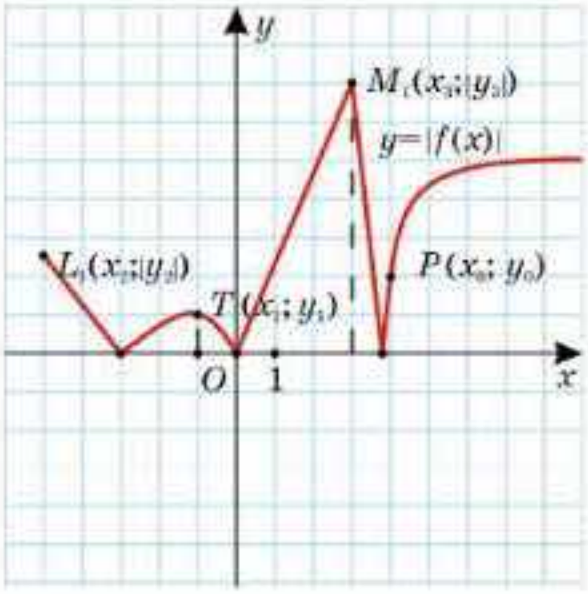
4.13—4.16-суреттерде $y = |f(x)|$ функциясының графигін салу жолдары көрсетілген.



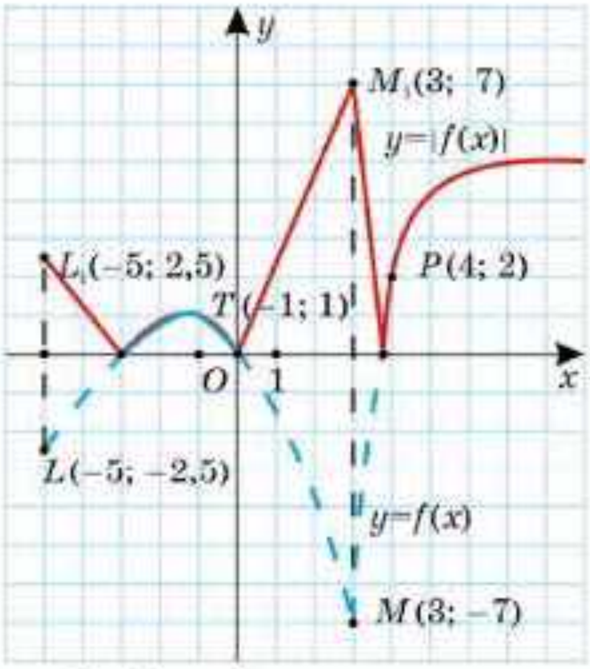
4.13-сурет



4.14-сурет



4.15-сурет



Графиктің Ox осінен төмен орналасқан бөлігінің Ox осіне қарағандағы симметриясы

4.16-сурет

1. a-ның қандай мәндерінде $y = f(x)$ функциясының графигіне: а) Oy осі бойымен созу; ә) Oy осі бойымен сығу; б) Ox осіне қарағанда симметрияны қолдану арқылы $y = af(x)$ функциясының графигін алуға болады? Мысал келтіріңдер.

2. $y = f(x)$ функциясының графигін қолданып, а) $y = -2f(x)$; ә) $y = -0,5f(x)$ функциясының графигін қалай салуға болады?

3. Егер: а) $a > 1$; ә) $0 < a < 1$; б) $a = -1$ болса, онда $y = f(x)$ және $y = af(x)$ функциялары графиктерінің нүктелері қалай байланысқан? Мысал келтіріңдер.

Жаттығулар

А

4.1. Нүктелерді координаталық жазықтыққа салыңдар:

1) $A(2; 3)$ және $A_1(2; 6)$; 2) $B(1; -2)$ және $B_1(1; -6)$;
3) $P(-2; -1,5)$ және $P_1(-2; -3)$; 4) $C(-3; 2,4)$ және $C_1(-3; 7,2)$;
5) $K(2; -1,4)$ және $K_1(2; -4,2)$; 6) $M(4; -3)$ және $M_1(4; -6)$.

Oy осі бойымен созу арқылы A, B, P, C, K, M нүктелерінің сәйкесінше A_1, B_1, P_1, C_1, K_1, M_1 нүктелеріне көшуін беретін созу коэффициентін көрсетіңдер.

4.2. Нүктелерді координаталық жазықтыққа салыңдар:

1) $A(-1; 3)$ және $A_1(-1; 1)$; 2) $B(1; 4)$ және $B_1(1; 2)$;
3) $P(-2; 4,5)$ және $P_1(-2; 3)$; 4) $C(2; -2,4)$ және $C_1(2; -0,8)$;
5) $K(-3; -4,4)$ және $K_1(-3; -1,1)$; 6) $M(4; 9)$ және $M_1(4; 1,5)$.

Oy осі бойымен сығу арқылы A, B, P, C, K, M нүктелеріне көшуді беретін сығу коэффициентін көрсетіңдер.

4.3. Функциялардың графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар:

1) $y = x$; $y = 2x$ және $y = 0,5x$; 2) $y = x^2$; $y = 3x^2$ және $y = 0,5x^2$;

3) $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{3}{x}$ және $y = \frac{0,5}{x}$.

4.4. Функциялардың графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар:

1) $y = x^2$; $y = -1,5x^2$; $y = x^2 - 2$; $y = (x - 2)^2$; $y = -2x^2 + 3$;

2) $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{x-2}$; $y = \sqrt{x+3}$; $y = 2\sqrt{x}$; $y = -3\sqrt{x}$.

$y = x^2$ және $y = \sqrt{x}$ функцияларының графиктеріне қандай түрлендірулер қолданылған?

B

4.5. Түрлендірулер қолданып функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 2x^2 - 3$;
2) $y = 0,5x^2 + 2$;
3) $y = 2(x - 2)^2$;
4) $y = -2x^2 - 1,5$.

4.6. Түрлендірулер қолданып функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 2\sqrt{x} - 3$;
2) $y = \sqrt{x+1} - 2$;
3) $y = -\sqrt{x+3} + 2$;
4) $y = 2\sqrt{4-x}$.

4.7. Функциялардың графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар:

1) $y = \frac{1}{x^2}$ және $y = \frac{2}{x^2}$;
2) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ және $y = \frac{1}{(x+3)^2}$.

4.8. 1) $y = 2 + \frac{3}{x-2}$; 2) $y = 3 - \frac{1}{x+1}$; 3) $y = \frac{3x-1}{x}$ функциясының графигін салу үшін қандай түрлендірулер жасау керек? Функцияның графигін салыңдар.

C

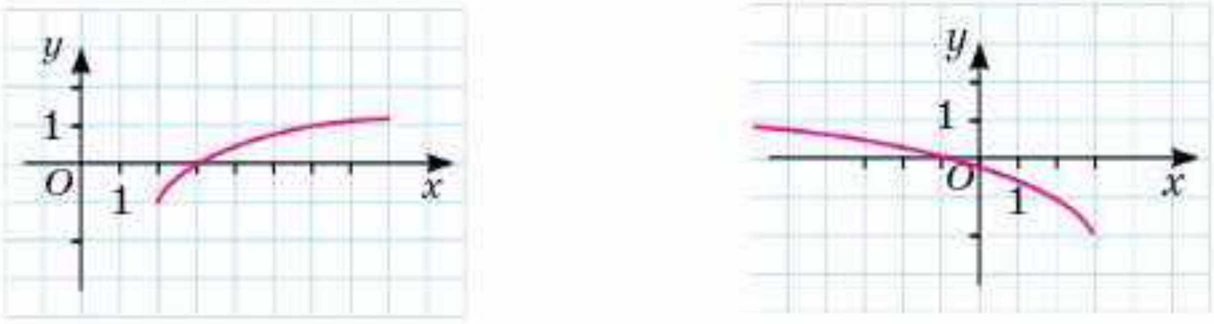
4.9. Бір координаталық жазықтыққа төмендегі функциялардың графиктерін салыңдар және графиктердің ортақ нүктелерінің санын көрсетіңдер:

1) $y = \frac{3x+2}{x-1}$ және $y = \frac{1}{x^2}$;
2) $y = \frac{2x-3}{x+2}$ және $y = \sqrt{x+3}$.

4.10. Графиктік тәсілмен теңдеудің қанша түбірі болатынын табыңдар:

1) $x^2 + 3x = \frac{1}{x}$;
2) $x^2 - 4x = \frac{1}{x^2}$;
3) $\sqrt{x+3} = \frac{1}{x+1}$;
4) $\sqrt{2-x} = \frac{2}{x+2}$.

4.11. $y = \sqrt{x}$ функциясының графигіне түрлендірулер қолданылып координаталық жазықтықта функцияның графигі салынған (4.17-сурет). Осы функцияның аналитикалық формуласын жазыңдар.



1) 2)

4.17-сурет

Төмендегі функциялардың графиктерін салыңдар **(4.12-4.13):**

4.12. 1) $y = \left|\frac{2}{x-1}\right|$; 2) $y = \left|\frac{1}{1-x}\right|$; 3) $y = \left|\frac{-3}{x+2}\right|$.

4.13. 1) $y = \left|\sqrt{x+3} - 2\right|$; 2) $y = \left|1 - \sqrt{x-2}\right|$; 3) $y = \left|2 - \sqrt{1-x}\right|$.

ҚАЙТАЛАУ

4.14. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x^2-9}}$; 2) $y = \sqrt{\frac{2-3x}{x^2-1}}$;

3) $y = \frac{1}{x-2} + \sqrt{\frac{x-2}{x^2-9}}$; 4) $y = \frac{1}{x^2-4} + \sqrt{\frac{x^2-16}{x+3}}$.

4.15. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\cos^2(180^\circ - x) + \cos^2(270^\circ + x) - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}(180^\circ + x) = 0$;

2) $\frac{\cos^2(\pi + \alpha)}{1 - \sin\alpha} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

4.16. Теңдеудің түбірін табыңдар:

1) $|x+3| = |2-x|$; 2) $|x-4| - |x-2| = -2$;

3) $|x-3| + 2|x+1| = 4$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Сызықтық функция, квадраттық функция және олардың графиктері, кері пропорционалдық, координаталық жазықтық, нүктенің координаталары, фигураны түрлендіру түрлері, нүктеге қарағанда және түзуге қарағанда симметрия.

§5. $y = f(ax)$, $y = f(|x|)$, $a \in R$, ТҮРІНДЕГІ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ГРАФИКТЕРІН САЛУ

Ox осі бойымен функция графигін сығу мен созуды орындауды; аналитикалық жазуында модуль таңбасы бар функциялардың графиктерін салуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Графикті сығу, графикті созу, абсцисса осі

$a > 1$, $0 < a < 1$, $a = -1$ жағдайлары үшін $y = f(ax)$ функциясының графигін салайық.

5.1-суретте $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ нүктелері және оларға сәйкес ординаталары бірдей, абсциссалары a-ға ($a > 1$) еселенген $A_1(ax_0; y_0)$, $B_1(ax_1; y_1)$, $C_1(ax_2; y_2)$ нүктелері берілген.

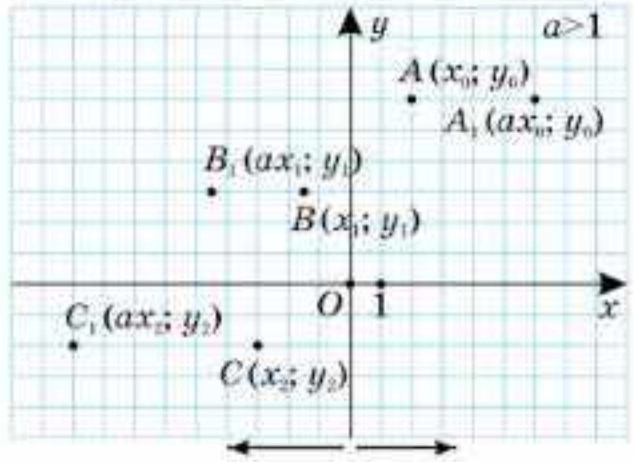
МЫСАЛ

1. 5.2-суретте $A(2; 6)$, $B(-1,5; 3)$, $C(-3; -2)$ нүктелері және оларға сәйкес ординаталары бірдей, абсциссалары 3-ке көбейтілген $A_1(6; 6)$, $B_1(-4,5; 3)$, $C_1(-9; -2)$ нүктелері белгіленген.

Мұндай жағдайда $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ нүктелері *Ox* осі бойымен a ($a > 1$) есе созу нәтижесінде сәйкесінше $A_1(ax_0; y_0)$, $B_1(ax_1; y_1)$, $C_1(ax_2; y_2)$ нүктелеріне көшеді және керісінше $A_1(ax_0; y_0)$, $B_1(ax_1; y_1)$, $C_1(ax_2; y_2)$ нүктелері *Ox* осі бойымен a ($a > 1$) есе сығу нәтижесінде сәйкесінше $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ нүктелеріне көшеді.

Анықтама. $A_0(x_0; y_0)$ *және* $A_1(x_1; y_1)$ *нүктелерінің координаталары* $y_1 = y_0$ *және* $x_1 = ax_0$ ($a > 1$) *қатынасымен байланысты болса, онда Ox осі бойымен a* ($a > 1$) *есе созу нәтижесінде* $A_0(x_0; y_0)$ *нүктесі* $A_1(x_1; y_1)$ *нүктесіне және керісінше Ox осі бойымен a* ($a > 1$) *есе сығу нәтижесінде* $A_1(x_1; y_1)$ *нүктесі* $A_0(x_0; y_0)$ *нүктесіне көшеді деп айтады.*

$y = f(x)$ және $y = f(ax)$ функцияларын қарастырайық. $y = f(x)$ функциясының графигі берілсін (5.3.1-сурет). $y = f(ax)$ ($a > 1$) функциясының графигін салу керек.

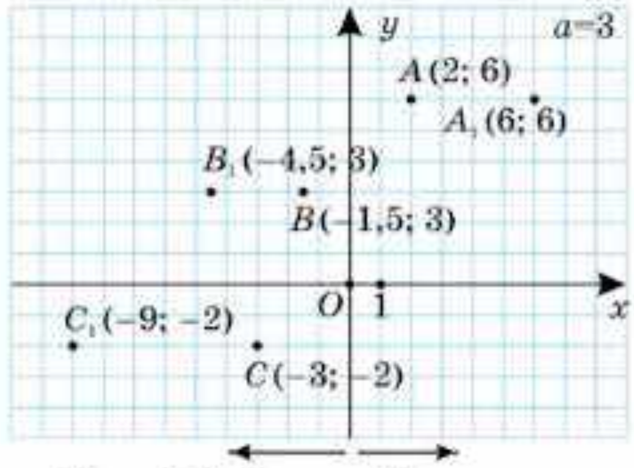


Ox осі бойымен a ($a > 1$) есе созу

$\rightarrow \leftarrow$

Ox осі бойымен a ($a > 1$) есе сығу

5.1-сурет

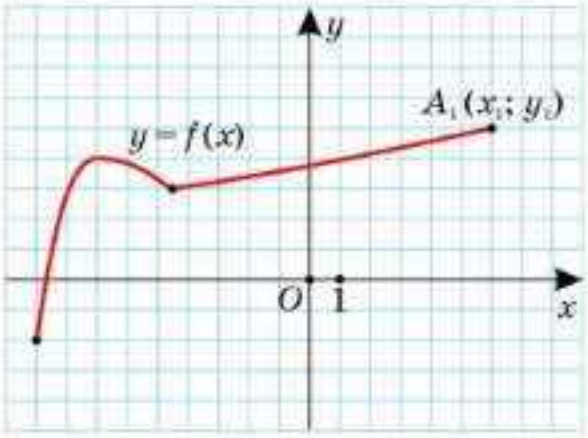


Ox осі бойымен 3 есе созу

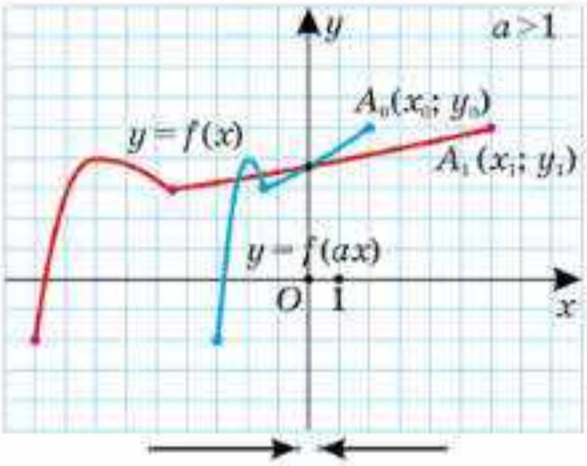
$\rightarrow \leftarrow$

Ox осі бойымен 3 есе сығу

5.2-сурет



5.3.1-сурет



Ox осі бойымен a ($a > 1$) есе сығу

5.3.2-сурет

$y = f(x)$ және $y = f(ax)$ ($a > 1$) функцияларын қарастырайық. xOy координаталар жүйесіндегі осы функциялардың графиктерін салыстырайық (5.3.2-сурет). Ол үшін $y = f(ax)$ ($a > 1$) функциясының графигінен кез келген $A_0(x_0; y_0)$ нүктесін аламыз. Бұл $y_0 = f(ax_0)$ (1) теңдігінің дұрыстығын көрсетеді. $y_1 = y_0$ және $x_1 = ax_0$ алмастыруларын енгізсек, (1)-теңдік $y_1 = f(x_1)$ түріне келеді. Демек, $A_1(x_1; y_1)$ нүктесі $y = f(x)$ функциясының графигіне тиісті.

$A_0(x_0; y_0)$ және $A_1(x_1; y_1)$ нүктелерінің координаталары $y_1 = y_0$ және $x_1 = ax_0$ қатынасымен байланысты болғандықтан, Ox осі бойымен a ($a > 1$) есе сығу нәтижесінде $A_1(x_1; y_1)$ нүктесі $A_0(x_0; y_0)$ нүктесіне көшеді (5.3.3-сурет).

МЫСАЛ

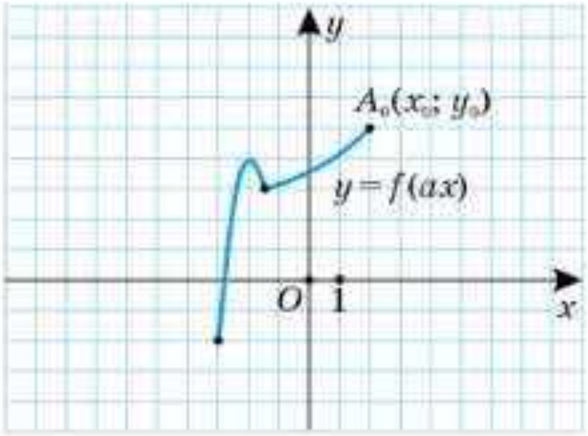
2. 5.4-суретте $y = f(x)$ функциясының графигін Ox осі бойымен 3 есе сығу арқылы алынған $y = f(3x)$ функциясының графигін салу жолдары көрсетілген.

$0 < a < 1$ болғандағы $y = f(ax)$ функциясының графигін салайық.

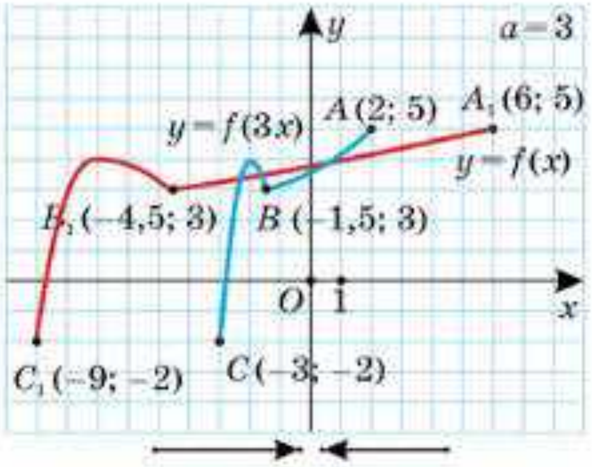
5.5-суретте $E(x_0; y_0)$, $L(x_1; y_1)$, $S(x_2; y_2)$ нүктелері және оларға сәйкес ординаталары тең, абсциссалары a-ға ($0 < a < 1$) еселенген $E_1(ax_0; y_0)$, $L_1(ax_1; y_1)$, $S_1(ax_2; y_2)$ нүктелері белгіленген.

МЫСАЛ

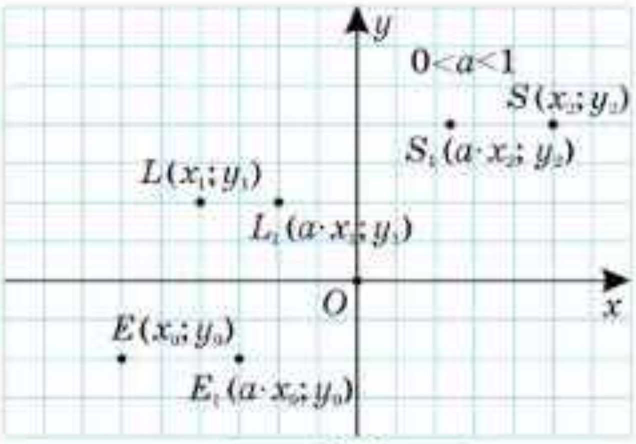
3. 5.6-суретте $E(-6; -2)$, $L(-4; 2)$, $S(5; 4)$ нүктелері және оларға сәйкес ординаталары бірдей, абсциссалары $\frac{1}{2}$-ге көбейтілген $E_1(-3; -2)$, $L_1(-2; 2)$, $S_1(2,5; 4)$ нүктелері белгіленген.



5.3.3-сурет



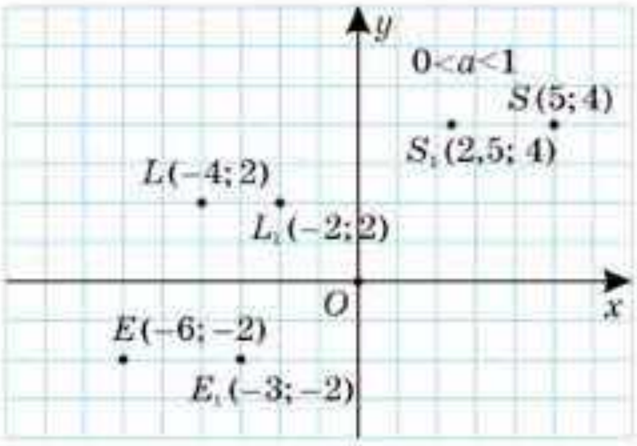
5.4-сурет



Ox осі бойымен $\frac{1}{a}$ $(0 < a < 1)$ есе сығу

Ox осі бойымен $\frac{1}{a}$ $(0 < a < 1)$ есе созу

5.5-сурет



Ox осі бойымен 2 есе сығу

Ox осі бойымен 2 есе созу

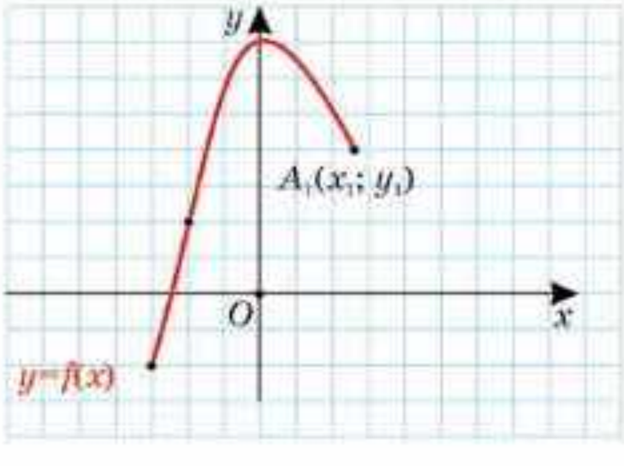
5.6-сурет

Мұндай жағдайда $E_1(ax_0;\ y_0)$, $L_1(ax_1;\ y_1)$, $S_1(ax_2;\ y_2)$ нүктелері Ox осі бойымен $\frac{1}{a}$ $(0 < a < 1)$ есе созу нәтижесінде сәйкесінше $E(x_0;\ y_0)$, $L(x_1;\ y_1)$, $S(x_2;\ y_2)$ нүктелеріне көшеді және керісінше $E(x_0;\ y_0)$, $L(x_1;\ y_1)$, $S(x_2;\ y_2)$ нүктелері Ox осі бойымен $\frac{1}{a}$ $(0 < a < 1)$ есе сығу нәтижесінде сәйкесінше $E_1(ax_0;\ y_0)$, $L_1(ax_1;\ y_1)$, $S_1(ax_2;\ y_2)$ нүктелеріне көшеді.

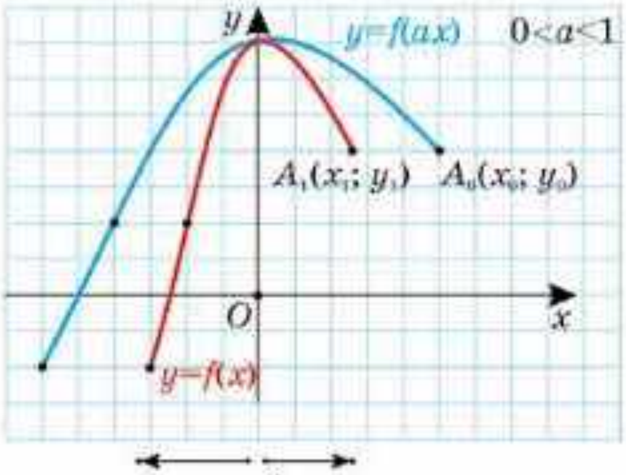
Анықтама. *$A_0(x_0;\ y_0)$ және $A_1(x_1;\ y_1)$ нүктелерінің координаталары $y_1 = y_0$ және $x_1 = ax_0$ $(0 < a < 1)$ қатынасымен байланысты болса, онда Ox осі бойымен $\frac{1}{a}$ есе сығу нәтижесінде $A_0(x_0;\ y_0)$ нүктесі $A_1(x_1;\ y_1)$ нүктесіне және керісінше Ox осі бойымен $\frac{1}{a}$ $(0 < a < 1)$ есе созу нәтижесінде $A_1(x_1;\ y_1)$ нүктесі $A_0(x_0;\ y_0)$ нүктесіне көшеді деп айтады.*

$y = f(x)$ және $y = f(ax)$ функцияларын қарастырайық. $y = f(x)$ функциясының графигі берілсін (5.7.1-сурет). $y = f(ax)$, мұндағы $0 < a < 1$, функциясының графигін салу керек.

xOy координаталар жүйесінде осы функциялардың графиктерін салыстырайық. Ол үшін $y = f(ax)$, мұндағы $0 < a < 1$, функциясының



5.7.1-сурет



Ox осі бойымен $\frac{1}{a}$ $(0 < a < 1)$ есе созу

5.7.2-сурет

графигінен кез келген $A_0(x_0; y_0)$ нүктесін аламыз (5.7.2-сурет). Бұл $y_0 = f(ax_0)$ (1) теңдігінің дұрыстығын көрсетеді.

$y_1 = y_0$ және $x_1 = ax_0$ алмастыруларын енгізсек, (1) теңдік $y_1 = f(x_1)$ түріне келеді. Демек, $A_1(x_1; y_1)$ нүктесі $y = f(x)$ функциясының графигіне тиісті.

$A_0(x_0; y_0)$ және $A_1(x_1; y_1)$ нүктелерінің координаталары $y_1 = y_0$ және $x_1 = ax_0$ қатынасымен байланысты болғандықтан, Ox осі бойымен $\frac{1}{a}$ $(0 < a < 1)$ есе созу нәтижесінде $A_1(x_1; y_1)$ нүктесі $A_0(x_0; y_0)$ нүктесіне көшеді (5.7.3-сурет).

МЫСАЛ

4. 5.8-суретте $y = f(x)$ функциясының графигін Ox осі бойымен 2 есе созу арқылы алынған $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ функциясының графигін салу жолы көрсетілген.

$a = -1$ болғандағы $y = f(ax)$, яғни $y = f(-x)$ функциясының графигін салайық.

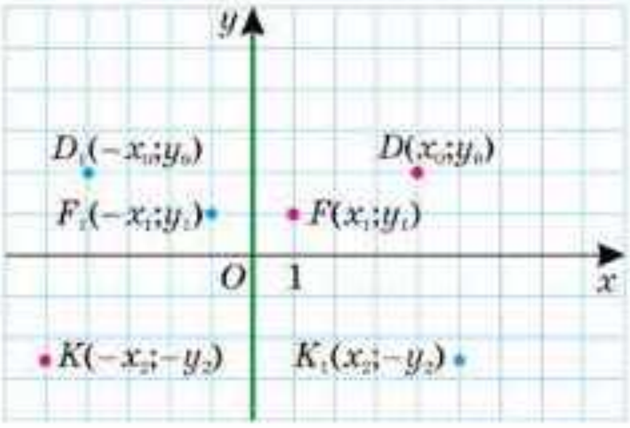
5.9-суретте $D(x_0; y_0)$, $F(x_1; y_1)$, $K(-x_2; -y_2)$ нүктелері және оларға сәйкес ординаталары бірдей, ал абсциссалары -1-ге көбейтілген $D_1(-x_0; y_0)$, $F_1(-x_1; y_1)$, $K_1(x_2; -y_2)$ нүктелері белгіленген.

МЫСАЛ

5. 5.10-суретте $D(4;\ 2)$, $F(-1;\ 1)$, $K(-5;\ -2,5)$ нүктелері және оларға сәйкес ординаталары бірдей, абсциссалары -1-ге көбейтілген $D_1(-4;\ 2)$, $F_1(1;\ 1)$, $K_1(5;\ -2,5)$ нүктелері белгіленген.

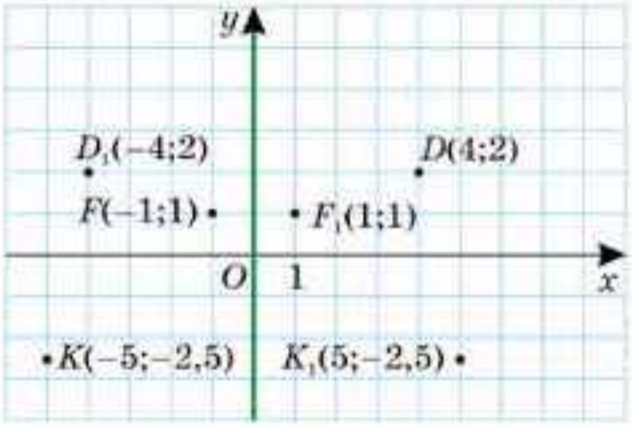
$D_1(-x_0; y_0)$, $F_1(-x_1; y_1)$, $K_1(x_2; -y_2)$ нүктелері Oy осіне қарағанда $D(x_0; y_0)$, $F(x_1; y_1)$, $K(-x_2; -y_2)$ нүктелеріне симметриялы. Демек, ординаталары бірдей, абсциссалары қарама-қарсы сандар болатын нүктелер Oy осіне қарағанда симметриялы.

$y = f(x)$ және $y = f(-x)$ функцияларын қарастырайық. $y = f(x)$ функциясының графигі берілсін (5.11.1-сурет). $y = f(-x)$ функциясының графигін салу керек. Суреттен функцияның бірдей мәндерінде аргументтердің мәндері қарама-қарсы болатынын көреміз (5.11.2-сурет). Басқаша айтқанда, кез келген $A(x_0; y_0)$ нүктесі $y = f(x)$ функциясының

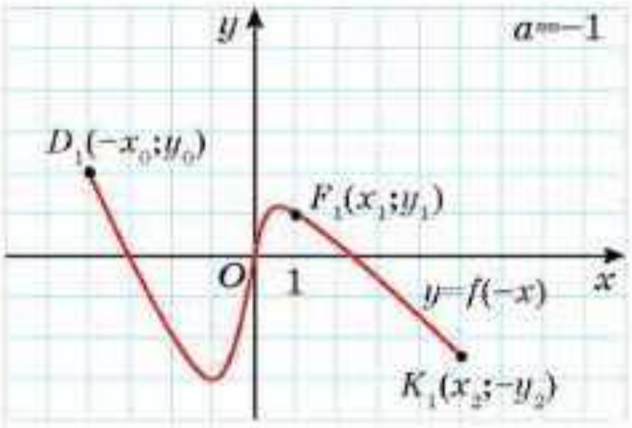


Oy осіне қарағанда симметриялы

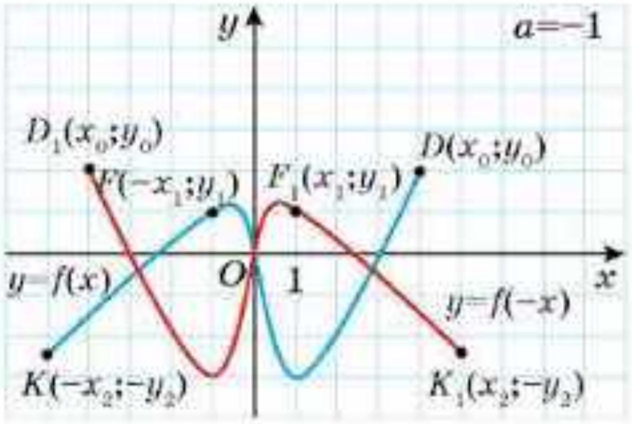
5.9-сурет



5.10-сурет



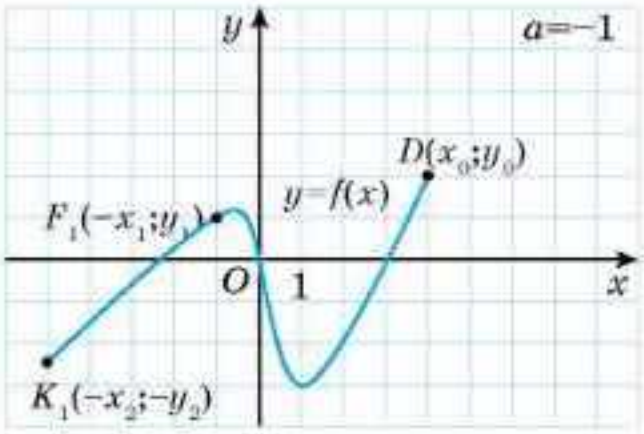
5.11.1-сурет



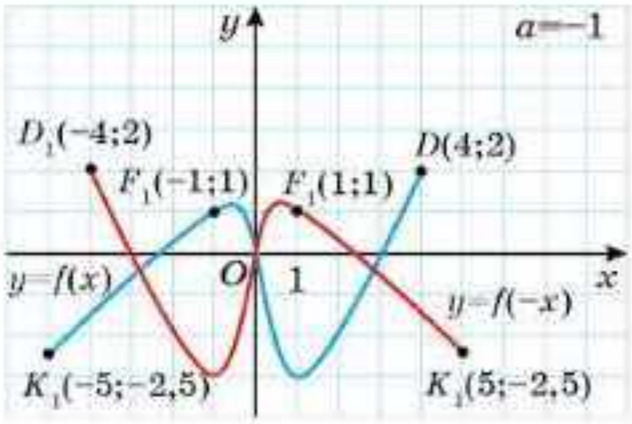
Oy осіне қарағанда симметриялы

5.11.2-сурет

графигіне тиісті болса, осы нүктеге Oy осіне қарағанда симметриялы нүкте $y = f(-x)$ функциясының графигіне тиісті. Демек, $y = f(-x)$ функциясының графигін $y = f(x)$ функциясының графигінен Oy осіне қарағандағы симметрия арқылы алуға болады (5.11.3-сурет).



5.11.3-сурет



Oy осіне қарағанда симметриялы

5.12-сурет

МЫСАЛ

6. 5.12-суретте $y = f(x)$ функциясының графигіне Oy осіне қарағанда симметриялы $y = f(-x)$ функциясының графигін салу жолы көрсетілген.

АЛГОРИТМ

$y = f(x)$ функциясының графигін қолданып, $y = f(-x)$ функциясының графигін салу алгоритмі:

1) $y = f(x)$ функциясының графигін саламыз;

2) салынған графикті Oy осіне қарағанда симметриялы етіп бейнелейміз.

АЛГОРИТМ

$y = f(x)$ функциясының графигін қолданып, $y = f(ax)$, мұндағы $a \in R$, функциясының графигін салу алгоритмі:

1) $y = f(x)$ функциясының графигін саламыз;

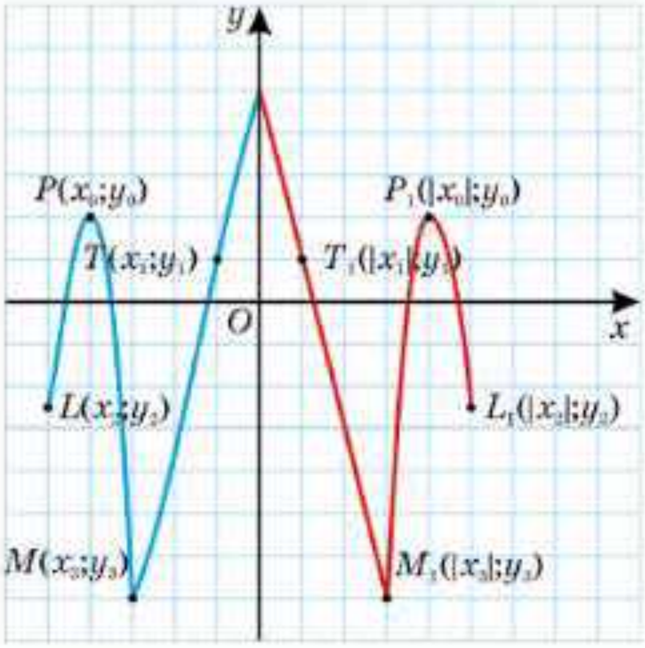
2) егер $|a| > 1$ болса, онда графикті Ox осі бойымен $|a|$ есе созамыз;

3) егер $|a| < 1$ болса, онда графикті Ox осі бойымен $\left|\frac{1}{a}\right|$ есе сығамыз. Сонда $y = f(|a|x)$ функциясының графигі шығады;

4) егер $a < 0$ болса, онда $y = f(|a|x)$ функциясының графигін Oy осіне қарағанда симметриялы етіп саламыз.

$y = f(|x|)$ функциясын қарастырайық.

5.13-суретте $P(x_0; y_0)$, $T(x_1; y_1)$, $L(x_2; y_2)$, $M(x_3; y_3)$ нүктелері және оларға сәйкес ординаталары бірдей, абсциссалары модульдері бойынша тең $P_1(|x_0|; y_0)$, $T_1(|x_1|; y_1)$, $L_1(|x_2|; y_2)$, $M_1(|x_3|; y_3)$ нүктелері белгіленген.

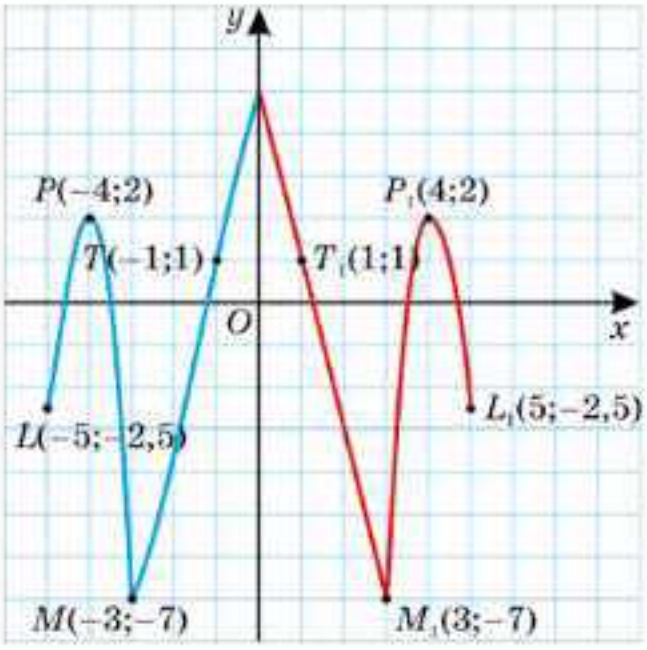


Графиктің Ox осінің сол жағында орналасқан бөлігінің Oy осіне қарағандағы симметриясы

5.13-сурет

МЫСАЛ 7. 5.14-суретте $P(-4; 2)$, $T(-1; 1)$, $L(-5; -2,5)$, $M(-3; -7)$ нүктелері және оларға сәйкес ординаталары бірдей, абсциссалары модульдері бойынша тең $P_1(4; 2)$, $T_1(1; 1)$, $L_1(5; -2,5)$, $M_1(3; -7)$ нүктелері белгіленген.

Демек, сәйкес ординаталары бірдей, абсциссалары қарама-қарсы болатын нүктелер Oy осіне қарағанда симметриялы болады.



5.14-сурет

$y = f(|x|)$ функциясын қарастырайық.

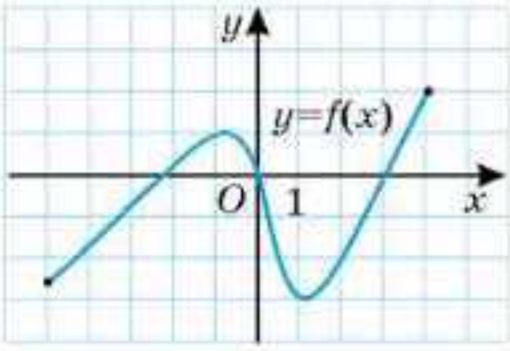
$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), \text{ мұндағы } x \geqslant 0; \\ f(-x), \text{ мұндағы } x < 0. \end{cases}$$

АЛГОРИТМ Сондықтан $y = f(|x|)$ функциясының графигін салу үшін мына алгоритм қолданылады:

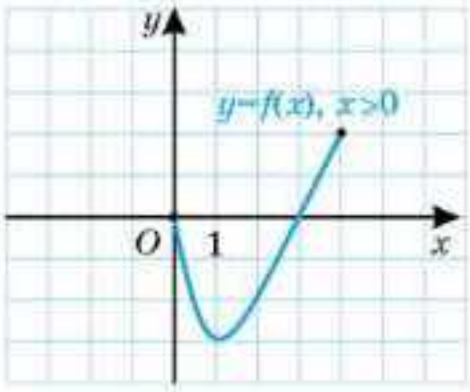
1) $y = f(x)$ функциясының графигін саламыз (5.15.1-сурет), одан кейін салынған графиктің $x \geqslant 0$ жағдайындағы бөлігін қалдырамыз (5.15.2-сурет);

2) осы бөлікті Oy осіне қарағанда симметриялы етіп бейнелейміз (5.15.3-сурет).

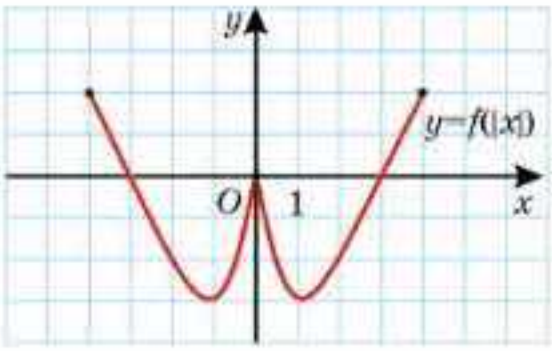
5.15.1, 5.15.2, 5.15.3-суреттерде $y = f(|x|)$ функциясының графигін салу жолы көрсетілген.



5.15.1-сурет



5.15.2-сурет



5.15.3-сурет

1. a-ның қандай мәндерінде $y = f(ax)$ функциясының графигіне а) Ox осі бойымен созуды; ә) Ox бойымен сығуды; б) Oy осіне қарағанда симметрияны қолдану арқылы $y = f(x)$ функциясының графигін алуға болады? Мысал келтіріңдер.

2. $y = f(x)$ функциясының графигін қолданып, а) $y = f(-2x)$; ә) $y = f(-0{,}5 - x)$ функциясының графигін қалай салуға болады?

3. Егер: а) $a > 1$; ә) $0 < a < 1$; б) $a = -1$ болса, онда $y = f(x)$ және $y = f(ax)$ функциялары графиктерінің нүктелері қалай байланысқан? Мысал келтіріңдер.

Жаттығулар

A

5.1. Егер a-ның мәні: 1) 2; 2) 1,5; 3) 4-ке тең болса, онда Ox осі бойымен a есе сығуды орындағанда $A(4; 5)$ нүктесі көшетін нүктенің координаталарын табыңдар. Осы нүктелерді координаталық жазықтыққа салыңдар.

5.2. Егер a-ның мәні: 1) $-0{,}5$; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) $\frac{3}{4}$-ке тең болса, онда Ox осі бойымен a есе сығуды орындағанда $C(-2; 3)$ нүктесі көшетін нүктенің координаталарын табыңдар. Осы нүктелерді координаталық жазықтыққа салыңдар.

5.3. Егер a-ның мәні: 1) 0,5; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{4}{5}$-ке тең болса, онда Ox осі бойымен a есе сығуды орындағанда $M(-4; 6)$ нүктесі көшетін нүктенің координаталарын табыңдар. Осы нүктелерді координаталық жазықтыққа салыңдар.

5.4. $y = x^2 - 2$ функциясының графигіне Ox осі бойымен 3 есе сығуды орындаңдар. Шыққан функцияның формуласын жазыңдар.

5.5. $y = x^2 + 3x$ функциясының графигіне Ox осі бойымен 0,4 есе созуды орындаңдар. Шыққан функцияның формуласын жазыңдар.

5.6. $ABCK$ тіктөртбұрышы төбелерінің координаталары берілген: $A(0; 0)$, $B(0; 4)$, $C(6; 4)$, $K(6; 0)$. Тіктөртбұрыштан шаршы алу үшін онымен Ox немесе Oy осі бойымен созуды немесе сығуды орындаңдар.

B

5.7. $y = \sqrt{x}$ функциясының графигін қолданып берілген функциялардың графигін салыңдар:

1) $y = \sqrt{2x}$; 2) $y = \sqrt{0{,}5x}$; 3) $y = \sqrt{-4x}$; 4) $y = \sqrt{-0{,}2x}$.

5.8. Берілген функциялар графиктерінің ортақ нүктелерінің санын табыңдар:

1) $y = (2 - x)^2$ және $y = \sqrt{0{,}4x}$;

2) $y = -(2x - 3)^2$ және $y = \sqrt{-0{,}6x}$.

C

5.9. $y = \sqrt{x}$ функциясының графигін қолданып мына функциялардың графигін салыңдар:

1) $y = \sqrt{2|x|}$; 2) $y = \sqrt{0{,}5|x|}$;

3) $y = -\sqrt{-4x}$; 4) $y = 2\sqrt{0{,}3x}$.

***5.10.** Графиктік тәсілді қолданып теңдеудің түбірлерінің санын табыңдар:

1) $x^2 - 2|x| = \frac{1}{|x|}$; 2) $-x^2 + 4|x| = -\sqrt{2|x|}$.

5.11. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = |x^2 - 4|x| + 1|$; 2) $y = |-x^2 + 2|x| - 2|$; 3) $y = \left|\sqrt{|x|} - 2\right|$.

ҚАЙТАЛАУ

5.12. 1) $y = \begin{cases} x^2 - 3, \text{ мұндағы } x \geqslant 0, \\ 3 - 2x, \text{ мұндағы } x < 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} x^2 + 3x, \text{ мұндағы } x \geqslant 0, \\ \sqrt{-x}\text{, мұндағы } x < 0 \end{cases}$

функциясының графигін салыңдар.

5.13. 1) $|x - 2| - 2|x + 1| = 4$; 2) $2|x - 1| - |x + 3| = -3$ теңдеуінің түбірлерін табыңдар.

5.14. 1) $\begin{cases} x^2 - x - 3 > 0, \\ 3x + 5 \leqslant -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2 + 3 < 10x, \\ x^2 + 2 < 3x \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін шешіңдер .

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Сызықтық функция, квадраттық функция және олардың графиктері, кері пропорционалдық, координаталық жазықтық, нүктенің координаталары, фигураны түрлендіру түрлері, нүктеге қарағанда және түзуге қарағанда симметрия, параллель көшіру, гомотетия.

§6. ФУНКЦИЯНЫҢ ГРАФИГІН ТҮРЛЕНДІРУ

Функция графигін түрлендіруді (параллель көшіру, сығу, созу) орындауды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

График, функция, параллель көшіру, сығу, созу

АЛГОРИТМ $y = f(x)$ функциясының графигін қолданып $y = kf(a(x + n)) + m$ функциясының графигін салу алгоритмі:

1) $y = f(x)$ функциясының графигін саламыз;

2) $y = f(x)$ функциясының графигін Ox осі бойымен $|a|$ есе сығу арқылы, $y = f(ax)$ функциясының графигін аламыз. Егер $a < 0$ болса, онда салынған графикті Oy осіне қарағанда симметриялы етіп бейнелейміз;

3) шыққан графикті Oy осі бойымен k есе созу арқылы, $y = kf(ax)$ функциясының графигін аламыз. Егер $k < 0$ болса, онда салынған графикті Ox осіне қарағанда симметриялы етіп бейнелейміз;

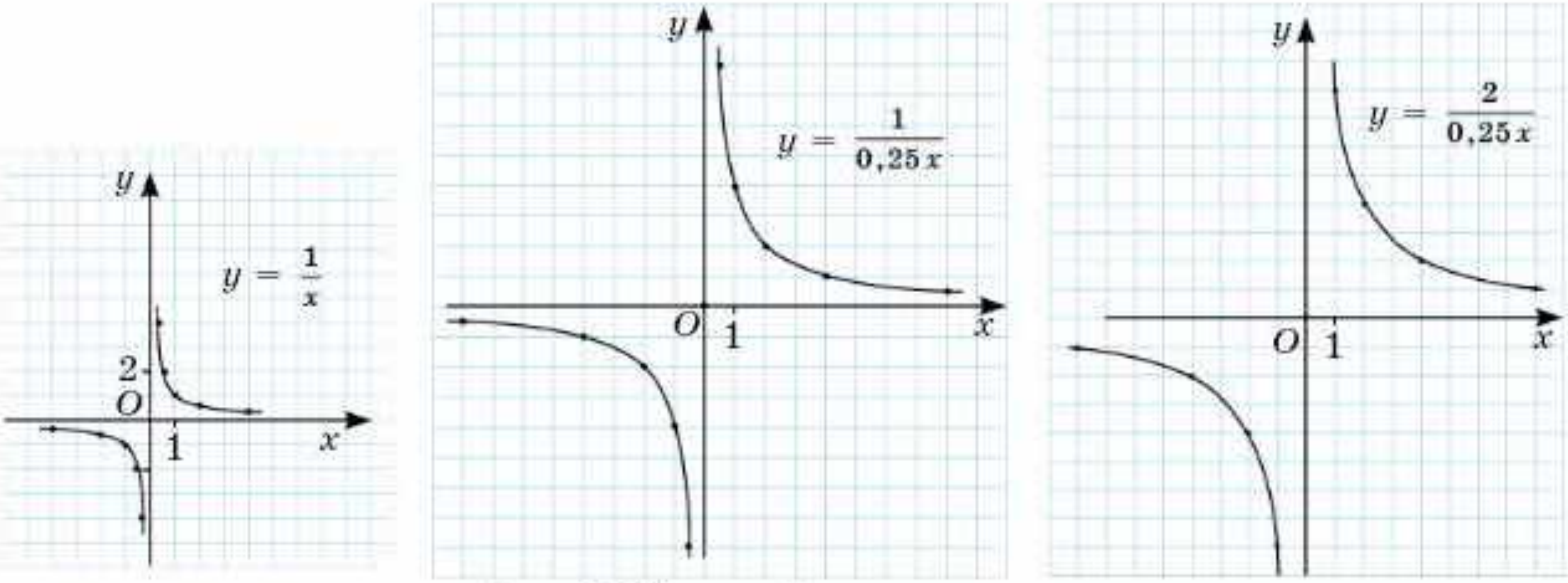
4) алынған графикті Ox осі бойымен n бірлікке жылжыту арқылы (созу, сығу, солға қарай жылжыту, оңға қарай жылжыту, параллель көшіру), $y = kf(a(x + n))$ функциясының графигін аламыз;

5) соңғы графикті Oy осі бойымен m бірлікке жылжыту арқылы (созу, сығу, солға қарай жылжыту, оңға қарай жылжыту, параллель көшіру), берілген $y = kf(a(x + n)) + m$ функциясының графигін аламыз.

$y = \frac{2}{0{,}25(x+1)} - 3$ функциясының графигін салайық. Берілген функция $y = kf(a(x + n)) + m$ түріне сәйкес келеді, мұндағы $k = 2$, $a = 0{,}25$, $m = -3$, $n = 1$. Түрлендіру жасалатын бастапқы функция $y = \frac{1}{x}$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

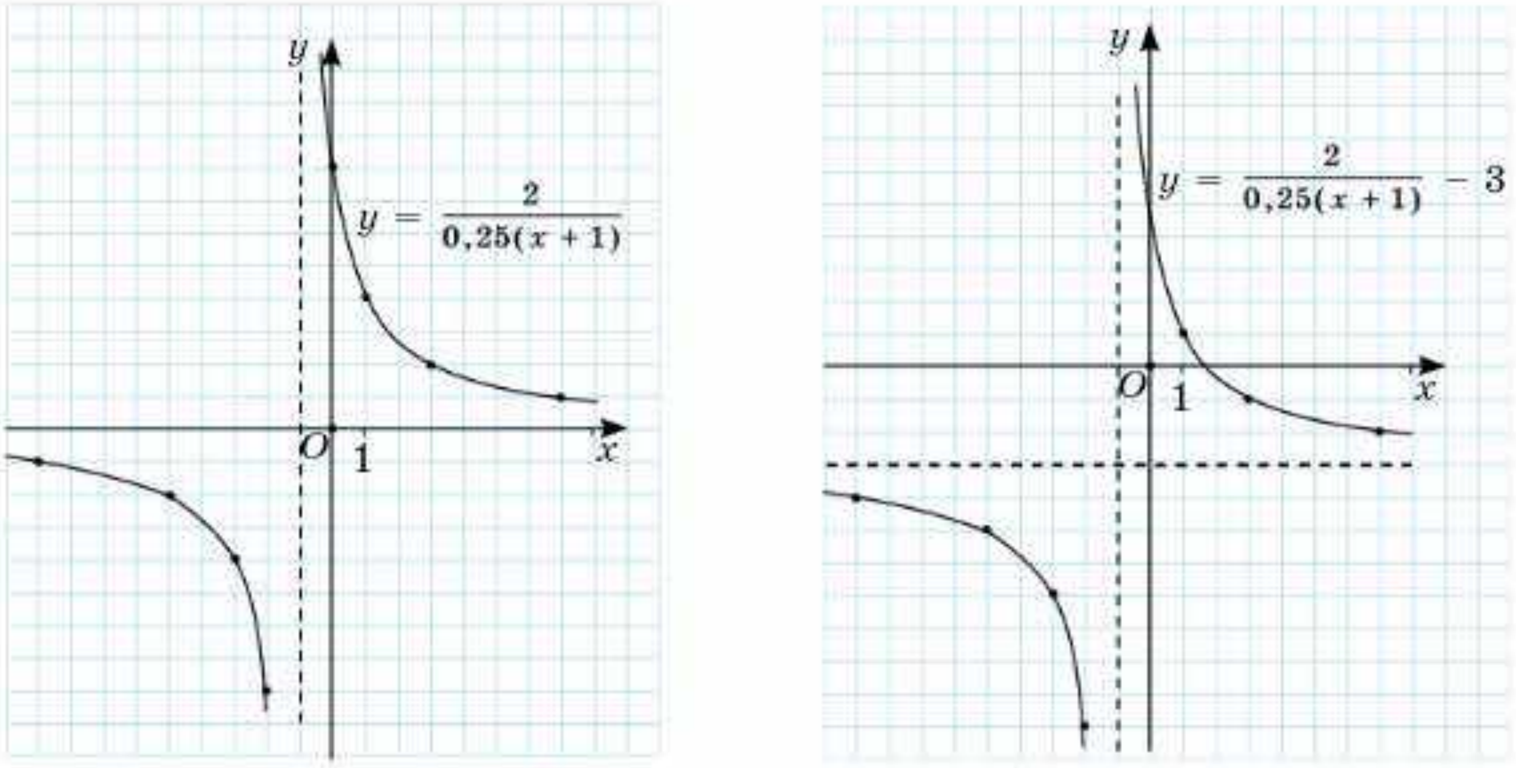
$y = \frac{1}{x}$ функциясының графигіне қандай түрлендіру қолдану арқылы, $y = \frac{2}{0{,}25(x+1)} - 3$ функциясының графигі алынғанын түсіндіріңдер (6.1-сурет).



1)

Ox осі бойымен 4 есе созу
2)

Ox осі бойымен 2 есе созу
3)



Ox осі бойымен 1 бірлікке солға жылжыту
(ығысу, параллель көшіру)

4)

Ox осі бойымен 3 бірлікке төмен жылжыту
(ығысу, параллель көшіру)

5)

6.1-сурет

1. $y = f(x)$ функциясының графигін қолданып,
1) $y = 3f(x + 2) + 1$;
2) $y = 3f(x - 2) - 1$;
3) $y = -f(-x + 1)$;
4) $y = 2f(2x + 2)$ функциясының графигін салу алгоритмін беріңдер.

2. $y = f(x)$ функциясының графигінен:
1) *Ox* осі бойымен созу және *Oy* осі бойымен сығу;
2) *Ox* осі бойымен оңға және *Oy* осі бойымен жоғары жылжыту;
3) *Ox* осі бойымен алдымен сығу, одан кейін солға жылжыту;
4) *Oy* осі бойымен алдымен созу, одан кейін төмен жылжыту арқылы алынған функцияға мысал келтіріңдер.

Жаттығулар

А

6.1. Функцияның графигін салу алгоритмін және $y = \frac{1}{x}$ функциясының графигін қолданып $y = f(x)$ функцияс ы графигін салыңдар:

1) $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$; 2) $f(x) = 3 - \frac{1}{x+2}$; 3) $f(x) = \frac{1}{x-3} - 2$.

6.2. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = (x - 2)^2 - 3$; 2) $y = 4 - \sqrt{2x}$; 3) $y = \sqrt{2 - x} - 3$.

B

$y = f(x)$ функциясы мен $y = kf(a(x + n)) + m$ функциясының графигін салу алгоритмін қолданып, берілген функциялардың графигін салыңдар **(6.3-6.4)**:

6.3. 1) $y = 2(x - 1)^2 - 4$; 2) $y = 3 - 2\sqrt{-x}$;

3) $y = 3\sqrt{2 - x} - 1$.

6.4. 1) $y = -2(x + 1)^2 + 3$; 2) $y = 4 - \sqrt{2 - x}$;

3) $y = -3\sqrt{2 - x} + 2$.

6.5. $y = f(x)$ функциясы мен $y = kf(a(x + n)) + m$ функциясы графигін салу алгоритмін қолданып, функциялардың графигін салыңдар:

1) $y = 2 - \frac{3}{x - 2}$; 2) $y = 2 + \frac{1}{x + 3}$; 3) $y = -2 - \frac{1}{x + 4}$.

C

6.6. $y = \sqrt{x}$ функциясы мен $y = kf(a(x + n)) + m$ функциясының графигін салу алгоритмін қолданып, функциялардың графигін салыңдар:

1) $y = 2\sqrt{2x - 4} - 1$; 2) $y = 1 + 2\sqrt{3 - 2x}$; 3) $y = -2\sqrt{6 + 3x} + 4$.

6.7. $y = \frac{1}{x}$ функциясы мен $y = kf(a(x + n)) + m$ функциясының графигін салу алгоритмін қолданып, функциялардың графигін салыңдар:

1) $y = \frac{3x}{x - 2}$; 2) $y = \frac{2x + 1}{x + 3}$; 3) $y = \frac{3x - 2}{2x + 4}$.

6.8. $y = \frac{1}{|x|}$ функциясы мен $y = kf(a(x + n)) + m$ функциясының графигін салу алгоритмін қолданып, функциялардың графигін салыңдар:

1) $y = 2 + \frac{1}{|x - 2|}$; 2) $y = -3 + \frac{1}{|x + 3|}$; 3) $y = -2 - \frac{2}{|x + 4|}$.

6.9. $y = kf(a(x + n)) + m$ функциясының графигін салу алгоритмін қолданып, функциялардың графигін салыңдар:

1) $y = \left|\frac{3x + 1}{x - 1}\right|$; 2) $y = \left|\frac{2 - x}{x + 3}\right|$; 3) $y = \left|\frac{3x + 4}{x - 2}\right|$.

6.10. $y = kf(a(x + n)) + m$ функциясының графигін салу алгоритмін қолданып, функциялардың графигін салыңдар:

1) $y = \left|\sqrt{x - 1} - 2\right|$; 2) $y = \left|2\sqrt{2 - x} - 4\right|$; 3) $y = \left|3 - \sqrt{2x - 3}\right|$.

ҚАЙТАЛАУ

6.11. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \dfrac{3}{x-3} + \sqrt{\dfrac{2x-3}{x^2-4}}$; 2) $y = \dfrac{5x}{2x-3} + \sqrt{\dfrac{1-2x}{2x^2-18}}$.

6.12. $y = f(x)$ функциясының берілген аралықта өсетінін дәлелдеңдер:

1) $f(x) = x^2 - 2x,\ [1; +\infty)$; 2) $f(x) = x^2 + 4x,\ [-2; +\infty)$;

3) $f(x) = -x^2 + 2x + 4,\ (-\infty; 1]$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, анықталу облысы, мәндер жиыны, функцияның графигі, функцияны беру тәсілдері, функция графигін қарапайым түрлендіру.

§7. ФУНКЦИЯНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Функцияның қасиеттерімен (функцияның нөлдері, периодтылығы, бірсарындылық аралықтары, таңбатұрақтылық аралықтары, функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері, жұп функция, тақ функция, шектеулік, экстремум) танысасыңдар және оларды анықтауды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функцияның нөлдері, периодтылығы, бірсарынды аралықтары, таңбатұрақтылық аралықтары, ең кіші және ең үлкен мәндері, жұптылық, тақтылық, шектеулік, экстремум нүктелері, функция экстремумы

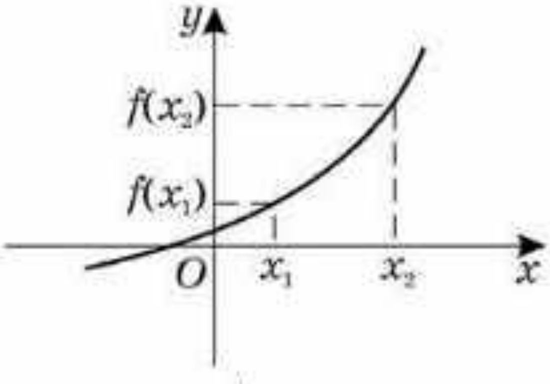
Анықтама. *Егер D жиынында $x_1 < x_2$ болатындай кез келген x_1 мен x_2 үшін $f(x_1) < f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, онда осы жиында $f(x)$* ***функциясы өспелі*** *деп аталады.*

7.1-суретте өспелі функция кескінделген.

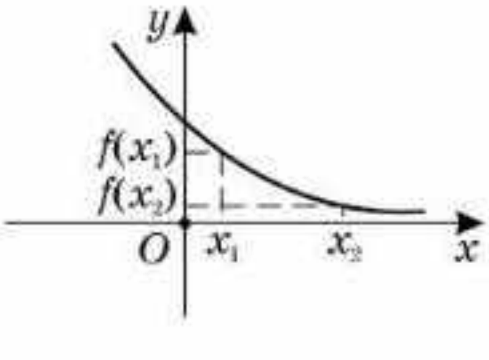
Практикада өспелі функцияның мына анықтамасы қолданылады: *егер аргументтің кез келген үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келсе, онда* ***функция өспелі*** *деп аталады.*

Анықтама. *Егер D жиынында $x_1 < x_2$ болатындай кез келген x_1 мен x_2 үшін $f(x_1) > f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, онда осы $f(x)$* ***функциясы кемімелі*** *деп аталады.*

7.2-суретте кемімелі функция кескінделген.



7.1-сурет



7.2-сурет

Практикада кемімелі функцияның мына анықтамасы қолданылады: *егер аргументтің кез келген үлкен мәніне функцияның кіші мәні сәйкес келсе, онда* ***функция кемімелі*** *деп аталады.*

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Егер аргументтің кіші мәніне функцияның: 1) кіші; 2) үлкен мәні сәйкес келсе, онда функция өспелі ме, әлде кемімелі ме?

МЫСАЛ

1. $y = -3x$ функциясының кемімелі екенін дәлелдейік. Расында да, анықтама бойынша аргументтің кез келген үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келсе, онда функция өспелі болады.

$x_1 > x_2$ болсын. y_1 және y_2-нің мәндерін табайық. Сонда $y_1 = -3x_1$ және $y_2 = -3x_2$. $y_1 - y_2$ айырымын қарастырайық. $y_1 - y_2$ өрнегіндегі y_1-дің орнына $-3x_1$ және y_2-нің орнына $-3x_2$-ні қоямыз. Сонда $y_1 - y_2 = -3x_1 - (-3x_2)$.

Соңғы теңдіктегі жақшаны ашып, ортақ көбейткішті жақшаның алдына шығарамыз: $-3x_1 + 3x_2 = -3(x_1 - x_2)$. $x_1 > x_2$ болғандықтан, $x_1 - x_2$ айырымының мәні оң болады. Сондықтан $y_1 - y_2 < 0$, онда $y_1 < y_2$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Егер функция кесте түрінде берілсе, онда кесте бойынша функцияның өспелі немесе кемімелі болатынын; өспелі де, кемімелі де болмайтынын қалай анықтауға болады?

Өспелі және кемімелі функциялар *бірсарынды функциялар* деп аталады.

Функцияны бірсарындылыққа зерттеу — функцияның өспелі немесе кемімелі болатынын анықтау.

Анықтама. *Функцияның өспелі (кемімелі) болатын аралықтары* ***функцияның өсу (кему) аралықтары*** *деп аталады.*

Анықтама. *Егер x-тің барлық мәні үшін $|f(x)| \leqslant M$ болатындай қандай да бір M саны бар болса, онда f(x) функциясы* ***шектеулі*** *деп аталады. Егер ондай сан болмаса, онда функция* ***шектеусіз*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

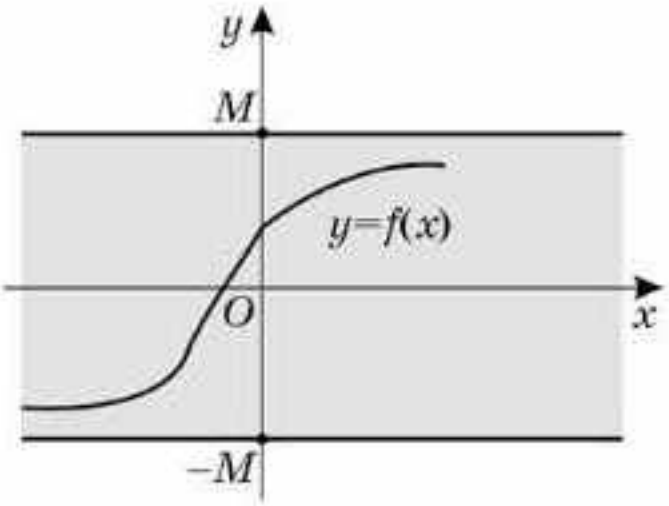
2. 7.3-суретте шектеулі функция, 7.4-суретте шектеусіз функция кескінделген.

Анықтама. *Егер x-тің барлық мәні үшін $f(x) \leqslant M$ болатындай қандай да бір M саны бар болса, онда f(x) функциясы* ***жоғарыдан шектелген*** *деп аталады.*

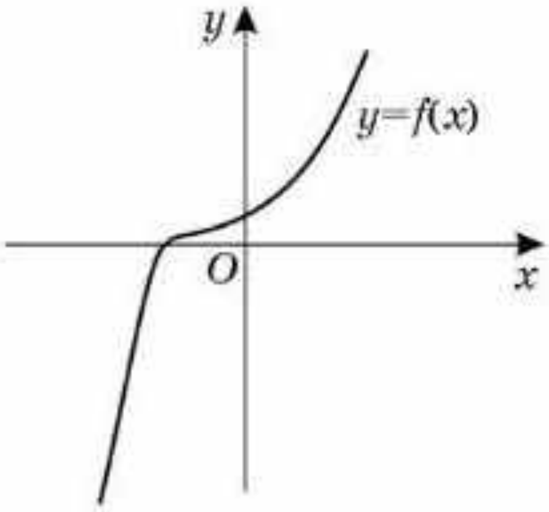
Егер x-тің барлық мәні үшін $f(x) \geqslant M$ болатындай қандай да бір M саны бар болса, онда *f(x) функциясы* ***төменнен шектелген*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

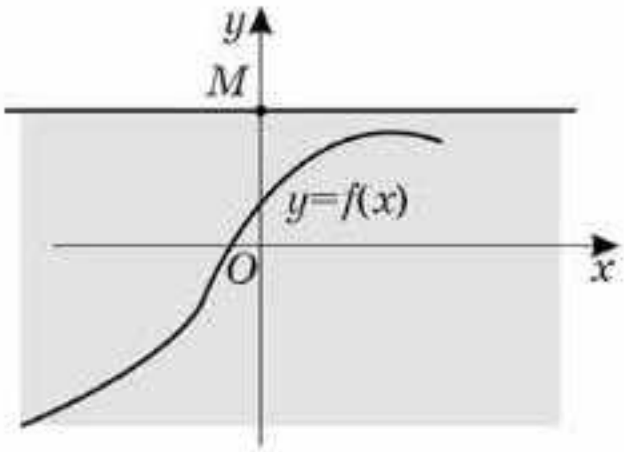
3. 7.5-суретте жоғарыдан шектелген функция, 7.6-суретте төменнен шектелген функция кескінделген.



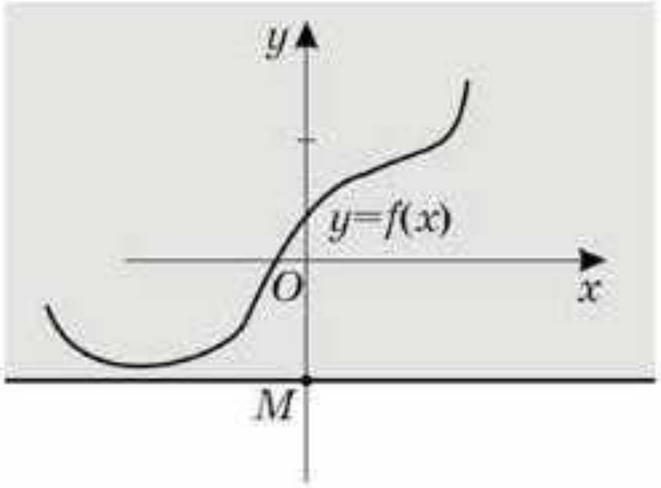
7.3-сурет



7.4-сурет



7.5-сурет



7.6-сурет

ТҮСІНДІРІҢДЕР

1) $y = f(x)$ функциясының графигі Ox осіне параллель қандай да бір түзуге қатысты қалай орналасқан?

2) $y = kx$ (мұндағы $k \neq 0$); $y = x^2$; $y = -x^2$; $y = x^3$; $y = \sqrt{x}$; $y = |x|$ функцияларының қайсысы шектеулі, төменнен шектелген, жоғарыдан шектелген?

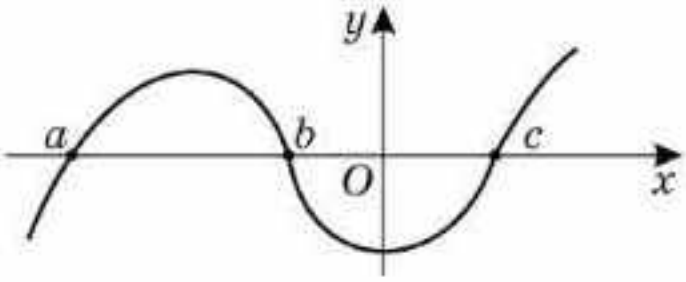
Анықтама. *Функцияның мәнін 0-ге айналдыратын аргументтің мәні **функцияның нөлі (түбірі)** деп аталады.*

Функцияның бірнеше нөлі болуы мүмкін.

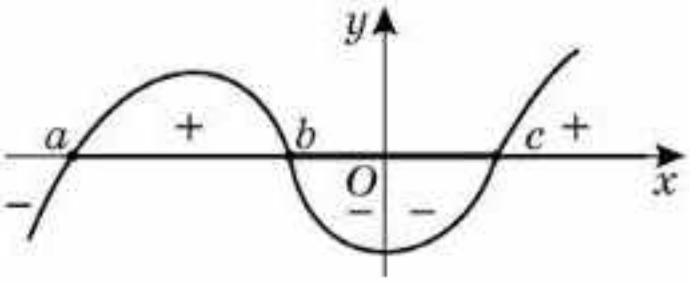
Мысалы, $y = x\,(x + 1)(x - 3)$ функциясының үш нөлі бар: $x = 0$, $x = -1$, $x = 3$.

Функцияның нөлінің геометриялық мағынасы функция графигінің Ox осімен қиылысу нүктелерінің абсциссасы болып табылады.

Мысалы, 7.7-суретте нөлдері a, b және c болатын функцияның графигі кескінделген.



7.7-сурет



7.8-сурет

МЫСАЛ

4. $y = -5x + 10$ функциясының нөлдерін, яғни $y = -5x + 10$ функциясының графигінің абсцисса осімен қиылысу нүктелерін табайық.

Шешуі. Абсцисса осінде жататын нүктелердің ординаталары нөлге тең болғандықтан, $y = -5\,x + 10$ формуласында y орнына 0 санын қойып, одан шыққан $0 = -5x + 10$ теңдеуінен x-ті табамыз: $x = 2$.

Демек, функцияның графигі абсцисса осімен координатасы (2; 0) болатын бір нүктеде қиылысады, берілген функцияның нөлі 2 саны болады.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y = kx$ (мұндағы $k \neq 0$); $y = x^2$; $y = -x^2$; $y = x^3$; $y = \sqrt{x+2}$; $y = |x|$ функцияларының қайсысы үшін 0 саны сол функцияның нөлі болып табылады?

Анықтама. *Функцияның мәндерін оң немесе теріске айналдыратын аргументтердің мәндерінен тұратын сан аралықтары* ***функцияның таңбатұрақтылық аралықтары*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

5. $y = -5x + 10$ функциясының мәні оң болатындай x аргументінің мәндерін табайық.

Шешуі. Ол үшін $-5x + 10 > 0$ теңсіздігін шығарамыз. Сонда $-5x > -10$ немесе $x < 2$, яғни, $(-\infty\ 2)$ сан аралығын аламыз.

Жауабы: $(-\infty\ 2)$.

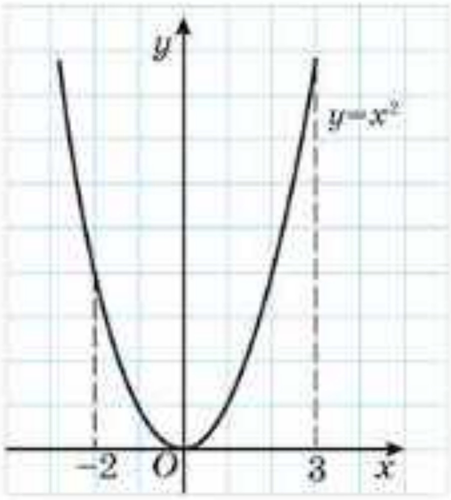
7.8-суретте кескінделген функцияның таңбатұрақтылық аралықтарын табыңдар.

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері.

Анықтама. *Егер:* 1) *X жиынында* $f(x_0) = k$ *болатындай* x_0 *саны табылса*; 2) *X жиынында кез келген x үшін* $f(x) \leqslant k$ *теңсіздігі орындалса, онда k саны x жиынындағы* $y = f(x)$ *функциясының* ***ең үлкен мәні*** *деп аталады.*

Анықтама. *Егер:* 1) *X жиынында* $f(x_0) = k$ *болатындай* x_0 *саны табылса;* 2) *X жиынында кез келген x үшін* $f(x) \geqslant k$ *теңсіздігі орындалса, онда k саны x жиынындағы* $y = f(x)$ *функциясының* ***ең кіші мәні*** *деп аталады.*

Ескерту. Егер X жиыны көрсетілмесе, онда функцияның ең үлкен немесе ең кіші мәнін функцияның анықталу облысында табу керек.



7.9-сурет

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y = x^2$ функциясы үшін [−2; 3] кесіндісінде $y_{\text{ең кіші}} = 0$, $y_{\text{ең үлкен}} = 9$ болатынын 7.9-суретте берілген графикті қолданып түсіндіріңдер.

Анықтама. *Егер функцияның:*

1) *анықталу облысы Oy осіне қарағанда симметриялы болса;*

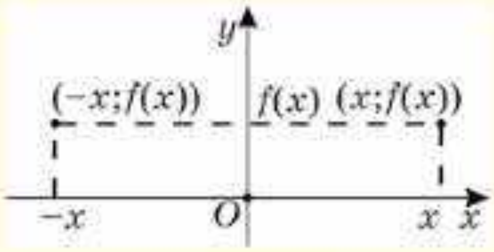
2) *анықталу облысынан алынған кез келген x үшін $f(-x) = f(x)$ орындалса, онда функция* ***жұп функция*** *деп аталады.*

Мысалы, $y = x^2$ функциясы жұп функция. Расында да, 1) анықталу облысы, яғни $(-\infty; +\infty)$ аралығы Oy осіне қарағанда симметриялы; 2) анықталу облысынан алынған кез келген x үшін $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ және $f(x) = x^2$. Демек, $f(-x) = f(x)$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

1) $y = x^4$; $y = x^6$; $y = x^8$; $y = x^{10}$; $y = x^{2n}$ (мұндағы n — натурал сан) функцияларының жұп функция болатынын дәлелдеңдер.

2) 7.10-суретті қолданып, жұп функцияның графигі неліктен Oy осіне қарағанда симметриялы (осьтік симметрия) болатынын түсіндіріңдер.



7.10-сурет

Анықтама. *Егер функцияның:*

1) *анықталу облысы координаталар басына қарағанда симметриялы болса;*

2) *анықталу облысынан алынған кез келген x үшін $f(-x) = -f(x)$ орындалса, онда функция* ***тақ функция*** *деп аталады.*

Мысалы, $y = x^3$ функциясы тақ функция. Расында да, функцияның 1) анықталу облысы, яғни $(-\infty\ +\infty)$ аралығы координаталар басына қарағанда симметриялы; 2) анықталу облысынан алынған кез келген x үшін $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ орындалады. Демек, $f(-x) = -f(x)$.

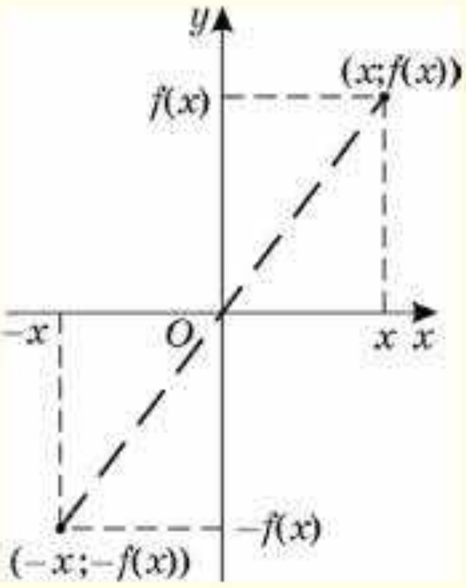
ТҮСІНДІРІҢДЕР

1) $y = x^5$; $y = x^7$; $y = x^9$; $y = x^{11}$; $y = x^{2n+1}$ (мұндағы n — натурал сан) функциялары тақ функция болатынын дәлелдеңдер.

2) 7.11-суретті қолданып, тақ функцияның графигі неліктен координаталар басына қарағанда симметриялы (центрлік симметрия) болатынын түсіндіріңдер.

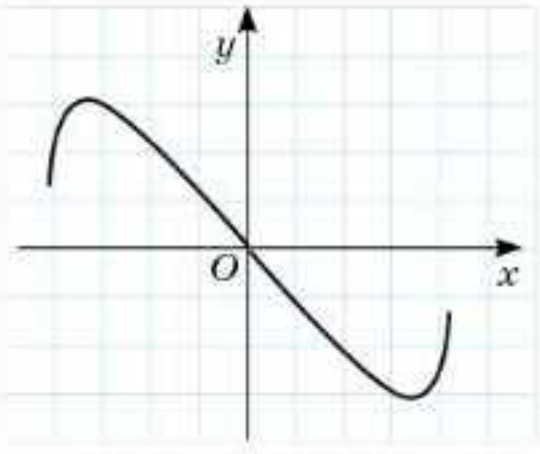
3) 7.12, 7.13-суреттердегі графиктердің қайсысы жұп, қайсысы тақ функцияның графигі?

4) $A(-3; -2)$, $B(1; 5)$, $C(3; 2)$, $D(-1; -5)$ нүктелері бір ғана функцияның графигіне тиісті екені белгілі. Бұл функция жұп функция немесе тақ функция бола ма?

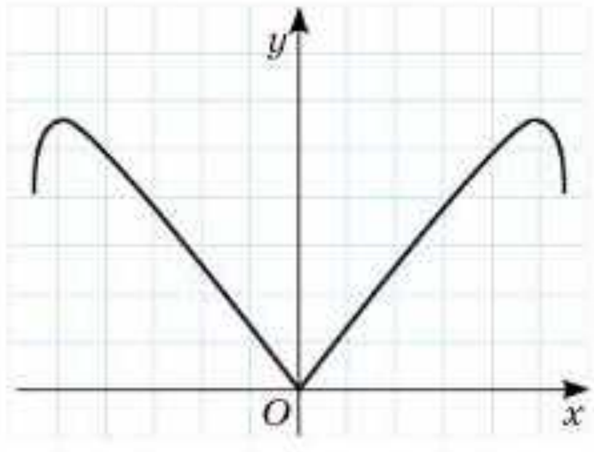


7.11-сурет

Анықтама. *Жұп та, тақ та болмайтын функциялар* ***жалпы түрдегі функциялар*** *деп аталады.*



7.12-сурет



7.13-сурет

Анықтама. *Нүкте тиісті болатын кез келген интервал* ***нүктенің аймағы*** *деп аталады.*

Анықтама. *a нүктесінің қандай да бір аймағында әрбір x $(x \neq a)$ үшін $f(x) < f(a)$ теңсіздігі орындалған жағдайда ғана a нүктесі $y = f(x)$ функциясының* ***максимум нүктесі*** *деп аталады.*

Максимум нүктесінің белгіленуі: $x_{\max}$.

МЫСАЛ

6. Графигі 7.14-суретте кескінделген функцияның максимум нүктесі үшеу: $x_{\max} = -4$, $x_{\max} = 3$, $x_{\max} = 6$.

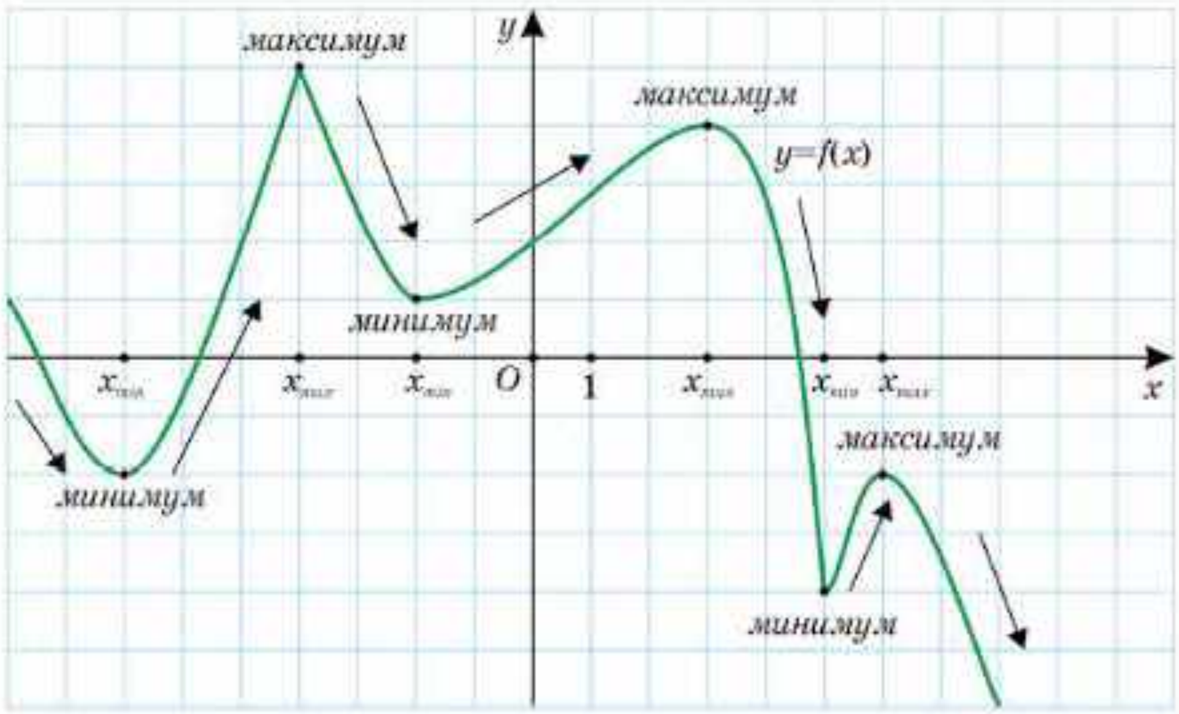
Анықтама. *Функцияның максимум нүктесіндегі мәні* ***функцияның максимумы*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

7. Графигі 7.14-суретте кескінделген функцияның үш максимумы бар: 5; 4 және -2. Расында, $5 = f(-4)$; $4 = f(3)$; $-2 = f(6)$.

Анықтама. *a нүктесінің қандай да бір аймағында әрбір x $(x \neq a)$ үшін $f(x) > f(a)$ теңсіздігі орындалған жағдайда ғана a нүктесі $y = f(x)$* ***функциясының минимум нүктесі*** *деп аталады.*

Минимум нүктесінің белгіленуі: $x_{\min}$.



7.14-сурет

МЫСАЛ

8. Графигі 7.14-суретте кескінделген функцияның минимум нүктесі үшеу: $x_{\min} = -7$, $x_{\min} = -2$, $x_{\min} = 5$.

Анықтама. *Функцияның минимум нүктесіндегі мәні* ***функцияның минимумы*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

9. Графигі 7.14-суретте кескінделген функцияның үш минимумы бар: -2; 1 және -4. Расында, $-2 = f(-7)$; $1 = f(-2)$; $-4 = f(5)$.

Анықтама. *Максимум және минимум нүктелері функцияның экстремум нүктелері, ал экстремум нүктесіндегі функцияның мәні* ***функцияның экстремумы*** *деп аталады.*

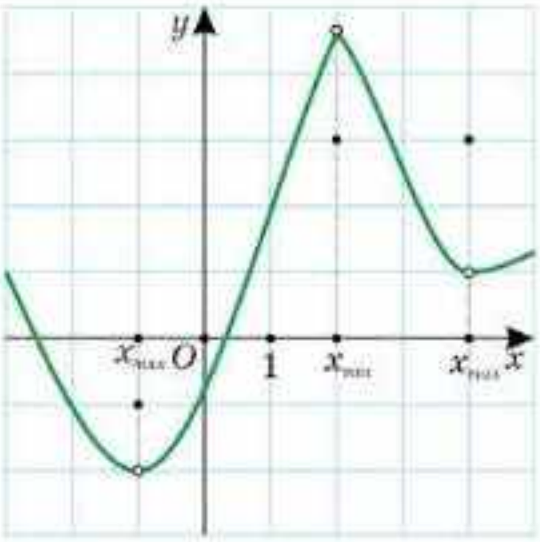
МЫСАЛ

10. Графигі 7.14-суретте кескінделген функцияның алты экстремум нүктесі бар.

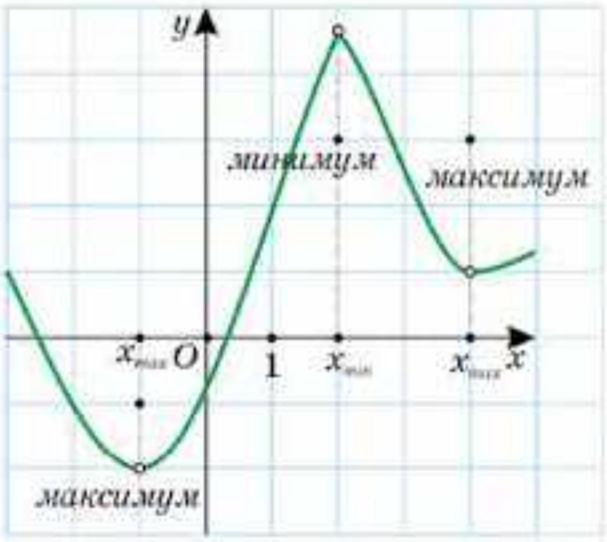
ТҮСІНДІРІҢДЕР

Анықтаманы қолданып,

1) 7.15-суреттегі $x = -1$ және $x = 4$ нүктелері максимум, $x = 2$ нүктесі минимум нүктесі болатынын; 2) 7.16-суреттегі функцияның максимумы мен минимумының тең екенін түсіндіріңдер.



7.15-сурет

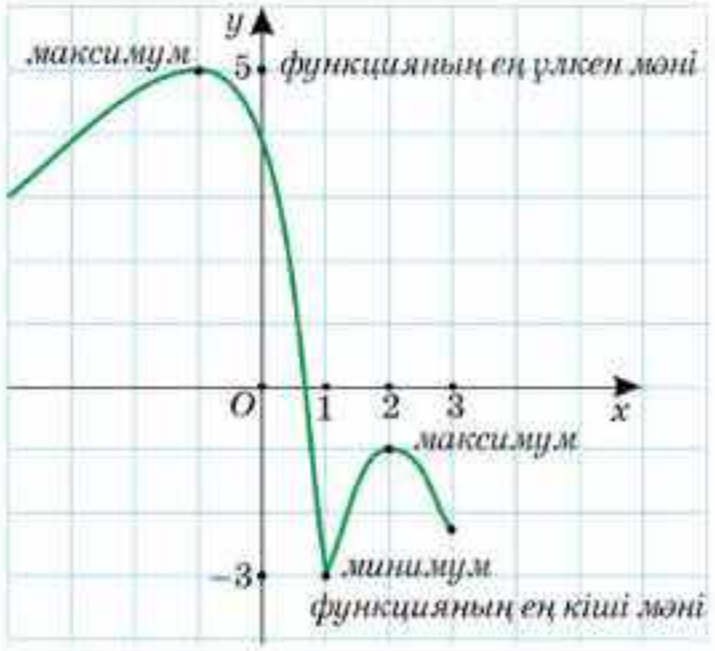


7.16-сурет

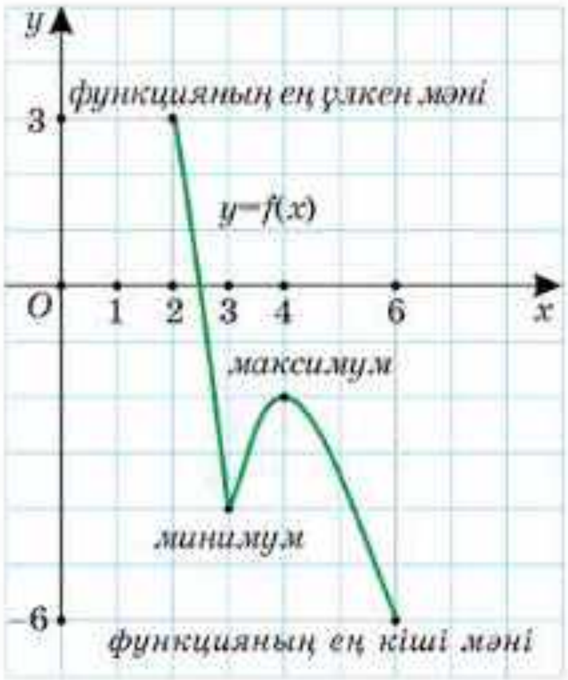
Функцияның жиындағы ең үлкен мәні функция максимумының біреуімен, ең кіші мәні функция минимумының біреуімен бірдей болуы мүмкін.

МЫСАЛ

11. 7.17-суретте функцияның максимумы мен функцияның ең үлкен мәні 5-ке, функцияның минимумы мен функцияның ең кіші мәні -3-ке тең.



7.17-сурет



7.18-сурет

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері функцияның максимумы және минимумымен бірдей болмауы да мүмкін.

МЫСАЛ

12. 7.18-суретте функцияның максимумы –2-ге, функцияның ең үлкен мәні 3-ке тең; функцияның минимумы –4-ке, функцияның ең кіші мәні –6-ға тең.

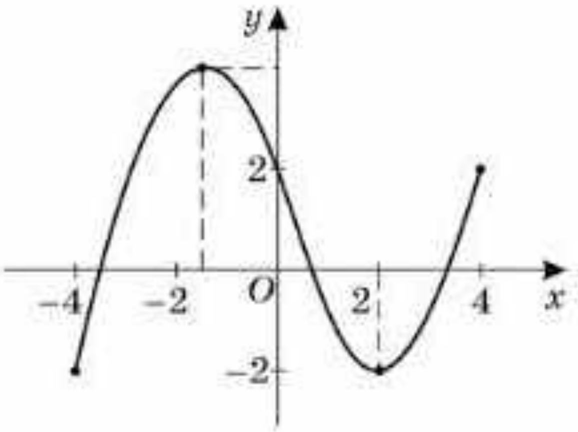
?

1. Функцияны: 1) бірсарындылыққа; 2) шектеулілікке зерттеу деген не?
2. Қандай да бір $y = f(x)$ функциясының графигі $(-\infty; 7)$ ашық сәулесіндегі барлық x үшін Ox осінен жоғары орналасқаны және $(7; +\infty)$ ашық сан аралығы мен $x = 7$ болғанда Ox осін қиятыны белгілі. Осы функцияның нөлдері мен таңбатұрақтылық аралықтарын атаңдар.
3. Функцияның ең үлкен немесе ең кіші мәні мен функцияның шектеулілігінің арасында қандай байланыс бар?
4. Егер функция тек қана жоғарыдан немесе тек қана төменнен шектелген болса, онда функция шектеулі бола ма?
5. Функцияны жұптылыққа зерттеу деген не?
6. Функцияның анықталу облысы координаталар басына қарағанда симметриялы емес екені белгілі. Функцияның жұп немесе тақ болуы мүмкін бе?
7. Функцияның жұп (тақ) екені белгілі. Осы мәліметті функцияның графигін салу барысында қалай қолдануға болады?
8. Функцияның минимумы осы функцияның максимумынан үлкен болуы мүмкін бе? Мысал келтіріңдер.
9. Функцияның максимумы осы функцияның минимумына тең болуы мүмкін бе? Мысал келтіріңдер.
10. Функцияның максимумы неліктен функцияның ең кіші мәні болмайды?
11. Функцияның минимумы неліктен функцияның ең үлкен мәні болмайды?

Жаттығулар

А

7.1. 7.19-суретте $y = f(x)$ функциясының графигі кескінделген. Графикті қолданып функцияның қасиеттерін атаңдар.



7.19-сурет

Тура санды теңсіздіктердің қасиеттерін қолданып, берілген функцияның өспелі болатынын дәлелдеңдер **(7.2-7.3):**

7.2. 1) $y = 9 + 2x$; 2) $y = 6x + 1$;
3) $y = -8 + 4x$; 4) $y = 0,5x - 3$;
5) $y = x^3 + 3$; 6) $y = 0,2x^3$;
7) $y = -5 + x^3$; 8) $y = x^3 - 1$.

7.3. 1) $y = x^2 - 4$, мұндағы $x \geqslant 2$; 2) $y = -x^2 + 2$, мұндағы $x \leqslant -3$;
3) $y = -\frac{4}{x}$, мұндағы $x \leqslant -4$; 4) $y = -\frac{3}{x}$, мұндағы $x \geqslant 3$.

Тура санды теңсіздіктердің қасиеттерін қолданып берілген функцияның кемімелі болатынын дәлелдеңдер **(7.4-7.5):**

7.4. 1) $y = 2,5 - 4x$; 2) $y = -3x + 2$; 3) $y = -7 - x$; 4) $y = -3,5x + 8$;
5) $y = -x^3 + 2$; 6) $y = -2x^3$; 7) $y = -6 - x^3$; 8) $y = -x^3 - 4$.

7.5. 1) $y = x^2 - 9$, мұндағы $x \leqslant -2$; 2) $y = -x^2 + 4$, мұндағы $x \geqslant 3$;
3) $y = \frac{5}{x}$, мұндағы $x \geqslant 5$; 4) $y = \frac{2}{x}$, мұндағы $x \leqslant -4$.

Төмендегі функциялардың төменнен шектелген немесе жоғарыдан шектелген, немесе шектеулі болатынын анықтаңдар **(7.6-7.7):**

7.6. 1) $y = 5 + x$; 2) $y = -x + 9$; 3) $y = -1 - x^2$;
4) $y = x^2 + 3$; 5) $y = \sqrt{x} - 2$; 6) $y = -\sqrt{x} + 1$;
7) $y = \frac{2}{x}$, $x \leqslant 0$; 8) $y = -\frac{3}{x}$, $x \geqslant 0$; 9) $y = |x| - 5$;
10) $y = -|x| + 2$; 11) $y = -|x| + 6$, мұндағы $-1 \leqslant x \leqslant 6$;
12) $y = |x| - 7$, мұндағы $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

7.7. 1) $y = x^2 - 4x + 5,25$, мұндағы $-1 \leqslant x \leqslant 4$;
2) $y = -x^2 - x + 3,75$, мұндағы $-5 \leqslant x \leqslant 1$;
3) $y = x^2 + 6x + 6$, мұндағы $-6 \leqslant x \leqslant 0$;
4) $y = -x^2 - 8x - 18,5$, мұндағы $1 \leqslant x \leqslant 3$.

7.8. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:
1) $y = 1,5 + 6x$, мұндағы $-2 \leqslant x \leqslant 1$;

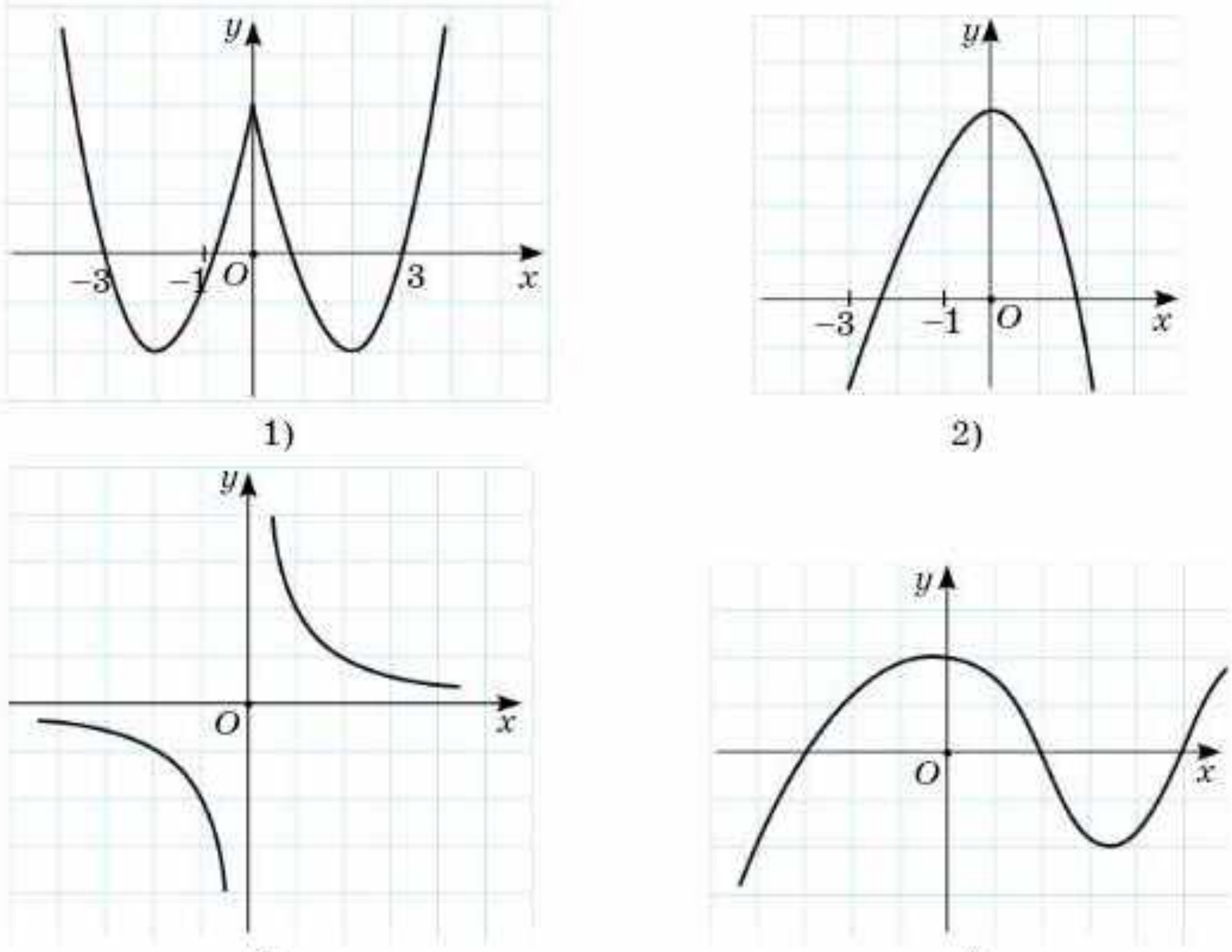
2) $y = -0{,}8x + 10$, мұндағы $-5 \leqslant x < 4$;
3) $y = 11 - x^2$, мұндағы $2 < x \leqslant 7$;
4) $y = x^2 + 5{,}4$, мұндағы $-3 \leqslant x \leqslant -2$;
5) $y = \sqrt{x} + 5$, мұндағы $9 \leqslant x \leqslant 16$;
6) $y = -\sqrt{x} + 4$, мұндағы $0 < x \leqslant 4$;
7) $y = \frac{6}{x}$, мұндағы $0{,}5 \leqslant x < 3$;
8) $y = \frac{4}{x}$, мұндағы $-8 \leqslant x \leqslant -5$;
9) $y = -|x| - 8{,}5$, мұндағы $-7 \leqslant x \leqslant -3$;
10) $y = |x| + 1{,}6$, мұндағы $2 < x \leqslant 9$.

7.9. Функцияның графигін салыңдар және қасиеттерін атаңдар:

1) $y = \begin{cases} x^2 + 2, \text{ мұндағы } -2 \leqslant x < 1, \\ -x + 3, \text{ мұндағы } 1 \leqslant x \leqslant 8; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 4x + 5, \text{ мұндағы } -3 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x^3 + 1, \text{ мұндағы } 0 < x \leqslant 2. \end{cases}$

7.10. Берілген графиктердің қайсысы:
1) жұп функцияның; 2) тақ функцияның;
3) жұп та, тақ та болмайтын функцияның графигі болады (7.20-сурет)?



1) 2)

3) 4)

7.20-сурет

Функциялардың жұп болатынын дәлелдеңдер **(7.11–7.13)**:

7.11. 1) $y = 19x^2$; 2) $y = x^2 - 34$; 3) $y = x^4 - 7x^2$;

4) $y = -x^2 - x^4$; 5) $y = \frac{10}{x^2}$; 6) $y = -\frac{8}{3 + x^2}$.

7.12. 1) $y = \sqrt{x^2 + 1} - 15$; 2) $y = \sqrt{x^4 - 6} + 22$;

3) $y = |x| + 54$; 4) $y = 31 - |x|$.

7.13. 1) $y = |x| + x^2$; 2) $y = x^4 - |x|$;

3) $y = \sqrt{x^2 + 9} - x^2$; 4) $y = \sqrt{x + 9} + \sqrt{9 - x}$.

Функциялардың тақ болатынын дәлелдеңдер **(7.14—7.16)**:

7.14. 1) $y = 23x$; 2) $y = 5x^3$; 3) $y = -9x^3$;

4) $y = -x^3 + 2x$; 5) $y = \frac{7}{x} + x$; 6) $y = -\frac{16}{x} - x$.

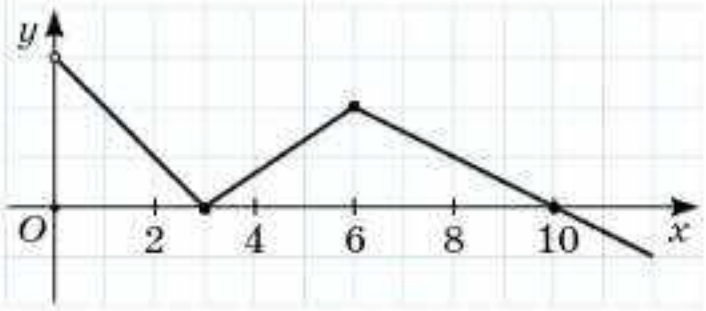
7.15. 1) $y = x\sqrt{x^4 + 1}$; 2) $y = x\sqrt{x^2 - 2} + 44x$;

3) $y = x^3|x|$; 4) $y = -\frac{1}{x}|x|$.

7.16. 1) $y = -x|x| + x^3$; 2) $y = -x|x^3|$;

3) $y = \frac{x}{x^2 + 4} - x$; 4) $y = \sqrt{x + 8} - \sqrt{8 - x}$.

7.17. 7.21-суретте $y = f(x)$ функциясы графигінің бір бөлігі берілген. Егер берілген функцияның: 1) жұп; 2) тақ; 3) жұп та, тақ та емес екені белгілі болса, онда функцияның R жиынындағы графигін салыңдар.



7.21-сурет

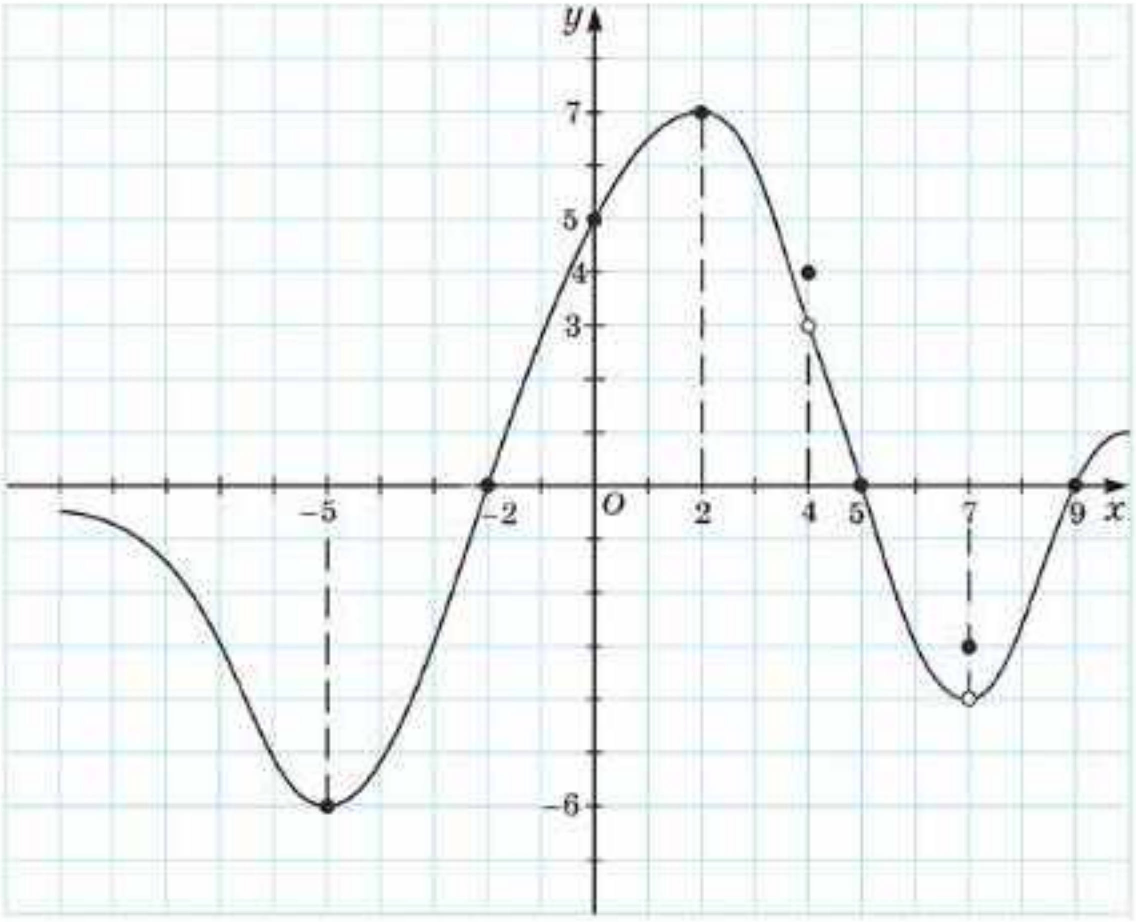
7.18. Функцияны жұптылыққа зерттеңдер:

1) $y = -6x + x^2$; 2) $y = |x| - x^3$;

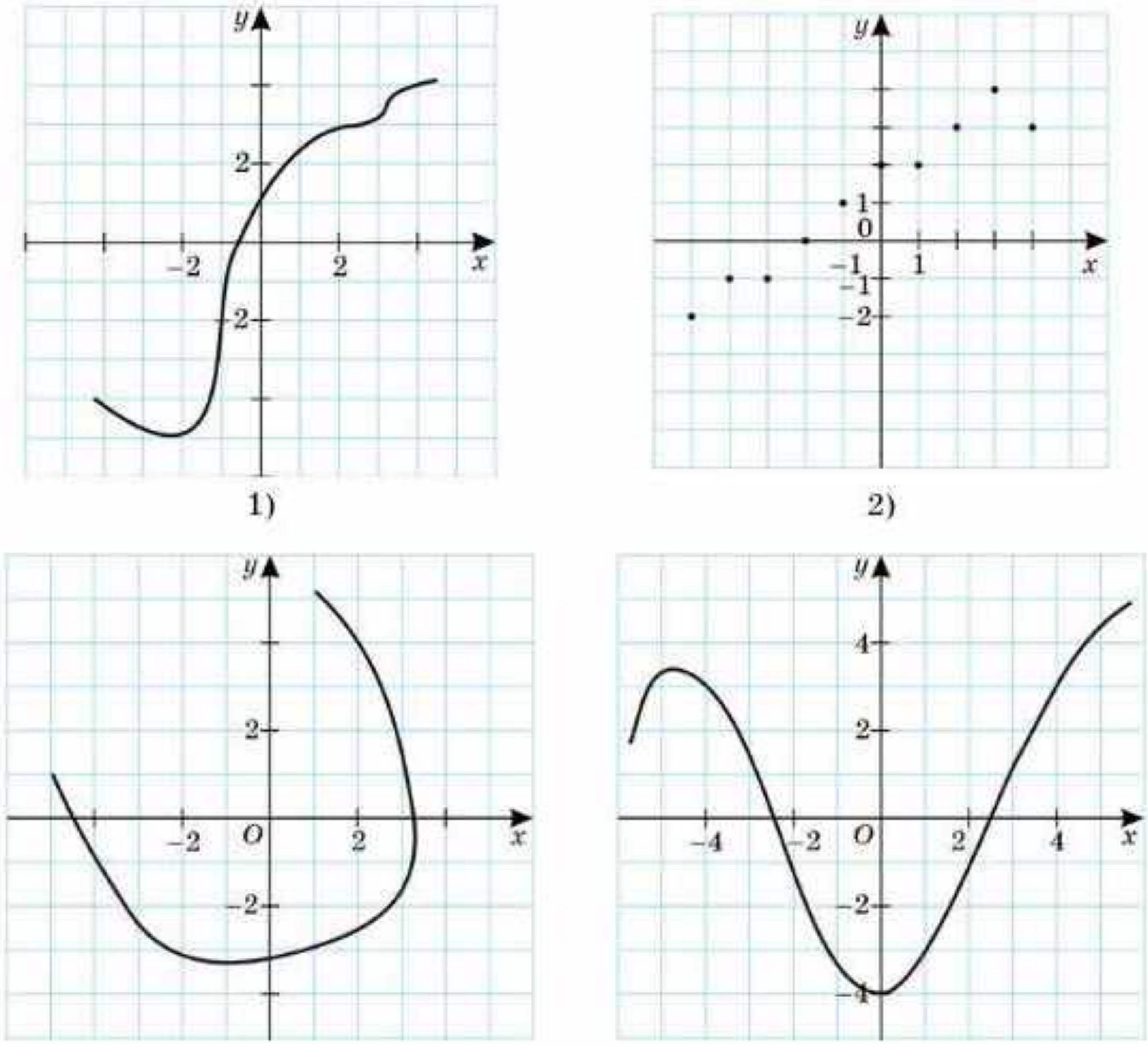
3) $y = \sqrt{x^4 + 1} + 12|x|$; 4) $y = 0{,}7x^3 - x|x|$; 5) $y = -\frac{1}{x^2 - 5} + x$;

6) $y = x - \frac{x}{x^3 + 1}$; 7) $y = \frac{4x}{x^4 - 2}$; 8) $y = \frac{9 + x^2}{x^3}$.

7.19. Функцияның экстремум нүктелері мен функция экстремумының анықтамаларын қолданып, графигі 7.22-суретте кескінделген $y = f(x)$ функциясы үшін: 1) максимум нүктелерін; 2) минимум нүктелерін; 3) функцияның экстремумдарын жазыңдар.



7.22-сурет



1)

2)

3)

4)

7.23-сурет

7.20. 7.23-суретте кескінделген сызықтардың қайсылары функцияның графигі болады? Функция үшін оның экстремум нүктелері мен экстремумдарын жазыңдар.

7.21. Функцияның графигін салыңдар және экстремум нүктелерін жазыңдар:

1) $y = 2x^2 - 4x + 3$; 2) $y = -x^2 - 2x + 5$; 3) $y = -2x^2 + 3x - 4$.

B

Тура санды теңсіздіктердің қасиеттерін қолданып берілген функцияның өспелі болатынын дәлелдеңдер **(7.22-7.23):**

7.22. 1) $y = x^3 + x$; 2) $y = x^2 + 5x$, мұндағы $x \geqslant -1$;

3) $y = x^4 + 4$, мұндағы $x \geqslant 2$; 4) $y = -x^4 + 6$, мұндағы $x \leqslant -1$.

7.23. 1) $y = \frac{3x + 7}{x + 2}$; 2) $y = \frac{6 - x}{4 - x}$; 3) $y = \{4x\}$.

Тура санды теңсіздіктердің қасиеттерін қолданып берілген функцияның кемімелі болатынын дәлелдеңдер **(7.24-7.25):**

7.24. 1) $y = -x^3 - x$; 2) $y = -x^2 + 3x$, мұндағы $x \leqslant 1$;

3) $y = x^4 + 3$, мұндағы $x \leqslant -3$; 4) $y = -x^4 + 8$, мұндағы $x \geqslant 2$.

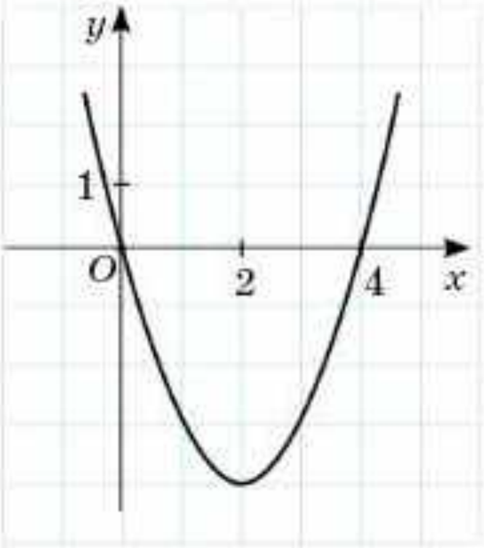
7.25. 1) $y = \frac{5 - 3x}{x + 2}$; 2) $y = \frac{3 - 2x}{x - 2}$.

7.26. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $y = x^2 - x + 3{,}75$; 2) $y = -x^2 - 3x - 6{,}25$;

3) $y = 2x^2 - 4x - 3$; 4) $y = -3x^2 - 6x + 4$.

7.27. 7.24-суретте $y = f(x)$ функциясының графигі кескінделген. $y = (f(x))^2$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар.



7.24-сурет

7.28. Төмендегі функциялардың графигін салыңдар және қасиеттерін атаңдар:

$$1)\ y = \begin{cases} x + 7, \text{ мұндағы } x < -2, \\ x^2 - 3, \text{ мұндағы } -2 \leqslant x < 1, \\ \sqrt{x + 4}, \text{ мұндағы } x \geqslant 1; \end{cases}$$

$$2)\ y = \begin{cases} -\frac{6}{x}, \text{ мұндағы } x < -3, \\ 5x + 14, \text{ мұндағы } -3 \leqslant x < 0, \\ \sqrt{x + 14}, \text{ мұндағы } x \geqslant 0. \end{cases}$$

7.29. Егер:

1) $f(x) = -11x + x^2$ және $g(x) = -11x - 19$;

2) $f(x) = x^2 + x^3$ және $g(x) = -x^2 + 43x$;

3) $f(x) = |x| - x^3$ және $g(x) = x^3 - x^2$;

4) $f(x) = \dfrac{6}{x^4 + 1} - 15$ және $g(x) = \dfrac{x - 6}{x^4 + 1} + 15$ болса, онда $f(x) + g(x)$ функциясы жұп па, әлде тақ па?

7.30. Функцияның графигін салыңдар және оны жұптылыққа зерттеңдер:

1) $y = \begin{cases} -x, \text{ мұндағы } -4 \leqslant x < -2, \\ 6 - x^2, \text{ мұндағы } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x, \text{ мұндағы } 2 < x \leqslant 4; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x - 2, \text{ мұндағы } -5 \leqslant x \leqslant -1, \\ -4 + x^2, \text{ мұндағы } -1 < x < 1, \\ -x - 2, \text{ мұндағы } 1 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$

7.31. Функцияны жұптылыққа зерттеңдер:

1) $y = -8x + x^2 + x^3$; 2) $y = 0,2x^2|x| - x^3|x|$;

3) $y = \sqrt{x^3 + x^2} - 31|x^3|$; 4) $y = -x^4\sqrt{x - x^2} - x^2|x^2|$;

5) $y = -\dfrac{1}{x^2 - 5} + \sqrt{x^3 - 1}$; 6) $y = \sqrt{x^2 - 1} - \dfrac{x^3}{x^4 - 3}$;

7) $y = x + |x| - \dfrac{1 - x^2}{\sqrt{5 + x^3}}$; 8) $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x^3 - x} + x^2|x|$.

7.32. Функцияның графигін салыңдар және экстремум нүктелерін жазыңдар:

1) $y = |x^2 - 4|$; 2) $y = |-x^2 - 2x|$;

3) $y = |2x^2 - 4|$; 4) $y = |3x^2 - 6x|$.

7.33. Функцияның графигін салыңдар және экстремум нүктелерін жазыңдар:

1) $y = |x^2 - 4x - 1|$; 2) $y = |x^2 - 2x + 3|$;

3) $y = |2x^2 - 6x + 3|$; 4) $y = |3x^2 - 6x - 1|$.

7.34. Функцияның графигін салыңдар және максимум мен минимум нүктелерін жазыңдар:

1) $y = \left|\sqrt{x - 2} - 1\right|$; 2) $y = \left|\sqrt{3 - x} - 2\right|$; 3) $y = \left|4 - \sqrt{2x - 3}\right|$.

C

7.35. Функцияны шектеулікке зерттеңдер:

1) $y = \sqrt{x^2 - 9x + 8}$; 2) $y = \sqrt{8 - 2x - x^2}$;

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9x + 9}}$; 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{8 - 2x - x^2}}$.

7.36. Функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар:

1) $y = \dfrac{x+3}{x+2} + \sqrt{2 + x}$; 2) $y = \dfrac{x+2}{x-2} + \sqrt{-2 + x}$.

7.37. a параметрімен берілген функцияның көрсетілген санды кесіндіге тиісті ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $y = x^2 + 5x + 6a$; $[-3; -1]$; 2) $y = -x^2 + 5x + 8a$; $[-1; 5]$;

3) $y = x^2 - ax + 7$; $[0; 4]$.

7.38. $y = f(x)$ функциясын жұп және тақ функциялардың қосындысы түрінде жазыңдар:

1) $f(x) = 5x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 11x + 30$;

2) $f(x) = -x^4 + x^3 - 11|x| + 30x$;

3) $f(x) = x^3 - 27x^2 + x^2|x| - x\sqrt{x}$.

7.39. 1) $y = \begin{cases} x^2 - 9, \text{ мұндағы } -5 \leqslant x < -3, \\ 3 + x, \text{ мұндағы } -3 \leqslant x < 0, \\ 3 - x, \text{ мұндағы } 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ x^2 - 9, \text{ мұндағы } 3 < x \leqslant 5; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -x^2 - 2x - 2, \text{ мұндағы } -4 \leqslant x < -1, \\ x, \text{ мұндағы } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -x^2 - 2x + 2, \text{ мұндағы } 1 < x \leqslant 4 \end{cases}$

функциясының графигін салыңдар және қасиеттерін атаңдар.

7.40. $y = f(x)$ функциясы берілген:

1) $f(x) = \begin{cases} 4 + x^2, \text{ мұндағы } x < 0, \\ g(x), \text{ мұндағы } x \geqslant 0. \end{cases}$

$y = f(x)$ функциясы жұп болатындай, $g(x)$ өрнегін жазыңдар;

2) $f(x) = \begin{cases} 5 - x^2, \text{ мұндағы } x > 0, \\ g(x), \text{ мұндағы } x < 0. \end{cases}$

$y = f(x)$ функциясы тақ болатындай $g(x)$ өрнегін жазыңдар.

***7.41.** $y = f(x)$ функциясы — тақ функция.

1) $x > 0$ болғанда, $f(x) = \sqrt{x}$; 2) $x \geqslant 0$ болғанда, $f(x) = x^2 - 4x$;
3) $x \leqslant 0$ болғанда, $f(x) = x^2 + 2x$ екені белгілі. Әрбір жағдай үшін функцияның графигін салыңдар және формуласын жазыңдар.

7.42. Функцияның графигін салыңдар және максимум мен минимум нүктелерін табыңдар:

1) $f(x) = ||x - 2| - 2|$; 2) $f(x) = ||x + 1| - 3|$; 3) $f(x) = ||x + 2| - 4|$.

7.43. $x_1 = 2$ нүктесінде минимумы және $x_2 = 4$ нүктесінде максимумы болатын $y = f(x)$ жұп функциясы графигінің кескінін салыңдар. Осы функцияның экстремум нүктелерінің санын табыңдар.

7.44. $x_1 = 1$ нүктесінде минимумы және $x_2 = 3$ нүктесінде максимумы болатын $y = f(x)$ тақ функциясы графигінің кескінін салыңдар. Осы функцияның экстремум нүктелерінің санын табыңдар.

ҚАЙТАЛАУ

7.45. $\frac{x + 11}{x} + \frac{11}{x^2} = -\frac{1}{x}$ теңдеуінің ең үлкен түбірін табыңдар.

7.46. Өрнекті ықшамдаңдар: $\left(\frac{7 - x}{5x + x^2} - \frac{x + 6}{5x - x^2}\right)\left(\frac{20x + 23x^2 - x^3}{23x - 5} - x\right)$.

7.47. $\frac{20 + x - x^2}{-40 + 13x - x^2} \leqslant 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық бүтін сандардың қосындысының мәнін табыңдар.

7.48. Тригонометриялық өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\cos 60^\circ - \sin 225^\circ + \mathrm{tg}\,150^\circ - \cos^2 300^\circ$;

2) $\sin^2 160^\circ + \cos^2 160^\circ - \sin 135^\circ + \mathrm{tg}\,240^\circ - \sin^2 300^\circ$.

7.49. Функцияның мәндер жиынын көрсетіңдер:
1) $y = 2x^2 - 4|x|$; 2) $y = x^2 - 3|x|$; 3) $y = 2x^2 - |x| + 2$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Сызықтық функция, квадраттық функция, бөлшек, бүтін бөлік, бөлшек-рационал өрнек.

§8. БӨЛШЕК-СЫЗЫҚТЫҚ ФУНКЦИЯ

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad \neq bc$, бөлшек-сызықтық функциясының қасиеттерін анықтауды және графигін салуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Бөлшек-сызықтық функция, график

Анықтама. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad \neq bc$, *түріндегі функция* ***бөлшек-сызықтық функция*** *деп аталады.*

$\frac{ax+b}{cx+d}$ өрнегін $\frac{k}{x+n} + m$ түріне келтіруге болатынын дәлелдейік.

Дәлелдеуі:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}\right)+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+\left(b-\frac{ad}{c}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} =$$

$$= \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Егер: $k = \frac{bc-ad}{c^2}$, $n = \frac{d}{c}$, $m = \frac{a}{c}$ белгілеулерін енгізсек, онда $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{k}{x+n} + m$.

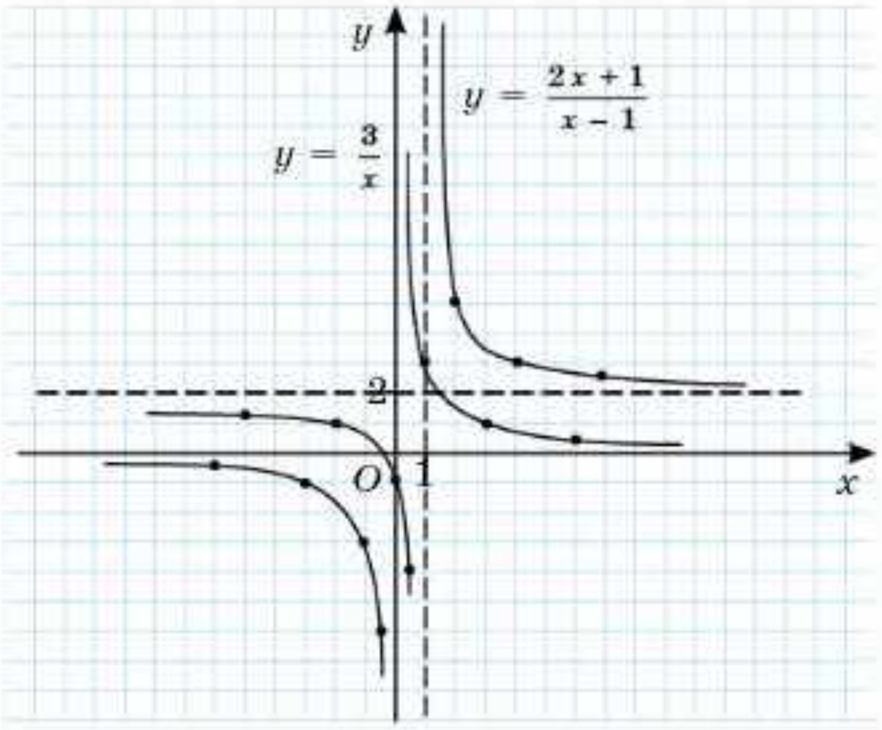
Бұл түрлендіру $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad \neq bc$, бөлшек-сызықтық функциясының графигі гипербола беретінін көрсетеді. Ол $y = \frac{k}{x}$ гиперболасынан Ox осі бойымен $|n|$ бірлікке, Oy осі бойымен $|m|$ бірлікке параллель көшіру арқылы алынады. Параллель көшірудің бағыты n және m таңбаларына байланысты болады.

1. $c = 0$ болғанда $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ функциясының графигі не болады?
2. $ad = bc$ болғанда $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ функциясының графигі не болады?
3. Неліктен бөлшек-сызықтық функцияның анықтамасында $c = 0$ және $ad = bc$ жағдайлары қарастырылмаған?

МЫСАЛ

$y = \frac{2x+1}{x-1}$ бөлшек-сызықтық функциясының графигін тұрғызайық.

Шешуі. $y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$ түріне келтіреміз, онда $y = \frac{2x+1}{x-1}$ функцияның графигін $y = \frac{3}{x}$ функциясының графигін Ox бойымен 1 бірлікке оңға және Oy бойымен 2 бірлікке жоғары параллель көшіру арқылы алуға болады (8.1-сурет).



8.1-сурет

$y = \frac{2x+1}{x-1}$ функциясының графигін қолданып қасиеттерін атаңдар.

1. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ бөлшек-сызықтық функциясының формуласы қалай алынған?

2. Неліктен $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ функциясы бөлшек-сызықтық функция деп аталады?

Жаттығулар

A

8.1. Ox осі бойымен параллель көшіруді қолданып функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \frac{1}{x-2}$; 2) $y = -\frac{1}{x-3}$; 3) $y = \frac{1}{x+2}$; 4) $y = -\frac{1}{x+3}$.

8.2. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = -\frac{2}{x-2}$; 2) $y = \frac{2}{x-3}$; 3) $y = -\frac{3}{x+2}$; 4) $y = \frac{0,5}{x+3}$.

8.3. Oy осі бойымен параллель көшіруді қолданып функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 1 + \frac{1}{x}$; 2) $y = 2 + \frac{1}{x}$; 3) $y = 1 - \frac{1}{x}$; 4) $y = 2 - \frac{1}{x}$.

8.4. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 2 + \frac{3}{x}$; 2) $y = 1 + \frac{2}{x}$; 3) $y = 1 - \frac{2}{x}$; 4) $y = 2 - \frac{1}{2x}$.

8.5. Функцияның графигін салыңдар:

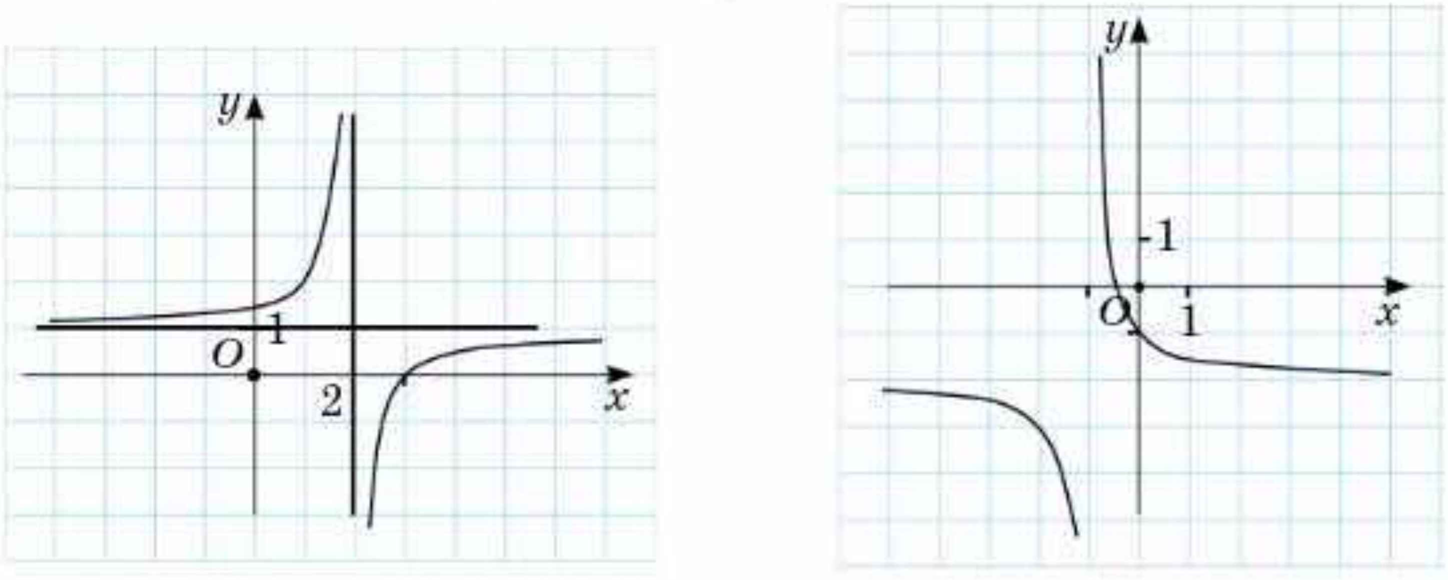
1) $y = 2 + \frac{1}{x - 2}$; 2) $y = 2 + \frac{1}{x - 3}$; 3) $y = 1 - \frac{1}{x + 2}$; 4) $y = 1 - \frac{1}{x + 3}$.

8.6. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 1 - \frac{1}{x - 2}$; 2) $y = 3 - \frac{2}{x - 3}$; 3) $y = 3 - \frac{2}{x + 2}$; 4) $y = 3 - \frac{1}{2x + 4}$.

B

8.7. $f(x)$ функциясының графигі бойынша оның аналитикалық формуласын жазыңдар (8.2-сурет).



1)

2)

8.2-сурет

8.8. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \frac{1}{|x - 2|}$; 2) $y = \frac{1}{|x - 3|}$; 3) $y = \left|\frac{1}{x + 2}\right|$; 4) $y = \left|\frac{1}{2x - 3}\right|$.

8.9. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \frac{1}{|2x - 1|}$; 2) $y = \frac{1}{|2x + 3|}$; 3) $y = \left|1 + \frac{1}{x + 2}\right|$; 4) $y = \left|1 + \frac{1}{2x - 3}\right|$.

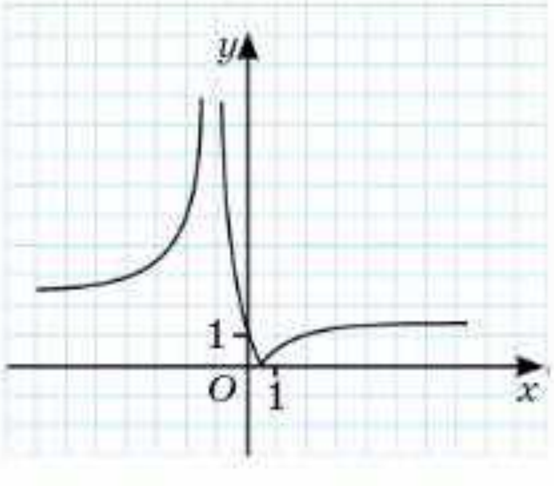
C

8.10. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \frac{2x}{x - 2}$; 2) $y = \frac{3x - 1}{x - 3}$;

3) $y = \left|\frac{4x}{x + 2}\right|$; 4) $y = \left|\frac{-2x}{2x - 3}\right|$.

8.11. 8.3-суретте $f(x)$ функциясының графигі берілген. Егер функцияның графигі $A(2; 1)$ нүктесі арқылы өтетін болса, онда функцияның аналитикалық формуласын жазыңдар.



8.3-сурет

Функцияның графигін салыңдар **(8.12—8.14):**

8.12. 1) $y = \left|\frac{2x}{x-2}\right|$; 2) $y = \left|\frac{3x-1}{x-1}\right|$; 3) $y = \left|\frac{4x+2}{x+2}\right|$; 4) $y = \left|\frac{2x-1}{2x-3}\right|$.

8.13. 1) $y = \left|\frac{2x+5}{2x-2}\right|$; 2) $y = \left|\frac{4x-1}{2x-1}\right|$; 3) $y = \left|\frac{4x-3}{2x+1}\right|$; 4) $y = \left|\frac{2x-5}{2x+3}\right|$.

8.14. 1) $y = \left|\frac{1-2x}{2x-2}\right|$; 2) $y = \left|\frac{4x+1}{1-2x}\right|$; 3) $y = \left|\frac{3-4x}{2x+1}\right|$; 4) $y = \left|\frac{2x-5}{3-2x}\right|$.

ҚАЙТАЛАУ

8.15. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha$; 2) $\frac{1}{2}\cos\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

3) $\sqrt{2}\sin\alpha-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$.

8.16. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{\cos^2\frac{3\pi}{8}}{1-\sin^2\frac{3\pi}{8}}$; 2) $\dfrac{6\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{12}}-1$; 3) $4\sin15^\circ\cos15^\circ$;

4) $8\sin15^\circ\cos15^\circ\cos30^\circ$; 5) $\cos^2 15^\circ-\cos^2 75^\circ$; 6) $\sin^2 15^\circ-\sin^2 75^\circ$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның графигі, анықталу облысы, мәндер жиыны, функцияның нөлдері, периодтылығы, бірсарындылық аралықтары, таңбатұрақтылық аралықтары, функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері, жұп функция, тақ функция, шектелген, экстремум.

§9. ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ ЖӘНЕ ОНЫҢ ГРАФИГІН САЛУ

Функцияны зерттеу алгоритмімен танысасыңдар; функцияның берілген графигі бойынша оның қасиеттерін:

1) анықталу облысын;
2) мәндер жиынын;
3) функцияның нөлдерін;
4) периодтылығын;
5) бірсарынды аралықтарын;
6) таңбатұрақтылық аралықтарын;
7) функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін;
8) жұптылығы мен тақтылығын;
9) шектеулігін;
10) экстремумдарын анықтауды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Анықталу облысы, мәндер жиыны, функцияның нөлдері, шектеулік, периодтылық, бірсарынды, таңбатұрақтылық аралықтары, ең үлкен мәні; ең кіші мәні, жұп; тақ; үзіліссіздік, экстремум

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Координаталары $y = f(x)$ теңдігін қанағаттандыратын жазықтықтың барлық нүктелер жиыны *функцияның графигі* деп аталады.

Функцияның графигін салу үшін координаталары $y = f(x)$ теңдігін қанағаттандыратын нүктелерді мүмкіндігінше көбірек салу керек. Графикті осылайша салу әдісі, біріншіден, көп уақытты қажет етеді, екіншіден, графиктің барлық нүктелерін салу мүмкін емес және оның нәтижесінде графиктің дұрыс салынбауы да мүмкін. Функцияның графигін дәлірек салу үшін функцияға зерттеу жасалады.

АЛГОРИТМ

Функцияның графигін салу алгоритмі:

1) f функциясының $D(f)$ анықталу облысы мен $E(f)$ мәндер жиынын табу;

2) функцияның жұп немесе тақ және периодты екенін анықтау;

3) функция графигінің координаталық осьтермен қиылысу нүктелерінің координаталарын табу;

4) функцияның таңбатұрақтылық аралықтарын табу;

5) функцияның бірсарындылық (өсу және кему) аралықтарын табу;

6) функцияның экстремум (максимум мен минимум) нүктелерін табу және осы нүктелердегі функцияның мәндерін есептеу;

7) функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу;

8) функцияның шектеулі болуын анықтау;

9) егер функцияның анықталу облысына кірмейтін нүктелері болса, онда осындай нүктелердің аймағында функцияны зерттеу, яғни аргументтің мәні осы нүктеге жақындаған сайын функцияның мәні неге ұмтылатынын анықтау.

Бұл алгоритм үлгі ретінде берілген, сондықтан оның әрбір пунктін орындау тиімді емес. Мысалы, теңдеу аналитикалық тәсілмен шығарылмаған жағдайда және т.б.

МЫСАЛ

$y = \frac{2}{|0,5x + 2,5|} - 3$ функциясын зерттеп, графигін салайық.

Шешуі. Алдымен $\frac{2}{|0,5x + 2,5|} - 3$ өрнегін түрлендіреміз. Бөлімдегі 0,5 санын жақшаның алдына және модуль таңбасының сыртына шығарып, $\frac{2}{0,5|x + 5|} - 3$ өрнегін аламыз. Одан кейін бөлшектің алымы мен бөлімін 0,5 санына қысқартсақ, $\frac{4}{|x + 5|} - 3$ өрнегі шығады. Сонда берілген функция $y = \frac{4}{|x + 5|} - 3$ түріне келеді.

1. $y = f(x)$ функциясының $D(f)$ анықталу облысы мен $E(f)$ мәндер жиынын табайық.

Функцияның анықталу облысы көрсетілмегендіктен, оның анықталу облысы $\frac{4}{|x + 5|} - 3$ өрнегінің анықталу облысымен сәйкес келеді.

Бөлімі нөлден өзгеше болғанда ғана бөлшектің мағынасы болатыны белгілі. Сондықтан $D(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

$\frac{4}{|x + 5|} > 0$ болғандықтан, $\frac{4}{|x + 5|} - 3 > -3$. Демек, $E(f) = (-3; +\infty)$.

2. Функцияның жұп немесе тақ және периодты болатынын анықтайық.

Функцияның анықталу облысы $D(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$ нөлге қарағанда симметриялы болмағандықтан, $y = \frac{4}{|x+5|} - 3$ функциясы жұп та, тақ та болмайды.

Функция периодты емес. Анықталу облысынан алынған барлық x үшін $\frac{4}{|x+T+5|} - 3 = \frac{4}{|x+5|} - 3$ теңдігі орындалатындай $T \neq 0$ саны болмайды. Расында, T-ға қатысты $\frac{4}{|x+T+5|} - 3 = \frac{4}{|x+5|} - 3$ теңдеуін шешейік. Сонда $\frac{4}{|x+T+5|} = \frac{4}{|x+5|}$ немесе $|x+T+5| = |x+5|$. Соңғы теңдік $T = 0$ болғанда ғана тура.

3. Функция графигінің координаталық осьтермен қиылысу нүктелерінің координаталарын табайық.

Егер $y = 0$ болса, онда $\frac{4}{|x+5|} - 3 = 0$ немесе $|x+5| = 1\frac{1}{3}$. Ендеше $x_1 = -3\frac{2}{3}$ және $x_2 = -6\frac{1}{3}$. Демек, функцияның екі нөлі (түбірі) бар, ал функцияның графигі Ox осін екі нүктеде, яғни $A\left(-3\frac{2}{3}; 0\right)$ және $B\left(-6\frac{1}{3}; 0\right)$ нүктелерінде қияды.

$x = 0$, онда $f(0) = \frac{4}{|0+5|} - 3 = 0{,}8 - 3 = -2{,}2$. Демек, функцияның графигі Oy осін $C(0; -2{,}2)$ нүктесінде қияды.

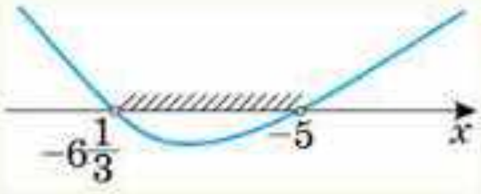
4. Функцияның таңбатұрақтылық аралықтарын табайық.

$f(x) > 0$ болатындай x-тің барлық мәндерін табайық. Ол үшін $\frac{4}{|x+5|} - 3 > 0$ теңсіздігін шешеміз.

$x > -5$ болғанда $\frac{4}{|x+5|} - 3 > 0$ теңсіздігі мына түрге келеді: $\frac{4}{|x+5|} - 3 > 0$ немесе $\frac{4 - 3x - 15}{x+5} > 0$, немесе $\frac{-3x - 11}{x+5} > 0$. Соңғы теңсіздіктің шешімі $\left(-5; -3\frac{2}{3}\right)$ санды интервалы болады (9.1-сурет).

$x < -5$ болғанда $\frac{4}{|x+5|} - 3 > 0$ теңсіздігі мына түрге келеді: $\frac{4}{-x-5} - 3 > 0$ немесе $\frac{4 + 3x + 15}{x+5} < 0$, немесе $\frac{3x + 19}{x+5} < 0$. Соңғы теңсіздіктің шешімі $\left(-6\frac{1}{3}; -5\right)$ интервалы болады (9.2-сурет).

9.1-сурет



9.2-сурет

Сонымен, $\left(-6\frac{1}{3}; -5\right) \cup \left(-5; -3\frac{2}{3}\right)$ жиынына тиісті барлық x үшін $f(x) > 0$. Тура осылай $f(x) < 0$ болатындай x-тің барлық мәндерін табуға болады. Ол үшін $\frac{4}{|x+5|} - 3 < 0$ теңсіздігін шешеміз.

$\frac{4}{|x+5|} - 3 < 0$ теңсіздігінің шешімі $\left(-\infty; -6\frac{1}{3}\right) \cup \left(-3\frac{2}{3}; +\infty\right)$ жиыны болатынын өздерің қарастырыңдар.

Демек, $\left(-\infty; -6\frac{1}{3}\right) \cup \left(-3\frac{2}{3}; +\infty\right)$ жиынына тиісті барлық x үшін функция теріс мәндерді қабылдайды.

5. Функцияның өсу және кему аралықтарын табайық.

$x_1 < x_2 < -5$ болсын. $f(x_1)$ және $f(x_2)$ мәндерін салыстырайық. Ол үшін $f(x_1) - f(x_2)$ айырымын қарастырамыз:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{4}{-x_1 - 5} - 3 - \frac{4}{-x_2 - 5} + 3 = -\frac{4}{x_1 + 5} + \frac{4}{x_2 + 5} = \frac{-4(x_2 - x_1)}{(x_1 + 5)(x_2 + 5)} < 0.$$

Демек, $f(x_1) < f(x_2)$. Онда $(-\infty; -5)$ жиынынан алынған барлық x үшін де функция өспелі болады.

$-5 < x_1 < x_2$ болсын. $f(x_1)$ және $f(x_2)$ мәндерін салыстырайық. Ол үшін $f(x_1) - f(x_2)$ айырымын қарастырамыз:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{4}{x_1 + 5} - 3 - \frac{4}{x_2 + 5} + 3 = \frac{4(x_2 - x_1)}{(x_1 + 5)(x_2 + 5)} > 0.$$

Демек, $f(x_1) > f(x_2)$. Онда $(-5; +\infty)$ жиынынан алынған барлық x үшін де функция кемімелі болады.

6. Функцияның экстремум (максимум мен минимум) нүктелерін табамыз және осы нүктелердегі функцияның мәндерін есептейік.

Функцияның экстремумдары болмайды.

7. Фукцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табайық.

Функцияның ең үлкен мәні де, ең кіші мәні де болмайды.

8. Функцияның шектеулі болуын анықтайық.

$E(f) = (-3; +\infty)$ болғандықтан, барлық x үшін $f(x) \geqslant -3$ теңсіздігі орындалатын $M = -3$ саны бар. Демек, $f(x)$ функциясы *төменнен шектелген*.

9. $y = \frac{4}{|x + 5|} - 3$ функциясының анықталу облысына -5 саны тиісті болмағандықтан, аргументтің мәні -5 санына ұмтылғанда $|x + 5|$ бөлімі 0-ге ұмтылады, $\frac{4}{|x + 5|}$ бөлшегінің мәні артады. Сондықтан функцияның мәні плюс шексіздікке ұмтылады $(+\infty)$.

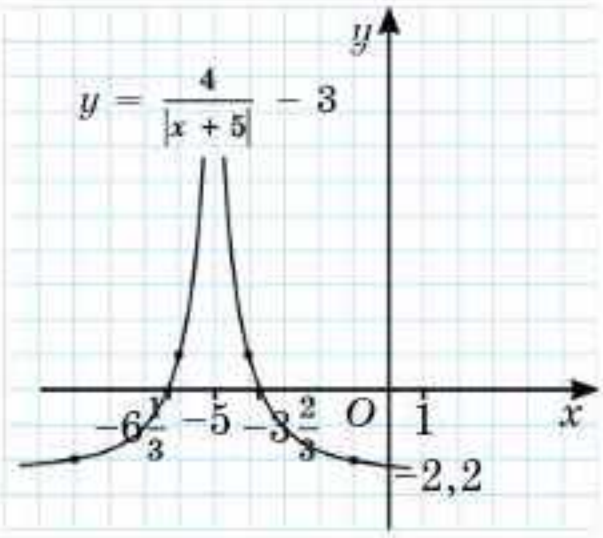
$y = \frac{1}{x}$ функциясының графигіне түрлендірулер қолданып, $y = \frac{4}{|x + 5|} - 3$ функциясының графигін салайық.

Графикті дәлірек салу үшін тағы бірнеше нүктенің координаталарын табайық:

9-кесте

x	-10	-9	-1	-6	-4	$-5{,}5$	$-4{,}5$
y	$-2{,}2$	-2	-2	1	1	5	5

Осы мәліметтерді қолданып, $y = \frac{4}{|x + 5|} - 3$ функциясы графигін саламыз (9.3-сурет).



9.3-сурет

1. 1) Аналитикалық (формуламен); 2) графиктік тәсілмен берілген функцияның анықталу облысы мен мәндер жиынын қалай табуға болады? Мысал келтіріңдер.

2. 1) Аналитикалық; 2) графиктік тәсілмен берілген функцияның таңбатұрақтылық және бірсарындылық аралықтарын қалай табуға болады?

3. Егер функцияның графигі координаталар басына қарағанда симметриялы болса, онда функцияның қандай қасиеттері бар?

4. 1) Ең кіші (ең үлкен) мәні; 2) максимумы (минимумы) бар функцияларға мысал келтіріңдер.

Жаттығулар

А

9.1. $y = f(x)$ функциясын жұптылыққа тексеріңдер:

1) $f(x) = (1 - 2x)^3 + (1 + 2x)^3$;

2) $f(x) = (3x - 2)^4 - (3x + 2)^4$;

3) $f(x) = |2x - 1|(x + 2) + |2x + 1|(x - 2)$;

4) $f(x) = |x - 1|(x + 3) - |x + 1|(x - 3)$.

9.2. Функцияның анықталу облысы мен мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = |x - 1| \cdot \frac{1}{x - 1}$; 2) $f(x) = |x + 2| \cdot \frac{1}{2 + x}$;

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$; 4) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x - 2} - 1}$.

9.3. 1) $f(x) = 3x - 5$ функциясының R жиынында өсетінін;

2) $f(x) = 4 - 2x$ функциясының R жиынында кемитінін;

3) $f(x) = 3x^2 - 5$ функциясының $[0; +\infty)$ жиынында өсетінін;

4) $f(x) = 1 - x^2$ функциясының $[0; +\infty)$ жиынында кемитінін дәлелдеңдер.

9.4. Функцияның жиында өсу және кему анықтамасын қолданып,

1) $y = \frac{3}{x - 2}$ функциясының $(-\infty; 2)$ жиынында кемитінін;

2) $y = -\frac{1}{x + 3}$ функциясының $(-3; +\infty)$ жиынында өсетінін;

3) $y = \frac{2x}{x - 1}$ функциясының $(-\infty; 1)$ жиынында кемитінін;

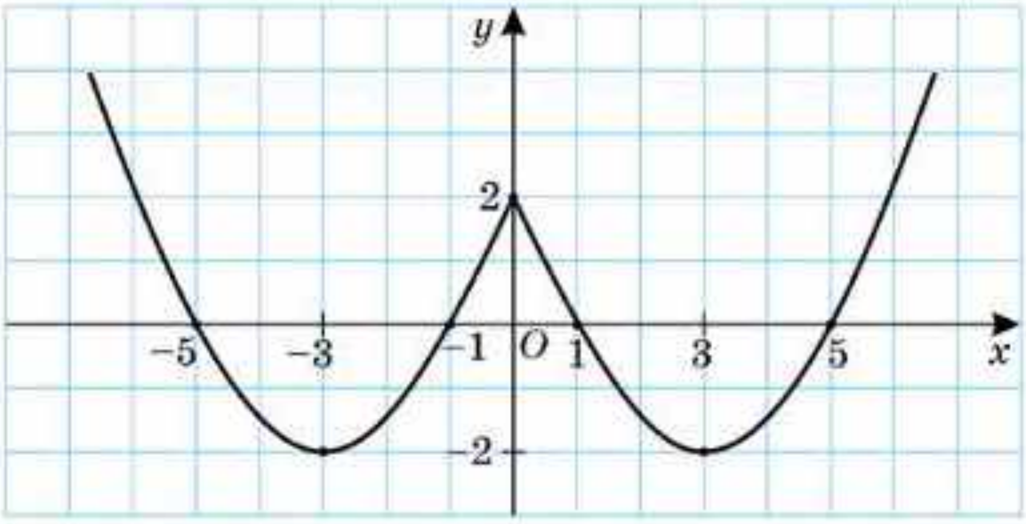
4) $y = \frac{3x}{3 - x}$ функциясының $(3; +\infty)$ жиынында өсетінін дәлелдеңдер. Осы функцияның графигін салыңдар.

9.5. Берілген функцияның ең үлкен мәнін және осы үлкен мәнді қабылдайтын аргументтің мәнін табыңдар:

1) $y = 3 - |x + 5|$; 2) $y = 4 - |x - 2|$;

3) $y = 3 - \sqrt{x - 2}$; 4) $y = 1 - \sqrt{x + 1}$.

9.6. 9.4-суретте берілген график бойынша функцияның $[-5;\ 5]$ кесіндісіндегі өсу және кему аралықтарын, экстремум нүктелері мен экстремумдарын, ең үлкен және ең кіші мәндерін көрсетіңдер.



9.4-сурет

9.7. Берілген функцияның ең кіші мәнін және осы кіші мәнді қабылдайтын сәйкес аргументтің мәнін табыңдар:

1) $y = 3 + \sqrt{x + 2}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 1} - 2$; 3) $y = 3 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

B

9.8. Берілген кесіндіге тиісті функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $y = x^2 - 5x + 2$, $[1;\ 4]$; 2) $y = -x^2 + 2x + 1$, $[-1;\ 5]$;

3) $y = 2x^2 + 4x - 3$, $[-3;\ 1]$.

9.9. Функцияны алгоритм бойынша зерттеп графигін салыңдар:

1) $y = -x^2 + 3x + 2$; 2) $y = 3x^2 + 6x - 4$; 3) $y = 2 + \frac{2}{x - 1}$;

4) $y = 3 - \frac{2}{x - 1}$; 5) $y = -3 + \frac{1}{x + 2}$; 6) $y = -2 - \frac{2}{2x - 5}$.

9.10. 1) $(-\infty;\ -1]$ мен $[1;\ 4]$ сан аралықтарында өсетін және $[-1;\ 1]$ мен $[4;\ +\infty)$ сан аралықтарында кемитін;

2) $(-\infty;\ 2]$ мен $[4;\ 6]$ сан аралықтарында өсетін және $[2;\ 4]$ пен $[6;\ +\infty)$ сан аралықтарында кемитін;

3) $(-\infty;\ 1]$ мен $[2;\ 5]$ сан аралықтарында кемитін және $[1;\ 2]$ мен $[5;\ +\infty)$ сан аралықтарында өсетін;

4) $(-\infty;\ -2]$ мен $[3;\ 6]$ сан аралықтарында кемитін және $[-2;\ 3]$ пен $[6;\ +\infty)$ сан аралықтарында өсетін $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар.

9.11. 1) $x_{\min} = -3$, $x_{\max} = 2$, $f(-3) = -2$, $f(2) = 5$ және $f(-1) = 0$;
2) $x_{\min} = -4$, $x_{\max} = 3$, $f(-4) = -4$, $f(3) = 6$ және $f(-2) = 0$;
3) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 4$, $f(-2) = -5$, $f(4) = 7$ және $f(1) = 1$;
4) $x_{\min} = -3{,}5$, $x_{\max} = 5$, $f(-3{,}5) = -6$, $f(5) = 6$ және $f(-1) = 0$, $f(2) = 3$ болса, онда $y = f\,(x)$ функциясының графигін салыңдар.

C

9.12. 1) $y = f(x)$ — жұп функция, $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -3$, $f(-3) = 6$, $f(1) = -2$;
2) $y = f(x)$ — тақ функция, $x_{\min} = -3$, $x_{\max} = -1$, $f(-3) = -2$, $f(-1) = 3$ болса, онда $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар.

9.13. Функцияның өсу және кему аралықтарын, максимум және минимум нүктелерін, экстремумдарын табыңдар:

1) $y = (x + 1)^4 + 1$; 2) $y = 2 - (x - 1)^4$; 3) $y = (x + 1)^3 - 2$.

9.14. $f(x) = x^2 - 2$ және $g(x) = \dfrac{1}{x + 2}$ функциялары берілген. Төмендегі функциялардың формуласын жазыңдар:

1) $y = f(2x)$; 2) $y = g(x^2)$; 3) $y = g(3x)$;
4) $y = f(x - 2)$.

9.15. 1) $f(x) = x^4 + 4x$ функциясының $[0; +\infty)$ жиынында өсетінін;
2) $f(x) = -x^3 - 3x$ функциясының $(-\infty; +\infty)$ жиынында кемитінін;
3) $f(x) = x^5 + 2x$ функциясының R жиынында өсетінін дәлелдеңдер.

ҚАЙТАЛАУ

9.16. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{(1 - \cos(2\pi - \alpha))(1 + \cos(2\pi + \alpha))}{\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{(1 - \sin\alpha)(1 + \sin(2\pi + \alpha))}{\cos(\pi - \alpha)}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\cos(\pi + \alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}$; 4) $\dfrac{\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)\sin(\pi + \alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

9.17. 1) $|\sin\alpha| > \sin\alpha$; 2) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$; 3) $|\cos\alpha| > \cos\alpha$;
4) $|\operatorname{tg}\alpha| > \operatorname{tg}\alpha$; 5) $|\operatorname{ctg}\alpha| = \operatorname{ctg}\alpha$; 6) $|\operatorname{ctg}\alpha| < \operatorname{ctg}\alpha$ болса, онда α бұрышы қай координаталық ширекте орналасқан?

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, аргумент, түрлендірулер, функцияның графигі.

§10. КҮРДЕЛІ ФУНКЦИЯ. КЕРІ ФУНКЦИЯ

Күрделі функция, кері функция ұғымдарымен танысасыңдар; күрделі функцияны ажыратуды, функциялардың композициясын құрастыруды, кері функцияны табуды үйренесіңдер; өзара кері функциялардың графиктерінің орналасуының қасиетін білетін боласыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Күрделі функция, кері функция, функциялардың композициялары, өзара кері функциялар

$y = f(u)$ функциясын қарастырайық. Аргументі басқа бір функция болатын жаңа $u = g(x)$ функциясын құрастырайық.

МЫСАЛ

1. $f(u) = u^2$, $u = kx + b$; $u = ax^2 + bx + c$; $u = \frac{ax+b}{cx+d}$ болсын.

Аргументі $u = g(x)$ функциясы болатын $y = f(u)$ функциясынан алынған функцияның түрі: $f(x) = (kx + b)^2$; $f(x) = (ax^2 + bx + c)^2$; $f(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^2$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$f(u) = \sqrt{u}$ және $u = kx + b$; $u = ax^2 + bx + c$; $u = \frac{ax+b}{cx+d}$ функцияларынан келесі функциялар қалай алынғанын түсіндіріңдер: $f(x) = \sqrt{kx+b}$; $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$; $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Анықтама: *$y = f(x)$ функциясының x аргументінің орнына $\phi = g(x)$ функциясы алынған $y = f(g(x))$ түріндегі функциясы* ***күрделі функция*** *деп аталады.*

$y = f(g(x))$ күрделі функциясы $\phi = g(x)$ функциясының мәндері $y = f(x)$ функциясының анықталу облысына кіретін x тәуелсіз айнымалысы үшін анықталған.

МЫСАЛ

2. $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$ — күрделі функция. Бұл функция $f(u) = \sqrt{u}$ функциясының аргументін $u = \frac{2x+1}{x-1}$ функциясымен алмастыру арқылы алынған. $\frac{2x+1}{x-1} \geqslant 0$, себебі $f(x) = \sqrt{x}$ функциясының мәні теріс емес. Онда $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$ функциясының анықталу облысы $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$ аралықтары болады.

Күрделі функцияны бірнеше элементар функциялардан құрастыруға болады.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

D жиынының әрбір x санына қандай да бір ереже арқылы x-ке тәуелді бір ғана y саны табылатын сәйкестік D жиынында анықталған санды функция деп аталады.

Кері сәйкестікте керісінше, әрбір y санына x саны сәйкес қойылады.

МЫСАЛ

3. Егер 2 санына 4 саны сәйкес келсе, онда керісінше 4 санына 2 саны сәйкес келеді.

$y = f(x)$ теңдігінен x-ті y арқылы өрнектесе, онда x-тің y-ке тәуелділігін аламыз. Ол тәуелділікті $x = \phi(y)$ деп белгілейік. Сонда $x = \phi(y)$ функциясы $y = f(x)$ функциясына *кері функция* деп аталады. Функцияны y, аргументті x арқылы белгілеу қабылданғандықтан кері функция былайша жазылады: $y = \phi(x)$.

$y = f(x)$ функциясы D жиынында анықталған, мәндер жиыны E болсын.

Анықтама. *$y = f(x)$ функциясына қатысты* ***кері функция*** *деп E жиынында анықталған және әрбір $y \in E$ мәніне $f(x) = y$ болатындай $x \in D$ мәні сәйкес қойылатын $x = g(y)$ функциясын айтады.*

Берілген функция мен оған кері функцияның анықталу облысы мен мәндер жиыны қалай байланысқан?

АЛГОРИТМ

Кері функцияны құрастыру алгоритмі:

1) $y = f(x)$ формуласынан x-ті y арқылы өрнектеу;

2) шыққан $x = \phi(y)$ теңдікте тәуелді айнымалыны y, аргументті x арқылы алмастыру.

МЫСАЛ

4. $y = x^2$, мұндағы $x \geqslant 0$, функциясына кері функцияны құрастырайық.

Алгоритм бойынша:

1) x-ті y арқылы өрнектейміз, сонда $x = \sqrt{y}$;

2) шыққан $x = \sqrt{y}$ теңдігінде тәуелді айнымалыны y, аргументті x арқылы алмастырамыз: $y = \sqrt{x}$.

Кез келген функцияға кері функция табуға бола ма?

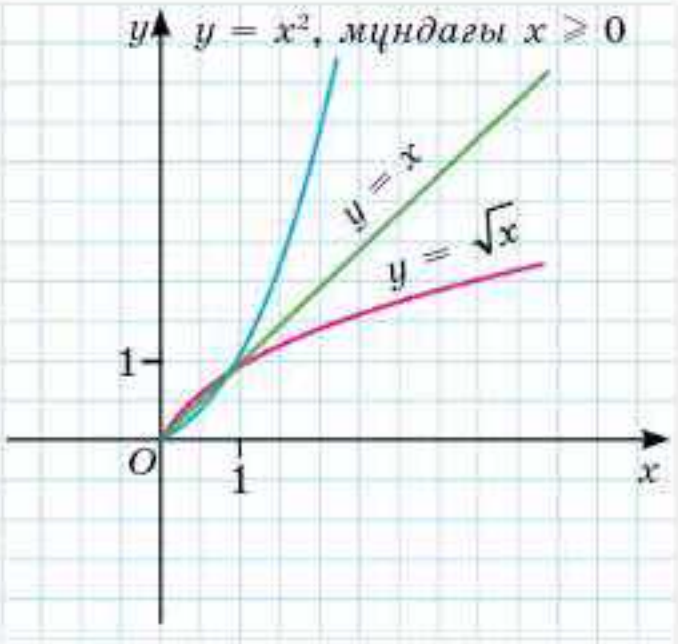
Егер $y = \phi(x)$ — берілген функция, $y = f(x)$ — берілген функцияға кері функция болса, онда $y = f(x)$ және $y = \phi(x)$ функциялары *өзара кері функциялар* деп аталады.

$y = x^2$, мұндағы $x \geqslant 0$, функциясын және $y = \sqrt{x}$ кері функциясының мысалы ретінде алып, өзара кері функциялардың графиктерінің орналасуын қарастырайық.

Өзара кері функциялардың графиктері $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы болады.

$y = x^2$, мұндағы $x \geqslant 0$ және $y = \sqrt{x}$ функцияларының графиктері өспелі ме, әлде кемімелі ме (10.1-сурет)?

$y = 4 - 2x$ функциясының графигін және оған кері функцияның графигін салыңдар. Осы функциялар кемімелі бола ма?

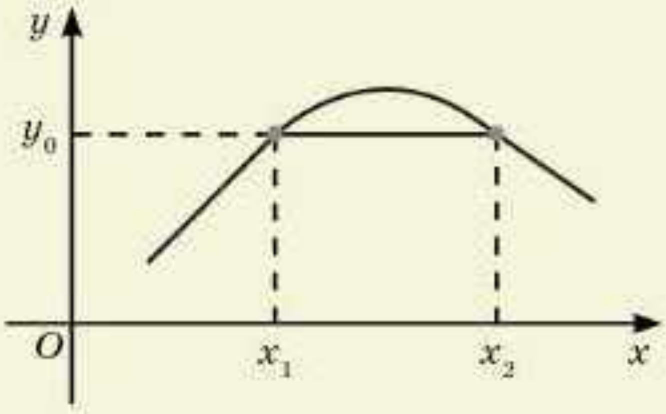


10.1-сурет

Егер $y = f(x)$ функциясы аралықта өспелі (кемімелі) болса, онда оған кері функция да осы аралықта өспелі (кемімелі) болады.

Өзара кері функциялардың графиктері 1 және 3 координаталық ширектердің биссектрисаларына қарағанда симметриялы болады.

1. Анықталу облысы $(-\infty; 5] \cup (6; +\infty)$ аралықтары, мәндер жиыны $(-\infty; +\infty)$ аралығы болатын функцияға кері функцияның анықталу облысы мен мәндер жиынын табыңдар.
2. $y = 0{,}5x + 2$ және $y = 2x - 4$ функциялары өзара кері функциялар бола ма?
3. Егер функция бірсарынды болмаса, онда оған кері функция құрастыруға бола ма?
4. Неліктен бірсарынды функцияның әр уақытта кері функциясы болады (10.2-сурет)?



10.2-сурет

Жаттығулар

А

10.1. $f(x)$ функциясына кері функцияны табыңдар және бір координаталық жазықтықта олардың графиктерін салыңдар:

1) $y = 3x - 7$; 2) $y = 2 - 3x$; 3) $y = 2x + 1$; 4) $y = 3 - 2x$.

10.2. 1) $f(x) = x - 1$; 2) $f(x) = 3 - 2x^2$; 3) $f(x) = 3x - x^2$ болса, онда $f(3x)$, $f(2x - 1)$, $f(2x^2 - 1)$ күрделі функцияларын құрастырыңдар.

10.3. $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ теңдігі берілген. 1) $x \geqslant 0$; 2) $x \leqslant 0$ болғанда x-ті y арқылы өрнектеңдер.

10.4. 10.1-, 10.2-кестелер арқылы берілген функцияның анықталу облысын табыңдар және анықталу облысында оған кері функцияны анықтаңдар. Егер кері функциясы бар болса, онда оның графигін салыңдар:

10.1-*кесте*

x	1	2	3	5	8	9
y	3	4	5	7	10	11

10.2-*кесте*

x	1	2	3	5	8	9
y	4	5	6	7	5	7

10.5. Егер:

1) $f(x) = 3x + 5,\ g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$;

2) $f(x) = \frac{3}{5} - 6x,\ g(x) = 0{,}1 - \frac{1}{6}x$;

3) $f(x) = \frac{1}{7}x - 3,\ \ g(x) = 7x + 3$ болса, онда $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функциялары өзара кері функциялар бола ма?

10.6. Берілген функцияға кері функцияны табыңдар және өзара кері функциялардың графиктерін бір координаталық жазықтықта салыңдар:

1) $y = 5x + 2$; 2) $y = \frac{1}{3}x - 4$; 3) $y = \frac{3}{x-1}$; 4) $y = \frac{2}{x+4}$.

B

10.7. Егер:

1) $f(x) = x - 1,\ g(x) = \sqrt{3x-2}$; 2) $f(x) = 3 - 2x^3,\ g(x) = \frac{1}{x-2}$;

3) $f(x) = \frac{2x}{3x-1},\ g(x) = \frac{1}{x^2+2}$; 4) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x},\ g(x) = \frac{1}{x^3}$;

5) $f(x) = \sin 3x + 5x,\ g(x) = x^2 - 1$;

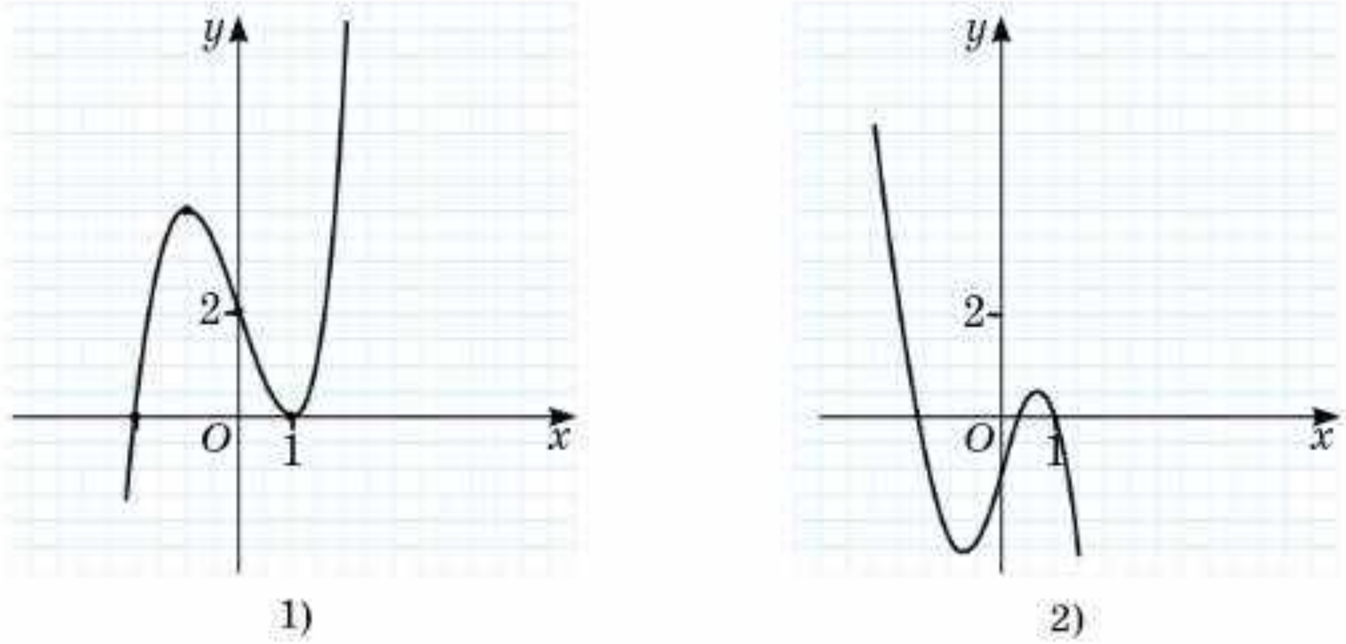
6) $f(x) = \cos 5x - 6,\ g(x) = \mathrm{tg}\,7x$ болса, онда $f(g(x)),\ f(f(x)),\ g(g(x))$ күрделі функцияларын құрастырыңдар.

10.8. 1) $y = x$; 2) $y = -x$; 3) $y = 2x$; 4) $y = 1 - x$ функциясы өзіне кері функция бола ма?

10.9. 1) $y = \frac{7}{x}$; 2) $y = -\frac{5}{x}$; 3) $y = \frac{7}{x-2}$; 4) $y = 5 - \frac{8}{x}$ функциясының графигі оған кері функцияның графигімен беттесе ме?

10.10. Егер функция: 1) сызықтық; 2) квадраттық; 3) бөлшек-сызықтық; 4) $y = \sqrt{x+a}$ түріндегі функция болса, онда функцияның кері функциясы бола ма?

10.11. 10.3-суретте берілген функцияның графигін қолданып, кері функциясы болатын бірнеше аралықтарды, кері функциясы болмайтын бірнеше аралықтарды жазыңдар.



10.3-сурет

C

10.12. Егер функция: 1) жұп; 2) тақ; 3) периодты; 4) кемімелі болса, онда оның кері функциясы бола ма?

10.13. Егер: 1) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$; 2) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{-x}$ болса, онда $y = f(g(x))$ функциясының графигін салыңдар.

10.14. Берілген функцияға кері функцияны табыңдар және олардың графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар:

1) $y = x^2 + 1$, мұндағы $x \geqslant 0$; 2) $y = (x + 1)^2$, мұндағы $x \leqslant -1$;

3) $y = x^2 - 2x + 1$, мұндағы $x \geqslant 1$;

4) $y = x^2 - 4x + 4$, мұндағы $x \leqslant 2$.

10.15. Берілген функцияға кері функцияны табыңдар және олардың графиктерін бір координаталық жазықтыққа салыңдар:

1) $y = x^2 - 2x$, мұндағы $x \geqslant 1$; 2) $y = x^2 + 2x$, мұндағы $x \leqslant -1$;

3) $y = x^2 - 3x$, мұндағы $x \leqslant 1,5$;

4) $y = 2 + \sqrt{x - 2}$, мұндағы $x \geqslant 2$.

ҚАЙТАЛАУ

10.16. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\operatorname{ctg}\alpha - \cos 2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \sin 2\alpha$; 2) $\dfrac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)} = 1$;

3) $\mathrm{tg}^4\alpha \cdot (8\cos^2(\pi - \alpha)) - \cos(\pi + 4\alpha) - 1) = 8\sin^4\alpha$;

4) $\mathrm{ctg}2\alpha - \sin4\alpha = \cos4\alpha \cdot \mathrm{ctg}2\alpha$.

10.17. Егер:

1) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}$ және $\alpha - \beta = \frac{7\pi}{2}$ болса, онда $\cos(\alpha + \beta)$;

2) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{4}$ және $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{2}$ болса, онда $\cos(\alpha - \beta)$;

3) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{3}$ және $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ болса, онда $\sqrt{2}\cos(\alpha + \beta)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

ӨЗІНДІ ТЕКСЕР!

1. Графигі бойынша функцияның қанша экстремум нүктесі бар (10.4-сурет):

A) 3; B) 4; C) 2; D) 1?

2. Графигі 10.4-суретте берілген функцияның экстремумдарын табыңдар:

A) $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = 3$; B) $y_{\max} = 3$, $y_{\min} = -1$;

C) $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$ және $y_{\min} = 3$; D) $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = 3$.

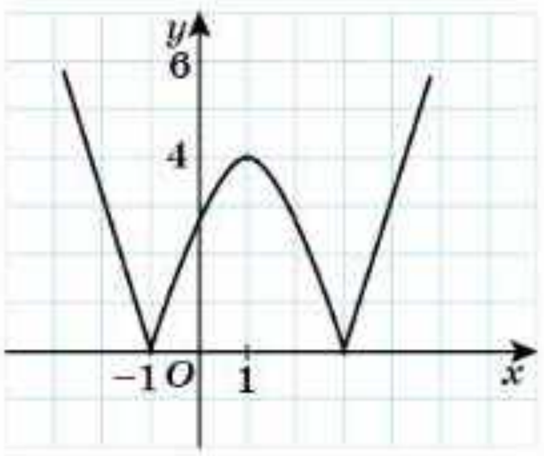
3. Графигі 10.4-суретте берілген функцияның өсу аралықтарын табыңдар:

A) $[-1; 1]$, $[3; +\infty)$;

B) $[-1; 0]$, $[3; +\infty)$;

C) $(-\infty; -1]$, $[0; 3]$;

D) $(-\infty; -1]$, $[1; 3]$.



10.4-сурет

4. Графигі 10.4-суретте берілген функцияның кему аралықтарын табыңдар:

A) $[-5; -3]$, $[-1; 1]$, $[3; 5]$;

B) $[-1; 0]$, $[3; +\infty)$;

C) $(-\infty; -1]$, $[0; 3]$;

D) $(-\infty; -1]$, $[1; 3]$.

5. Егер $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = 2x - 3$ болса, онда $f(g(x))$ күрделі функциясын құрастырыңдар:

A) $f(g(x)) = (2x - 3)^2 - 3(2x - 3)$;

B) $f(g(x)) = (2x - 3)^2 + 3(2x - 3)$;

C) $f(g(x)) = (2x - 3)^2 - (2x - 3)$;

D) $f(g(x)) = (2x - 3)^2 + (2x - 3)$.

6. Жұп функцияны көрсетіңдер:

A) $f(x) = 3x^8 - 2x$; B) $f(x) = 2 - x\sqrt{x}$;

C) $f(x) = x^4 + x^2 + x$; D) $f(x) = x^6 + 2x^4$.

7. Жалпы түрде берілген функцияны анықтаңдар:

A) $f(x) = x^7 - 5x^3 + x$; B) $f(x) = x^3 - 4x^5 + x$;

C) $f(x) = x^6 - 5x^3 + \frac{1}{x-1}$; D) $f(x) = x^4 - 2x^2 + \sqrt{|x|}$.

8. $y = -\sqrt{x}$ функциясының графигін Ox осі бойымен 3 бірлік солға және Oy осі бойымен 3 бірлік жоғары жылжытқанда шығатын функцияның графигін көрсетіңдер:

A) $y = -\sqrt{x-3} - 3$; B) $y = \sqrt{x-3} + 3$;

C) $y = 3 - \sqrt{x+3}$; D) $y = \sqrt{x+3} - 3$.

9. $f(x) = 2(x - 1)^2 - 2$ функциясының графигін алу үшін $y = x^2$ функциясының графигіне қанша түрлендіру қолданылады:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5?

10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{2}{x-1} + \sqrt{x+3}$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

A) (1; 3); B) (−3; 3); C) [−3; 3); D) (−3; 1) ∪ (1; 3).

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның қасиеттері және графигі, $y = \sin x$ тригонометриялық функциясының анықтамасы, $y = \sin x$ тригонометриялық функциясының анықталу облысы және мәндер жиыны, тригонометриялық функциялардың мәндері, тригонометриялық тепе-теңдіктер.

2 ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР, ОЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИКТЕРІ

§11. $y = \sin x$ ФУНКЦИЯСЫНЫҢ ГРАФИГІ ЖӘНЕ ҚАСИЕТТЕРІ

Синусоида ұғымымен, $y = \sin x$ функциясының қасиеттерімен танысасыңдар; синусоиданы салуды үйренесіңдер.

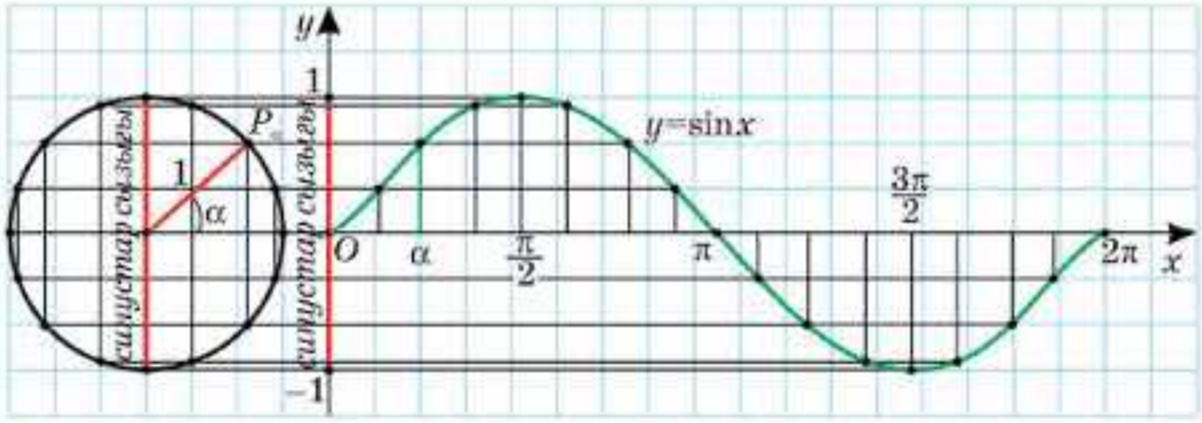
ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, график, синусоида, синус, периодтылық

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Сендер α *бұрышының синусы* деп бірлік шеңбердің P_α нүктесінің ординатасын айтатынын білесіңдер.

Синустың α бұрышының шамасына тәуелділігі $y = \sin x$ деп белгіленетін тригонометриялық функция екенін білесіңдер. Бұл функцияның анықталу облысы $(-\infty; +\infty)$. $y = \sin x$ функциясы периодты функция және периоды 2π-ге тең.

$y = \sin x$ функциясының графигін салу үшін алдымен оның [0; 2π] кесіндісіне тиісті бөлігін саламыз. Ол үшін абсцисса осінде абсциссасы 2π (π ≈ 3,14) болатын нүктені белгілейміз және синустың анықтамасын қолданамыз. *Oy* осінің сол жағына центрі *Ox* осінде жататын бірлік шеңбер саламыз және ордината осіне (0; −1) және (0; 1) нүктелерін белгілейміз. Бірлік шеңбер мен [0; 2π] кесіндісін тең 16 бөлікке бөлеміз (11.1-сурет).

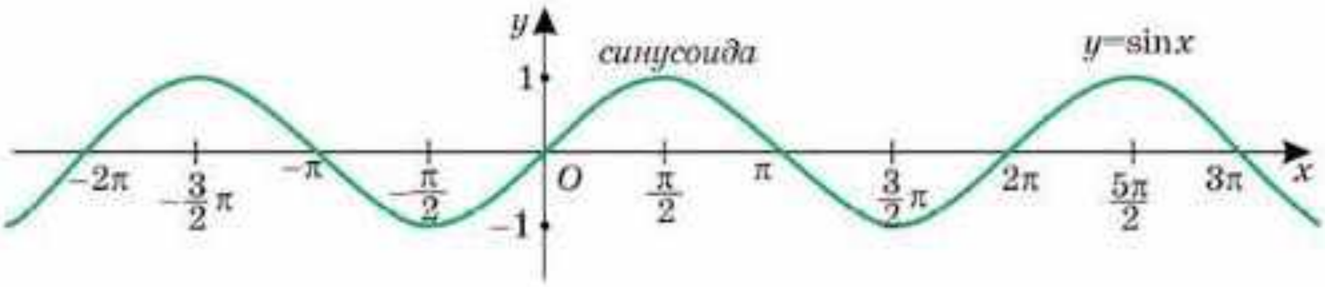


11.1-сурет

Бірлік шеңберде P_α нүктесін белгілейміз және осы нүкте арқылы абсцисса осіне параллель түзу жүргіземіз. Осы түзу мен $x = \alpha$ түзуінің қиылысу нүктесі $y = \sin x$ функциясы графигінің нүктесі болып табылады. Нүктенің ординатасы P_α нүктесінің ординатасымен бірдей, анықтама бойынша sinα — P_α нүктесінің ординатасы.

$y = \sin x$ функциясының графигін барлық сан түзуінде салу үшін оның [0; 2π] кесіндісінде салынған бөлігін *Ox* осі бойымен 2π*n*-ге (мұндағы *n* — бүтін сан) параллель жылжытамыз.

$y = \sin x$ функциясының графигі *синусоида* деп аталады (11.2-сурет).



11.2-сурет

$y = \sin x$ функциясының қасиеттері:

1. Анықталу облысы — $(-\infty; +\infty)$ сан аралығы.
2. Мәндер жиыны — $[-1; 1]$ кесіндісі.
3. $y = \sin x$ функциясы шектелген: $|\sin x| \leqslant 1$.
4. $y = \sin x$ функциясы периодты, оның ең кіші периоды 2π-ге тең. $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, мұндағы n — бүтін сан.
5. $y = \sin x$ функциясы тақ функция: $\sin(-x) = -\sin x$. Оның графигі координаталар басына қарағанда симметриялы.
6. $y = \sin x$ функциясы $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ аралығында оң мәндерді және $(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, мұндағы k — бүтін сан, аралығында теріс мәндерді қабылдайды.
7. $y = \sin x$ функциясы $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ аралығында өседі және $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$ аралығында кемиді, мұндағы k — бүтін сан.

Дәлелдеуі. $y = \sin x$ функциясы $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ (мұндағы k — бүтін сан) аралығында өсетінін дәлелдейік. $y = \sin x$ функциясы периодты болғандықтан, дәлелдеуді $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде жүргізген жеткілікті.

$x_2 > x_1$ болсын. Синустардың айырымының формуласын қолданып, мынаны табамыз:

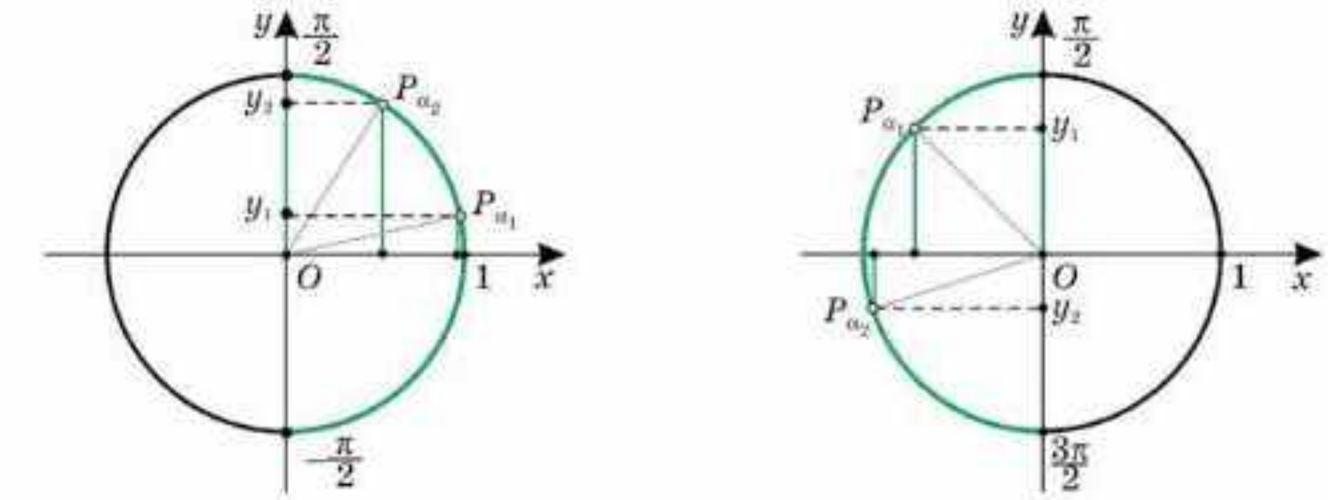
$$\sin(x_2) - \sin(x_1) = 2\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\sin\frac{x_2 - x_1}{2}.$$

$-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ теңсіздігінен $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ және $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2 + x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ шығады. Сондықтан $\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$ және $\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$. Демек, $\sin(x_2) - \sin(x_1) > 0$ және $\sin(x_2) > \sin(x_1)$. Бұл дәлелдеу $y = \sin x$ функциясының берілген аралықта өсетінін көрсетеді. ■

$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, мұндағы n — бүтін сан, аралықтары $y = \sin x$ функциясының кему аралықтары болатынын дәлелдеңдер.

Қарастырылған қасиетті бірлік шеңбердің көмегімен көрсетуге болады (11.3-сурет).

Егер $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ болса, онда P_{α_1} нүктесінің ординатасына қарағанда P_{α_2} нүктесінің ординатасы үлкен болады (11.3.1-сурет). Егер $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \frac{3\pi}{2}$ болса, онда P_{α_1} нүктесінің ординатасына қарағанда P_{α_2} нүктесінің ординатасы кіші болады (11.3.2-сурет).



1) Бұрыш (сан) $-\frac{\pi}{2}$-ден $\frac{\pi}{2}$-ге дейін артқанда ордината артады

2) Бұрыш (сан) $\frac{\pi}{2}$-ден $\frac{3\pi}{2}$-ге артқанда ордината кемиді

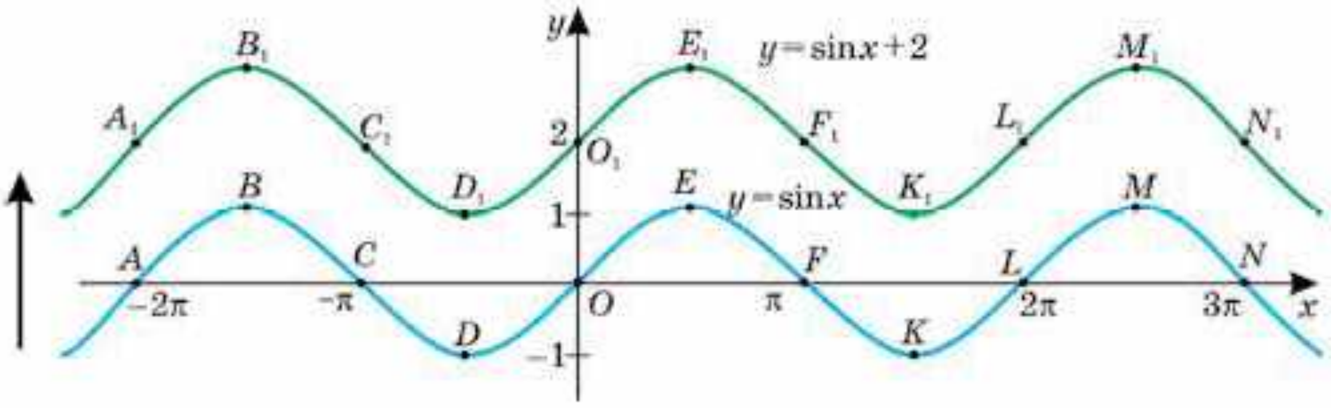
11.3-сурет

8. $y = \sin x$ функциясының экстремумдары: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ (мұндағы k — бүтін сан), $x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ (мұндағы k — бүтін сан): функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері: $y_{\text{ең үлкен}} = 1$, $y_{\text{ең кіші}} = -1$.

МЫСАЛ

$y = \sin x + 2$ функциясының графигін салайық.

Шешуі. Алдымен $y = \sin x$ функциясының графигін саламыз. Ол үшін A, B, C, D, O, E, F, K, L, M, N нүктелерін белгілейміз және оларды қисық сызықпен қосамыз (11.4-сурет). Одан кейін әрбір нүктені ордината (Oy) осі бойымен жоғары 2 бірлікке жылжытамыз. Сонда A_1, B_1, C_1, D_1, O_1, E_1, F_1, K_1, L_1, M_1, N_1 нүктелерін аламыз және оларды қисық сызықпен қосамыз.



$y = \sin x$ функциясының графигін *Oy осі бойымен 2 бірлікке жоғары орын ауыстырамыз (жылжытамыз, параллель көшіреміз)*

11.4-сурет

$y = Af(kx + b)$ түріндегі функцияның периодтылығы

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: $y = f(x)$ функциясының анықталу облысынан алынған кез келген x үшін $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$ теңдігі орындалатындай нөлге тең емес T саны бар болса, онда $y = f(x)$ функциясы периодты болатынын білесіңдер. T оң сандарының ең кішісі $y = f(x)$ функциясының ең кіші периоды немесе периоды деп аталады.

Егер $y = f(x)$ функциясы периодты және периоды T-ға тең болса, онда $y = Af(kx + b)$, мұндағы A, k, b — нақты сандар және $k \neq 0$, функциясы да периодты болады және оның периоды $\frac{T}{|k|}$-ға тең болады.

Мысалы, $y = \sin 3x$ функциясының периоды $\frac{2\pi}{3}$-ге, $y = \sin\frac{x}{2}$ функциясының периоды 4π-ге тең.

1. $y = \sin x$ функциясының графигін Oy осі бойымен: 1) 4 есе созғанда; 2) 3 есе сыққанда алынған $F(\pi;\ 0)$ нүктесіне сәйкес F_1 нүктесінің координаталары қандай болады?
2. Өздерінің анықталу облысында берілген $y = \sin x + 2$ және $y = \sin x$ функцияларының периодтарын салыстырыңдар (11.4-сурет).

Жаттығулар

А

11.1. $y = f(x)$ функциясының жұп болатынын дәлелдеңдер:

1) $f(x) = x^2 + \sin^2 x$;
2) $f(x) = x^4 \sin^2 x$;
3) $f(x) = (2 - x^2)\sin^2 x - 5$;
4) $f(x) = x\sin^3 x$;
5) $f(x) = \frac{\sin x}{x^3 - 4x}$;
6) $f(x) = \frac{\sin 3x}{x^5 - 9x}$.

11.2. $y = f(x)$ функциясының тақ болатынын дәлелдеңдер:

1) $f(x) = x^3 + \sin x$;
2) $f(x) = x^5 \sin^2 x$;
3) $f(x) = (2 - x^2)\sin^3 x$;
4) $f(x) = x - \sin^3 x$;
5) $f(x) = \frac{\sin x}{x^4 - 4}$;
6) $f(x) = \frac{\sin 6x}{x^2 - 9}$.

11.3. 1) $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{\pi}{4} + \pi k\right]$, $k \in Z$; 2) $\left[\frac{3\pi}{4}\pi k;\ \frac{5\pi}{4} + \pi k\right]$, $k \in Z$ аралығында $y = \sin 2x$ функциясының өспелі болатынын дәлелдеңдер.

11.4. Берілген функцияның ең кіші оң периодын табыңдар:

1) $y = 2\sin 2x$;
2) $y = \sin 4x\cos x + \sin x\cos 4x$;

3) $y = \frac{2}{3}\sin 3x + 1$; 4) $y = \sin x\cos x$;

5) $y = \sin 4x\cos 3x - \sin 3x\cos 4x$; 6) $y = \sin 3x\cos 3x$.

11.5. Функцияның ең кіші оң периодын табыңдар және графигін салыңдар:

1) $y = \sin 3x$; 2) $y = \sin 3x\cos 2x + \sin 2x\cos 3x$; 3) $y = \sin\frac{1}{3}x + 1$.

11.6. Берілген функцияның ең кіші оң периодын табыңдар:

1) $y = \sin 2x - \sin x$; 2) $y = \sin 5x\cos x - \sin x\cos 5x$;

3) $y = \frac{2}{3}\sin 4x + \sin 2x$; 4) $y = 2 - \sin x\cos x$;

5) $y = \sin 4x\cos 4x$; 6) $y = \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$.

11.7. $f(x)$ функциясы үшін берілген екі теңдіктің ақиқаттығын тексеріңдер және T саны оның периоды бола ма екенін анықтаңдар:

1) $f(x) = \sin x$, $\sin\frac{\pi}{6} = 0,5$ және $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = 0,5$, $T = \frac{2\pi}{3}$;

2) $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ мұндағы } x \leqslant 1, \\ 3 - x, \text{ мұндағы } x > 1; \end{cases}$ $f(-1) = 1$ және $f(-1 + 3) = f(2) = 1$, $T = 3$?

11.8. Функцияның графигін салыңдар және кему аралықтарын жазыңдар:

1) $y = 2 - \sin 0,5x$; 2) $y = 1 + \sin 1,5x$;

3) $y = 2\sin 2x$; 4) $y = -\sin 3x$.

11.9. Өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:

1) $\sin\frac{5\pi}{7}$ және $\sin\frac{7\pi}{8}$; 2) $\sin\frac{4\pi}{9}$ және $\sin\frac{3\pi}{8}$;

3) $\sin\frac{3\pi}{11}$ және $\sin\frac{5\pi}{13}$.

B

11.10. "Жанды геометрия" немесе Geogebra бағдарламасын қолданып, функция графигін салыңдар. График бойынша функцияның өсу және кему аралықтарын жазыңдар:

1) $y = 1 + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2 - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $y = 1 - \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

11.11. Берілген сандарды өсу ретімен орналастырыңдар:

1) $\sin 1,3$, $\sin(-1,3)$, $\sin 0,3$, $\sin 0,9$;

2) $\sin 0,3$ $\sin(-0,3)$, $\sin 0,7$, $\sin 1,4$.

11.12. Алгоритмді қолданып функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

11.13. Алгоритмді қолданып функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $y = \sin(3x - \pi)$; 3) $y = \sin\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

C

11.14. Түрлендірулерді қолданып функцияның графигін салыңдар және өсу аралықтарын табыңдар:

1) $y = 3 + \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2\sin(3x - 4) - 1$;

3) $y = -2\sin\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

11.15. Функцияны жұптылыққа тексеріңдер және кему аралықтары мен мәндер жиынын табыңдар:

1) $y = 3 + 2\sin 2x$; 2) $y = -2\sin(3x - 2)$;

3) $y = 4 - 2\sin(2x + 4)$.

***11.16.** Функцияның графигін салып бірсарындылыққа зерттеңдер:

1) $y = x + \sin x$; 2) $y = x - \sin x$.

ҚАЙТАЛАУ

11.17. Функцияның периодын табыңдар және графигін салыңдар:

1) $y = \{x\}$; 2) $y = 3 - \{x\}$; 3) $y = 2\{2x\}$; 4) $y = \left\{\frac{x}{3}\right\} + 2$, мұндағы $\{x\}$ — x санының бөлшек бөлігі.

11.18. Тригонометриялық өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{\operatorname{ctg} 30^\circ + \cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{2} - 2\cos 45^\circ}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}\sin 135^\circ + \sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{6\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 4\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}$.

11.19. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}(4\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(4\pi + \alpha)$;

2) $\dfrac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 5\alpha - \cos 3\alpha}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның қасиеттері және графигі, $y = \cos x$ тригонометриялық функциясының анықтамасы, $y = \cos x$ тригонометриялық функциясының анықталу облысы және мәндер жиыны, тригонометриялық функциялардың мәндері, тригонометриялық тепе-теңдіктер.

§12. $y = \cos x$ ФУНКЦИЯСЫНЫҢ ГРАФИГІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

$y = \cos x$ функциясының қасиеттерімен танысасыңдар; $y = \cos x$ функциясының графигін салуды үйренесіңдер.

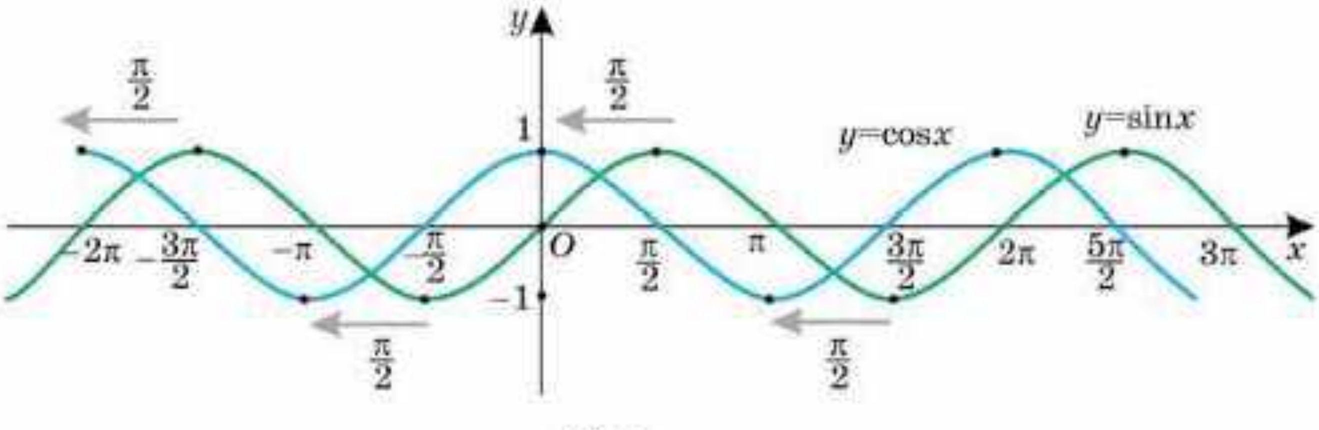
ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, график, косинусоида, косинус, периодтылық

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

α бұрышының косинусы деп бірлік шеңбердің P_α нүктесінің абсциссасын айтатынын, косинустың α бұрышының шамасына тәуелділігі $y = \cos x$ түрінде белгіленетін тригонометриялық функция екенін білесіңдер. Бұл функцияның анықталу облысы $(-\infty; +\infty)$.

$y = \cos x$ функциясының графигін салу үшін $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ келтіру формуласын қолданамыз. Сондықтан $y = \cos x$ функциясының графигі $y = \sin x$ функциясының графигін Ox осі бойымен солға қарай $\frac{\pi}{2}$ бірлікке параллель көшіру арқылы алынады (12.1-сурет).

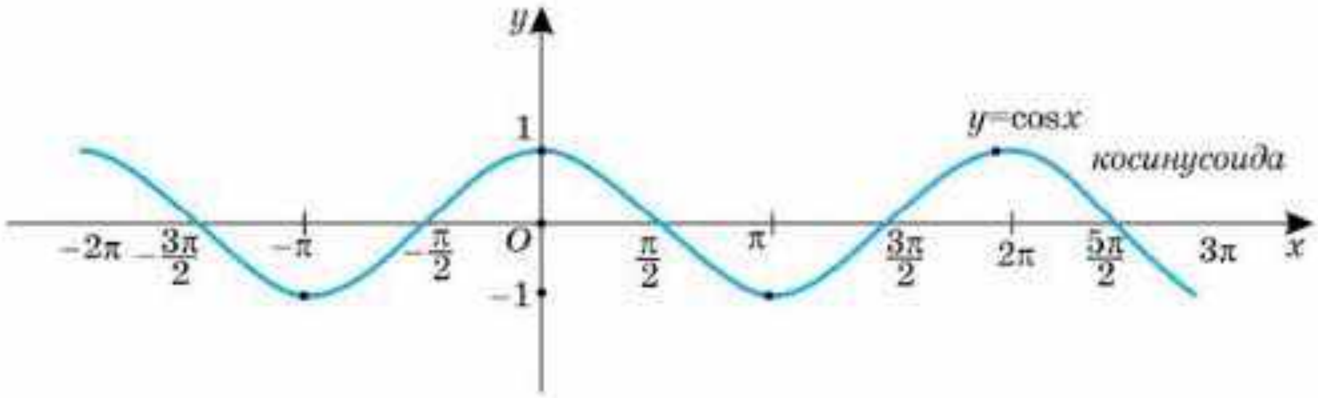


12.1-сурет

$y = \cos x$ функциясының графигі *косинусоида* деп аталады (12.2-сурет).

$y = \cos x$ функциясының қасиеттері:

1. Анықталу облысы $(-\infty; +\infty)$ аралығы.
2. Мәндер жиыны $[-1; 1]$ сандық кесінді.
3. $y = \cos x$ функциясы шектелген: $|\cos x| \leqslant 1$.



12.2-сурет

4. $y = \cos x$ функциясы периодты, оның ең кіші периоды 2π-ге тең. $\cos(x + 2\pi n) = \cos x$, мұндағы n — бүтін сан.

5. $y = \cos x$ функциясы жұп функция: $\cos(-x) = \cos x$, графигі ордината осіне қарағанда симметриялы.

6. $y = \cos x$ функциясы $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ аралығында оң мәндерді және $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ (мұндағы k — бүтін сан) аралығында теріс мәндерді қабылдайды.

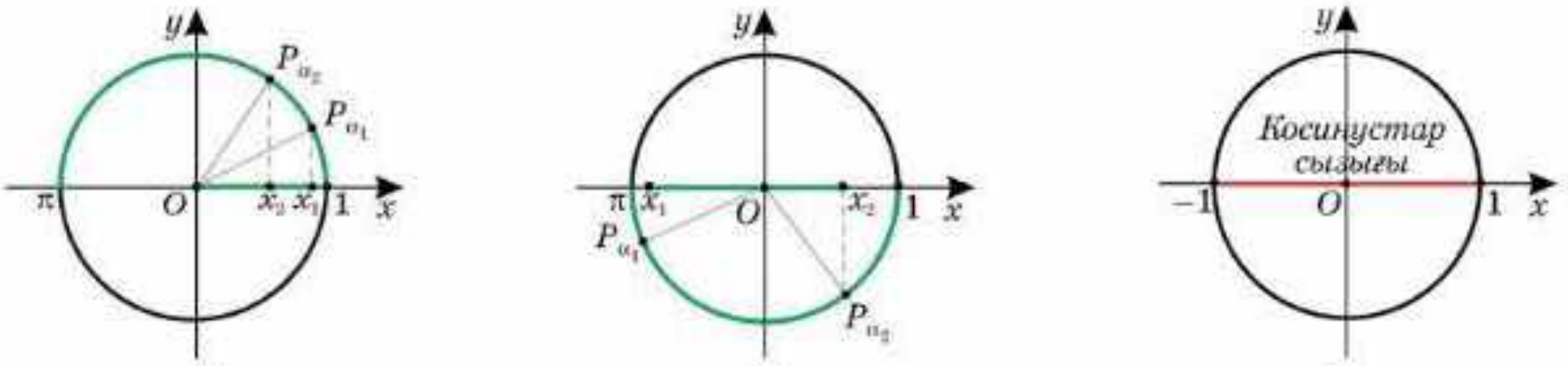
7. $y = \cos x$ функциясы $[-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k]$ аралығында өседі және $[2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$ (k — бүтін сан) аралығында кемиді.

Дәлелдеуі. $y = \cos x$ функциясы $[-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k]$ (мұндағы k — бүтін сан) аралығында өсетінін дәлелдейік. $y = \cos x$ функциясы периодты болғандықтан, дәлелдеуді $[-\pi;\ 0]$ кесіндісінде жүргізген жеткілікті.

$x_2 > x_1$ болсын. Косинустардың айырымының формуласын қолданып, мынаны табамыз: $\cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\frac{x_1 + x_2}{2}\sin\frac{x_2 - x_1}{2}$.

$-\pi \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0$ теңсіздігінен $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ және $-\pi < \frac{x_2 + x_1}{2} < 0$ шығады. Расында, $x_1 < x_2$ болғандықтан $x_2 - x_1 > 0$ және $\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$. Ал $x_2 \leqslant 0$ және $-x_1 \leqslant \pi$ болғандықтан $x_2 - x_1 \leqslant \pi$ және $\frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{\pi}{2}$. Демек, $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{\pi}{2}$. Ал $-\pi \leqslant x_1 < 0$ және $-\pi < x_2 \leqslant 0$ теңсіздіктерін мүшелеп қоссақ, $-2\pi < x_1 + x_2 < 0$ немесе $-\pi < \frac{x_1 + x_2}{2} < 0$ аламыз. Сондықтан $\sin\frac{x_1 + x_2}{2} < 0$ және $\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$. Демек, $\cos x_2 - \cos x_1 > 0$ және $\cos x_2 > \cos x_1$. Бұл дәлелдеу $y = \cos x$ функциясының берілген аралықта өсетінін көрсетеді.

$[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$ (мұндағы n — бүтін сан) аралықтары $y = \cos x$ функциясының кему аралықтары болатынын дәлелдеңдер.



1) Бұрыш (cos$x$) 0-ден π-ге дейін артқанда, абсцисса кемиді

2) Бұрыш (cos$x$) π-ден 2π-ге дейін артқанда, абсцисса артады

3) Ox осі бойымен косинустар сызығындағы [−1; 1] аралығы

12.3-сурет

Қарастырылған қасиетті бірлік шеңбердің көмегімен көрсетуге болады (12.3.1, 12.3.2-сурет).

Косинустар сызығы дегеніміз — Ox осінің [−1; 1] кесіндісі (12.3.3-сурет).

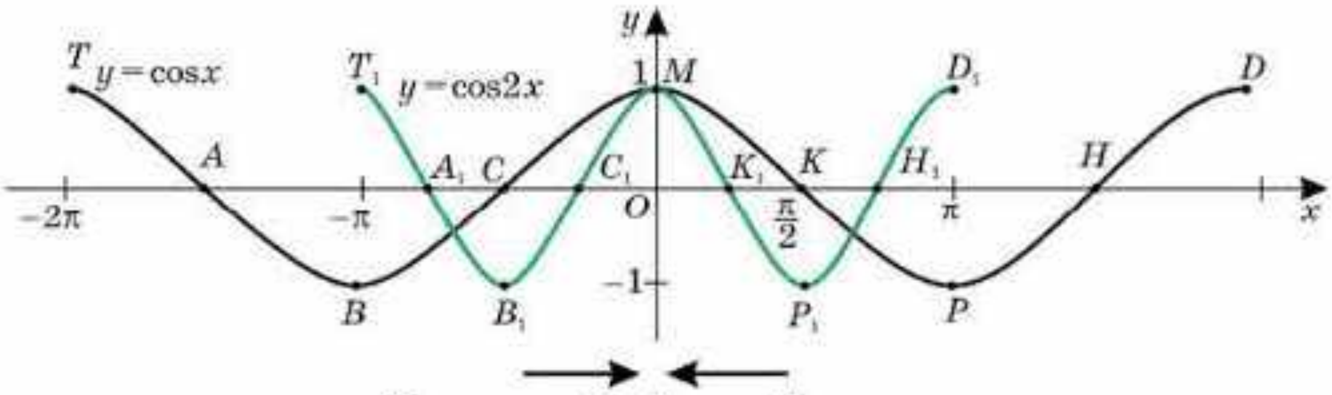
Егер $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \pi$ болса, онда P_{α_1} нүктесінің абсциссасына қарағанда P_{α_2} нүктесінің абсциссасы кіші болады (12.3.1-сурет). Егер $-\pi \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 0$ болса, онда P_{α_1} нүктесінің абсциссасына қарағанда P_{α_2} нүктесінің абсциссасы үлкен болады (12.3.2-сурет).

8. $y = \cos x$ функциясының экстремумдары: $x_{\min} = -\pi + 2\pi k$, (k — бүтін сан), $x_{\max} = 2\pi k$ (k — бүтін сан); функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері: $y_{\text{ең үлкен}} = 1$, $y_{\text{ең кіші}} = -1$.

МЫСАЛ

$[-\pi; \pi]$ кесіндісіне $y = \cos 2x$ функциясының графигін салайық.

Шешуі. Алдымен $y = \cos x$ функциясының графигін $[-2\pi; 2\pi]$ кесіндісіне саламыз. Ол үшін $T, A, B, C, M, K, P, H, D$ нүктелерін белгілейміз және оларды қисық сызықпен қосамыз (12.4-сурет). Одан кейін әрбір нүктені абсцисса осі бойымен 2 есе сығамыз. Сонда ординаталары $T, A, B, C, M, K, P, H, D$ нүктелерінің ординаталарымен бірдей, абсциссалары 2 есе кем $T_1, A_1, B_1, C_1, M_1, K_1, P_1, H_1, D_1$ нүктелерін қисық сызықпен қосып, көрсетілген аралықта берілген функцияның графигін аламыз.



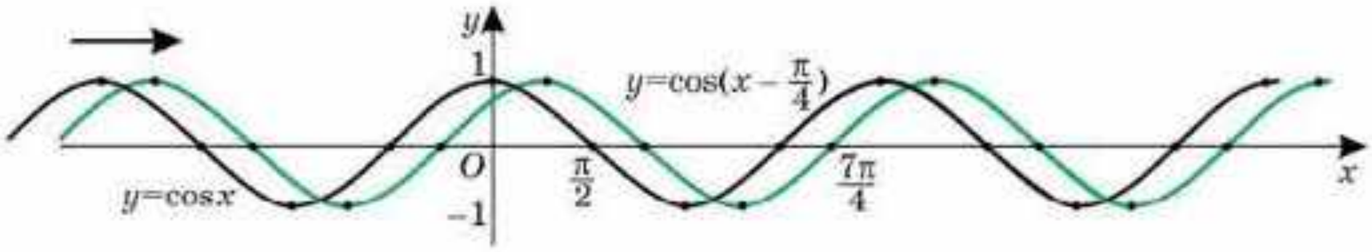
Абсцисса осі бойымен 2 есе сығу

12.4-сурет

Графиктен $y = \cos 2x$ функциясының периоды π-ге тең екенін көреміз. Расында да, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ функциясы графигінің қалай салынғанын түсіндіріңдер (12.5-сурет).



Абсцисса осі бойымен $\frac{\pi}{4}$ бірлікке оңға орын ауыстыру (жылжыту, параллель көшіру)

12.5-сурет

1. $y = \cos x$ функциясының графигін Oy осі бойымен: 1) 4 есе созғанда; 2) 3 есе қысқанда алынған $F(\pi; -1)$ нүктесіне сәйкес F_1 нүктесінің координаталары қандай болады?

2. Өздерінің анықталу облысында берілген $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $y = \cos 2x$ және $y = \cos x$ функцияларының периодтарын салыстырыңдар (12.4 және 12.5-суреттер).

Жаттығулар

А

12.1. $y = f(x)$ функциясының жұп болатынын дәлелдеңдер:

1) $f(x) = x^2 + \cos^2 x$;
2) $f(x) = x^4 \cos x$;
3) $f(x) = (2 - x^2)\cos^2 x$;
4) $f(x) = x\sin^3 x + \cos x$;
5) $f(x) = \frac{\sin x}{x^3 - 4x} + \cos 2x$;
6) $f(x) = \cos x - \frac{\sin 3x}{x^5 - 9x}$.

12.2. $y = f(x)$ функциясының жұп та, тақ та болмайтынын дәлелдеңдер:

1) $f(x) = x^3 + \cos x$;
2) $f(x) = x^5 - \cos^2 x$;
3) $f(x) = (2 - x)\cos^3 x$.

12.3. $y = f(x)$ функциясының тақ болатынын дәлелдеңдер:

1) $f(x) = x^3 \cos x$;
2) $f(x) = x^5 \cos^2 x$;
3) $f(x) = x\cos^3 x + x$;
4) $f(x) = \cos x \sin 3x$;
5) $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{x^4 - 4}$;
6) $f(x) = \frac{\sin 6x}{\cos x^2 - 9}$.

12.4. $y = \cos 2x$ функциясының берілген аралықта өспелі болатынын дәлелдеңдер:

1) $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \pi k\right]$, $k \in Z$; 2) $\left[\frac{3\pi}{4} + \pi k;\ \pi + \pi k\right]$, $k \in Z$.

12.5. Берілген функцияның ең кіші оң периодын табыңдар:

1) $y = 2\cos 2x$; 2) $y = \cos 4x \cos x + \sin x \sin 4x$;

3) $y = \frac{2}{3}\cos 2x + 1$; 4) $y = 2 - \cos 4x$;

5) $y = \cos 4x \cos 3x - \sin 3x \sin 4x$; 6) $y = \sin x - \cos 3x$.

12.6. Функцияның ең кіші оң периодын табыңдар және графигін салыңдар:

1) $y = \cos 3x$; 2) $y = \cos 3x \cos 2x + \sin 2x \sin 3x$;

3) $y = \cos\frac{1}{3}x + 1$.

12.7. Берілген функцияның периодын табыңдар:

1) $y = \cos 2x - \sin x$; 2) $y = \cos 5x \cos x + \sin x \sin 5x$;

3) $y = \frac{2}{3}\ \cos 4x + \sin 2x$; 4) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;

5) $y = \sin 4x - \cos 4x$; 6) $y = 3\sin\frac{x}{3} + 2\cos\frac{x}{3}$.

12.8. $y = f(x)$ функциясы үшін берілген екі теңдіктің ақиқаттығын тексеріңдер және T саны оның периоды бола ма екенін анықтаңдар:

$f(x) = \cos x$, $\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$ және $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = 0{,}5$, $T = \frac{4\pi}{3}$.

12.9. Функцияның графигін салыңдар және кему аралықтарын жазыңдар:

1) $y = 2 - \cos 0{,}5x$; 2) $y = 1 + \cos 1{,}5x$;

3) $y = \cos x + |\cos x|$; 4) $y = \cos x - |\cos x|$.

12.10. Өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:

1) $\cos\frac{5\pi}{7}$ және $-\cos\frac{7\pi}{8}$; 2) $\cos\frac{4\pi}{9}$ және $\cos\frac{3\pi}{8}$;

3) $\cos\frac{3\pi}{11}$ және $\cos\frac{5\pi}{13}$.

12.11. Функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар:

1) $y = 1 + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = 3 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $y = 1 - \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

12.12. Бірлік шеңбер салыңдар. Синустар сызығында ординатасынан алынған синустың мәні a-ға тең және $-1 \leqslant a \leqslant 1$ болатын нүктені белгілеңдер. Осы нүкте арқылы Ox осіне параллель түзу жүргізіңдер. Осы түзу мен бірлік шеңбердің қиылысу нүктелерін табыңдар. Егер:

1) $a = \frac{1}{4}$; 2) $a = \frac{1}{3}$; 3) $a = -\frac{1}{4}$; 4) $a = -\frac{3}{4}$ болса, онда суретте синусы a-ға тең бұрышты көрсетіңдер.

12.13. Бірлік шеңбер салыңдар. Косинустар сызығында абсциссасынан алынған косинустың мәні a-ға тең және $-1 \leqslant a \leqslant 1$ болатын нүктені белгілеңдер. Осы нүкте арқылы Oy осіне параллель түзу жүргізіңдер. Осы түзу мен бірлік шеңбердің қиылысу нүктелерін табыңдар. Егер:

1) $a = \frac{3}{4}$; 2) $a = \frac{2}{3}$; 3) $a = -\frac{1}{4}$; 4) $a = -\frac{3}{4}$ болса, онда суретте косинусы a-ға тең бұрышты көрсетіңдер.

B

12.14. Берілген өрнектерді өсу ретімен орналастырыңдар:

1) $\cos 1{,}9$, $\cos(-0{,}3)$, $\cos 1{,}3$; 2) $\cos\frac{25\pi}{9}$, $\cos\frac{-5\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$.

12.15. Алгоритмді қолданып функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

12.16. Алгоритмді қолданып функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $y = \cos(3x - 4)$; 3) $y = \cos\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

12.17. Түрлендірулерді қолданып функцияның графигін салыңдар және өсу аралықтарын табыңдар:

1) $y = 4 + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2\cos(3x - 4) - 3$;

3) $y = -2\cos\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

C

12.18. Функцияны жұптылыққа тексеріңдер және кему аралықтары мен мәндер жиынын табыңдар:

1) $y = 3 + 2\cos 2x$; 2) $y = -2\cos(3x - 2)$; 3) $y = 1 - 2\cos^2 x$.

***12.19.** Функцияның графигін салыңдар және бірсарындылыққа зерттеңдер:

1) $y = x + \cos x$; 2) $y = x - \cos x$.

***12.20.** Графиктік тәсілмен теңдеудің түбірлерінің санын табыңдар:

1) $2 - x^2 = \cos x$; 2) $2x^2 - 4x = 2\cos x$.

ҚАЙТАЛАУ

12.21. Функцияның периодын табыңдар және графигін салыңдар:

1) $y = \{x\} - 2$; 2) $y = 2\{x\}$;

3) $y = 2\{4x\}$; 4) $y = \left\{\dfrac{x}{4}\right\} + 2$, $\{x\}$ — x санының бөлшек бөлігі.

12.22. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}$; 2) $\dfrac{\cos^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha}$; 3) $\mathrm{ctg}\beta + \dfrac{\sin\beta}{1 + \cos\beta}$.

12.23. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sin^2 x - \cos^2 x - \sin^4 x + \cos^4 x = 0$;

2) $(1 + \cos\alpha)(1 + \mathrm{tg}\alpha) - 1 - \sin\alpha - \cos\alpha = \mathrm{tg}\alpha$;

3) $(\mathrm{tg}x + 2\mathrm{ctg}x)^2 - (\mathrm{tg}x - 2\mathrm{ctg}x)^2 = 8$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның қасиеттері және графигі, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ *тригонометриялық функцияларының анықтамасы,* $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ *тригонометриялық функцияларының анықталу облысы және мәндер жиыны, тригонометриялық функциялардың мәндері, тригонометриялық тепе-теңдіктер.*

§13. $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ ГРАФИКТЕРІ ЖӘНЕ ҚАСИЕТТЕРІ

$y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ функцияларының қасиеттерімен танысасыңдар; $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ функцияларының графиктерін салуды үйренесіңдер.

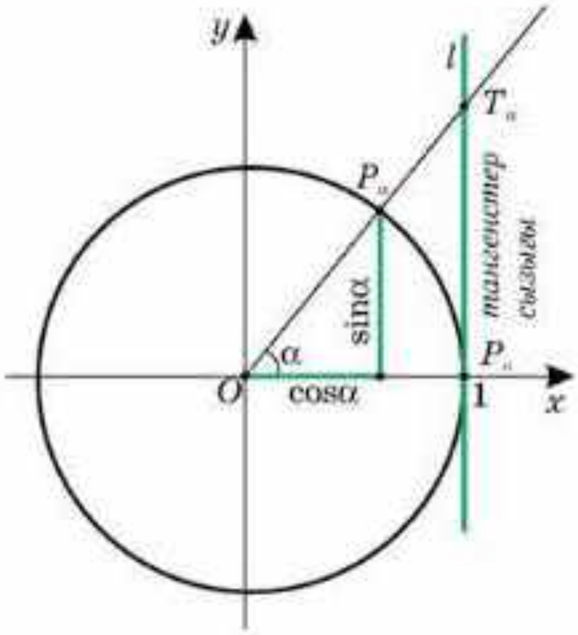
ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, график, тангенс сызығы, котангенс сызығы, тангенсоида, периодтылық

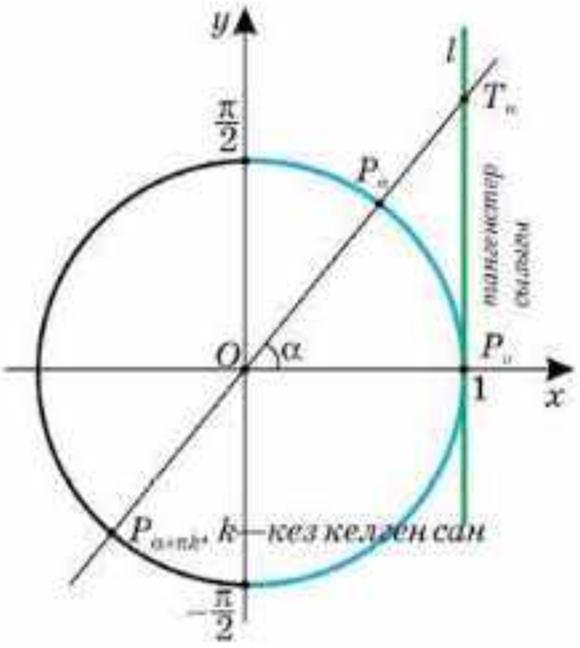
СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

α *бұрышының тангенсі* деп бірлік шеңбердің P_α нүктесінің ординатасының абсциссаға қатынасын айтатынын, тангенстің α бұрышының шамасына тәуелділігі $y = \mathrm{tg}x$ түрінде белгіленетін тригонометриялық функция екенін білеміз. Бұл функцияның анықталу облысы $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ (k — кез келген бүтін сан) сандарынан басқа барлық нақты сандар жиыны, мәндер жиыны $(-\infty; +\infty)$ аралығы.

Бірлік шеңберге P_0 нүктесі арқылы l жанамасын жүргіземіз (13.1-сурет).



13.1-сурет



13.2-сурет

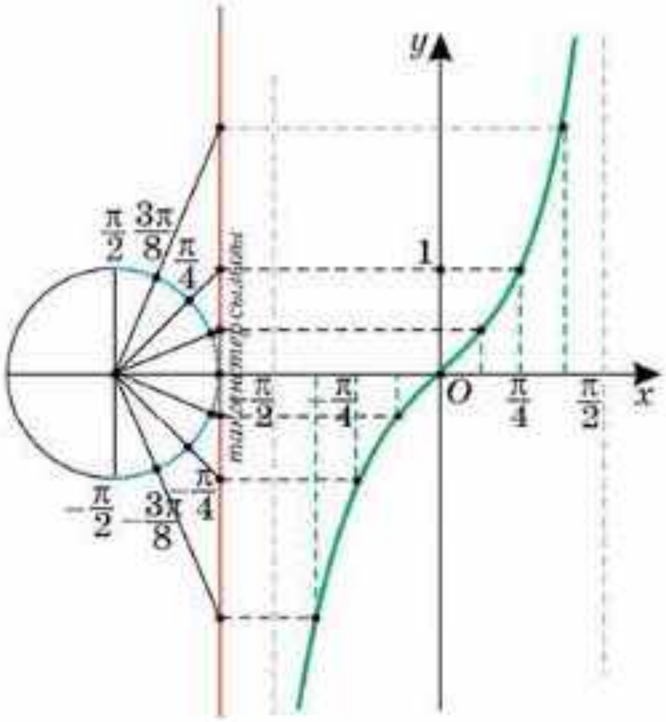
α саны $\cos\alpha \neq 0$ орындалатындай кез келген сан болсын. Онда P_α $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ нүктесі ордината осіне тиісті емес, сондықтан OP_α түзуі l жанамасын абсциссасы 1-ге тең болатын T_α нүктесінде қияды.

Осы нүктенің ординатасын табайық. Анықтама бойынша $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{T_\alpha P_0}{1}$, онда $T_\alpha P_0 = \operatorname{tg}\alpha$. Сонымен, OP_α және l түзулерінің қиылысу нүктелерінің ординаталары $\operatorname{tg}\alpha$-ға тең.

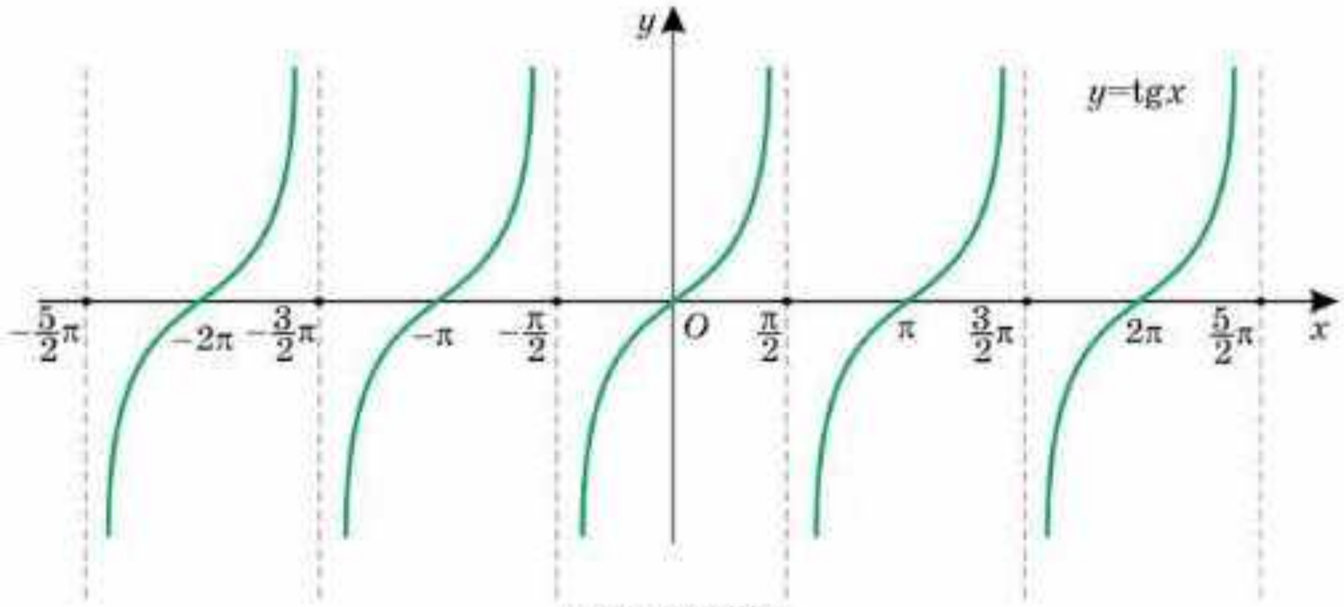
l түзуін *тангенстер сызығы* деп атайды (13.2-сурет).

$y = \operatorname{tg}x$ функциясы периодты және периоды π-ге тең. Расында, $\alpha + \pi k$, (k — кез келген бүтін сан) бұрыштарына сәйкес тангенстер сызығындағы барлық нүктелердің ординаталары α, мұндағы $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бұрышына сәйкес нүктелердің ординаталарына тең болады. Демек, $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg}x$ (k — кез келген бүтін сан).

$y = \operatorname{tg}x$ функциясының графигін салу үшін алдымен оның $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралығына тиісті бөлігін саламыз. Ол үшін абсцисса осінде абсциссасы $-\frac{\pi}{2}$ және $\frac{\pi}{2}$ $(\pi \approx 3{,}14)$ болатын нүктелерді белгілейміз және тангенстер осін қолданамыз. Oy осінің сол жағынан центрі Ox осінде жататын бірлік шеңбер сызамыз. Бірлік шеңбер мен $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісін тең 8 бөлікке бөлеміз (13.3-сурет).



13.3-сурет



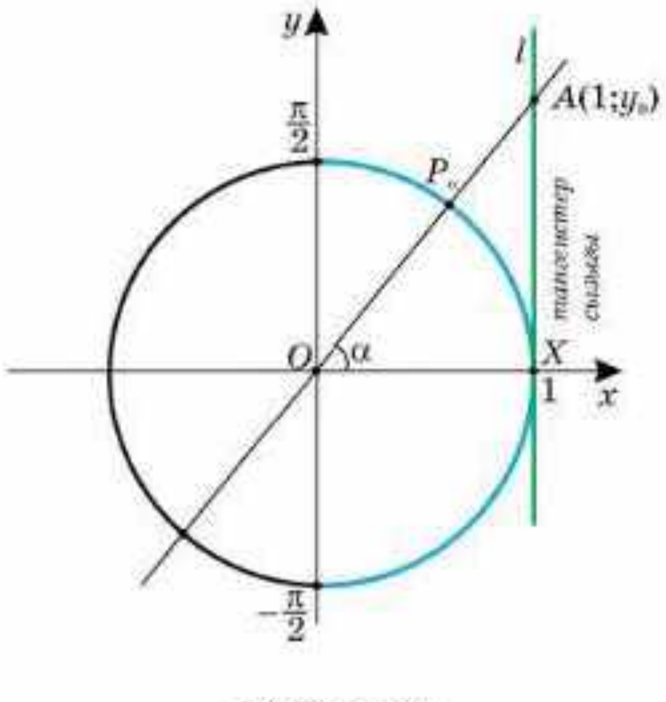
13.4-сурет

$-\frac{3\pi}{8}$; $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{8}$; 0; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{8}$ бұрыштарына сәйкес нүктелерді бірлік шеңберде белгілейміз. Осы бұрыштар үшін $y = \mathrm{tg}x$ функциясының мәндерін тангенстер сызығы арқылы табамыз. Ол үшін координаталар басы және әрбір белгіленген нүкте арқылы тангенстер осіне дейін түзу жүргіземіз. Тангенстер осімен қиылысу нүктесі $y = \mathrm{tg}x$ функциясы графигінің нүктесінің ординатасы болып табылады (13.3-сурет).

$y = \mathrm{tg}x$ функциясының графигін барлық сан түзуінде салу үшін оның $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде салынған бөлігін Ox осі бойымен πn-ге (мұндағы n — бүтін сан) параллель жылжытамыз (13.4-сурет).

$y = \mathrm{tg}x$ функциясының графигі *тангенсоида* деп аталады (13.4-сурет).

$y = \mathrm{tg}x$ функциясының қасиеттері:



13.5-сурет

1. Анықталу облысы $\frac{\pi}{2} + \pi k$ (k — кез келген бүтін сан) сандарынан басқа α-ның барлық мәндері.

2. Мәндер жиыны $(-\infty; +\infty)$ сан аралығы.

Дәлелдеуі. y_0 — кез келген нақты сан болсын. $A(1; y_0)$ нүктесін қарастырайық. Тангенстер сызығы түзу болғандықтан, кез келген y_0 нақты саны үшін $A(1; y_0)$ нүктесі тангенстер сызығына тиісті болады және $y_0 = \mathrm{tg}\angle AOX$ (13.5-сурет). Демек, $y = \mathrm{tg}x$ функциясы кез келген нақты санды қабылдайды. ■

3. $y = \mathrm{tg}x$ функциясы шектелмеген.

4. $y = \operatorname{tg}x$ функциясы периодты, оның периоды π-ге тең. $y = \operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg}x$, мұндағы n — бүтін сан.

5. $y = \operatorname{tg}x$ функциясы тақ функция: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x$. Оның графигі координаталар басына қарағанда симметриялы.

6. $y = \operatorname{tg}x$ функциясы $\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ аралығында оң мәндерді және $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$ (k — бүтін сан) аралығында теріс мәндерді қабылдайды.

7. $y = \operatorname{tg}x$ функциясы $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ аралығында өседі, мұндағы k — бүтін сан.

Дәлелдеуі. $y = \operatorname{tg}x$ функциясы $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, ($k$ — бүтін сан) аралығында өсетінін дәлелдейік. $y = \operatorname{tg}x$ функциясы периодты болғандықтан, дәлелдеуді $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында жүргізген жеткілікті.

$x_2 > x_1$ орындалатындай етіп көрсетілген интервалдан кез келген x_1 және x_2 мәндерін алайық. $\operatorname{tg}x_2 > \operatorname{tg}x_1$ теңсіздігін дәлелдейік. Ол үшін $\operatorname{tg}x_2 - \operatorname{tg}x_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cos x_1}$ айырымын қарастырамыз:

$-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ болғандықтан, $\cos x_1 > 0$ және $\cos x_2 > 0$. $0 < x_2 - x_1 < \pi$ болғандықтан, $\sin(x_2 - x_1) > 0$. Демек, $\operatorname{tg}x_2 - \operatorname{tg}x_1 > 0$ немесе $\operatorname{tg}x_2 > \operatorname{tg}x_1$. ■

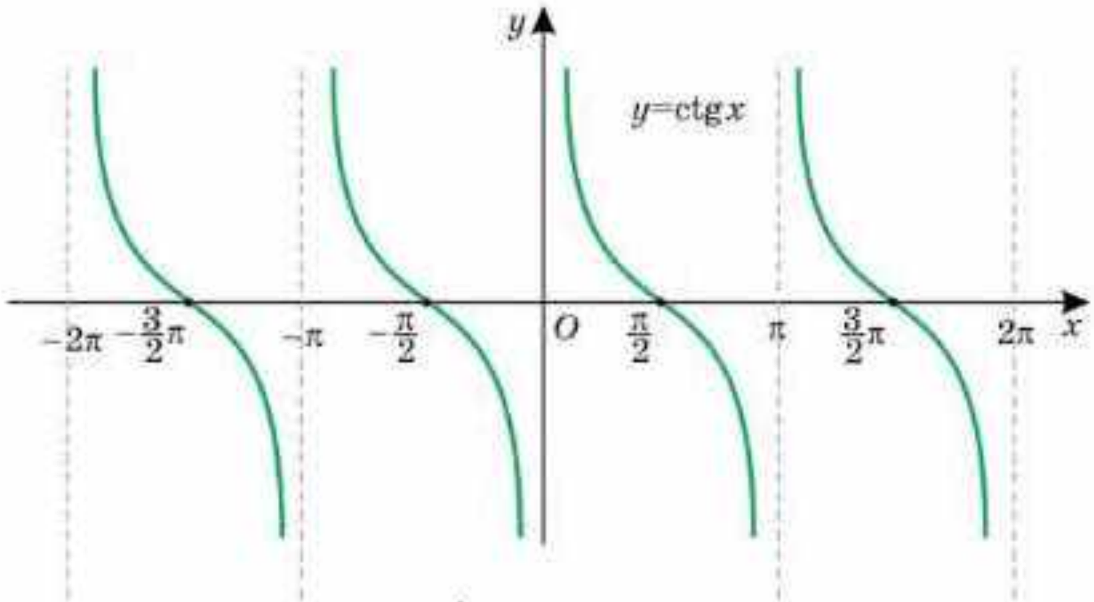
Осы қасиетті тангенстер сызығын қолданып дәлелдеңдер (13.5-сурет).

8. $y = \operatorname{tg}x$ функциясының экстремумдары мен ең үлкен және ең кіші мәндері болмайды.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: α *бұрышының котангенсі* деп бірлік шеңбердің P_α нүктесінің абсциссасының ординатаға қатынасын айтады, котангенстің α бұрышының шамасына тәуелділігі *тригонометриялық функция* деп аталады және $y = \operatorname{ctg}x$ деп белгіленеді.

Бұл функцияның анықталу облысы $x = \pi k$ (k — кез келген бүтін сан) сандарынан басқа барлық нақты сандар жиыны, мәндер жиыны $(-\infty; +\infty)$ болады.

$y = \operatorname{ctg}x$ функциясының графигін салу үшін $\operatorname{ctg}x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ келтіру формуласын қолданамыз. Сондықтан $y = \operatorname{ctg}x$ функциясының графигі $y = \operatorname{tg}x$ функциясының графигін Ox осі бойымен солға қарай $\frac{\pi}{2}$ бірлікке параллель көшіру және Ox осіне қарағанда симметрияны қолдану арқылы алынады (13.6-сурет).



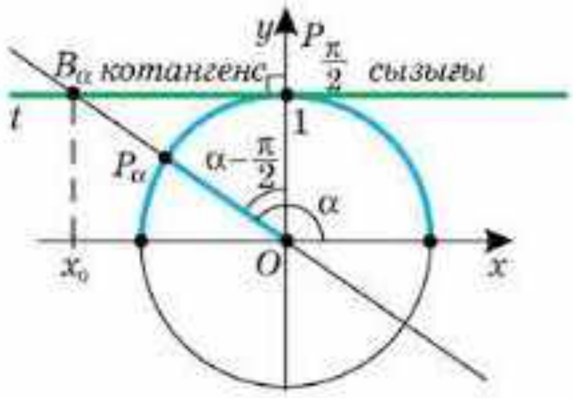
13.6-сурет

$y = \mathrm{ctg}x$ функциясының қасиеттері:

1. Функцияның анықталу облысы πk-дан (k — кез келген бүтін сан) басқа α-ның барлық мәндері.

$P_{\frac{\pi}{2}}$ нүктесі арқылы бірлік шеңберге жүргізілген t жанамасы мен OP_α түзуінің B_α нүктесінің абсциссасы ctgα-ға тең екенін дәлелдеңдер (13.7-сурет).

t түзуі *котангенс сызығы* деп аталады (13.7-сурет).



13.7-сурет

2. Мәндер жиыны (−∞; +∞) сан аралығы.

Дәлелдеуі. x_0 — кез келген нақты сан болсын. $B_\alpha(x_0;\ 1)$ нүктесін қарастырайық. Котангенстер сызығы түзу болғандықтан, кез келген x_0 нақты саны үшін $B_\alpha(x_0;\ 1)$ нүктесі котангенстер сызығына тиісті болады және $x_0 = \mathrm{ctg}\alpha$ (13.7-сурет). Демек, $y = \mathrm{ctg}x$ функциясы кез келген нақты санды қабылдайды. ■

3. $y = \mathrm{ctg}x$ функциясы шектелмеген.

4. $y = \mathrm{ctg}x$ функциясы периодты, оның периоды π-ге тең. $y = \mathrm{ctg}(x + \pi n) = \mathrm{ctg}x$, мұндағы n — бүтін сан.

5. $y = \mathrm{ctg}x$ функциясы тақ функция: $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}x$. Функцияның графигі координаталар басына қарағанда симметриялы.

6. $y = \mathrm{ctg}x$ функциясы $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ аралығында оң мәндерді және $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi + \pi k\right)$ (k — бүтін сан) аралығында теріс мәндерді қабылдайды.

7. $y = \mathrm{ctg}x$ функциясы $(\pi k;\ \pi + \pi k)$ аралығында кемиді, мұндағы k — бүтін сан.

Дәлелдеуі. $y = \mathrm{ctg}x$ функциясы $(\pi k;\ \pi + \pi k)$ (k — бүтін сан) аралығында кемитінін дәлелдейік. $y = \mathrm{ctg}x$ функциясы периодты болғандықтан, дәлелдеуді (0; π) интервалында жүргізген жеткілікті.

$x_2 > x_1$ орындалатындай етіп көрсетілген интервалдан кез келген x_1 және x_2 мәндерін алайық. $\text{ctg}x_2 < \text{ctg}x_1$ екенін дәлелдейік. $\text{ctg}x_2 - \text{ctg}x_1$ айырымын қарастырып, мына түрге келтіреміз:

$$\text{ctg}x_2 - \text{ctg}x_1 = -\frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cos x_1}.$$

Ұйғарым бойынша $0 < x_1 < x_2 < \pi$. Сондықтан $\sin x_1 > 0$ және $\sin x_2 > 0$.

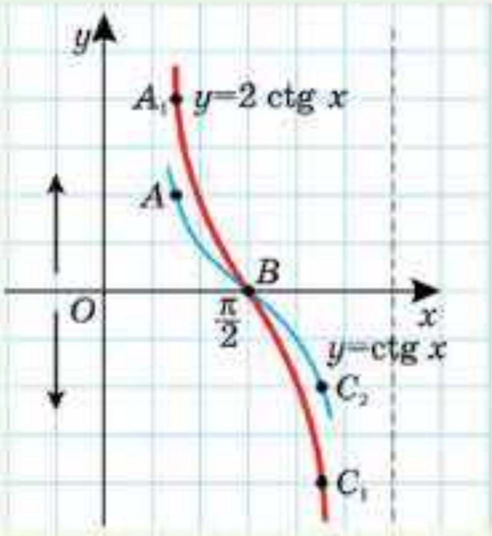
$0 < x_2 - x_1 < \pi$ болғандықтан $\sin(x_2 - x_1) > 0$. Демек, $\text{ctg}x_2 - \text{ctg}x_1 < 0$ немесе $\text{ctg}x_2 < \text{ctg}x_1$. ■

Осы қасиетті котангенстер сызығын қолданып дәлелдеңдер (13.7-сурет).

8. $y = \text{ctg}x$ функциясының экстремумдары мен ең үлкен және ең кіші мәндері болмайды.

МЫСАЛ $(0; \pi)$ интервалында $y = 2\text{ctg}x$ функциясының графигін салайық.

Шешуі Алдымен $y = \text{ctg}x$ функциясының графигін $(0; \pi)$ интервалына саламыз. Ол үшін A, B, C нүктелерін белгілейміз және оларды қисық сызықпен қосамыз (13.8-сурет). Одан кейін ордината осі (Oy) бойымен 2 есе созамыз. Енді абсциссалары A, B, C нүктелерінің абсциссаларымен бірдей, ординаталары 2 есе артық A_1, B_1, C_1 нүктелерін аламыз және оларды қисық сызықпен қосамыз. Сонда көрсетілген аралықта берілген функцияның графигі шығады.



Ордината осі бойымен 2 есе созу

13.8-сурет

1. Егер $y = \text{tg}\ x$ функциясының графигін: 1) Ox осі бойымен 4 есе созғанда; 2) Oy осі бойымен 3 есе сыққанда алынған $F\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$ нүктесіне сәйкес F_1 нүктесінің координаталары қандай болады?
2. Өздерінің анықталу облысында берілген $y = 2\text{ctg}x$ және $y = \text{ctg}x$ функцияларының периодтарын салыстырыңдар.

Жаттығулар

А

13.1. $y = f(x)$ функциясының жұп болатынын дәлелдеңдер:

1) $f(x) = x^2\text{tg}^2x$;
2) $f(x) = x^4\text{ctg}^2x$;
3) $f(x) = -\text{ctg}(-x)^2 - 5$;
4) $f(x) = x\text{tg}^3x$;
5) $f(x) = \dfrac{\text{ctg}\,5x}{x^3 - 4x} - \cos 3x$;
6) $f(x) = \dfrac{\text{tg}\,3x}{x^5 - 9x} + \cos x$.

13.2. $y = f(x)$ функциясының тақ болатынын дәлелдеңдер:

1) $f(x) = x^3 + \mathrm{ctg}2x$; 2) $f(x) = x^5\mathrm{tg}^2x$;

3) $f(x) = (2 - x^2)\mathrm{tg}^3x$; 4) $f(x) = 2x - \mathrm{tg}^3x$;

5) $f(x) = \dfrac{\mathrm{ctg}\,5x}{x^4 - 4} - x$; 6) $f(x) = \dfrac{\mathrm{tg}\,6x}{x^2 - 9} + \sin^3x$.

13.3. Берілген аралықта $y = \mathrm{tg}2x$ функциясының өспелі болатынын дәлелдеңдер:

1) $\left(-\dfrac{\pi}{4} + 0{,}5\pi k;\ \dfrac{\pi}{4} + 0{,}5\pi k\right)$, $k \in Z$; 2) $\left(\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\pi k;\ \dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\pi k\right)$, $k \in Z$.

13.4. Функцияның ең кіші оң периодын табыңдар:

1) $y = 2\mathrm{tg}2x$; 2) $y = \mathrm{ctg}4x$; 3) $y = \dfrac{2}{3}\mathrm{ctg}3x + 1$.

13.5. Функцияның ең кіші оң периодын табыңдар:

1) $y = \mathrm{tg}x + \sin3x$; 2) $y = \mathrm{ctg}2x - 2\cos x$; 3) $y = \mathrm{tg}\dfrac{1}{3}x + 1$.

13.6. Функцияның ең кіші оң периодын табыңдар:

1) $y = \sin2x - \mathrm{ctg}0{,}5x$; 2) $y = \mathrm{tg}5x - \mathrm{tg}x$;

3) $y = \dfrac{2}{3}\mathrm{tg}4x + \cos2x$; 4) $y = 2 - 5\mathrm{ctg}2x$;

5) $y = \mathrm{tg}4x - \cos4x$; 6) $y = \mathrm{tg}\dfrac{x}{3} + \mathrm{ctg}\dfrac{x}{3}$.

13.7. $f(x)$ функциясы үшін берілген екі теңдіктің ақиқаттығын тексеріңдер және T саны оның периоды бола ма екенін анықтаңдар:

$f(x) = \mathrm{tg}x$, $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$ және $\mathrm{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = 1$, $T = \pi$.

13.8. Функцияның графигін салыңдар және кему аралықтарын жазыңдар:

1) $y = 2 - \mathrm{tg}0{,}5x$; 2) $y = 1 + \mathrm{ctg}1{,}5x$;

3) $y = 2\mathrm{tg}2x$; 4) $y = -\mathrm{ctg}3x$.

13.9. Өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:

1) $\mathrm{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{7}\right)$ және $\mathrm{tg}\dfrac{7\pi}{8}$; 2) $\mathrm{ctg}\dfrac{4\pi}{9}$ және $\mathrm{ctg}\dfrac{3\pi}{8}$;

3) $\mathrm{tg}\dfrac{3\pi}{11}$ және $\mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{13}$.

13.10. Бірлік шеңбер салыңдар. Котангенстер сызығында абсциссасынан алынған котангенсінің мәні p-ға тең P нүктесін белгілеңдер. Осы нүкте және координаталар басы арқылы OP сәулесін жүргізіңдер. OP сәулесі мен котангенстер сызығының қиылысу нүктелерін табыңдар. Егер:

1) $p = \frac{3}{4}$; 2) $p = 2$; 3) $p = -1$; 4) $p = -2\frac{3}{4}$ болса, онда суреттен котангенсі p-ға тең бұрышты көрсетіңдер.

13.11. Бірлік шеңбер салыңдар. Тангенстер сызығында ординатадан алынған тангенсінің мәні p-ға тең M нүктесін белгілеңдер. Осы нүкте және координаталар басы арқылы OM сәулесін жүргізіңдер. OM сәулесі мен тангенстер сызығының қиылысу нүктелерін табыңдар. Егер:

1) $p = 3\frac{3}{4}$; 2) $p = 2{,}5$; 3) $p = -1$; 4) $p = -\frac{3}{4}$ болса, онда суреттен тангенсі p-ға тең бұрышты көрсетіңдер.

B

13.12. Функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар:

1) $y = 1 + 2\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2 - \mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $y = 1 - \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

13.13. Берілген өрнектердің мәндерін өсу ретімен орналастырыңдар:

1) $\mathrm{tg}\left(-\frac{6\pi}{13}\right)$, $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$, $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}$ және $\mathrm{tg}\frac{9\pi}{20}$;

2) $\mathrm{ctg}\frac{9\pi}{10}$, $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{15}$, $\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{11}$ және $\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{13}$.

13.14. Алгоритмді қолданып функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 2\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2 + \mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

13.15. Алгоритмді қолданып функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \mathrm{ctg}\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $y = \mathrm{tg}(3x - 4)$; 3) $y = -\mathrm{tg}\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

C

13.16. Түрлендірулерді қолданып, функцияның графигін салыңдар және өсу аралықтарын табыңдар:

1) $y = 1 + \mathrm{tg}\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2\mathrm{ctg}(3x - 4) - 1$;

3) $y = -2\mathrm{tg}\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

13.17. Функцияны жұптылыққа тексеріңдер және периодын табыңдар:

1) $y = 3\mathrm{tg}x + 2\sin 2x$; 2) $y = -2\mathrm{ctg}(3x - 2) + x$;

3) $y = -5\mathrm{tg}(0{,}2x + 4)$.

***13.18.** Теңдеудің түбірлерінің санын табыңдар:

1) $2x - 3 = \mathrm{ctg}0{,}4x$; 2) $x^2 - 2x = \mathrm{tg}0{,}2x$.

13.19. Функцияның периодын табыңдар:

1) $y = \{x\} + \mathrm{tg}\pi x$; 2) $y = \mathrm{ctg}4x - \sin 2x$;

3) $y = 2\{2x\} + \cos 4\pi x$; 4) $y = \left\{\frac{x}{3}\right\} + 2\mathrm{tg}\frac{\pi x}{3}$.

ҚАЙТАЛАУ

13.20. Тригонометриялық өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\dfrac{-\sin\frac{3\pi}{20}\cos\frac{21\pi}{10} - \cos\frac{3\pi}{20}\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{7\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{24}}$; 2) $\dfrac{3\sin\frac{15\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{21} + 3\cos\frac{4\pi}{21}\cos\frac{6\pi}{7}}{-\sin\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24} + \cos\frac{7\pi}{24}\sin\frac{23\pi}{24}}$.

13.21. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\cos\beta - \sin\beta - \sqrt{2}\sin(45^\circ - \beta)$; 2) $\sqrt{3}\cos\beta + \sin\beta - 2\cos(30^\circ - \beta)$.

13.22. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) - 2\cos\alpha\cos\beta = 0$;
2) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\cos\beta = 0$;
3) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;
4) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның қасиеттері және графигі, тригонометриялық функциялардың анықтамалары, координаталық жазықтық, нүктенің координаталары, модуль, кері пропорционалдық, фигураны түрлендірудің түрлері, нүктеге және түзуге қарағанда симметриялы.

§ 14. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ГРАФИКТЕРІН ТҮРЛЕНДІРУЛЕР КӨМЕГІМЕН САЛУ

Түрлендірулерді қолдану арқылы тригонометриялық функциялардың графиктерін салуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

График, түрлендірулер, тригонометриялық функциялар

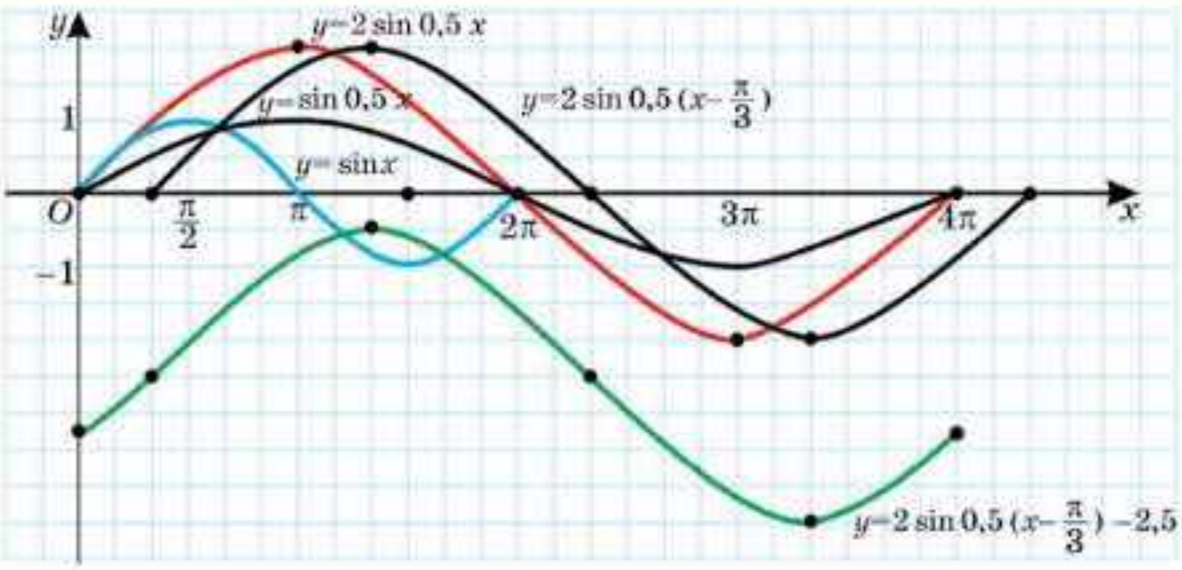
МЫСАЛ $[0;\ 4\pi]$ кесіндісіне $y = 2\sin 0{,}5\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2{,}5$ функциясының графигін салайық.

Шешуі Графикті салу үшін алдымен $y = \sin x$ функциясының графигін $[0;\ 2\pi]$ кесіндісіне саламыз. Одан кейін оны абсцисса осі (Ox) бойымен 2 есе созамыз. Сонда $[0;\ 4\pi]$ кесіндісінде $y = \sin(0{,}5x)$ функциясының графигін аламыз.

Енді соңғы графикті ордината осі (Oy) бойымен 2 есе созамыз. Сонда $[0;\ 4\pi]$ кесіндісінде $y = 2\sin(0{,}5x)$ функциясының графигі шығады.

Шыққан графикті x осі бойымен $\frac{\pi}{3}$ бірлікке оңға жылжытса, $y = 2\sin 0{,}5\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ функциясының графигі шығады. Енді соңғы графикті Oy осі бойымен төмен қарай 2,5 бірлікке жылжытамыз және ол графикті $\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$ кесіндісінде жалғастырып, $\left[4\pi;\ \frac{4\pi}{3}\right]$ кесіндісіндегі бөлігін алып тастаймыз.

Сонда $[0;\ 4\pi]$ кесіндісінде салынған $y = 2\sin 0{,}5\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2{,}5$ функциясының графигі шығады (14.1-сурет).



14.1-сурет

Көп уақытқа дейін тригонометрия геометриялық сипатта болды. XVII ғасырдан бастап тригонометриялық функциялар теңдеулерді шешуге, механика, оптика, электродинамика, радиотехника есептерін шығаруда, толқындардың таралуын, әртүрлі механизмдердің қозғалысын сипаттауда, айнымалы электр тоғы ұғымын игеруде және т.б. қолданыла бастады. Сондықтан тригонометриялық функциялар жан-жақты және терең зерттеліп, математика үшін үлкен маңызға ие болды.

Тербеліс деп белгілі бір уақыт аралығында дәлме-дәл немесе жуықтап қайталанатын қозғалысты айтамыз.

Тербелмелі қозғалыстар табиғат пен техникада кең таралған. Мысалы, сағат маятнигінің қозғалысы, айнымалы электр тогы және т.б.

Физикада маятниктердің тербелмелі қозғалысын, сәуленің кеңістікте таралуын және т.с.с. тербелмелі қозғалыстарды $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ немесе $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ заңы бойынша сипаттайды.

Осындай заңдармен сипатталатын қозғалыстарды *гармоникалық тербелістер* деп атайды. A — *тербелістің амплитудасы* , ω — *тербеліс жиілігі*, φ — *тербелістің бастапқы фазасы* деп аталады. $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ және $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ функцияларының $\frac{2\pi}{\omega}$-ға тең периоды *гармоникалық тербелістің периоды* деп аталады.

Екі функция да әртүрлі бастапқы фазамен бір тербелісті сипаттауы мүмкін екенін айта кеткен жөн. Расында, келтіру формуласын қолданғанда мына теңдік шығады: $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$.

1. $y = \cos x$ функциясының графигін Ox осі бойымен 4 есе созғанда, Oy осі бойымен 3 есе сыққанда және Ox осі бойымен оңға қарай $\frac{\pi}{3}$, Oy осі бойымен төмен қарай $\frac{1}{2}$ бірлікке жылжытқанда алынған $F\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$ нүктесіне сәйкес F_1 нүктесінің координаталары қандай болады?
2. Өздерінің анықталу облысында берілген $y = 2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ және $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ функцияларының периодтарын салыстырыңдар.
3. $y = 2\sin 0{,}5\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ формуласымен берілген гармоникалық тербелістің амплитудасын, жиілігін, бастапқы фазасын және периодын атаңдар.

Жаттығулар

А

14.1. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 2;$ 2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1;$

3) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3.$

14.2. Тригонометриялық функциялардың периодтылығын қолданып берілген тригонометриялық өрнекті оған сәйкес оң аргументті ең кіші тригонометриялық функциямен алмастырыңдар:

1) $\cos\frac{20\pi}{9}, \operatorname{tg}\frac{21\pi}{5}, \sin\frac{23\pi}{7};$ 2) $\operatorname{ctg}\frac{23\pi}{9}, \operatorname{tg}\frac{41\pi}{5}, \sin\frac{16\pi}{7}.$

14.3. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 3;$ 2) $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2;$

3) $y = 2\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

14.4. Функцияның анықталу облысы мен мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = 2\sin 3x - 1;$ 2) $f(x) = 3 - 2\cos 2x;$ 3) $f(x) = 2 - \sin(x - \pi).$

14.5. Функцияның графигін салыңдар, нөлдері мен таңбатұрақтылық аралықтарын жазыңдар:

1) $f(x) = -\sin 2x;$ 2) $f(x) = 2\cos\frac{x}{4};$

3) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{3};$ 4) $f(x) = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$

14.6. Функцияның графигін салыңдар, функцияның теріс емес мәндер қабылдайтын аралықтарын жазыңдар:

1) $f(x) = 2 - \sin x;$ 2) $f(x) = \cos\frac{x}{3} - 3;$

3) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2};$ 4) $f(x) = -\operatorname{ctg}2x.$

B

Функцияны зерттеп графигін салыңдар (14.7—14.10):

14.7. 1) $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $f(x) = -\cos\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)$.

14.8. 1) $f(x) = 2\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $f(x) = -3\mathrm{ctg}0{,}5x$;

3) $f(x) = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

14.9. 1) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $f(x) = \cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$;

3) $f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{5}\right)$.

14.10. 1) $f(x) = 4\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $f(x) = -\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$;

3) $f(x) = 0{,}5\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{2\pi}{5}\right)$.

14.11. Функцияның мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = \cos3x\sin3x$; 2) $f(x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$;

3) $f(x) = \frac{4}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$; 4) $f(x) = \cos^4 3x - \sin^4 3x$;

5) $f(x) = \frac{3}{1 + \mathrm{ctg}^2 x}$; 6) $f(x) = 2 - \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$.

14.12. Функцияның периодын табыңдар:

1) $f(x) = 2 + \cos3x \cdot \sin3x$; 2) $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$;

3) $f(x) = \mathrm{tg}3x + \sin x + 3$; 4) $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x + \mathrm{ctg}0{,}2x$.

14.13. Функцияның графигін салып, оның периодын, максимум және минимум нүктелерін көрсетіңдер:

1) $f(x) = 0{,}5\sin2x$; 2) $f(x) = -2\cos\frac{x}{3}$; 3) $f(x) = 1{,}5\sin0{,}2x$;

4) $f(x) = \cos x \cdot \mathrm{tg}x$; 5) $f(x) = \sin x \cdot \mathrm{ctg}x$; 6) $f(x) = |\mathrm{ctg}x|$.

C

14.14. Дене $x(t)$ заңымен қозғалады. Тербелістің амплитудасын, периодын, жиілігін және t_0 уақыт мезетіндегі координатасын табыңдар:

1) $x(t) = 2{,}5\cos2\pi t$, $t_0 = 6{,}5$ с; 2) $x(t) = 5\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, $t_0 = 10{,}5$ с.

14.15. Егер ток кернеуі:

1) $U(t) = 220\cos 20\pi t$; 2) $U(t) = 360\cos 10\pi t$;

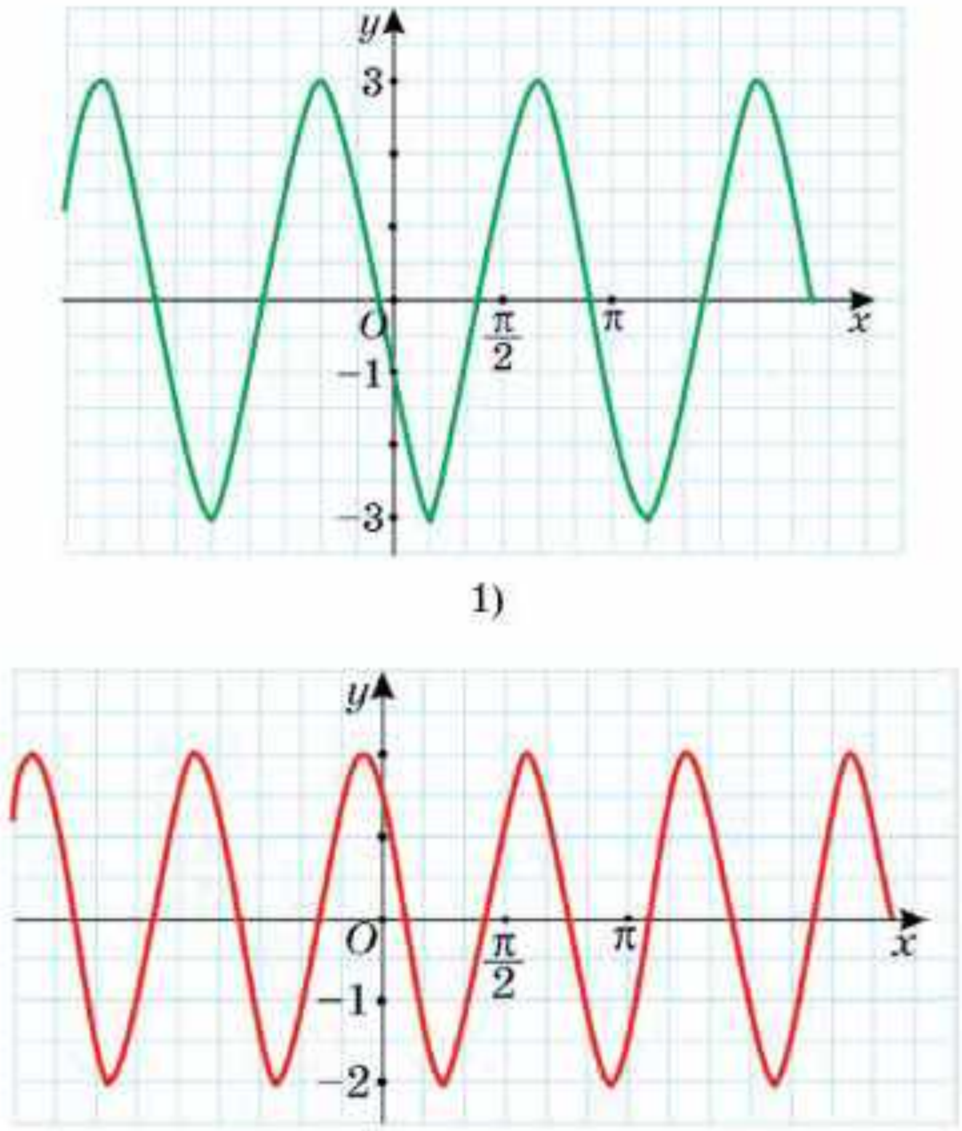
3) $U(t) = 110\cos 30\pi t$; 4) $U(t) = 180\cos 60\pi t$ заңымен өзгерсе, онда оның амплитудасын, периодын және жиілігін табыңдар (кернеу вольтпен, уақыт секундпен өлшенеді).

14.16. Егер ток күші:

1) $I(t) = 5\sin 20\pi t$; 2) $I(t) = 0{,}25\sin 10\pi t$;

3) $I(t) = 10\sin 30\pi t$; 4) $I(t) = 0{,}8\sin 60\pi t$ заңымен өзгерсе, онда оның амплитудасын, периодын және жиілігін табыңдар (ток күші ампермен, уақыт секундпен өлшенеді).

14.17. 14.2-суретте $y = A\cos(bx + c)$ функциясының графигі кескінделген. A, b және c сандарының мәндерін табыңдар.



1)

2)

14.2-сурет

14.18. Берілген аралықта $y = 3\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ функциясын бірсарындылыққа зерттеңдер:

1) $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$; 2) $(1; 2)$; 3) $(-1; 1)$; 4) $\left[-\frac{7\pi}{12}; 0\right]$.

***14.19.** p параметрінің қандай мәндерінде $y = -3\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ функциясы:

1) $(p;\ 2p)$ аралығында өседі; 2) $\left[p;\ p + \frac{\pi}{3}\right]$ аралығында кемиді?

***14.20.** p параметрінің қандай мәндерінде $y = 2\sin\left(0{,}5x + \frac{\pi}{6}\right)$ функциясы:

1) $\left(p - \frac{2\pi}{3};\ p + \frac{2\pi}{3}\right)$ аралығында өседі;

2) $\left[p;\ p + \frac{\pi}{2}\right]$ аралығында кемиді?

14.21. Берілген өрнектердің мәндерін өсу ретімен орналастырыңдар:

1) $\sin 2,\ \sin 3,\ \cos 4,\ \cos 5$; 2) $\sin 3,\ \sin 4,\ \sin 6,\ \sin 7$.

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

14.22. 1) Ежелгі гректердің тригонометриялық функцияларды қолдануы.

2) Үндістанда тригонометриялық функциялардың қолданылуы.

3) Орта Азия мен Кавказ халықтарының тригонометриялық функциялар туралы ілімі.

4) Еуропада тригонометриялық функциялар туралы білімнің дамуы.

5) Түрлі білім салаларында және күнделікті өмірде тригонометриялық функциялардың қолданылуының мысалдары.

ҚАЙТАЛАУ

14.23. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\cos 2 \cdot (2x - 1) < 0$; 2) $\cos 3 \cdot \cos 5 \cdot (x^2 - 1) < 0$.

14.24. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\mathrm{tg}\,2 \cdot \mathrm{ctg}\,2 + \cos^2\pi - \sin^2 15 - \cos^2 15$;

2) $\cos 1 + \cos(1 + \pi) + \sin 60^\circ - \cos 30^\circ$.

14.25. Өрнектің таңбасын анықтаңдар:

1) $\sin 1 \cdot \cos 2$; 2) $\sin(-3) \cdot \cos 2$; 3) $\sin 2 \cdot \cos 6$; 4) $\sin(-4) \cdot \cos(-3)$.

14.26. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\mathrm{ctg}\,x - \sin x \cos x} = 2\mathrm{tg}^2 x$; 2) $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\mathrm{tg}\,x - \sin x \cos x} = 2\mathrm{ctg}^2 x$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Жұп функцияны көрсетіңдер:

A) $f(x) = 5x^4 - \sin^3 x$; B) $f(x) = x^2 + x\sin^3 x$;

C) $f(x) = 2 + x\cos^4 x$; D) $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\sin x^2}$.

2. Тақ функцияны көрсетіңдер:

A) $f(x) = -\cos^3 x$; B) $f(x) = x^3 + \dfrac{\cos^3 x}{\mathrm{tg}^2 x}$;

C) $f(x) = 2x + \dfrac{\cos^3 x}{\mathrm{tg} x^3}$; D) $f(x) = \dfrac{2\sin^3 x}{\mathrm{ctg} x^3}$.

3. $y = \sin 0{,}2x \cos 0{,}2x$ функциясының ең кіші оң периоды:

A) $\frac{2}{5}\pi$; B) 2,5π; C) 4π; D) 5π.

4. $f(x) = 4 - \sin 7x$ функциясының мәндер жиыны:

A) [3; 7); B) [3; 5]; C) (3; 7]; D) (2; 7].

5. $f'(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$ функциясының графигін алу үшін $y = \cos x$ функциясының графигіне қанша түрлендіру қолданылады:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5?

6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\cos x}$ функциясының анықталу облысы:

A) R;

B) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ нүктелерінен басқа барлық нақты сандар;

C) $x \neq \pi n$, $n \in Z$ нүктелерінен басқа барлық нақты сандар;

D) $x \neq 2\pi n$, $n \in Z$ нүктелерінен басқа барлық нақты сандар.

7. $f(x) = |3 - 4\cos 2x|$ функциясының мәндер жиыны:

A) [0; 7]; B) [−1; 7]; C) [1; 7); D) [1; 7].

8. $f(x) = \mathrm{tg}\frac{x}{4}$ функциясының ең кіші оң периоды:

A) $\frac{1}{4}\pi$; B) 2π; C) π; D) 4π.

9. $f(x) = 2\cos x + 5$ функциясының кему аралықтары:

A) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; B) $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$;

C) $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; D) $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

10. $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ функциясының өсу аралықтары:

A) $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$; B) $(2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$;

C) $(-\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$; D) $(-2\pi + \pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның графигі, теңдеу, теңдеудің түбірі, координаталық жазықтық.

3 КЕРІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

§15. АРКСИНУС, АРККОСИНУС, АРКТАНГЕНС, АРККОТАНГЕНС

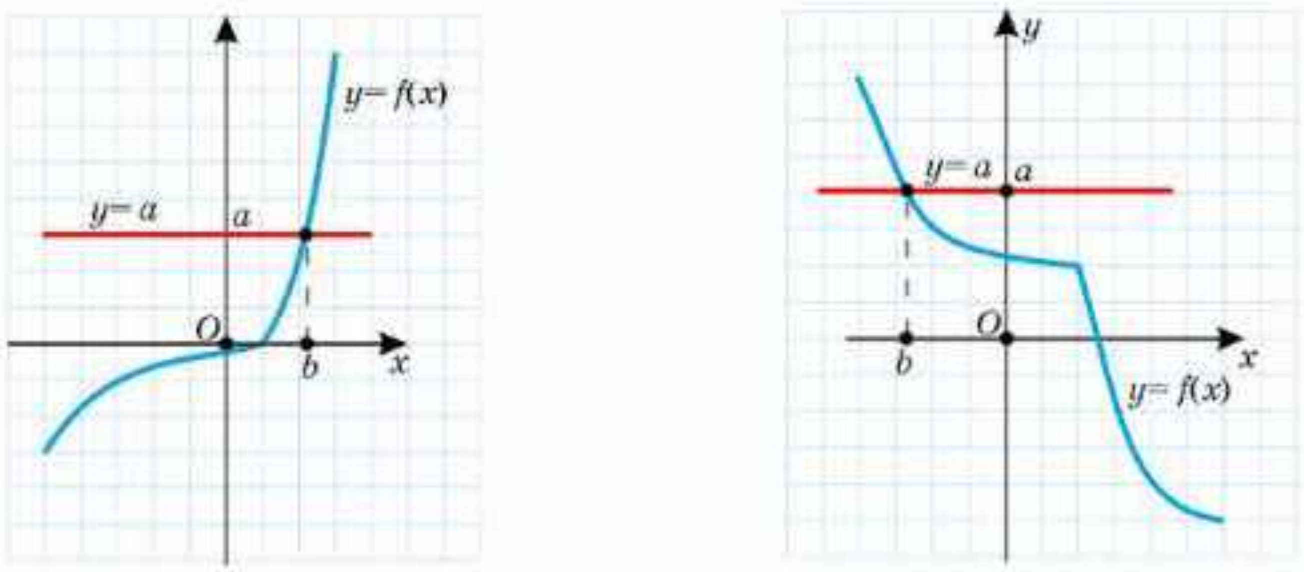
Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс ұғымдарымен танысасыңдар; арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс мәндерін табуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: $f(x) = a$ түріндегі теңдеуді графиктік тәсілмен шығару үшін бір координаталық жазықтыққа $y = f(x)$ және $y = a$ функцияларының графиктері салынады, сосын графиктердің қиылысу нүктелерінің абсциссалары табылады.

МЫСАЛ **1.** $f(x) = a$ теңдеуінің шешімі b саны болады (15.1-сурет).



1) 2)

15.1-сурет

Теорема (түбір туралы). *Егер $y = f(x)$ функциясы қандай да бір санды аралықта өспелі немесе кемімелі және а саны берілген функцияның осы аралықта қабылдайтын кез келген мәні болса, онда осы аралықта $f(x) = a$ теңдеуінің бір ғана түбірі болады.*

Дәлелдеуі. $y = f(x)$ өспелі функциясын қарастырайық ($y = f(x)$ функциясының кемімелі жағдайы тура осылай қарастырылады).

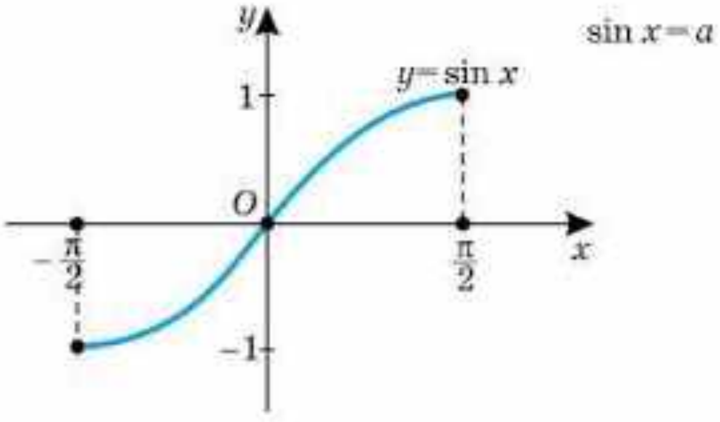
Шарт бойынша берілген сан аралығында $f(b) = a$ теңдігі орындалатындай b саны бар болады. Осы b саны $f(b) = a$ теңдеуінің бір ғана түбірі болатынын көрсетейік.

Дәлелдеуді кері жору арқылы жүргіземіз, яғни берілген сан аралығында $f(c) = a$ болатындай тағы бір $c \neq b$ саны бар деп жорамалдаймыз.

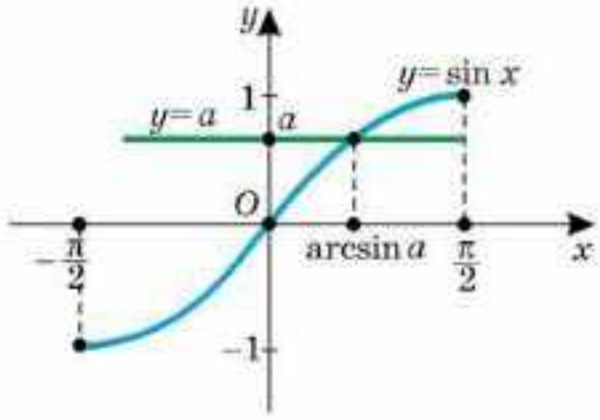
$c \neq b$ болғандықтан, $c < b$ немесе $c > b$. Шарт бойынша функция берілген аралықта өседі, сондықтан өспелі функцияның анықтамасы бойынша $f(c) < f(b)$ немесе $f(c) > f(b)$. Бұл тұжырым $f(c) = f(b) = a$ теңдігіне қарама-қайшы. Демек, жасалған тұжырым жалған және берілген аралықта $f(x) = a$ теңдеуінің b санынан басқа түбірі болмайды.

Түбір туралы теореманы $y = f(x)$ функциясының кемімелі жағдайы үшін өздерің дәлелдеңдер.

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде берілген $y = \sin x$ функциясын қарастырайық (15.2-сурет). Осы аралықта берілген функцияның өсетінін және -1-ден 1-ге дейінгі, 1-ді қоса алғандағы мәндерді қабылдайтынын білесіңдер. Сондықтан түбір туралы теорема бойынша $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде $-1 \leqslant a \leqslant 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\sin x = a$ теңдеуінің бір ғана түбірі болады. Ол түбір a санының *арксинусы* деп аталады және $\arcsin a$ деп белгіленеді (15.3-сурет).



15.2-сурет



15.3-сурет

Анықтама. ***a*** **($|a| \leqslant 1$)** ***санының арксинусы*** *деп синусы a-ға тең* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *аралығындағы санды айтады.*

МЫСАЛ

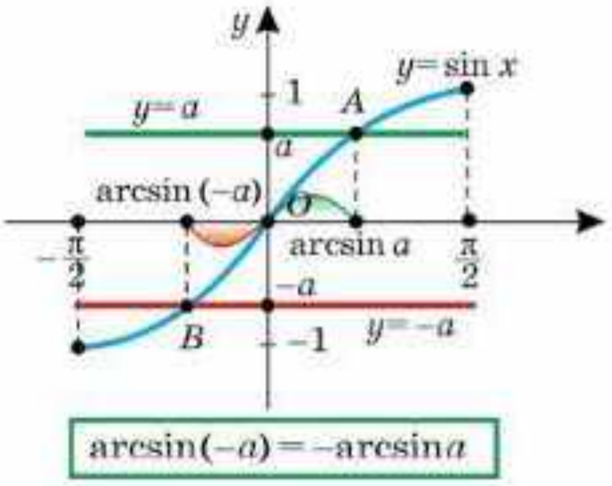
2. $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Анықтама бойынша $\sin(\arcsin a) = a$ теңдігі орындалады, мұндағы $|a| \leqslant 1$ және $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

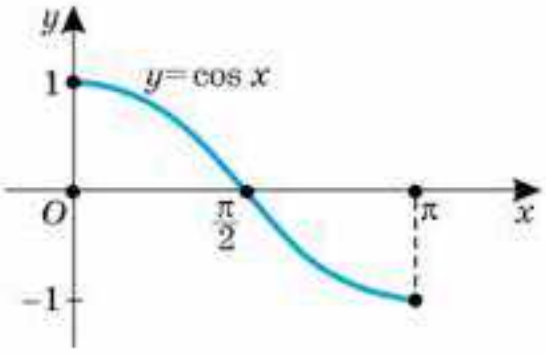
$\arcsin a$ өрнегіндегі a саны қандай мәндерді қабылдауы мүмкін? Неліктен?

$\arcsin(-1)$ және $\arcsin 1$; $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ және $\arcsin\frac{1}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ және $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\arcsin(-a)$ және $\arcsin a$ өрнектерінің мәндері арасындағы тәуелділікті анықтаңдар (15.4-сурет).

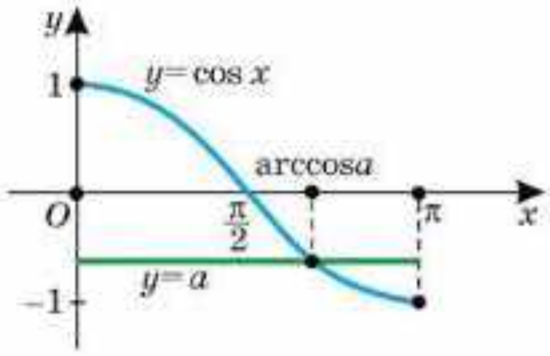


15.4-сурет

[0; π] кесіндісінде берілген $y = \cos x$ функциясын қарастырайық (15.5-сурет). Осы сан аралығында берілген функцияның кемитінін және −1-ден 1-ге дейінгі, 1-ді қоса алғандағы мәндерді қабылдайтынын білесіңдер. Сондықтан түбір туралы теорема бойынша [0; π] кесіндісінде $-1 \leqslant a \leqslant 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\cos x = a$ теңдеуінің бір ғана түбірі болады. Ол түбір $|a| \leqslant 1$ болғанда *a санының арккосинусы* деп аталады және $\arccos a$ деп белгіленеді (15.6-сурет).



15.5-сурет



15.6-сурет

Анықтама. ***a*** **($|a| \leqslant 1$) санының арккосинусы** *деп косинусы a-ға тең [0; π] аралығындағы санды айтады* .

МЫСАЛ

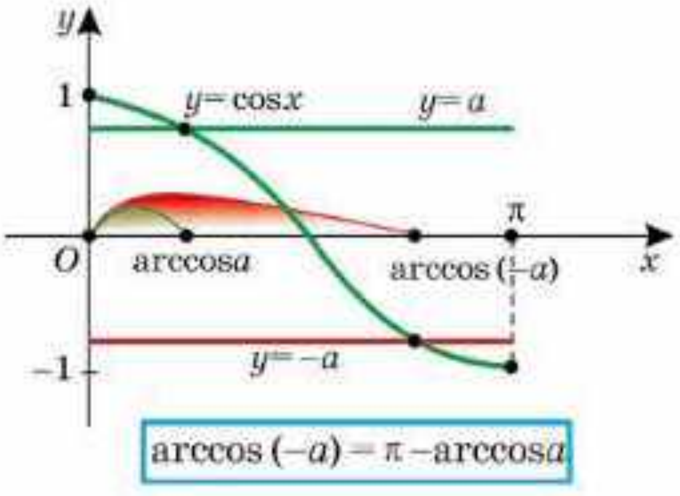
3. $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\text{arcos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Анықтама бойынша $\cos(\arccos a) = a$, мұндағы $|a| \leqslant \arccos a \leqslant \pi$, теңдігі орындалады.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

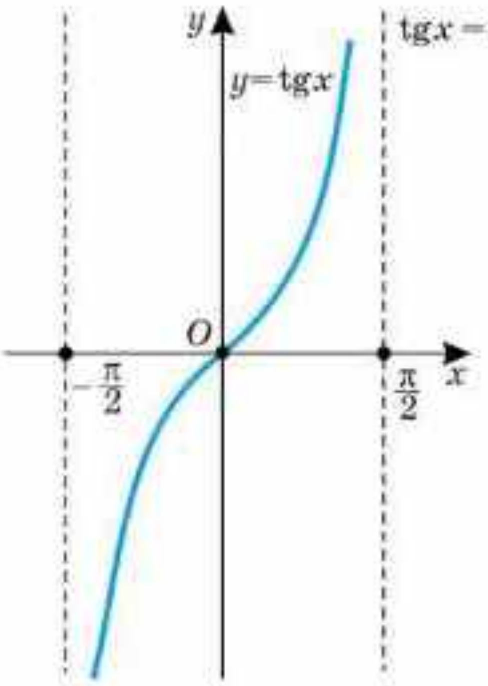
$\arccos a$ өрнегіндегі a саны қандай мәндерді қабылдауы мүмкін? Неліктен?

$\arccos(-1)$ және $\arccos 1$; $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ және $\arccos\frac{1}{2}$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ және $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\arccos(-a)$ және $\arccos a$ өрнектерінің мәндері арасындағы тәуелділікті анықтаңдар (15.7-сурет).

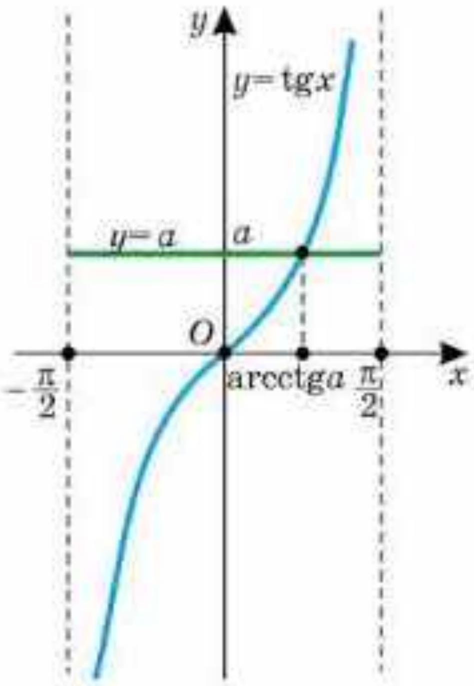


15.7-сурет

$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында берілген $y = \text{tg}x$ функциясын қарастырайық (15.8-сурет). Осы сан аралығында берілген функцияның өсетінін және $-\infty$тен $+\infty$ке дейінгі мәндерді қабылдайтынын білесіңдер. Сондықтан түбір туралы теорема бойынша кез келген a нақты саны үшін $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында $\text{tg}x = a$ теңдеуінің бір ғана түбірі болады. Ол түбір $|a| \leqslant 1$ болғанда *a санының арктангенсі* деп аталады және $\text{arctg}a$ деп белгіленеді (15.9-сурет).



15.8-сурет



15.9-сурет

Анықтама. ***a санының арктангенсі*** *деп тангенсі a-ға тең $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалындағы санды айтады.*

МЫСАЛ

4. $\text{arctg}0 = 0$, $\text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$, $\text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

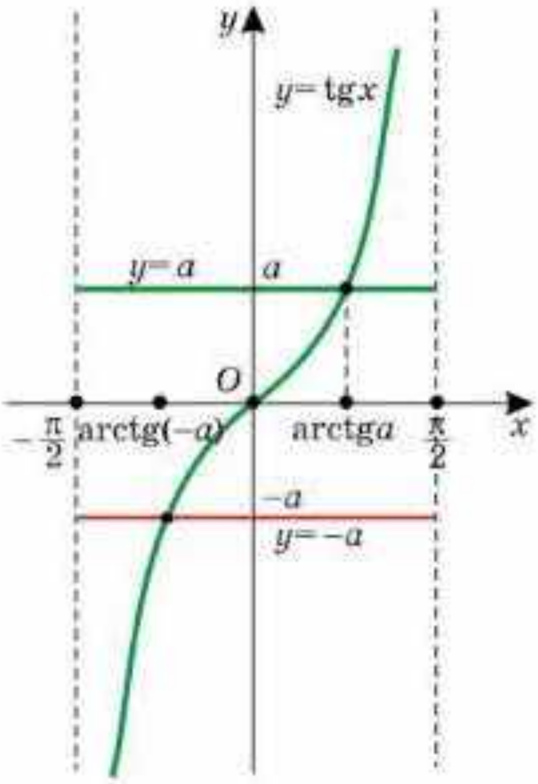
Анықтама бойынша $\text{tg}(\text{arctg}a) = a$, мұндағы $-\frac{\pi}{2} < \text{arctg}a < \frac{\pi}{2}$, теңдігі орындалады.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$\text{arctg}a$ өрнегіндегі a саны қандай мәндерді қабылдауы мүмкін? Неліктен?

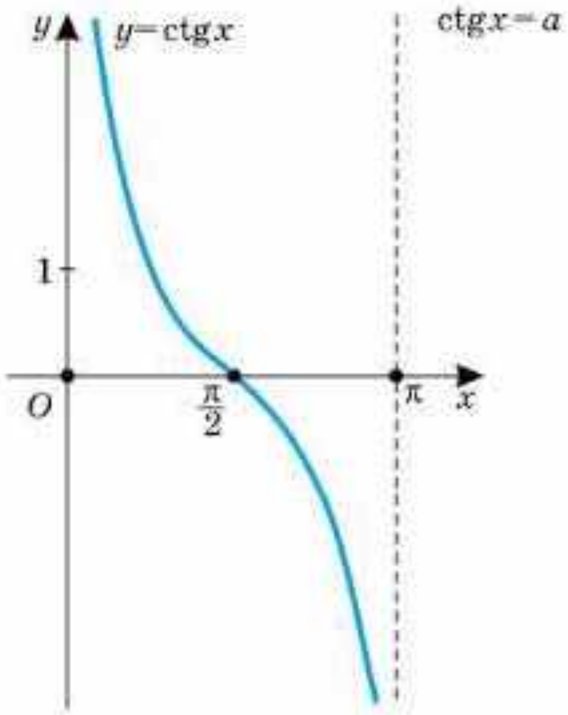
$\text{arctg}(-1)$ және $\text{arctg}1$; $\text{arctg}(-a)$ және $\text{arctg}a$ өрнектерінің мәндерін салыстырыңдар (15.10-сурет).

$(0; \pi)$ интервалында берілген $y = \text{ctg}x$ функциясын қарастырайық (15.11-сурет). Осы сан аралығында берілген функцияның кемитінін және $+\infty$тен $-\infty$ке дейінгі мәндерді қабылдайтынын білесіңдер. Сондықтан түбір туралы теорема бойынша кез келген a нақты саны үшін $(0; \pi)$ интервалында $\text{ctg}x = a$ теңдеуінің бір ғана түбірі болады. Ол түбір *a санының арккотангенсі* деп аталады және $\text{arcctg}a$ деп белгіленеді (15.12-сурет).

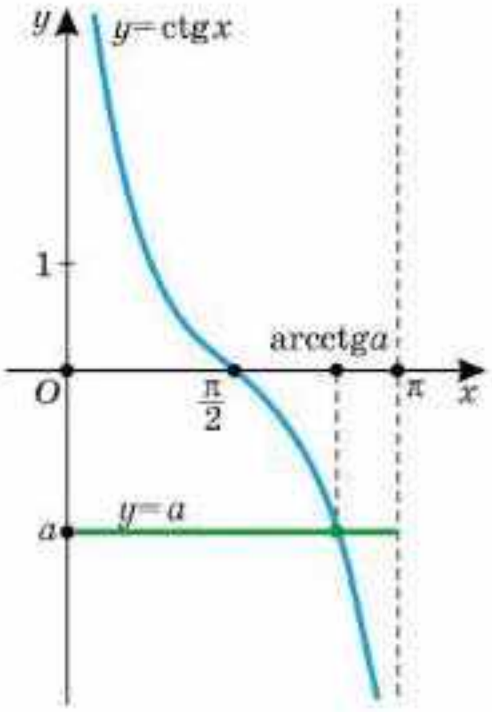


$\boxed{\text{arctg}(-a) = -\text{arctg}a}$

15.10-сурет



15.11-сурет



15.12-сурет

Анықтама. ***а санының арккотангенсі деп котангенсі а-ға тең (0; π) интервалындағы санды айтады.***

МЫСАЛ

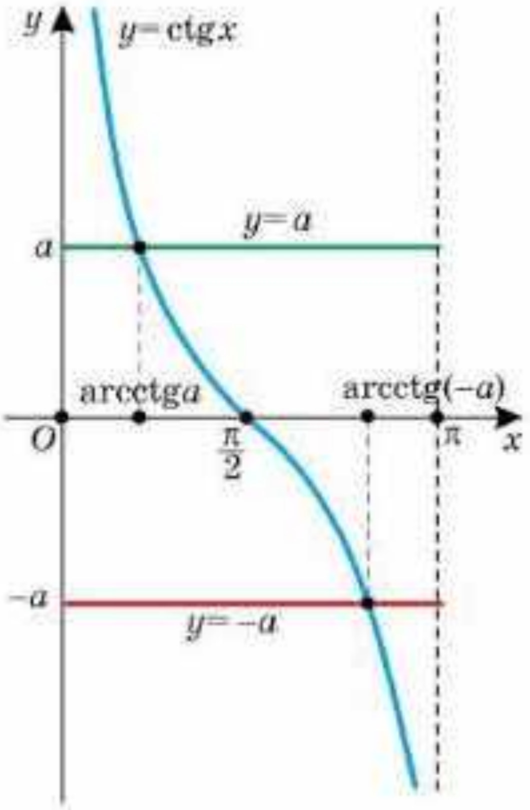
5. $\text{arcctg}0 = \frac{\pi}{2}$, $\text{arcctg}1 = \frac{\pi}{4}$, $\text{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$.

Анықтама бойынша ctg (arcctg$a$) = a теңдігі, мұндағы $0 < \text{arcctg}a < \pi$, орындалады.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

arcctg$a$ өрнегіндегі a саны қандай мәндерді қабылдауы мүмкін? Неліктен?

arcctg(−1) және arcctg1; arcctg(−a) және arcctg$a$ өрнектерінің мәндерін салыстырыңдар (15.13-сурет).



$\boxed{\text{arcctg}(-a) = \pi - \text{arcctg}a}$

15.13-сурет

1. $f(x) = a$ теңдеуінің қанша түбірі болуы мүмкін? Қандай жағдайда осы теңдеудің бір ғана түбірі болады?
2. [−π; π] аралығындағы: 1) $\sin x = a$; 2) $\cos x = a$; 3) $\text{tg}x = a$; 4) $\text{ctg}x = a$ теңдеуінің қанша түбірі бар?
3. 1) arcsin(sinα); 2) arccos(cosα); 3) arctg(tgα); 4) arcctg(ctgα) мәні неге тең?
4. 1) arcsin(sinα); 2) arccos(cosα); 3) arctg(tgα); 4) arcctg(ctgα) өрнегіндегі α саны қандай мәндерді қабылдайды? Неліктен?

Жаттығулар

А

15.1. Егер:

1) $x \in (-\infty; +\infty)$ болса, онда $x^5 = 6$;

2) $x \in (-\infty; 2)$ болса, онда $\frac{5}{x-2} = -1$;

3) $x \in (-10; +\infty)$ болса, онда $x^8 = 1$;

4) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ болса, онда $\frac{-3}{x+3} = 2$;

5) $x \in [-\pi; \pi]$ болса, онда $\cos x = -0{,}4$;

6) $x \in (-\pi; 0]$ болса, онда $\sin x = 0{,}6$ теңдеуінің түбірлер санын табыңдар.

Бірлік шеңбер салыңдар және t-ның мәні берілген теңдікті қанағаттандыратындай P_t нүктелерін белгілеңдер. Берілген аралыққа тиісті t-ның мәндерін табыңдар **(15.2—15.5):**

15.2. 1) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t \in [0; \pi]$; 2) $\cos t = 0{,}5$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t \in [0; \pi]$; 4) $\cos t = -1$, $t \in [-0{,}3\pi; \pi]$.

15.3. 1) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t \in [-0{,}5\pi; 0]$; 2) $\sin t = 0{,}5$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t \in [0; \pi]$; 4) $\sin t = 1$, $t \in [0; \pi]$.

15.4. 1) $\operatorname{tg} t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $t \in [-0{,}5\pi; 0]$; 2) $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\operatorname{tg} t = 1$, $t \in [0; 0{,}5\pi]$; 4) $\operatorname{tg} t = -1$, $t \in [0; \pi]$.

15.5. 1) $\operatorname{ctg} t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $t \in [-0{,}5\pi; 0]$; 2) $\operatorname{ctg} t = \sqrt{3}$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\operatorname{ctg} t = 1$, $t \in [0; 0{,}5\pi]$; 4) $\operatorname{ctg} t = -1$, $t \in [0; \pi]$.

Өрнектің мәнін табыңдар **(15.6—15.8):**

15.6. 1) $\arcsin(-1)$; 2) $\arcsin 0$; 3) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

15.7. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

15.8. 1) $\operatorname{arctg} 1$; 2) $\operatorname{arctg} 0$; 3) $\operatorname{arctg}(-1)$; 4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Берілген өрнектердің мағынасы бар ма **(15.9—15.12):**

15.9. 1) $\arcsin(-3)$; 2) $\arcsin 0,7$; 3) $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$; 4) $\arcsin\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$?

15.10. 1) $\arccos 1,2$; 2) $\arccos(-1)$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$; 4) $\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$?

15.11. 1) $\mathrm{arcctg}(-1)$; 2) $\mathrm{arctg}\,0,12$; 3) $\mathrm{arctg}\,21$; 4) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$?

15.12. 1) $\arcsin\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\arccos\left(-3\frac{1}{5}\right)$; 3) $2\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

4) $\arcsin 5$; 5) $\mathrm{arctg}\,17$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$?

15.13. Өрнектердің мәндерін салыстырыңдар:

1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ және $\arcsin(-1)$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ және $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ және $\arcsin 0,6$; 4) $\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ және $\arccos(-0,5)$.

B

Өрнектің мәнін табыңдар **(15.14—15.16):**

15.14. 1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin(-0,5)$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\arccos 0,5 + \arcsin(-1)$; 4) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

15.15. 1) $\mathrm{arcctg}(-1) - \mathrm{arctg}\sqrt{3}$; 2) $\mathrm{arctg}(-1) + \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

3) $\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; 4) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

15.16. 1) $\arccos(-1) - \mathrm{arctg}\sqrt{3}$; 2) $\arcsin(-1) + \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; 4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arcctg}(-1)$.

15.17. Есептеңдер:

1) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\mathrm{arcctg}(-1)$;

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arctg}\,1$;

3) $3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{arctg}(-1) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) - \arcsin(-1) - 2\mathrm{arctg}\sqrt{3}$.

C

15.18. Бірлік шеңберді, тангенс пен котангенстің сызықтарын қолданып, кез келген t_1 және t_2 сандары үшін $t_1 < t_2$ теңсіздігінен:
1) $\mathrm{arctg}t_1 < \mathrm{arctg}t_2$; 2) $\mathrm{arcctg}t_1 > \mathrm{arcctg}t_2$ теңсіздігі шығатынын дәлелдеңдер.

15.19. $[-1; 1]$ сан аралығына тиісті кез келген x_1 және x_2 сандары үшін $x_1 < x_2$ теңсіздігінен:
1) $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$; 2) $\arccos x_1 > \arccos x_2$ теңсіздігі шығатынын дәлелдеңдер.

15.20. 1) $\arcsin(-0,3)$; $\arcsin(-0,1)$; $\arcsin\frac{\pi}{9}$; $\arcsin\frac{\pi}{6}$;

2) $\arccos(-1)$; $\arccos(-0,2)$; $\arccos\frac{\pi}{5}$; $\arccos\frac{\pi}{9}$ өрнектерінің мәндерін кему ретімен орналастырыңдар.

15.21. 1) $\mathrm{arctg}(-7,3)$; $\mathrm{arctg}(-0,3)$; $\mathrm{arctg}\frac{5\pi}{9}$; $\mathrm{arctg}\frac{\pi}{6}$;

2) $\mathrm{arcctg}(-111)$; $\mathrm{arcctg}(-2,2)$; $\mathrm{arcctg}\frac{2\pi}{5}$; $\mathrm{arcctg}\frac{5\pi}{9}$ өрнектерінің мәндерін өсу ретімен орналастырыңдар.

ҚАЙТАЛАУ

15.22. 1) $\sin75^\circ + \sin15^\circ$; 2) $\cos152^\circ + \cos28^\circ$
тригонометриялық функцияларының алгебралық қосындысын көбейтіндіге түрлендіріңдер және ықшамдаңдар.

15.23. Өрнекті ықшамдаңдар:
1) $\sin5\alpha \cdot \sin3\alpha + \cos5\alpha \cdot \cos3\alpha$; 2) $\cos2\alpha \cdot \sin3\alpha - \sin2\alpha \cdot \cos3\alpha$.

15.24. 1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 3) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
функциясының графигін салыңдар.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, анықталу облысы, мәндер жиыны, функцияның қасиеттері, кері функция ұғымы және оны құрастыру алгоритмі, тригонометриялық функциялар, тригонометриялық функциялардың қасиеттері мен графиктері.

§16. КЕРІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР, ОЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

Кері тригонометриялық функциялар ұғымымен, олардың қасиеттерімен танысасыңдар; кері тригонометриялық функциялардың графиктерін салуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Кері тригонометриялық функциялар

Тригонометриялық функцияларға кері функциялар *кері тригонометриялық функциялар* немесе *аркфункциялар* деп аталады.

Анықтама. $y = \sin x$ функциясына кері функция *арксинус* деп аталады және $y = \arcsin x$ деп белгіленеді.

$y = \cos x$ функциясына кері функция *арккосинус* деп аталады және $y = \arccos x$ деп белгіленеді.

$y = \operatorname{tg} x$ функциясына кері функция *арктангенс* деп аталады және $y = \operatorname{arctg} x$ деп белгіленеді.

$y = \operatorname{ctg} x$ функциясына кері функция *арккотангенс* деп аталады және $y = \operatorname{arcctg} x$ деп белгіленеді.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

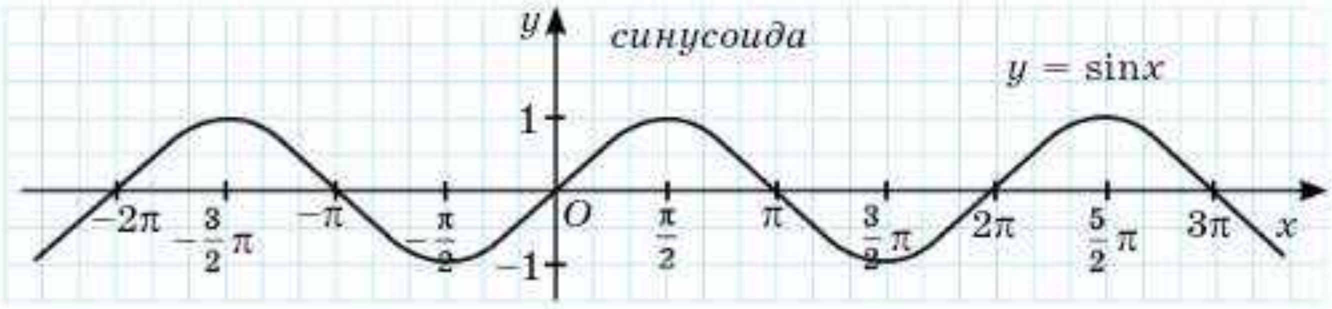
Берілген функцияның анықталу облысы оған кері функцияның мәндер жиыны, ал мәндер жиыны кері функцияның анықталу облысы болады.

Өзара кері функциялардың графиктері 1 және 3 координаталық ширектердің биссектрисаларына қарағанда симметриялы.

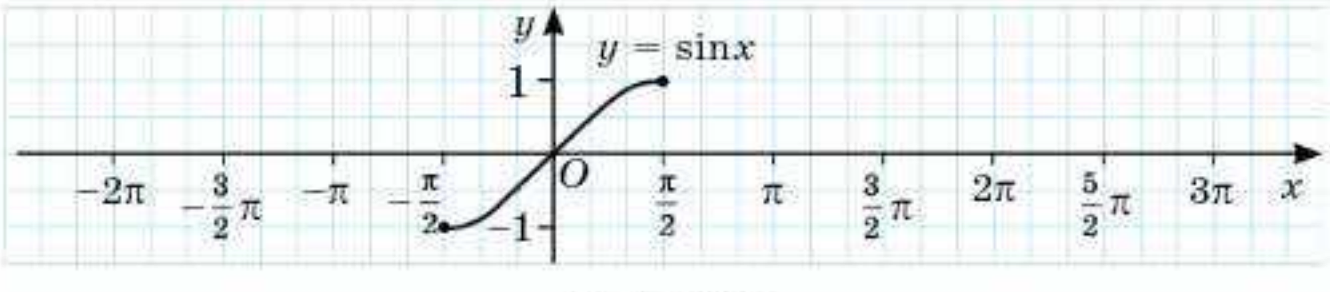
Егер функция бірсарынды болмаса, онда оның кері функциясы болмайды.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $y = \arcsin x$ функциясының графигін салу үшін $y = \sin x$ функциясының графигі (16.1-сурет) қолданылып, синусоиданың бір бөлігі (16.2-сурет) ғана қарастырылады?



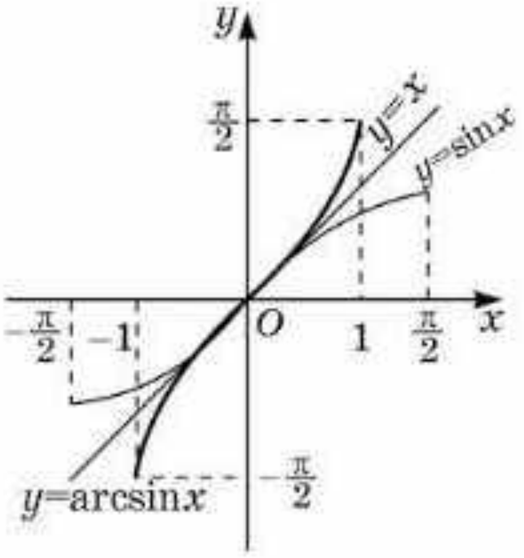
16.1-сурет



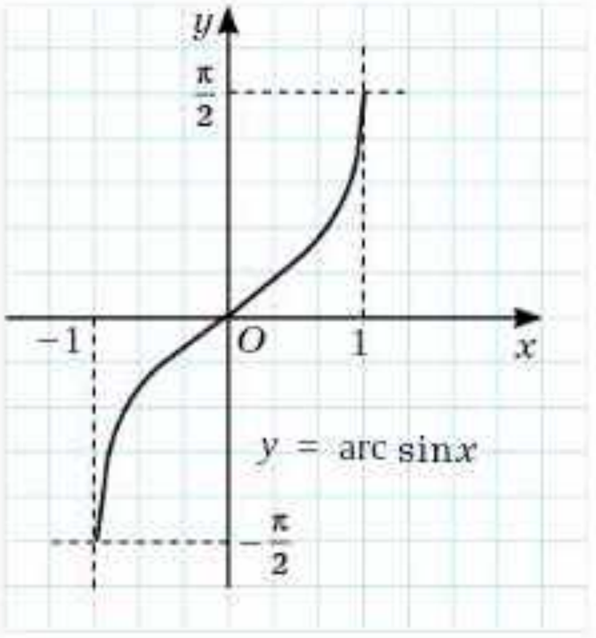
16.2-сурет

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y = \arcsin x$ функциясының графигі қалай салынған (16.3-сурет)?



16.3-сурет



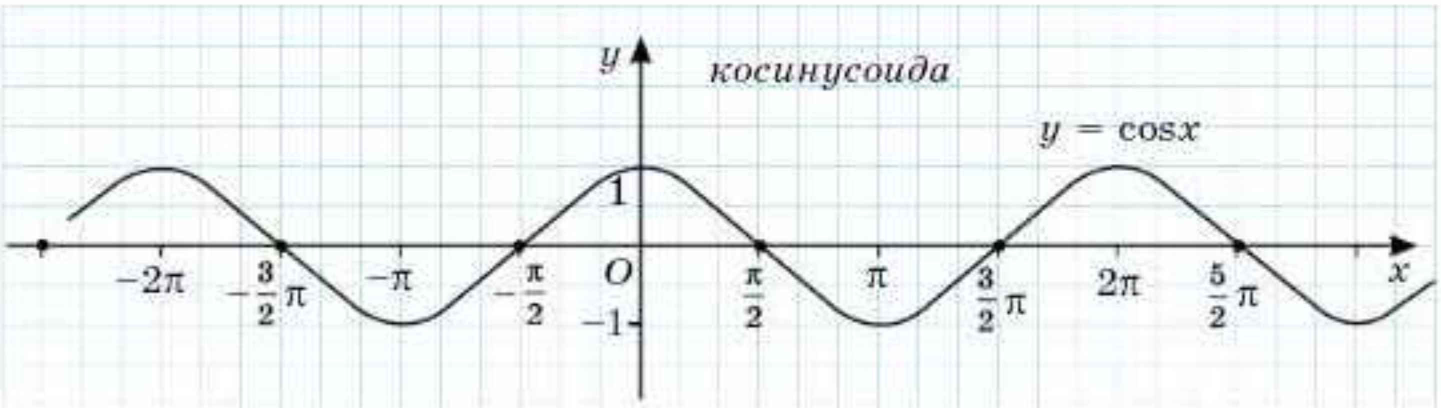
16.4-сурет

$y = \arcsin x$ функциясының графигін қолданып кестені толтырыңдар (16.4-сурет).

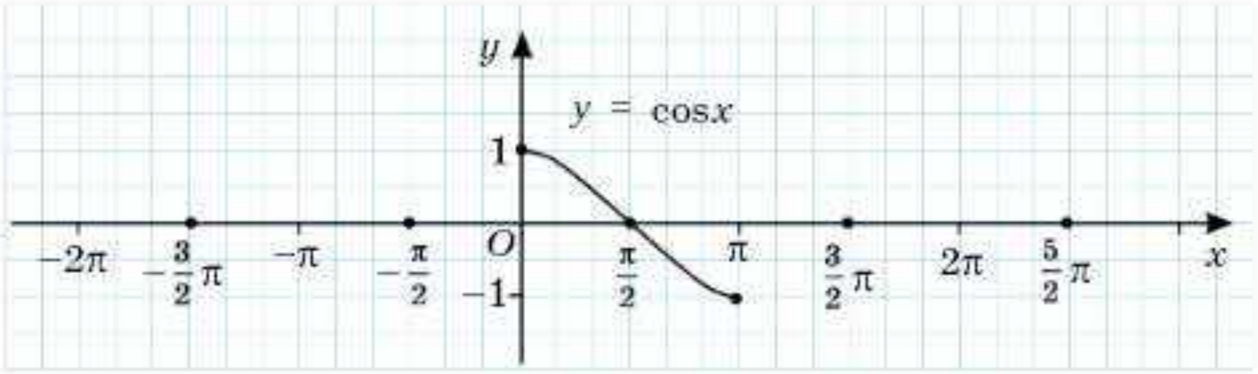
Анықталу облысы	
Мәндер жиыны	
Жұптылық (тақтылық)	
Бірсарындылық	
Ең үлкен мәні	
Ең кіші мәні	
Функцияның нөлдері	

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $y = \arccos x$ функциясының графигін салу үшін $y = \cos x$ функциясының графигі (16.5-сурет) қолданылып, синусоиданың бір бөлігі (16.6-сурет) ғана қарастырылады?



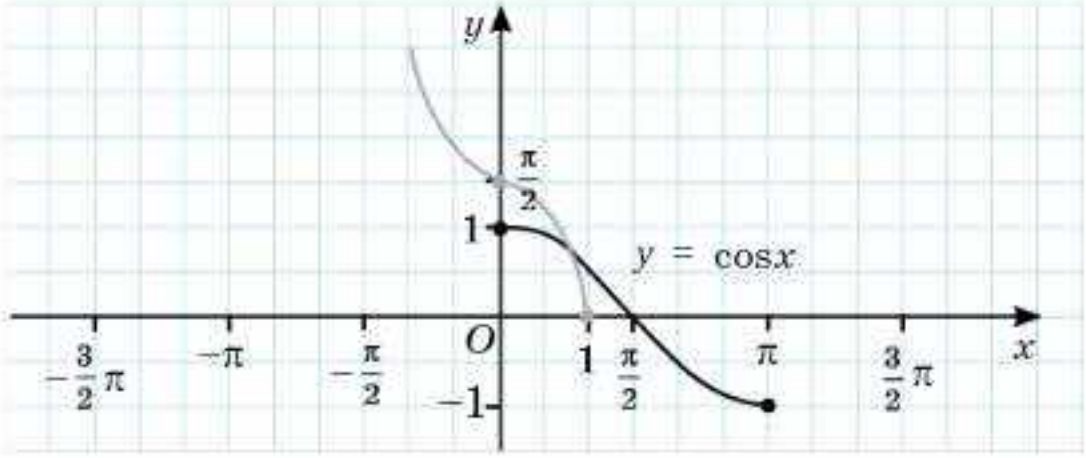
16.5-сурет



16.6-сурет

ТҮСІНДІРІҢДЕР

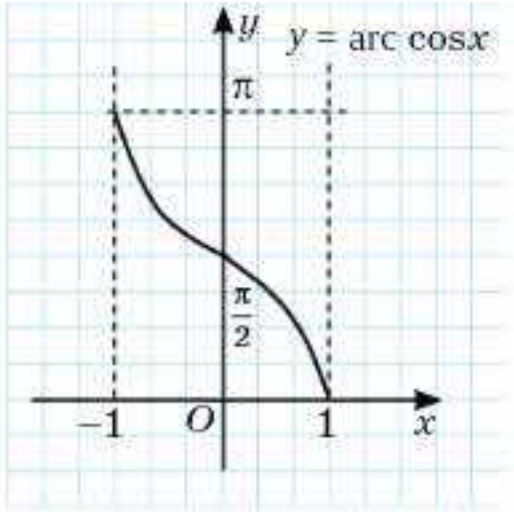
$y = \arccos x$ функциясының графигі қалай салынған (16.7-сурет)?



16.7-сурет

$y = \arccos x$ функциясының графигін қолданып кестені толтырыңдар (16.8-сурет).

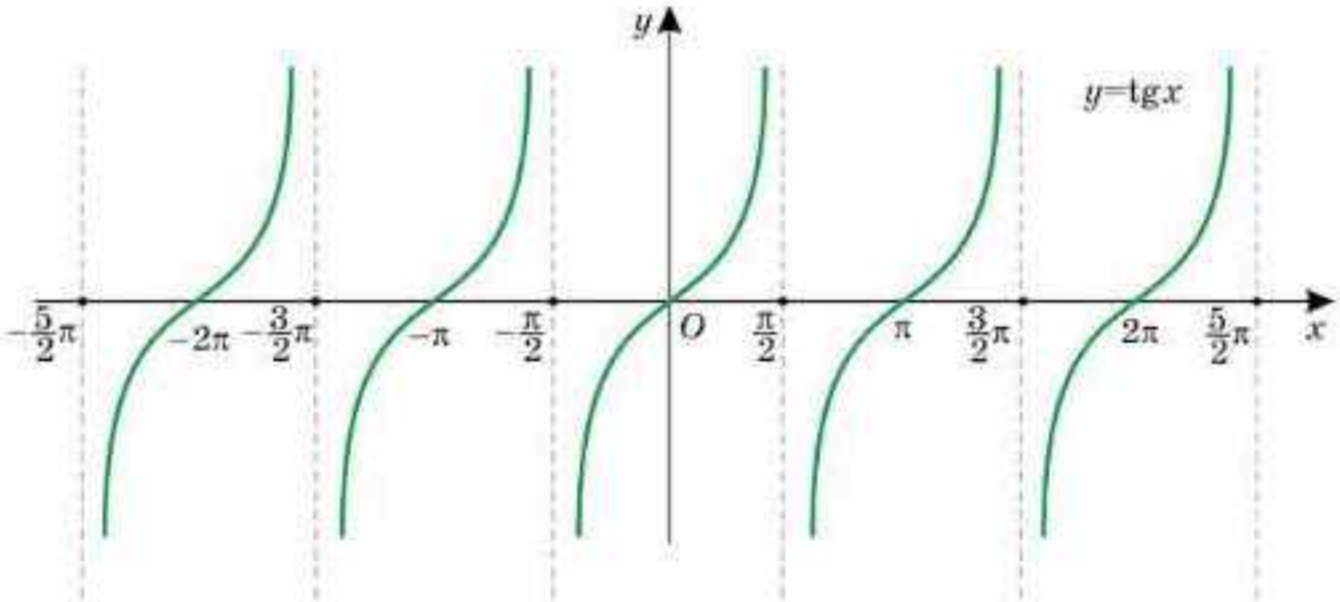
Анықталу облысы	
Мәндер жиыны	
Жұптылық (тақтылық)	
Бірсарындылық	
Ең үлкен мәні	
Ең кіші мәні	
Функцияның нөлдері	



16.8-сурет

ТҮСІНДІРІҢДЕР

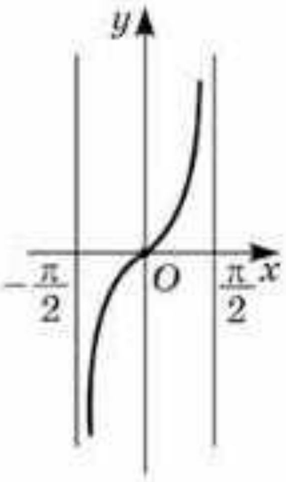
Неліктен $y = \operatorname{arctg} x$ функциясының графигін салу үшін $y = \operatorname{tg} x$ функциясының графигі (16.9-сурет) қолданылып, тангенсоиданың бір бөлігі (16.10-сурет) ғана қарастырылады?



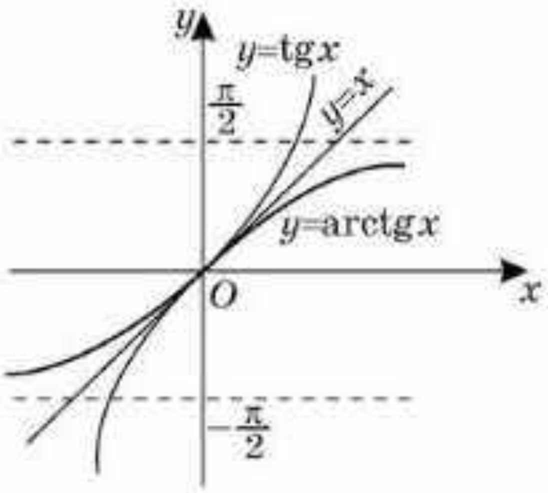
16.9-сурет

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y = \mathrm{arctg}x$ функциясының графигі қалай салынған (16.11-сурет)?

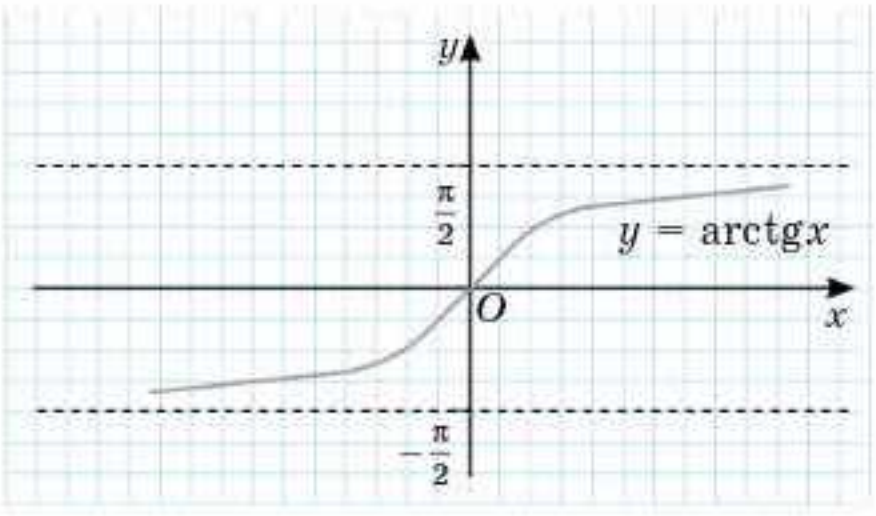


16.10-сурет



16.11-сурет

$y = \mathrm{arctg}x$ функциясының графигін қолданып кестені толтырыңдар (16.12-сурет).

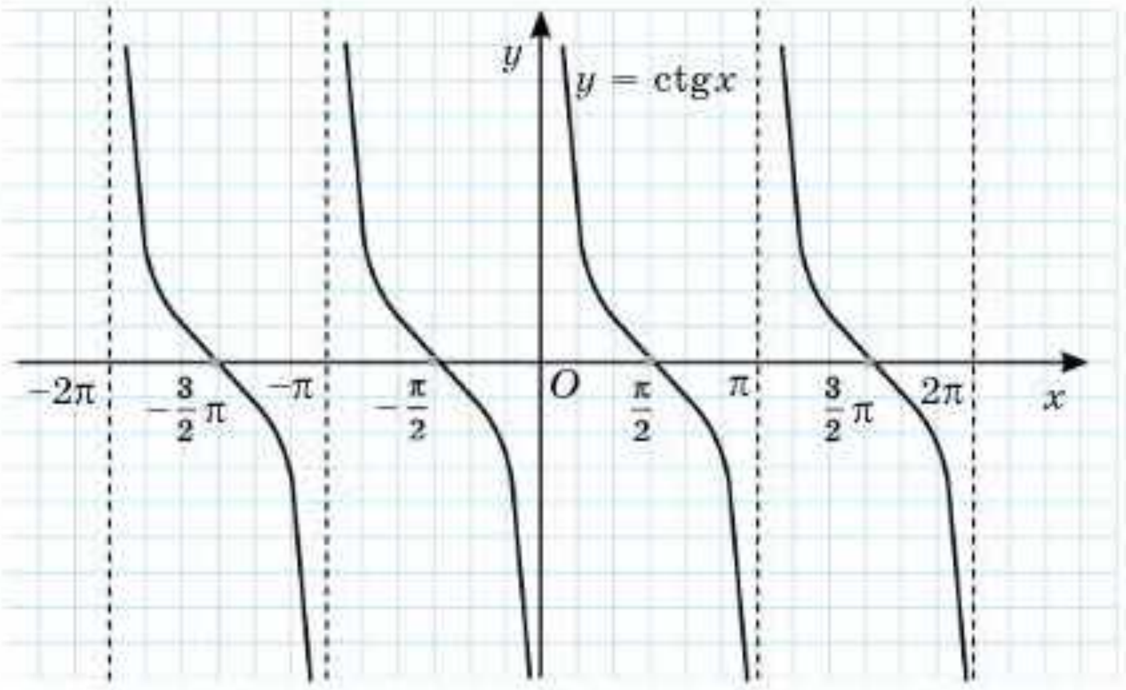


16.12-сурет

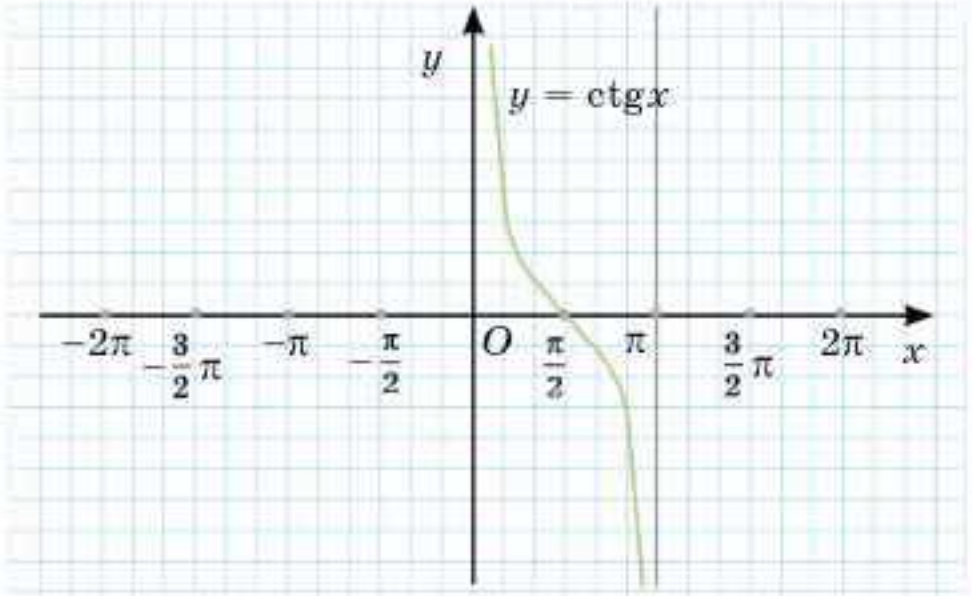
Анықталу облысы	
Мәндер жиыны	
Жұптылық (тақтылық)	
Бірсарындылық	
Ең үлкен мәні	
Ең кіші мәні	
Функцияның нөлдері	

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неліктен $y = \mathrm{arcctg}x$ функциясының графигін салу үшін $y = \mathrm{ctg}x$ функциясының графигі (16.13-сурет) қолданылып, котангенсоиданың бір бөлігі (16.14-сурет) ғана қарастырылады?



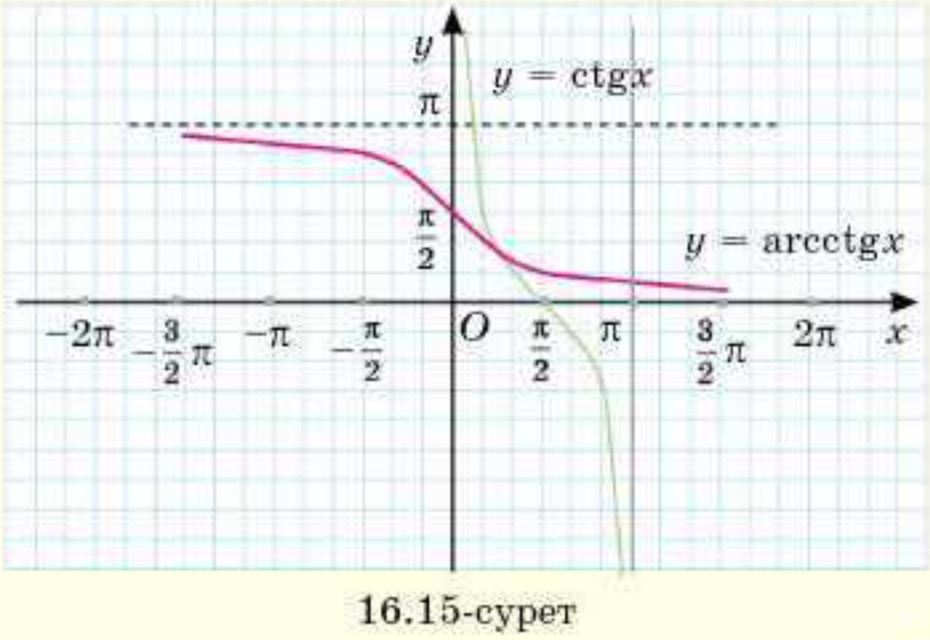
16.13-сурет



16.14-сурет

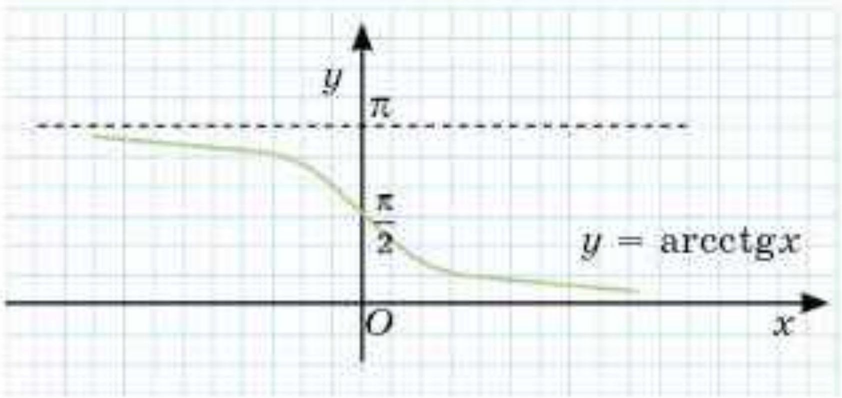
ТҮСІНДІРІҢДЕР

$y = \mathrm{arcctg}x$ функциясының графигі қалай салынған (16.15-сурет)?



16.15-сурет

$y = \operatorname{arcctg} x$ функциясының графигін қолданып, кестені толтырыңдар (16.16-сурет).



16.16-сурет

Анықталу облысы	
Мәндер жиыны	
Жұптылық (тақтылық)	
Бірсарындылық	
Ең үлкен мәні	
Ең кіші мәні	
Функцияның нөлдері	

1. Неліктен кері тригонометриялық функцияның графигін салу барысында сәйкес тригонометриялық функция графигінің бір бөлігі ғана қарастырылады?
2. Кері тригонометриялық функциялар периодты функция бола ма?

Жаттығулар

A

Функцияның анықталу облысын табыңдар **(16.1—16.3)**:

16.1. 1) $y = \arcsin 2x$; 2) $y = \arcsin(2x - 1)$;
3) $y = 2\arcsin(2x + 1)$; 4) $y = 2 - \arcsin(x + 2)$.

16.2. 1) $y = \arccos 3x$; 2) $y = 2\arccos(2x - 1)$;
3) $y = 2\arccos(2x + 3)$; 4) $y = 2 - \arccos(x - 3)$.

16.3. 1) $y = \operatorname{arctg} 2x$; 2) $y = \operatorname{arctg}(2x - 1)$;
3) $y = 2\operatorname{arctg}(2x - 1)$; 4) $y = 2 - \operatorname{arcctg}(x - 2)$.

16.4. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:
1) $\arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2}$; 2) $\arcsin 1 + \arccos 0 = \pi$;
3) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$; 4) $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$.

16.5. Функцияның мәндер жиынын табыңдар:
1) $y = -1 + \arccos(3x - 1)$; 2) $y = \arcsin(2x - 1) + 1$;
3) $y = 2 - \arccos(2x + 3)$; 4) $y = 2 - 2\arcsin(x - 3)$.

B

16.6. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \arcsin\frac{1}{x}$; 2) $y = \arcsin\frac{1}{x-2}$;

3) $y = 2\arccos\frac{2}{x+2}$; 4) $y = 2 - \arccos\frac{1}{x-1}$.

16.7. $y = \arcsin x$ функциясының графигін қолданып, өрнектердің мәндерін өсу ретімен орналастырыңдар:

1) $\arcsin\frac{\pi}{6}$; $\arcsin 0,8$; $\arcsin(-0,2)$;

2) $\arcsin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\arcsin 0,9$; $\arcsin(-0,1)$;

3) $\arcsin\frac{\pi}{18}$; $\arcsin 0,3$; $\arcsin(-0,8)$.

16.8. $y = \arccos x$ функциясының графигін қолданып, өрнектердің мәндерін өсу ретімен орналастырыңдар:

1) $\arccos\frac{\pi}{6}$; $\arccos 0,8$; $\arccos(-0,2)$;

2) $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\arccos 0,9$; $\arccos(-0,1)$;

3) $\arccos 0$; $\arccos 0,3$; $\arccos(-0,7)$.

16.9. Функцияны жұптылыққа зерттеңдер:

1) $y = 2 - \arcsin\frac{1}{x}$; 2) $y = 2x^2 - \arcsin x^2$;

3) $y = 2\arccos\frac{2}{x^2+1}$; 4) $y = 2\arccos\frac{1}{x+1}$.

16.10. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = -\arcsin x$; 2) $y = 2 - \arcsin x$;

3) $y = 2\arccos x$; 4) $y = -\arccos(-x)$.

C

16.11. Функцияның графигін салыңдар және бірсарындылыққа зерттеңдер:

1) $y = \arcsin(x - 1) + 2$; 2) $y = \pi - \arcsin x$;

3) $y = \pi + \arccos x$; 4) $y = -\arccos\frac{x}{2}$.

16.12. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = |\arcsin x - \pi|$; 2) $y = 2\arcsin|x|$;

3) $y = -2\arccos|x|$; 4) $y = \arccos|x - 2|$.

16.13. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = 2\text{arctg}x$; 2) $y = -\text{arcctg}x$;

3) $y = 2 - \text{arctg}(-x)$; 4) $y = -\text{arcctg}(-x)$.

16.14. Функцияның графигін салыңдар:

1) $f(x) = \begin{cases} \text{arctg}x, & x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, & x > 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} \text{arcctg}\, x, & x \leqslant 1, \\ \sqrt{x-1}, & x > 1. \end{cases}$

16.15. Функцияның графигін салыңдар:

1) $f(x) = \begin{cases} \arccos x, & |x| \leqslant 0, \\ \sqrt{|x|}, & |x| > 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} \text{arctg}x, & x \leqslant 0, \\ \sqrt{x-1}, & x > 0. \end{cases}$

16.16. Функцияның графигін салыңдар және бірсарындылыққа зерттеңдер:

1) $y = |\text{arctg}x|$; 2) $y = |2 - \text{arcctg}x|$;

3) $y = -2\text{arcctg}|-x|$; 4) $y = \left|\text{arctg}x + \frac{\pi}{2}\right|$.

ҚАЙТАЛАУ

16.17. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $2\text{ctg}\alpha \cdot \text{tg}(3\pi + \alpha) - 2\sin(-\alpha) \cdot \cos\alpha + \cos(270^\circ - 2\alpha) \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - 2\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 2$;

2) $1 - \cos 4\alpha + \frac{1}{1 + \text{tg}^2 2\alpha} - (1 - \cos^2 2\alpha) \cdot \frac{1}{\sin^2 2\alpha} + \text{tg}3\alpha \cdot \text{tg}(90^\circ - 3\alpha) = 2$.

16.18. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $1 + 2\text{tg}3\alpha \cdot \text{ctg}(\pi - 3\alpha) + \sin^2\frac{2\alpha}{3} \cdot \text{ctg}^2\frac{2\alpha}{3} + \sin^2\frac{2\alpha}{3}$;

2) $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \text{tg}(\pi + \alpha) + \frac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - 1}$.

16.19. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = [\sin x]$; 2) $y = [\cos x]$; 3) $y = [\sqrt{x}]$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Өрнек, тепе-теңдік, тригонометрия формулалары, тригонометриялық функциялар, кері тригонометриялық функциялар, тригонометриялық функциялардың қасиеттері, кері тригонометриялық функциялардың қасиеттері.

§17. ҚҰРАМЫНДА АРКСИНУС, АРККОСИНУС, АРКТАНГЕНС, АРККОТАНГЕНСІ БАР ӨРНЕКТЕРДІ ТЕПЕ-ТЕҢ ТҮРЛЕНДІРУ

Құрамында кері тригонометриялық функциялары бар өрнектерді тепе-тең түрлендіруді үйренесіңдер.

Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенспен өрнектелген санның синусы, косинусы, тангенсі және котангенсін табайық.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Түрлендіру, өрнек, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс

$\cos(\arcsin a)$ өрнегін түрлендірейік. Ол үшін $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ формуласынан $\cos\alpha$-ны өрнектейік:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \qquad (1)$$

Енді (1)-формуладағы α-ның орнына $\arcsin a$-ны қоямыз, яғни $\alpha = \arcsin a$ алмастыруын жасаймыз.

Сонда (1)-формула мына түрге келеді:

$$\cos(\arcsin a) = \pm\sqrt{1 - (\sin(\arcsin a))^2} = \pm\sqrt{1 - a^2}.$$

Анықтама бойынша $\arcsin a$ дегеніміз $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісіне тиісті сан және осы аралықтағы сандар үшін $\cos\alpha$ тек теріс емес сандарды қабылдайды. Демек,

$$\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}.$$

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - (\cos(\arccos a))^2} = \sqrt{1 - a^2}$ теңдігінде қандай түрлендірулер жасалған?

$\mathrm{tg}(\arcsin a)$ өрнегін түрлендірейік:

$$\mathrm{tg}(\arcsin a) = \frac{\sin(\arcsin a)}{\cos(\arcsin a)} = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Төменде орындалған түрлендірулерді түсіндіріңдер:

1) $\mathrm{ctg}(\arcsin a) = \dfrac{\cos(\arcsin a)}{\sin(\arcsin a)} = \dfrac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$;

2) $\mathrm{tg}(\arccos a) = \dfrac{\sin(\arccos a)}{\cos(\arccos a)} = \dfrac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$;

3) $\mathrm{ctg}(\arccos a) = \dfrac{\cos(\arccos a)}{\sin(\arccos a)} = \dfrac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$.

tg(arcctg$a$) өрнегін түрлендірейік. Ол үшін

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$$

формуласын қолданамыз. Бұл формуладағы α-ның орнына arcctg$a$-ны қоямыз, яғни $\alpha = \mathrm{arcctg}\,a$ алмастыруын қолданамыз:

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}\,a) = \frac{1}{\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,a)} = \frac{1}{a}.$$

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Төменде орындалған түрлендіруді түсіндіріңдер:

$$\mathrm{ctg}(\mathrm{arctg}\,a) = \frac{1}{\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,a)} = \frac{1}{a}.$$

cos(arctg$a$) өрнегін түрлендірейік. Ол үшін $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ формуласын қолданып, cosα-ны өрнектейміз:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}.$$

Анықтама бойынша arctg$a$ дегеніміз $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалына тиісті сан және осы аралықтағы сандар үшін cosα тек оң сандарды қабылдайды. Демек,

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}.$$

Бұл формуладағы α-ның орнына arctg$a$-ны қоямыз, яғни $\alpha = \mathrm{arctg}\,a$ алмастыруын жасаймыз. Сонда:

$$\cos(\mathrm{arctg}\,a) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\,a)}}, \text{ немесе } \cos(\mathrm{arctg}\,a) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Төмендегі формулалардың дұрыстығын дәлелдеңдер:

1) $\sin(\mathrm{arcctg}\,a) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$; 2) $\sin(\mathrm{arctg}\,a) = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$; 3) $\cos(\mathrm{arcctg}\,a) = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$.

Шыққан формулалар 11-кестеде берілген:

11-*кесте*

α	arcsin$a$	arccos$a$	arctg$a$	arcctg$a$
1	2	3	4	5
sinα	a, $\lvert a\rvert \leqslant 1$	$\sqrt{1 - a^2}$	$\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$
cosα	$\sqrt{1 - a^2}$	a, $\lvert a\rvert \leqslant 1$	$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$

Жалғасы

1	2	3	4	5
tgα	$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	a	$\frac{1}{a}$
ctgα	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\frac{1}{a}$	a

Шыққан формулаларды қолданып өрнектерді түрлендіруге мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ

1. $\sin(2\arcsin a)$ өрнегін түрлендірейік.

Шешуі. Синустың $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ қосбұрыштың формуласын және $\alpha = \arcsin a$ алмастыруын қолданамыз:

$\sin(2\arcsin a) = 2\sin(\arcsin a)\cos(\arcsin a)$.

Теңдіктің оң жақ бөлігіне 11-кестедегі берілгендерді қолданып $2a\sqrt{1-a^2}$ өрнегін аламыз.

Демек, $\sin(2\arcsin a) = 2a\sqrt{1-a^2}$.

Жауабы: $2a\sqrt{1-a^2}$.

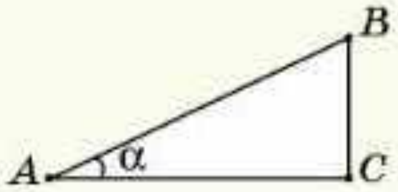
МЫСАЛ

2. $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)$ өрнегінің мәнін анықтайық.

Шешуі. 1-*тәсіл.* Арктангенстен синусты алу формуласын қолданамыз:

$\sin(\operatorname{arctg} a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ және $a = \frac{2}{7}$ қоямыз. Нәтижесінде $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right) = \frac{\frac{2}{7}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{7}\right)^2}} =$ $= \frac{2}{\sqrt{53}}$ аламыз.

2-*тәсіл.* Катеттері 2 және 7, сүйір бұрышы $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{7}$ берілген ABC тікбұрышты үшбұрышын қарастырамыз. Онда $AB = \sqrt{53}$. Демек, $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right) = \sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{53}}$.



Жауабы: $\frac{2}{\sqrt{53}}$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Төменде орындалған түрлендірулерді түсіндіріңдер:

1) $\cos(2\arccos a) = 2\cos^2(\arccos a) - 1 = 2a^2 - 1$;

2) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} a) = \frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)}{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} a)} = \frac{2a}{1-a^2}$.

1. Құрамында арксинус, арккосинус, арктангенс немесе арккотангенсі бар өрнектер көмегімен тригонометриялық түрлендірулер жасағанда неге алгебралық өрнек шығады?

2. 1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a)$; 2) $\operatorname{ctg}(\arccos a)$; 3) $\operatorname{tg}(\arccos a)$; 4) $\cos(\operatorname{arcctg} a)$ өрнегіндегі a саны қандай мәнді қабылдайды?

Жаттығулар

A

17.1. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sin(\arcsin 0{,}2)$; 2) $\sin(\arcsin(-0{,}3))$; 3) $\sin\left(-\arcsin\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$;

4) $\cos(\arccos 0{,}6)$; 5) $\cos(\arccos(-0{,}4))$; 6) $\cos\left(-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

17.2. В.М.Брадис кестесін қолданып өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\arcsin 0{,}2354$; 2) $\arcsin 0{,}7386$;

3) $\arccos 0{,}8351$; 4) $\arccos 0{,}3259$.

17.3. Есептеңдер:

1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\mathrm{arcctg}(-1)$;

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \mathrm{arcctg}1$;

3) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\mathrm{arctg}(-1) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

4) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) - \arccos(-1) - 2\mathrm{arctg}\sqrt{3}$.

17.4. Төмендегі өрнектің мағынасы бар ма:

1) $\sin(\arcsin 2)$; 2) $\sin(\arcsin(-1{,}3))$; 3) $\sin\left(-\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$;

4) $\cos(\arccos 1{,}6)$; 5) $\cos(\arccos(\sqrt{3} - 2))$; 6) $\cos(-\arccos 7)$?

Есептеңдер **(17.5—17.9)**:

17.5. 1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\frac{2}{7}\right)$;

3) $\sin\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$; 4) $\sin\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

17.6. 1) $\cos\left(\arccos\frac{1}{5}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{6}\right)\right)$;

3) $\cos\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$; 4) $\sin\left(2\arccos\frac{1}{3}\right)$.

17.7. 1) $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arcctg}\frac{2}{3}\right)$; 2) $\mathrm{ctg}\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{6}\right)$; 4) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

17.8. 1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{2}{7}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{2}{5}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

17.9. 1) $\arcsin(\sin 20^\circ)$; 2) $\arcsin(\sin(-40^\circ))$;
3) $\arccos(\cos 10^\circ)$; 4) $\arccos(\cos(-70^\circ))$.

17.10. $\arcsin x$ келесі мәнді қабылдай ма:
1) 0; 2) 1; 3) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $-\frac{3\pi}{4}$; 5) 1,7; 6) –1,4?

17.11. $\arccos x$ келесі мәнді қабылдай ма:
1) –1; 2) 0; 3) $-\frac{2\pi}{5}$; 4) $-\frac{\pi}{4}$; 5) 1,9; 6) 1,3?

17.12. $\operatorname{arctg} x$ келесі мәнді қабылдай ма:
1) 0; 2) 1,4; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$; 5) –1,7; 6) –12?

17.13. $\operatorname{arcctg} x$ келесі мәнді қабылдай ма:
1) 0; 2) 1,4; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$; 5) –1,7; 6) 1,2?

B

17.14. a параметрінің қандай мәндерінде:
1) $\arcsin(2-a)$; 2) $\arcsin(2a-3)$; 3) $\arcsin(a^2-3)$;
4) $\arccos(2a+4)$; 5) $\arccos(2a-7)$; 6) $\arccos(2a^2-5)$
өрнегінің мағынасы болады?

Өрнектің мәнін табыңдар **(17.15—17.17):**

17.15. 1) $\arcsin(\sin 1{,}2)$; 2) $\arcsin(\sin 2)$;
3) $\arcsin(\sin 6)$; 4) $\arcsin(\sin 20)$.

17.16. 1) $\arccos(\cos 1{,}1)$; 2) $\arccos(\cos 2)$;
3) $\arccos(\cos 6)$; 4) $\arccos(\cos 20)$.

17.17. 1) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1{,}2)$; 2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$;
3) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 6)$; 4) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 10)$.

C

17.18. Өрнектің мәнін есептеңдер:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{1}{5}\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}-\arccos\frac{1}{5}\right)$;

3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}4)$; 4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}4+\operatorname{arcctg}5)$.

17.19. Есептеңдер:

1) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{12}{13}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5}+\frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $\sin\left(2{,}5\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.

17.20. Төменде берілген өрнектің анықталу облысын табыңдар:

1) $\arccos(x+2)-\arcsin 2x$; 2) $\arccos(2x-1)-\arcsin(3x+1)$;

3) $\operatorname{arctg}(x+2)-\arcsin 3x$; 4) $\operatorname{arcctg}(2x-1)-\operatorname{arctg}(-3x)$.

17.21. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)$; 2) $\cos\left(\operatorname{arctg}2-\arccos\frac{1}{5}\right)$;

3) $\operatorname{tg}(\arcsin 0{,}2+\operatorname{arctg}4)$; 4) $\operatorname{ctg}(\arccos 0{,}4-\operatorname{arcctg}5)$.

ҚАЙТАЛАУ

17.22. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y=2\sin\frac{x}{2}$; 2) $y=2\cos\left(\frac{x}{2}-\pi\right)$; 3) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 4) $y=\operatorname{ctg}\frac{3x}{2}$.

17.23. Бір координаталық жазықтыққа функциялардың графиктерін салыңдар және графиктердің қиылысу нүктелерінің абсциссаларын табыңдар:

1) $y=2\sin\frac{5x}{2}$ және $y=3x$; 2) $y=\cos\frac{x}{2}$ және $y=2-3x$;

3) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ және $y=x+2$; 4) $y=\operatorname{ctg}(x-2)$ және $y=4-x^2$.

17.24. Теңдеуді шешіңдер:

1) $x^4+2x^2-8=0$; 2) $x^4-2x^2-8=0$;

3) $x^4+6x^2-16=0$; 4) $x^4-7x^2-18=0$.

17.25. Жаңа айнымалы енгізу тәсілін қолданып теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-8=0$; 2) $(x^2+x)^2-3(x^2+x)-10=0$;

3) $x^2+6|x|-16=0$; 4) $x+7\sqrt{x}-18=0$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Теңдеу, теңдеудің түрлері, теңдеудің түбірі, тригонометрия формулалары, тригонометриялық функциялар, кері тригонометриялық функциялар, тригонометриялық функциялардың қасиеттері, кері тригонометриялық функциялардың қасиеттері.

§18. ҚҰРАМЫНДА КЕРІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРЫ БАР ҚАРАПАЙЫМ ТЕҢДЕУЛЕР

? Құрамында кері тригонометриялық функциялары бар қарапайым теңдеулерді шығаруды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Бірсарындылық, шектеулік, мәндер жиыны, теңдеу, теңсіздік

Құрамында кері тригонометриялық функциялары бар қарапайым теңдеулерді шешу үшін кері тригонометриялық функциялардың қасиеттерін еске түсірейік.

ЕСКЕ ТҮСІРІҢДЕР

12-*кесте*

Функция	Анықталған және бірсарындылық аралықтары	Негізгі тепе-теңдік	Мәндер жиыны
$y = \arcsin x$			
$y = \arccos x$			
$y = \mathrm{arctg}\, x$			
$y = \mathrm{arcctg}\, x$			

ЕСКЕ ТҮСІРІҢДЕР

x-тің қандай мәндерінде теңдік орындалады:

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;   2) $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2}$?

Құрамында кері тригонометриялық функциялары бар қарапайым теңдеулерді шешу барысында бірсарындылық пен шектеулік қасиеттері өте маңызды.

Құрамында кері тригонометриялық функциялары бар қарапайым теңдеулерді шешуді қарастырайық.

I. ***Теңдеудің оң жақ бөлігінде және сол жақ бөлігінде аттас кері тригонометриялық функциялар берілген.***

Екі жақ бөлігінде аттас кері тригонометриялық функциялар берілетін теңдеулерді шешу барысында басты назар бірсарындылық қасиетіне аударылады. $y = \arcsin t$ және $y = \mathrm{arctg}\, t$ функциялары өздерінің анықталу облысында бірсарынды өсетіні, $y = \arccos t$ және $y = \mathrm{arcctg}\, t$ функциялары бірсарынды кемитіні белгілі.

Құрамында кері тригонометриялық функциялары бар қарапайым теңдеулерді шешу жолы келтірілген:

1) $\arcsin f(x) = \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leqslant 1; \end{cases}$

2) $\arccos f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leqslant 1; \end{cases}$

3) $\mathrm{arctg} f(x) = \mathrm{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x);$

4) $\mathrm{arcctg} f(x) = \mathrm{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x).$

ЕСТЕ САҚТАҢДАР

1 және 2 теңдеулерді шығару барысында жүйені таңдау теңсіздікке байланысты.

МЫСАЛ

1. $\arcsin(x^2 - 2x - 7) = \arcsin(x - 3)$ теңдеуін шешіңдер.

Шешуі. Берілген теңдеу келесі жүйеге мәндес болады:

$\begin{cases} x^2 - 2x - 7 = x - 3, \\ |x - 3| \leqslant 1 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ -1 \leqslant x - 3 \leqslant 1 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -1, \end{array}\right. \\ 2 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$ Бұдан $x = 4$.

Тексеру жүргізу арқылы $x = 4$ мәні теңдеудің түбірі болатынына көз жеткіземіз.

Жауабы: 4.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$\arccos(x^2 - 1) = \arccos(x - x^2)$ теңдеуінің түбірлері $-0{,}5$ және 1 сандары болатынын көрсетіңдер.

II. ***Теңдеудің оң жақ бөлігінде және сол жақ бөлігінде атаулары әртүрлі кері тригонометриялық функциялар берілген.***

Оң жақ бөлігінде және сол жақ бөлігінде атаулары әртүрлі кері тригонометриялық функциялар берілген теңдеулерді шығару барысында белгілі тригонометриялық тепе-теңдіктер қолданылады. Ондай теңдеулерді шығару үшін бірден теңдеу-салдарға көшіп, одан кейін тексеру жүргізуге болады.

$\arcsin f(x) = \arccos g(x)$ теңдеуін шығару керек болсын.

x_0 саны осы теңдеудің шешімі болсын. Онда $\arcsin f(x_0) = a$ және $\arccos g(x_0) = a$ белгілеулерін енгізейік. Онда $\sin a = f(x_0)$ және $\cos a = g(x_0)$, бұдан $f^2(x_0) + g^2(x_0) = 1$.

Демек, $\arcsin f(x) = \arccos g(x)$ және $f^2(x) + g^2(x) = 1$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha = 1$, $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}^2\alpha + 1}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}$, $\sin^2\alpha = \dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha + 1}$ формулаларын қолданып,

$\mathrm{arctg}f(x) = \mathrm{arcctg}g(x) \Rightarrow f(x)\,g(x) = 1,$

$\arcsin f(x) = \mathrm{arcctg}g(x) \Rightarrow f^2(x) = \dfrac{1}{g^2(x) + 1},$

$\mathrm{arctg}f(x) = \arccos g(x) \Rightarrow \dfrac{1}{f^2(x) + 1} = g^2(x),$

$\arcsin f(x) = \mathrm{arctg}g(x) \Rightarrow f^2(x) = \dfrac{g^2(x)}{g^2(x) + 1},$

$\arccos f(x) = \mathrm{arcctg}g(x) \Rightarrow f^2(x) = \dfrac{g^2(x)}{g^2(x) + 1}$ теңдеу-салдардың шығатынын көрсетіңдер.

ЕСТЕ САҚТАҢДАР

$f(x_0) \geqslant 0$ және $g(x_0) \geqslant 0$ жағдайында ғана x_0 саны $\arcsin f(x) = \arccos g(x)$, $\mathrm{arctg}f(x) = \mathrm{arcctg}g(x)$, $\arcsin f(x) = \mathrm{arcctg}g(x)$, $\mathrm{arctg}f(x) = \arccos g(x)$ теңдеулерінің түбірі болады. Ал кері жағдайда теңдеудің шешімі болмайды.

МЫСАЛ

2. $\arcsin(3x + 4) = \arccos(2 + x)$ теңдеуін шешейік.

Шешуі.

Теңдеу-салдарды қолданып $(3x + 4)^2 + (2 + x)^2 = 1$ немесе $9x^2 + 24x + 16 + 4 + 4x + x^2 - 1 = 0$, немесе $10x^2 + 28x + 19 = 0$ теңдеуін аламыз.

Соңғы теңдеудің түбірлері $x_1 = \dfrac{-14 - \sqrt{6}}{10}$ және $x_2 = \dfrac{-14 + \sqrt{6}}{10}$.

Енді $\begin{cases} |3x + 4| \leqslant 1, \\ |2 + x| \leqslant 1 \end{cases}$ екенін ескереміз. Ягни x_1 және x_2 мәндерінің $\left[-1\frac{2}{3};\ -1\right]$ кесіндісіне тиістілігін тексереміз: $x_1 = \dfrac{-14 - \sqrt{6}}{10} = -1{,}4 - 0{,}1\sqrt{6} \approx -1{,}4 - 0{,}1 \cdot 2{,}4 = -1{,}64$; бұдан $-1{,}64 \in \left[-1\frac{2}{3};\ -1\right]$; $x_2 = \dfrac{-14 + \sqrt{6}}{10} = -1{,}4 + 0{,}1\sqrt{6} \approx -1{,}4 + 0{,}1 \cdot 2{,}4 = -1{,}16$; бұдан $-1{,}16 \in \left[-1\frac{2}{3};\ -1\right]$.

Демек, екі түбір де $(3x + 4)^2 + (2 + x)^2 = 1$ теңдеу-салдарының түбірі болады. Берілген теңдеу екінші дәрежеге шығарылғандықтан бөгде түбірлер пайда болуы мүмкін. Сондықтан берілген теңдеу үшін тексеру жасаймыз. Анықтама бойынша $\arcsin(3x + 4)$ өрнегінің мәндер жиыны $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, ал $\arccos(2 + x)$ өрнегінің мәндер жиыны $[0;\ \pi]$.

Сондықтан арксинус арккосинусқа тең болса, онда олар $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ аралығындағы мәндерді қабылдайды. Сонда $\arcsin(3x_1 + 4) = \arcsin\dfrac{-2 - 3\sqrt{6}}{10} \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos(2 + x_1) =$

$= \arccos\frac{6-\sqrt{6}}{10} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Демек, $x_1 = \frac{-14-\sqrt{6}}{10}$ бөгде түбір.

$\arcsin(3x_2 + 4) = \arcsin\frac{-2+3\sqrt{6}}{10} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos(2 + x_2) = \arccos\frac{6+\sqrt{6}}{10} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Демек, $x_2 = \frac{-14+\sqrt{6}}{10}$ берілген теңдеудің түбірі болады.

Жауабы: $\frac{-14+\sqrt{6}}{10}$.

1. Неліктен құрамында кері тригонометриялық функциялары бар қарапайым теңдеулерді шешу барасында айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынын ескеру қажет?

2. Теңдеуді шешу барысында міндетті түрде тексеру жүргізу керек пе?

Жаттығулар

А

Теңдеуді шешіңдер **(18.1—18.6)**:

18.1. 1) $\arcsin 2x = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arcsin 3x = \frac{\pi}{4}$;

3) $\arcsin 2x = 1$; 4) $\arcsin 2x = 0$.

18.2. 1) $\arccos 2x = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos 3x = \frac{\pi}{3}$;

3) $\arccos 4x = \frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos 2x = 0$.

18.3. 1) $\mathrm{arctg}\, 4x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\mathrm{arctg}\, 3x = -\frac{\pi}{3}$;

3) $\mathrm{arcctg}\, 2x = \frac{\pi}{6}$; 4) $\mathrm{arcctg}\, 3x = \frac{\pi}{2}$.

18.4. 1) $\arccos(3x - 3{,}5) = \frac{2\pi}{3}$; 2) $\arcsin(x - 2) = -\frac{\pi}{4}$;

3) $\arccos(4 - x) = \frac{\pi}{2}$; 4) $\arcsin(2x + 1) = \frac{\pi}{3}$.

18.5. 1) $\mathrm{arctg}(4x + 1) = \frac{7\pi}{12}$; 2) $\mathrm{arcctg}(4x + 1) = \frac{3\pi}{4}$;

3) $\mathrm{arcctg}(4 - x) = \frac{\pi}{2}$; 4) $\mathrm{arctg}(2x + 1) = -\frac{\pi}{4}$.

18.6. 1) $\mathrm{arctg}(3 - 4x) = \frac{\pi}{6}$; 2) $\mathrm{arcctg}(4x + 1) = \frac{5\pi}{4}$;

3) $\arccos(4 - 3x) = \frac{\pi}{3}$; 4) $\arcsin(2x - 1) = -\frac{\pi}{6}$.

B

Теңдеудің түбірлерін табыңдар **(18.7-18.8)**:

18.7. 1) $\arccos(3x^2 - 10x + 2{,}5) = \frac{2\pi}{3}$; 2) $\arcsin(3x^2 - 5x + 1) = \frac{\pi}{2}$;

3) $\arccos(3 - x^2) = \pi$; 4) $\arcsin(2{,}5 - x^2) = -\frac{\pi}{6}$.

18.8. 1) $\operatorname{arctg}\left(x^3 - 27x - \sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(3x^2 - 12x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

3) $\operatorname{arcctg}(3x - x^2 + 1) = \frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arcctg}(x^3 - 8x^2 + 15x + 1) = \frac{\pi}{4}$.

18.9. Теңдеуді шешіңдер:

1) $18\operatorname{arctg}^2 x - 3\pi\operatorname{arctg} x - \pi^2 = 0$;

2) $16\operatorname{arcctg}^2 x - 16\pi\operatorname{arcctg} x + 3\pi^2 = 0$;

3) $\operatorname{arctg}(x^2 - 9) = \operatorname{arctg} 8x$;

4) $\operatorname{arcctg}(x^2 - x) = \operatorname{arcctg}(4x - 6)$.

18.10. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $8\arccos^2 x + 2\pi\arccos x - \pi^2 = 0$;

2) $3\arcsin^2 x + 2\pi\arcsin x - \pi^2 = 0$;

3) $18\arccos^2 x = 3\pi\arccos x + \pi^2$;

4) $\arcsin^2 x - 2\pi\arcsin x - 3\pi^2 = 0$.

C

18.11. Теңдеуді графиктік тәсілмен шешіңдер:

1) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$; 2) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{4}x$;

3) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - x$; 4) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$.

Теңдеуді шешіңдер **(18.12-18.13)**:

18.12. 1) $\arccos x = \operatorname{arctg} x$; 2) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} x$;

3) $\arccos x = \arcsin x$; 4) $\operatorname{arcctg} x = \arcsin x$.

18.13. 1) $\arccos\frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$; 2) $\arcsin 2x - 3\arcsin x = 0$.

18.14. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $9\arccos^2 2x - 3\pi \cdot \arccos 2x - 2\pi^2 = 0$;

2) $2\arcsin 2x = \arccos 7x$;

3) $2\arccos x - \arccos(2x^2 - 1) = 0$;

4) $\arcsin\dfrac{2x}{x^2+1} - 2\mathrm{arctg}\,x = 0$.

18.15. Егер $x \in (-1;\ 1)$ болса, онда $\arcsin x - \mathrm{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ теңдігін дәлелденд ер.

18.16. $2\arccos\sqrt{\dfrac{x+1}{2}} = \arccos x$ теңдігін дәлелдеңдер.

18.17. Теңдеуді шешіңдер:

1) $4\mathrm{arctg}\,x - 6\mathrm{arcctg}\,x = \pi$; 2) $\mathrm{arcctg}\,3x = \mathrm{arctg}\,3x - \dfrac{\pi}{4}$.

ҚАЙТАЛАУ

18.18. Егер:

1) $\sin\alpha = 0{,}4$ және $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ болса, онда $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$;

2) $\cos\alpha = -0{,}6$ және $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ болса, онда $\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\mathrm{tg}\,2\alpha$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{8}$ және $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ болса, онда $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ мәндерін табыңдар.

18.19. Егер:

1) $\cos\alpha = \dfrac{7}{9}$ және $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ болса, онда $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha$;

2) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ және $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ болса, онда $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ мәндерін табыңдар.

18.20. Егер: $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin\beta = \dfrac{1}{8}$ және α, β мәндері бірінші ширекке тиісті болса, онда $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$ мәндерін табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $2\arcsin(-0{,}5) - 2\arccos 2\pi + \mathrm{arctg}\sqrt{3}$ өрнегінің мәні:

A) $-\dfrac{3\pi}{4}$; B) 2π; C) π; D) -2π.

2. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\mathrm{arcctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \arcsin(-\dfrac{1}{2})$ өрнегінің мәні:

A) $\dfrac{\pi}{2}$; B) $\dfrac{2\pi}{3}$; C) $-0{,}5\pi$; D) $-\pi$.

3. $\cos\left(\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ өрнегінің мәні:

A) $\frac{\pi}{3}$; B) 0,5; C) −0,5; D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. x-тің қандай мәндерінде $3x - 3\arccos(2 - x)$ өрнегінің мағынасы болады:

A) $[-2;5]$; B) $[-1; 1]$; C) $[1; 3]$; D) $[-2; 2]$?

5. $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{2}\right)$ өрнегінің мәні:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) −0,5; C) 0,5; D) $\frac{\pi}{3}$.

6. $5 - 3\mathrm{arcctg}x$ өрнегінің мәндер жиыны:

A) $[5 - 3\pi; 5 + 3\pi]$; B) $(5 - 3\pi; 5)$;
C) $[3; 3 + 3\pi]$; D) $(5 - 3\pi; 5]$.

7. $\arcsin(x^2 - 3) = \frac{\pi}{2}$ теңдеуінің түбірлері:

A) 2; B) −2; C) −2; 2; D) π.

8. $2\mathrm{arcctg}(-\mathrm{ctg}5)$ өрнегінің мәні:

A) $2\pi - 5$; B) $10 - \pi$; C) $2(2\pi - 5)$; D) −5.

9. $y = 3\arcsin\frac{1}{x-2}$ функциясының анықталу облысы болатын жиын:

A) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$; B) $[1; 3]$;

C) $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$; D) $[3; +\infty)$.

10. $\arccos(\cos4)$ өрнегінің мәні:

A) 4; B) $2\pi + 4$; C) $2\pi - 4$; D) $4 - \pi$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Теңдеу, теңдеудің түрлері, теңдеудің түбірі, тригонометрия формулалары, тригонометриялық функциялар, кері тригонометриялық функциялар, тригонометриялық функциялардың қасиеттері, кері тригонометриялық функциялардың қасиеттері.

4 ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ТЕҢСІЗДІКТЕР

§19. ҚАРАПАЙЫМ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Қарапайым тригонометриялық теңдеулерді шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Тригонометриялық теңдеу

Анықтама. *Белгісізі (айнымалысы) тригонометриялық функцияның аргументі түрінде берілген теңдеуді* ***тригонометриялық теңдеу*** *деп атайды.*

МЫСАЛ

1. $2\sin^2 3x = \sin 3x$ теңдеуі тригонометриялық теңдеу болады, $2\sin 3x = 3x$ теңдеуі тригонометриялық теңдеу болмайды. Бұл теңдеу графиктік тәсілмен шығарылады.

$2(3x - 1)\sin 3x = 3x - 1$ теңдеуі тригонометриялық теңдеу болмайды, бірақ бұл теңдеуді тригонометриялық теңдеуге келтіруге болады. Расында да, алгебралық түрлендірулер жасап, берілген теңдеуден $(3x - 1)(2\sin 3x - 1) = 0$ теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеу біреуі тригонометриялық теңдеу болып табылатын екі теңдеуді шешуге әкелінді.

Қарапайым тригонометриялық теңдеулер:

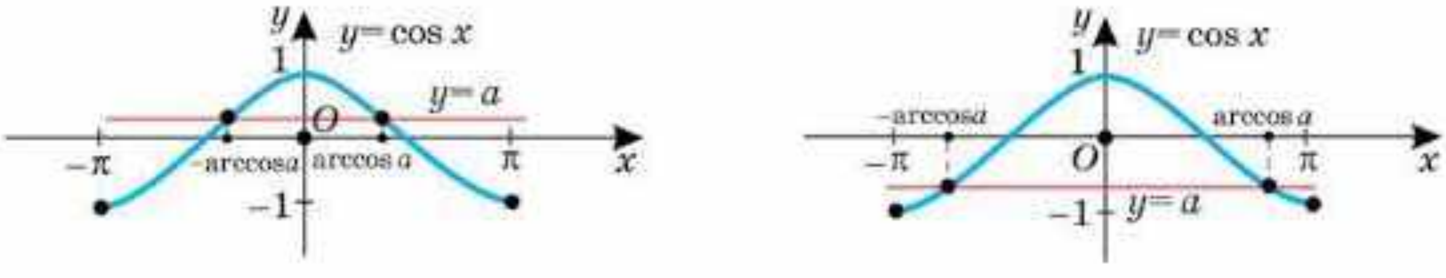
$$\cos x = a,\ \sin x = a,\ \mathrm{tg}\, x = a,\ \mathrm{ctg}\, x = a.$$

$\cos x = a$ тригонометриялық теңдеуі

$\cos x = a$ теңдеуін қарастырайық.

Егер $|a| > 1$ болса, онда $\cos x = a$ теңдеуінің шешімі болмайды. Себебі $y = \cos x$ функциясының мәндер жиыны $[-1; 1]$ кесіндісі.

Егер $|a| \leqslant 1$ болса, онда $\cos x = a$ теңдеуінің шешімі болады. Арккосинустың анықтамасы бойынша берілген теңдеудің $[0; \pi]$ кесіндісінде бір ғана шешімі бар және ол шешім $\arccos a$ (19.1.1-сурет).

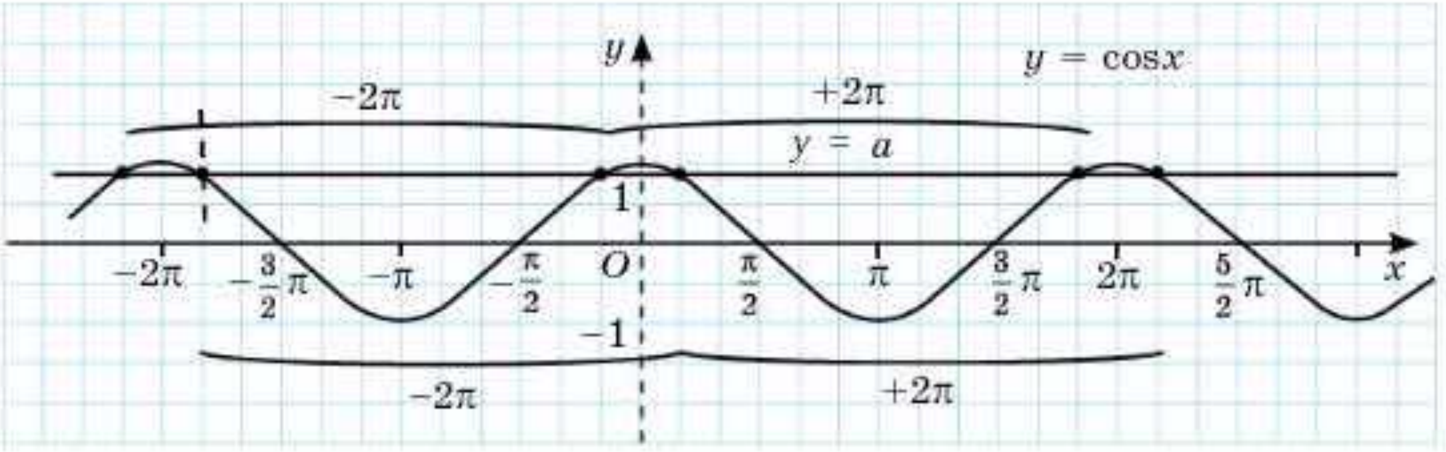


1) 2)

19.1-сурет

Косинус функциясы жұп функция болғандықтан, $[-\pi; 0]$ кесіндісінде $\cos x = a$ теңдеуінің $-\arccos a$-ға тең бір ғана шешімі бар (19.1.2-сурет).

Демек, $[-\pi; \pi]$ кесіндісінде $\cos x = a$ теңдеуінің екі шешімі бар: $\arccos a$ мен $-\arccos a$ және ол шешімдер $a = 1$ болғанда бірдей.



19.2-сурет

$y = \cos x$ функциясы периодты болғандықтан, теңдеудің қалған шешімдері табылған шешімдерден $2\pi n$-ге (n — бүтін сан) ерекшеленеді (19.2-сурет).

$\cos x = a$ теңдеуінің түбірлерін табудың жалпы формуласы:

$x = \pm\arccos a + 2\pi n$, мұндағы n — бүтін сан және $|a| \leqslant 1$.

$a = 1$ болғанда, $\arccos a$ мен $-\arccos a$ сандары бірдей. Сондықтан $\cos x = 1$ теңдеуінің шешімін табу үшін $x = 2\pi n$ (n — бүтін сан немесе $n \in Z$) формуласы қолданылады.

$\cos x = -1$ теңдеуінің шешімдер жиынын $\{\pi + 2\pi n,\ n \in Z\}$ түрінде жазады. $\cos x = 0$ теңдеуінің шешімдер жиыны: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\right\}$.

13-*кесте*

Теңдеу	Шешімді табу формуласы
$\cos x = a,\ \lvert a \rvert > 1$	$\varnothing$
$\cos x = a,\ \lvert a \rvert \leqslant 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n,\ n \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

МЫСАЛ

1. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ теңдеуінің шешімін табайық.

Шешуі. Мұнда $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, яғни $|a| \leqslant 1$ болғандықтан, 13-кесте бойынша $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Енді $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ болатынын ескеріп, $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$, аламыз.

Жауабы: $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

МЫСАЛ

2. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ теңдеуінің шешімін табайық.

Шешуі. Мұнда $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, яғни $|a| \leqslant 1$ болғандықтан 13-кесте бойынша $2x - \frac{\pi}{5} =$ $= \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$. Енді $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ екенін ескерсек, $2x - \frac{\pi}{5} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ аламыз. Соңғы теңдеуде $-\frac{\pi}{5}$ қосылғышын теңдеудің екінші жағына шығарып, екі бөлігін де 2 санына бөлеміз, сонда $2x = \pm\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{5} + 2\pi n,\ n \in Z,\ x = \pm\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{10} + \pi n,\ n \in Z$ шығады.

Жауабы: $\pm\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{10} + \pi n,\ n \in Z.$

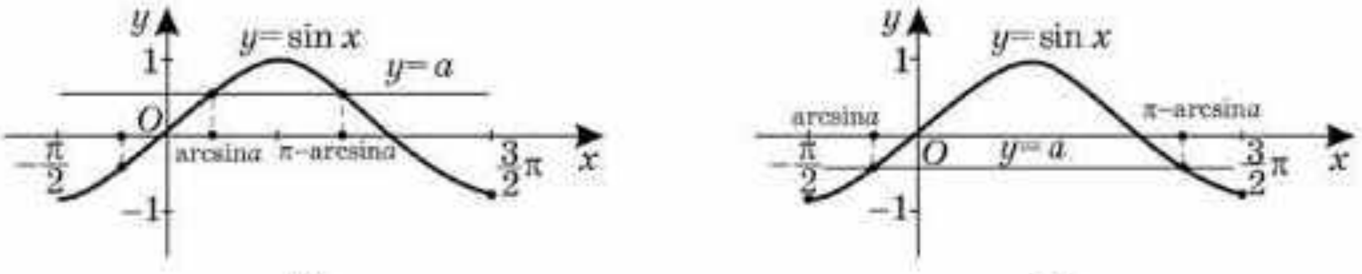
$\sin x = a$ тригонометриялық теңдеуі

Егер $|a| > 1$ болса, онда $\sin x = a$ теңдеуінің шешімі болмайды. Себебі $y = \sin x$ функциясының мәндер жиыны $[-1;\ 1]$ кесіндісі.

Егер $|a| \leqslant 1$ болса, онда $\sin x = a$ теңдеуінің шешімі болады. Арксинустың анықтамасы бойынша $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде берілген теңдеудің бір ғана шешімі бар және ол шешім $\arcsin a$-ға тең (19.3.1-сурет).

$\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ аралығында $y = \sin x$ функциясы кемиді және -1-ден 1-ге дейінгі, 1-ді қоса алғандағы, мәндерді қабылдайды. Сондықтан түбір туралы теорема бойынша осы аралықта $\sin x = a$ теңдеуінің бір ғана түбірі бар және ол түбір $\pi - \arcsin a$-ға тең (19.3.2-сурет).

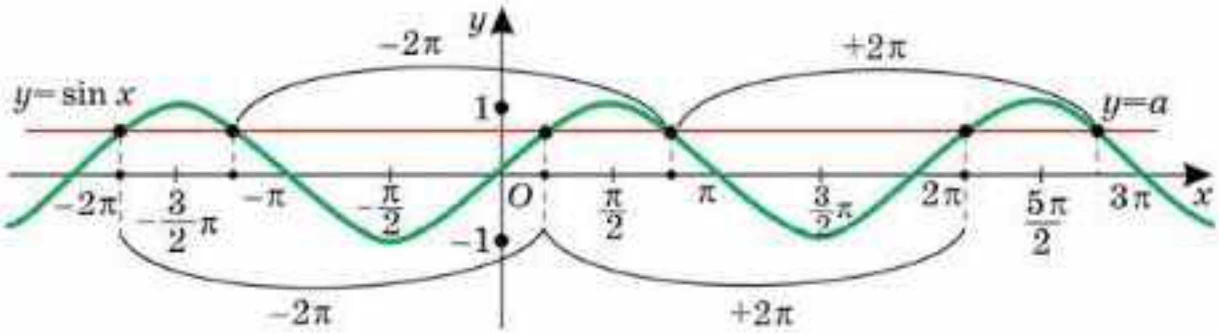
Демек, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ кесіндісінде $\sin x = a$ теңдеуінің екі шешімі бар: $x_1 = \arcsin a$ мен $x_2 = \pi - \arcsin a$ және олар $a = 1$ болғанда бірдей (19.3-сурет).



1) 2)

19.3-сурет

$y = \sin x$ функциясының периодтылығын (периоды 2π-ге тең) ескерсек, теңдеудің барлық шешімдерін жазудың формулаларын аламыз: $x = \arcsin a + 2\pi n,\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$ (n — бүтін сан) (19.4-сурет).



19.4-сурет

Осы екі формуланы біріктірсек,

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k \ (k \text{ — бүтін сан немесе } k \in Z)$$

формуласы шығады.

$\sin x = 1$ теңдеуінің шешімдер жиынының жазылу түрі: $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z\right\}$.

$\sin x = -1$ теңдеуінің шешімдер жиынының жазылу түрі: $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z\right\}$.

$\sin x = 0$ теңдеуінің шешімдер жиынының жазылу түрі: $\{\pi n,\ n \in Z\}$.

14-*кесте*

Теңдеу	Шешімді табу формуласы
$\sin x = a,\ \lvert a\rvert > 1$	$\varnothing$
$\sin x = a,\ \lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$\sin x = 0$	$x = \pi n,\ n \in Z$

МЫСАЛ

3. $\sin x = \frac{1}{2}$ теңдеуінің шешімін табайық.

Шешуі. Мұнда $a = \frac{1}{2}$, яғни $\lvert a\rvert \leqslant 1$ болғандықтан, 14-кесте бойынша $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z$. Енді $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ екенін ескеріп, $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$ аламыз.

Жауабы: $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

$\operatorname{tg} x = a$ тригонометриялық теңдеуі

$\operatorname{tg} x = a$ теңдігі орындалатындай a-ның кез келген мәнінде $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалына тиісті бір ғана x саны бар, ол сан $\operatorname{arctg} a$. Сондықтан $\operatorname{tg} x = a$ теңдеуінің $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында бір ғана түбірі бар. Бұл интервалдың ұзындығы π-ге тең, $y = \operatorname{tg} x$ функциясының периоды да осы санға тең. Сондықтан $\operatorname{tg} x = a$ теңдеуінің қалған түбірлері табылған түбірден πn-ге, мұндағы n — бүтін сан ($n \in Z$), айырмашылығы бар.

Демек, $\operatorname{tg} x = a$ теңдеуінің шешімі $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, мұндағы n — бүтін сан ($n \in Z$), формуласы бойынша табылады, шешімдер жиыны $\{\operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z\}$ түрінде жазылады.

МЫСАЛ

4. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n,\ n \in Z$ немесе $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Жауабы: $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

$\operatorname{ctg}x = a$ тригонометриялық теңдеуі

$\operatorname{ctg}x = a$ теңдігі орындалатындай a-ның кез келген мәнінде $(0; \pi)$ интервалына тиісті бір ғана x саны бар, ол сан $\operatorname{arcctg}a$. Сондықтан $\operatorname{ctg}x = a$ теңдеуінің $(0; \pi)$ интервалында бір ғана түбірі болады. Бұл интервалдың ұзындығы π-ге тең, $y = \operatorname{ctg}x$ функциясының периоды да осы санға тең. Сондықтан $\operatorname{ctg}x = a$ теңдеуінің қалған түбірлері табылған түбірден πn-ге, мұндағы n — бүтін сан ($n \in Z$), ерекшеленеді.

Демек, $\operatorname{ctg}x = a$ теңдеуінің шешімі $x = \operatorname{arcctg}a + \pi n$, мұндағы n — бүтін сан ($n \in Z$), формуласы бойынша табылады, шешімдер жиыны $\{\operatorname{arcctg}a + \pi n,\ n \in Z\}$ түрінде жазылады.

МЫСАЛ

5. $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $x + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z$; $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z$.

Жауабы: $-\frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z$.

?

1. Неліктен $|a| > 1$ болғанда $\cos x = a$ және $\sin x = a$ түріндегі теңдеулердің түбірлері болмайды?
2. Қарапайым тригонометриялық теңдеулерді бірлік шеңбер арқылы қалай шығаруға болады?

Жаттығулар

A

Теңдеуді шешіңдер **(19.1—19.11)**:

19.1. 1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = \frac{1}{2}$;
4) $\cos x =-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\cos x = 0$; 6) $\cos x = 1$.

19.2. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{1}{2}$;
4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\sin x = 0$; 6) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19.3. 1) $\operatorname{tg}x = 3$; 2) $\operatorname{tg}x = -2$; 3) $\operatorname{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
4) $\operatorname{ctg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) $\operatorname{ctg}x = 0$; 6) $\operatorname{ctg}x = -3$.

19.4. 1) $\cos x = -0{,}7$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{4}$; 3) $\cos x = 0{,}3$;
4) $\operatorname{ctg}x = -5$; 5) $\operatorname{tg}x = 0$; 6) $\sin x = -1$.

19.5. 1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$;

4) $\mathrm{tg}0{,}5x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) $\sin 4x = 0$; 6) $\mathrm{ctg}3x = -1$.

19.6. 1) $\sin 2x = 1{,}2$; 2) $\cos 3x = \sqrt{2}$; 3) $\sin\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$;
4) $\mathrm{tg}5x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) $\cos 4x = 0$; 6) $\mathrm{ctg}(-3x) = -1$.

19.7. 1) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos(-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\sin(2(x - 2)) = -\frac{1}{2}$; 4) $\mathrm{tg}(0{,}5x + 2) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
5) $\cos(4x - 1) = 0$; 6) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 1$.

19.8. 1) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos(2 - 3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\sin(3(x + 3)) = \frac{1}{2}$; 4) $\mathrm{tg}(5x - 2) = -\sqrt{3}$;
5) $\sin(4x - 3) = -1$; 6) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 1$.

19.9. 1) $\sin 3x \cdot \cos 4x + \cos 3x \cdot \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2) $\sin 5x \cdot \cos 3x - \cos 5x \cdot \sin 3x = -0{,}5$;
3) $\cos 8x \cdot \cos 4x + \sin 8x \cdot \sin 4x = -\frac{1}{2}$;
4) $\cos 3x \cdot \cos 4x - \sin 3x \cdot \sin 4x = \frac{1}{2}$.

19.10. 1) $\sin x + \sin 3x = 0$; 2) $\sin 7x - \sin 3x = 0$;
3) $\cos 3x + \cos x = 0$; 4) $\cos 3x - \cos x = 0$.

19.11. 1) $\sin 3x \cdot \cos 3x = 0{,}5$; 2) $\cos^2 2x - \sin^2 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\sin 2x \cdot \cos 2x = -\frac{1}{2}$; 4) $\sin^2 3x - \cos^2 3x = -\frac{1}{2}$.

B

19.12. Берілген интервалға тиісті теңдеудің шешімдерін табыңдар:
1) $\cos 4x + \sin 2x = 0$, $90^\circ < x < 180^\circ$;
2) $\sin 5x + \cos 4x = 0$, $270^\circ < x < 360^\circ$;
3) $\sin 5x - \cos 4x = 0$, $360^\circ < x < 450^\circ$;
4) $\cos 6x - \sin 3x = 0$, $90^\circ < x < 180^\circ$.

19.13. Берілген интервалда жататын теңдеудің түбірлерін табыңдар:
1) $\sin(x - 450^\circ) - \cos(3x - 180^\circ) = 0$, $0^\circ < x < 180^\circ$;
2) $\sin(x + 270^\circ) - \cos(3x + 720^\circ) = 0$, $40^\circ < x < 90^\circ$;
3) $\cos(-5x - 180^\circ) - \sin(4x + 630^\circ) = 0$, $0^\circ < x < 90^\circ$;
4) $\cos(4x - 180^\circ) - \sin(2x + 90^\circ) = 0$, $180^\circ < x < 270^\circ$.

19.14. Дәрежені төмендету тәсілі мен келтіру формулаларын қолданып теңдеуді шешіңдер:

1) $\cos^2(7\pi + x) = \frac{1}{2}$; 2) $\sin^2(4{,}5\pi - x) = \frac{3}{4}$;

3) $\mathrm{tg}^2(5\pi + 3x) = 3$; 4) $\cos^2(7{,}5\pi - 2x) - \frac{3}{4} = 0$.

C

19.15. Теңдеуді көрсетілген интервалда шығарыңдар:

1) $\frac{\cos 7x}{\sin 2x} - 1 = 0, \quad 70^\circ < x < 150^\circ$;

2) $\frac{\sin 2x}{\cos 3x} - 1 = 0, \quad 0^\circ < x < 180^\circ$;

3) $\frac{\sin 24x}{\cos 6x} - 1 = 0, \quad 10^\circ < x < 30^\circ$;

4) $\frac{\cos 3x}{\sin 2x} - 1 = 0, \quad 180^\circ < x < 270^\circ$.

19.16. Теңдеудің түбірлерінің санын графиктік тәсілмен табыңдар:

1) $\cos(2x - 1) = x^2 - 2x + 5$; 2) $\cos(2x + 1) = 3 - x^2 - 3x$;

3) $\sin(x + 2) = 3 - x^2 - 2x$; 4) $\mathrm{tg}(x + 2) = 3 - 2x$.

19.17. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $\cos\frac{3\pi}{x^2} = 0$; 2) $\sin^2\frac{\pi x}{2} = \frac{1}{2}$; 3) $\sin 2x \cdot \mathrm{tg}x = 0,\ 90^\circ < x \leqslant 180^\circ$.

19.18. Теңдеуді графиктік тәсілмен шешіңдер:

1) $\arccos x = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}$; 2) $\mathrm{arctg}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$; 3) $2\arcsin x = \pi + 1 - x$.

19.19. Теңдеудің түбірлерінің санын анықтаңдар:

1) $3x - 1 = \mathrm{ctg}0{,}2x$; 2) $x^2 - 4x = \mathrm{tg}0{,}4x$;

3) $x^2 - 2 = \sin\frac{x}{2}$; 4) $1 - x^2 = \cos\frac{x}{2}$.

ҚАЙТАЛАУ

19.20. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{6x - x^2} + \frac{1}{\sin x - \frac{1}{2}}$; 2) $y = \sqrt{9x - 14 - x^2} + \frac{1}{\sin x}$.

19.21. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 2$; 2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$;

3) $y = \mathrm{tg}\frac{x}{3} + 3$; 4) $y = 3 + \mathrm{ctg}\frac{x}{3}$.

19.22. Берілген функцияның графигі мен түзудің қиылысу нүктелерінің абсциссасын табыңдар:

1) $y = 2\sin(x + \pi)$ және $y = -0{,}5$; 2) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ және $y = \sqrt{3}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Теңдеулер мен теңдеулер жүйесін шешудің тәсілдері, өрнектерді түрлендірудің тәсілдері, тригонометриялық тепе-теңдіктер, қарапайым тригонометриялық теңдеулердің түбірлерінің формулалары.

§20. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕЛЕРІН ШЕШУ

Тригонометриялық теңдеулерді көбейткіштерге жіктеу арқылы шешу

? Тригонометриялық теңдеулерді көбейткіштерге жіктеу арқылы шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Тригонометриялық теңдеулер, көбейткіштерге жіктеу

МЫСАЛ

1. $2\sin^2 3x = \sin 3x$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Теңдеудің оң жақ бөлігіндегі мүшені сол жақ бөлігіне көшіреміз және ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарамыз: $\sin 3x(2\sin 3x - 1) = 0$.

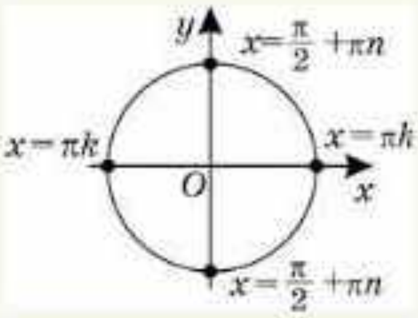
$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0,\\ \sin 3x = \frac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}3x = \pi n,\ n \in Z,\\ 3x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi n}{3},\ n \in Z,\\ x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z.\end{array}\right.$$

Жауабы: $\left\{\frac{\pi n}{3},\ n \in Z;\ (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z\right\}$.

Ескерту. Егер теңдеуді шешу барысында бірнеше шешімдердің жиыны шықса, онда оларды біріктіріп, бір формуламен беруге болатынын тексереміз. Ол үшін бірлік шеңберді қолданамыз.

МЫСАЛ

2. $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\\ x = \pi k,\ k \in Z\end{array}\right.$ теңдеулерінің шешімдер жиынын $x = \frac{\pi}{2}t,\ t \in Z$ бір формуласы арқылы жаза аламыз, өйткені бірінші және екінші теңдеудің шешімдерін біріктіруге болады (20.1-сурет).



20.1-сурет

Алмастыру тәсілі. Квадраттық теңдеуге келтірілген тригонометриялық теңдеулер

Тригонометриялық теңдеулерді қосымша аргумент енгізу арқылы шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Тригонометриялық теңдеу, алмастыру, квадрат теңдеу

МЫСАЛ

3. $6\sin^2 x + 5\cos x - 7 = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $6\sin^2 x + 5\cos x - 7 = 0$ теңдеуін $y = \cos x$ тригонометриялық функциясына байланысты алгебралық түрге келтіруге болады. Ол үшін $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ негізгі тригонометриялық тепе-теңдігін қолданамыз.

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ болғандықтан, $6\sin^2 x + 5\cos x - 7 = 0$ теңдеуі мына түрге келеді: $6(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 7 = 0$ немесе $6\cos^2 x - 5\cos x + 1 = 0$.

$\cos x$-ті t әрпімен алмастырып ($\cos x = t$, мұндағы $|t| \leqslant 1$), $6t^2 - 5t + 1 = 0$ алгебралық теңдеуін аламыз. Теңдеудің шешімдері $\frac{1}{2}$ және $\frac{1}{3}$ сандары болады.

Енді алмастыруды ескереміз: $\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$

Жауабы: $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z\right\}$.

Біртекті теңдеулер

Біртекті тригонометриялық теңдеулерді шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Біртекті тригонометриялық теңдеулер

$a\cos x + b\sin x = 0$; $a\sin^2 x + b\cos^2 x + d\sin x\cos x = 0$; $a\sin^3 x + b\sin x\cos^2 x + d\sin^2 x\cos x = 0$ және т.б. түріндегі теңдеулерді қарастырайық.

$a\cos x + b\sin x = 0$ теңдеуінің сол жақ бөлігіндегі әрбір қосылғыш $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты бірінші дәрежелі, оң жақ бөлігі 0-ге тең. Мұндай теңдеулерді $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты *бірінші дәрежелі біртекті теңдеулер* дейді.

$a\sin^2 x + b\cos^2 x + d\sin x\cos x = 0$ теңдеуінің сол жақ бөлігіндегі әрбір қосылғыш $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты екінші дәрежелі, оң жақ бөлігі 0-ге тең. Мұндай теңдеулерді $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты *екінші дәрежелі біртекті теңдеулер* дейді.

$a\sin^3 x + b\sin x\cos^2 x + d\sin^2 x\cos x = 0$ теңдеуінің сол жақ бөлігіндегі әрбір қосылғыш $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты үшінші дәрежелі, оң жақ бөлігі 0-ге тең. Мұндай теңдеулерді $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты *үшінші дәрежелі біртекті теңдеулер* дейді.

Теңдеудің сол жақ бөлігінде $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты екі қосылғышы бар және олардың әрқайсысы $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты төртінші дәрежелі, оң жақ бөлігі 0-ге тең теңдеуге мысал келтіріңдер.

Анықтама. *Сол жақ бөлігіндегі* $\sin x$ *пен* $\cos x$*-ке қатысты барлық мүшелерінің дәреже көрсеткіштерінің қосындысы бірдей, оң жақ бөлігі* 0*-ге тең болатын теңдеу* $\sin x$ *пен* $\cos x$*-ке қатысты* ***біртекті тригонометриялық теңдеу*** *деп аталады.*

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$a\sin^2x + b\cos^2x + d\sin x\cos x = 1$ теңдеуі неліктен біртекті теңдеу болмайды? Теңдеуді екінші дәрежелі біртекті теңдеуге қалай келтіруге болады? Неліктен $\sin x$ пен $\cos x$ бір мезетте нөлге тең болмайды?

Кез келген біртекті тригонометриялық теңдеуді алгебралық теңдеуге келтіру үшін мына түрлендірулер қолданылады:

АЛГОРИТМ

1) Теңдеудің екі жақ бөлігін $\cos^kx \ne 0$-ге ($\sin^kx \ne 0$-ге), мұндағы k теңдеудің дәрежесі, бөліп, сол жақ бөлігінде $\operatorname{tg}x$-ке ($\operatorname{ctg}x$-ке) қатысты берілген теңдеуге мәндес теңдеу алу;

2) алмастыру жасап, мысалы, $\operatorname{tg}x$-ті ($\operatorname{ctg}x$-ті) y арқылы белгілеп, алгебралық теңдеу алу.

МЫСАЛ

4. Біртекті $\sin^2x + 2\cos^2x + 3\sin x\cos x = 0$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Теңдеудің екі жақ бөлігін $\cos^2x \ne 0$-ге бөлеміз. Сонда берілген теңдеуге мәндес $\operatorname{tg}^2x + 3\operatorname{tg}x + 2 = 0$ теңдеуін аламыз. Расында, $\cos x \ne 0$, мұндай болмаған жағдайда $\sin x = 0$ және $\cos x = 0$ болады, бұл мүмкін емес, себебі $\sin^2x + \cos^2x = 1$.

$\operatorname{tg}x$-ті y арқылы өрнектесек, $y^2 + 3y + 2 = 0$ алгебралық теңдеуі шығады. Соңғы теңдеудің шешімі -1 және -2 сандары болады.

$\operatorname{tg}x = y$ алмастыруын қолданып x-тің мәндерін табайық: $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x = -1,\\ \operatorname{tg}x = -2.\end{array}\right.$

Сонда $\left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,\\ x = -\operatorname{arctg}2 + \pi k,\ k \in Z.\end{array}\right.$

Жауабы: $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ -\operatorname{arctg}2 + \pi k,\ k \in Z\right\}$.

Алмастыру тәсілі арқылы теңдеулерді шешу

Тригонометриялық теңдеулерді алмастыру тәсілі арқылы шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Тригонометриялық теңдеулер, алмастыру

$a\sin x + b\cos x = c$ түріндегі теңдеуді: $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$ мен $\cos\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$ формулаларын және $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = y$ алмастыруын қолданып, алгебралық теңдеуге келтіруге болады.

МЫСАЛ

5. $\sin x + \cos x = -1$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Синус пен косинусты бір ғана тангенспен өрнектеп мына теңдеуді аламыз $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} + \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} = -1.$

$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = y$ алмастыруын қолдансақ, $\dfrac{2y}{1+y^2} + \dfrac{1-y^2}{1+y^2} = -1$, немесе $\dfrac{2y+1-y^2}{1+y^2} + \dfrac{1+y^2}{1+y^2} = 0$, немесе $\dfrac{2y+1-y^2+1+y^2}{1+y^2} = 0$, немесе $\dfrac{2y+2}{1+y^2} = 0$. Будан $y = -1$.

Енді алмастыруды ескерсек, $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = -1$ теңдеуі шығады. Сонда $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$, демек $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ өрнегі $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, сандары үшін анықталмаған, $\sin x$ және $\cos x$ өрнегі кез келген нақты x үшін анықталған, сондықтан $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ шешімі жоғалып кетпес үшін тексеру жүргізу қажет.

Тексеру. $\sin(\pi + 2\pi n) + \cos(\pi + 2\pi n) = \sin\pi + \cos\pi = 0 + (-1) = -1$. Демек, $\sin x + \cos x = -1$ теңдеуінің шешімі $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$ және $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

Жауабы: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$ және $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

$a\sin x + b\cos x = c$ теңдеуі ***қосымша бұрыш енгізу тәсілімен*** шығарылады.

Тригонометриялық теңдеулерді қосымша аргумент енгізу арқылы шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Тригонометриялық теңдеулер, қосымша аргумент

Бұл тәсіл $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ теңсіздігін қолдануға негізделген.

$\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ болғандықтан,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha \qquad (1)$$

алмастыруларын қолданамыз.

$a\sin x + b\cos x = c$ теңдігінің сол жақ бөлігіндегі $\sqrt{a^2+b^2}$ өрнегін жақшаның алдына шығарамыз:

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = c.$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\alpha) = c \text{ немесе } \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

Егер $a^2 + b^2 \geqslant c^2$ болса, онда (2) теңдеудің шешімі бар.

Демек, $x = (-1)^k \arcsin\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k - \alpha$, $k \in Z$.

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ формуласын және (1) алмастыруды қолданып $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{b}{a}$ аламыз. Ендеше, $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$.

МЫСАЛ

6. $\sin x + \cos x = -1$ теңдеуін қосымша аргумент енгізу тәсілімен шешейік.

Шешуі. Берілген теңдеуде $a = b = 1$. Сондықтан $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.

Онда $\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = -1$ немесе $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

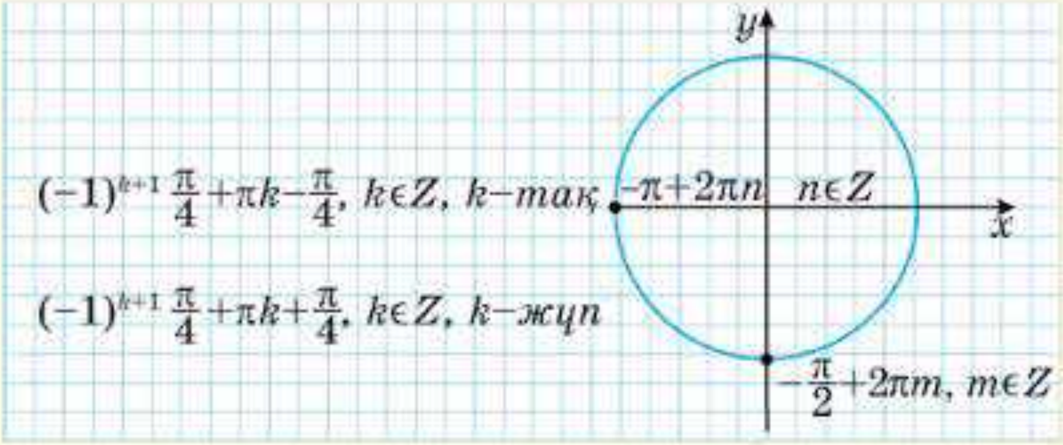
$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4}$ болғандықтан, $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Сонда $x = (-1)^k \arcsin\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi k - \dfrac{\pi}{4}$, $k \in Z$ немесе $x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi k - \dfrac{\pi}{4}$, $k \in Z$.

Жауабы: $\left\{(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi k - \dfrac{\pi}{4},\ k \in Z\right\}$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$, $x = -\pi + 2\pi n$, $n \in Z$ және $x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi k - \dfrac{\pi}{4}$, $k \in Z$ формулаларының бір шешімді беретінін бірлік шеңбердің көмегімен көрсетіңдер (20.2-сурет).



20.2-сурет

МЫСАЛ

7. $(90^\circ;\ 270^\circ)$ интервалына тиісті $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$ теңдеуі түбірлерінің қосындысының мәнін табайық.

Шешуі. Келтіру формуласы бойынша $\cos 3x = \sin(90^\circ - 3x)$. Сондықтан $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$ теңдеуі $\sin 3x + \sin(90^\circ - 3x) = \sqrt{2}$ түріне көшеді.

Синустардың қосындысын көбейтіндімен алмастырамыз:

$2\sin 45^\circ \cos(3x - 45^\circ) = \sqrt{2}$ немесе $\cos(3x - 45^\circ) = 1$.

Бұдан $3x - 45^\circ = 360^\circ n$. $n \in Z$ немесе $x = 15^\circ + 120^\circ n$, $n \in Z$.

$(90^\circ;\ 270^\circ)$ интервалына 135° $(n = 1)$ және 255° $(n = 2)$ шешімдері тиісті. Олай болса, берілген теңдеу түбірлерінің қосындысының мәні 390° болады.

Жауабы: 390°.

Тригонометриялық функция бөлшектің бөлімінде берілген теңдеулер

Тригонометриялық теңдеулерді тригонометрия формулаларын қолданып шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Тригонометриялық теңдеулер, тригонометриялық формулалар

МЫСАЛ

8. $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$ теңдеуін шығарайық.

Шешуі. $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$ теңдеуінің барлық мүшелерін сол жаққа жинап, ортақ бөлімге келтіреміз: $\frac{\cos x + \sin x - 2\sqrt{2}\sin x\cos x}{\sin x\cos x} = 0$ немесе $\frac{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin 2x}{\sin x\cos x} = 0$ (алдыңғы есепте жүргізілген түрлендірулер мен синустың қосбұрышының формуласы қолданылады).

Енді алымында $\sqrt{2}$ көбейткішін жақшаның алдына шығарып, синустардың айырымын көбейтіндіге түрлендіреміз: $\frac{\sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}{\sin x\cos x} = 0$. Осы теңдеу келесі жүйеге мәндес: $\begin{cases} \left[\begin{aligned} &\sin(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0, \\ &\cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0, \end{aligned}\right. \\ \sin x\cos x \neq 0 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} \left[\begin{aligned} &-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi k,\ k \in Z, \\ &\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z, \end{aligned}\right. \\ x \neq \frac{\pi}{2}m,\ m \in Z, \end{cases}$ немесе

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ &x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z, \end{aligned}\right. \\ x \neq \frac{\pi}{2}m,\ m \in Z. \end{cases}$$

Жауабы: $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z\right\}$.

Тригонометриялық теңдеулерді тригонометриялық функциялардың дәрежесін төмендету арқылы шешу

Тригонометриялық теңдеулерді тригонометриялық функциялардың дәреже көрсеткішін төмендету арқылы шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Тригонометриялық теңдеулер, дәрежені төмендету формулалары

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Дәрежені төмендету формулалары:

$\sin^2 x = 0{,}5(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = 0{,}5(1 + \cos 2x)$

МЫСАЛ

9. $\sin^2 2x + \sin^2 3x = \sin^2 4x + \sin^2 5x$ теңдеуінің түбірлерін табайық.

Шешуі. Дәрежені төмендету формулаларын қолданамыз:

$0,5(1 - \cos 4x) + 0,5(1 - \cos 6x) = 0,5(1 - \cos 8x) + 0,5(1 - \cos 10x)$ немесе $\cos 4x + \cos 6x = \cos 8x + \cos 10x$.

Косинустардың қосындысының формуласын қолданамыз:

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

Сонда $2\cos 5x \cdot \cos x = 2\cos 9x \cdot \cos x$ немесе $(\cos 5x - \cos 9x) \cdot \cos x = 0$.

Косинустардың айырымының формуласын қолданамыз:

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$. Сонда $2\sin 7x \sin 2x \cdot \cos x = 0$. Онда $\left[\begin{array}{l}\sin 7x = 0, \\ \sin 2x = 0, \\ \cos x = 0.\end{array}\right.$

$7x = \pi k$, $k \in Z$ немесе $x_1 = \frac{\pi}{7}k$, $k \in Z$; немесе $2x = \pi n$, $n \in Z$, немесе $x_2 = \frac{\pi}{2}n$, $k \in Z$, немесе $x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$.

Жауабы: $x_1 = \frac{\pi}{7}k$, $k \in Z$ және $x_2 = \frac{\pi}{2}m$, $m \in Z$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

20.3-суретті қолданып теңдеудің түбірлерін $x_1 = \frac{\pi}{7}k$, $k \in Z$ және $x_2 = \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$ екі формуласына біріктіруге болатынын түсіндіріңдер.

Аттас тригонометриялық функциялардың теңдігінің әдісі

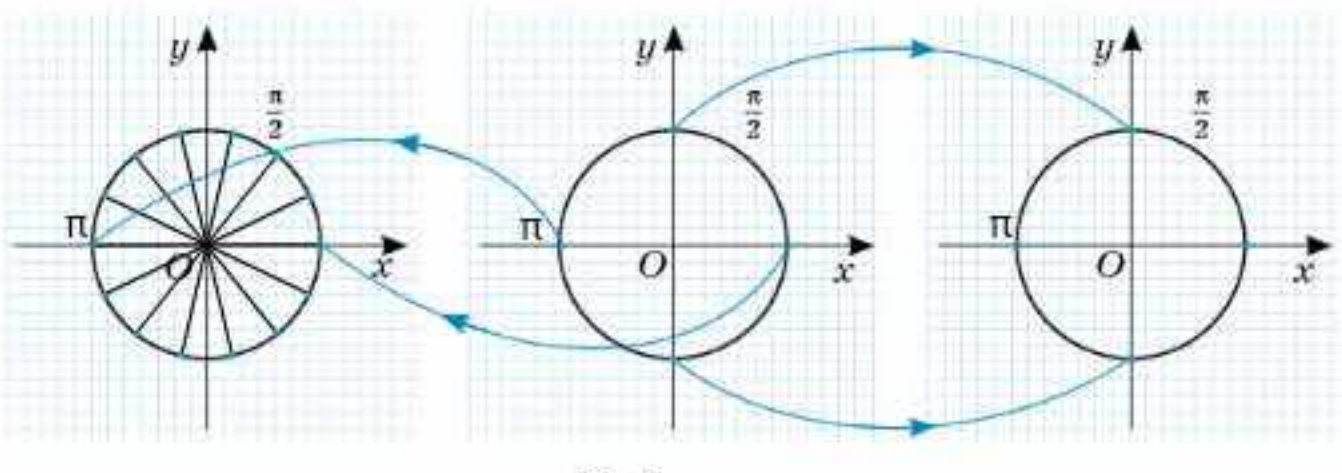
Аттас тригонометриялық функциялардың теңдігінің әдісімен танысасыңдар; тригонометриялық теңдеулерді аттас тригонометриялық функциялардың теңдігінің әдісі көмегімен шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Тригонометриялық теңдеу, аттас функциялар

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Аттас тригонометриялық функциялардың теңдігінің шарты $\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = (-1)^k y + \pi k$, $k \in Z$, $\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = \pm y + 2\pi k$, $k \in Z$, $\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}y \Leftrightarrow x = y + \pi k$, $k \in Z$.



20.3-сурет

МЫСАЛ

10. $(\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 3 - \sin 4x$ теңдеуінің түбірлерін табайық.

Шешуі. Берілген теңдеудің сол жақ бөлігін түрлендіріп, $2 + 2\sin^2 2x = 3 - \sin 4x$ теңдеуін аламыз.

$(\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4$ өрнегін түрлендіргеннен кейін $2 + 2\sin^2 2x$ өрнегі қалай алынған?

Дәрежені төмендету формулаларын қолданамыз: $3 - \cos 4x = 3 - \sin 4x$. $\cos 4x = \sin 4x$.

Аттас тригонометриялық функциялардың теңдігінің шартын қолданамыз:

$\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = \pm y + 2\pi k$, $k \in Z$, сонда $\cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \Leftrightarrow 4x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + 2\pi k$, $k \in Z$. Бұдан екі жағдай қарастырамыз.

1-жағдай. $4x = \frac{\pi}{2} - 4x + 2\pi k$, $k \in Z$. $8x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k$, $k \in Z$.

2-жағдай. $4x = -\frac{\pi}{2} + 4x + 2\pi k$, $k \in Z$. $0 \cdot x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, яғни $\varnothing$.

Жауабы: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k$, $k \in Z$.

Құрамында тригонометриялық теңдеулері бар жүйелер

Тригонометриялық теңдеулер жүйесін шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Тригонометриялық теңдеулер жүйесі

МЫСАЛ

11. $\begin{cases} \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x \end{cases}$ теңдеуін шығарайық.

Шешуі. Жүйенің бірінші теңдеуінің екі жақ бөлігін екінші дәрежеге шығарамыз, сонда $\cos x \geqslant 0$ және $\sin x - \cos y \geqslant 0$ шарты бойынша берілген теңдеуге мәндес $\sin x - \cos y = \cos^2 x$ теңдеуін аламыз.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$\sin x - \cos y = \cos^2 x$ теңдеуіндегі $\sin x - \cos y$ айырымының нөлден үлкен не нөлге тең болуы себебін түсіндіріңдер.

Жүйенің шешімін табу үшін алгебралық қосу тәсілін қолданамыз:

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = \cos^2 x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin x = 1, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} + \cos y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos y = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

$\sin x$ және $\cos y$ өрнектерінің мәндері үшін $\sin x - \cos y \geqslant 0$ болады. Расында, $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \geqslant 0$. Мәндес теңдеулер жүйесіне көшудің екінші шарты, яғни $\cos x \geqslant 0$ теңсіздігі $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$, кесіндісінде орындалады.

Сондықтан $\sin x = \frac{1}{2}$ теңдеуінің шешімі $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

$\cos y = -\frac{1}{4}$ теңдеуінің шешімі $\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$ немесе $\pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) +$ $+ 2\pi n,\ n \in Z$.

Жауабы: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + 2\pi n,\ n \in Z\right)$.

1. Тригонометриялық өрнектерге қандай түрлендірулер жүргізгенде:
   1) бөгде түбірлердің пайда болуы мүмкін;
   2) түбірлердің жоғалуы мүмкін?

2. Синус, косинус, тангенс және котангенсті тангенстің жартыбұрышымен алмастыру ыңғайлы болатын теңдеулерге мысал келтіріңдер.

Жаттығулар

А

20.1. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sin x + \sin 5x - 2\cos 2x = 0$;   2) $\cos 5x + \cos x + 2\cos 3x = 0$;

3) $\sin x - \sqrt{2}\sin 3x = -\sin 5x$;   4) $\cos x - \cos 3x - 2\sin 2x = 0$.

20.2. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\cos(70^\circ + x)\cos(x - 20^\circ) = \frac{1}{2}$;   2) $\sin(40^\circ + x)\sin(x - 50^\circ) = 1$.

20.3. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $\cos 5x - \sin 5x - \sin 7x + \cos 7x = 0$;

2) $\cos 10x\cos 6x - \cos^2 8x = 0$;

3) $\sin x\cos 5x - \sin 9x\cos 3x = 0$;

4) $\sin x\sin 3x + \sin 4x\sin 8x = 0$.

20.4. Біртекті тригонометриялық теңдеуді шешіңдер:

1) $4\cos^2 x + \sin x\cos x + 3\sin^2 x - 3 = 0$;

2) $\cos^2 x - 3\sin x\cos x = -1$;

3) $5\sin^2 x - 3\sin x\cos x = 2\cos^2 x$;   4) $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x = \cos^2 x - 2$.

20.5. Теңдеуді қосымша аргумент енгізу тәсілімен шешіңдер:

1) $\sin x - \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$;   2) $\sin 2x - \cos 2x + 1 = 0$;

3) $\sqrt{2}\sin x = 2 - \sqrt{2}\cos x$;   4) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{3}$.

20.6. Теңдеудің түбірлерінің қосындысының мәнін табыңдар:

1) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$, мұндағы $x \in [0^\circ; 360^\circ]$;

2) $5\cos^2 x + 5\cos x = 1 - 3\sin^2 x$, мұндағы $x \in [270^\circ; 450^\circ]$;

3) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$, мұндағы $x \in [0^\circ; 180^\circ]$;

4) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$, мұндағы $x \in [270^\circ; 450^\circ]$.

20.7. Тригонометриялық теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 0$; 2) $\frac{\cos x}{\cos 3x} = 0$.

20.8. Дәрежені төмендету әдісімен шығарыңдар:

1) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x = \sin^2 4x$;

2) $\cos\frac{4x}{3} + \sin^2\frac{3x}{2} + 2\sin^2\frac{5x}{4} - \cos^2\frac{3x}{2} = 0$;

3) $\sin^4 x + \cos^4 x - \frac{5}{8} = 0$;

4) $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$;

5) $\cos^2\frac{3x}{4} + \cos^2 x + \cos^2\frac{5x}{4} = \frac{3}{2}$;

6) $\sin^2\frac{x}{3} + \sin^2\frac{4x}{9} = \sin^2\frac{5x}{9} + \sin^2\frac{2x}{3}$.

20.9. Көбейтіндіні тригонометриялық функциялардың қосындысы арқылы түрлендіруді қолданып теңдеуді шығарыңдар:

1) $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x - \frac{1}{4}\sin 12x = 0$;

2) $4\cos x \cos 2x \cos 3x - \cos 6x = 0$;

3) $\sin x \sin 2x \sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x = 0$;

4) $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x - \frac{1}{8}\cos 15x = 0$;

5) $\cos x \cos\frac{7x}{2}\sin\frac{9x}{2} = \frac{1}{4}\sin 7x$;

6) $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x - \frac{1}{16} = 0$.

20.10. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x - \cos x = \sqrt{3}\sin x$;

2) $2\sin 3x + \cos 5x - \sqrt{3}\sin 5x = 0$;

3) $2\cos 4x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$;

4) $\cos 2x = \cos 4x + 2\sqrt{3}\sin x \cos 3x$.

B

20.11. Теңдеуді көбейткіштерге жіктеу арқылы шешіңдер:

1) $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$;

2) $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) = -1$;

3) $\cos x + \sin x - \sqrt{1 - 2\cos^2 x} = 0$;

4) $1 + \sin 2x = 7(\cos x + \sin x)$.

20.12. Алмастыру тәсілін қолданып теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases}\sin x\sin y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}},\\ x - y = -\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x + \cos y = 0,\\ x - y = \dfrac{4\pi}{3};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\sin x\cos y = -\dfrac{1}{2},\\ x + y = -\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$

C

20.13. Теңдеуді дәрежені төмендету тәсілі және түрлендірулер қолдану арқылы шешіңдер:

1) $\sin x + \sin 2x - \cos x = 2\cos^2 x$;

2) $\sin 4x - \cos^4 x = -\sin^4 x$;

3) $\sin(x - 45^\circ)\sin(x - 15^\circ) = 0,5$;

4) $\sin 2x - 2\sin^2 x - 4\sin x = -4\cos x$.

20.14. Теңдеудің түбірлерін табыңдар:

1) $\sqrt{5 - 2\sin x} + 1 = 6\sin x$; 2) $\sqrt{7 - 18\operatorname{tg} x} - 11 = 6\operatorname{tg} x$;

3) $\sqrt{10 - 18\cos x} + 2 = 6\cos x$; 4) $\sqrt{4 - 2\sin^2 x} - \sin x = 2$.

20.15. Теңдеуді дәрежені төмендету тәсілімен шешіңдер:

1) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$;

2) $\sin^4 2x + \cos^4 2x - \dfrac{5}{8} = 0$;

3) $\sin^2\dfrac{3x}{4} + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2\dfrac{5x}{4} = \dfrac{3}{2}$;

4) $\cos^2\dfrac{x}{3} + \cos^2\dfrac{4x}{9} = \cos^2\dfrac{5x}{9} + \cos^2\dfrac{2x}{3}$.

20.16. Теңдеуді көбейткіштерге жіктеу арқылы шешіңдер:

1) $\cos(2(x + 60^\circ)) + 4\sin(x + 60^\circ) = 2,5$;

2) $8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1$;

3) $9\operatorname{ctg}^2 x + 4\sin^2 x = 6$; 4) $2\cos^2(2x + 60^\circ) - 3\sin^2(x + 30^\circ) = 2$.

20.17. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases}\cos x\cos y = 0,5,\\ \sin(x + y)\cdot\sin(x - y) = 0,75;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin^2 x + \cos y = 1,\\ \cos^2 x + \cos y = 1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sin x\cdot\cos y = -0,5,\\ \cos x\cdot\sin y = 0,5.\end{cases}$

ҚАЙТАЛАУ

20.18. Теңсіздікті x айнымалысына байланысты шешіңдер:

1) $\cos 4\cdot(2x - 1) < 0$; 2) $\cos 3\cdot\cos 5\cdot(x^2 - 1) < 0$.

20.19. Өрнектің таңбасын анықтаңдар:

1) $\operatorname{tg} 2\cdot\operatorname{ctg} 2 + \cos^2\pi - \sin^2 35 - \cos^2 35$;

2) $\cos 1 \cdot \cos(1 + \pi) + \sin 60^\circ - \cos 30^\circ$;

3) $\sin 1 \cdot \cos 2$; 4) $\sin(-3) \cdot \sin 4 \cdot \cos 5$.

20.20. Теңсіздікті графиктік тәсілмен шешіңдер:

1) $(x - 4)(x + 3)(x - 2)^2 \geqslant 0$; 2) $(2x - 3)(x + 6)(3x - 2)^3 \leqslant 0$;

3) $\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+3} \leqslant \frac{1}{x+1}$.

20.21. Теңсіздікті квадраттық функцияның графигі және интервалдар әдісімен шешіңдер:

1) $x^2 + 3x - 18 \geqslant 0$; 2) $-5x^2 - 12x + 17 \leqslant 0$;

3) $6x^2 - 13x - 5 > 0$.

20.22. Өрнектің мәндерін өсу ретімен жазыңдар:

1) sin2, sin3, cos4, cos5; 2) sin3, sin4, sin6, sin7.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Теңсіздік, өрнектерді түрлендіру, тригонометриялық тепе-теңдіктер.

§ 21. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ШЕШУ

Тригонометриялық теңсіздік ұғымымен танысасыңдар; қарапайым тригонометриялық теңсіздіктерді шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Тригонометриялық теңсіздік

Анықтама. *Белгісізі (айнымалысы) тригонометриялық функцияның аргументі түрінде берілген теңсіздікті* ***тригонометриялық теңсіздік*** *деп атайды.*

МЫСАЛ

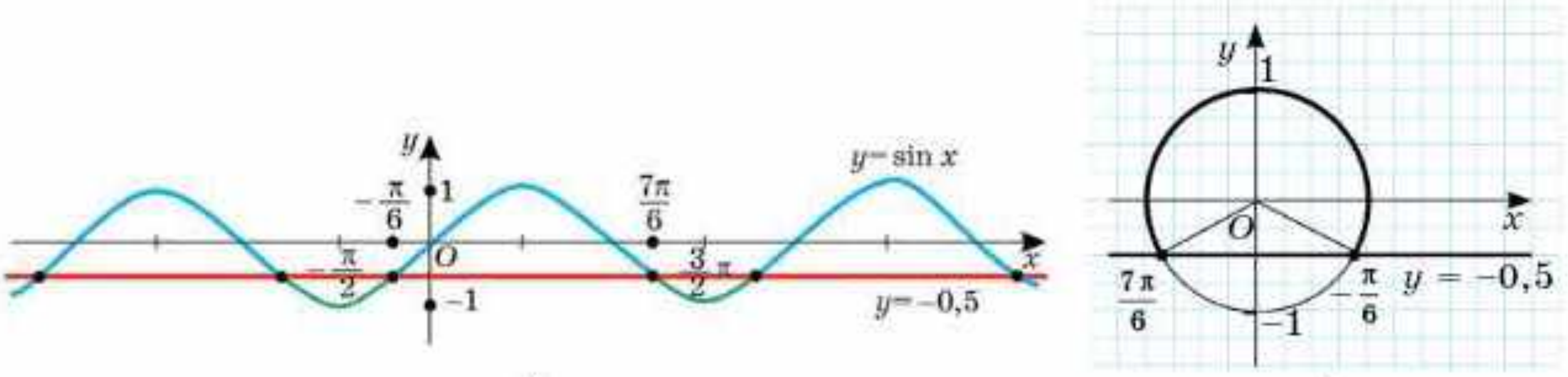
1. $2\text{tg}^2 x - \text{tg}x < 0$ теңсіздігі тригонометриялық теңсіздік болады, $2\text{tg}x - x < 0$ теңсіздігі тригонометриялық теңсіздік болмайды және ол жуықтау немесе графиктік тәсілмен шығарылады.

$2(x + 1)\sin 3x \cos 3x \leqslant x + 1$ теңсіздігі тригонометриялық теңсіздік болмайды, бірақ бұл теңсіздікті тригонометриялық теңсіздікке келтіруге болады. Расында да, алгебралық түрлендірулер жасап, берілген теңсіздіктен $(x + 1)(\sin 6x - 1) \leqslant 0$ теңсіздігін аламыз. Соңғы теңсіздікті шешу барысында тригонометриялық теңсіздік шығарылады.

$\sin x \geqslant a$ тригонометриялық теңсіздігі

Тригонометриялық теңсіздікті графиктік тәсілмен шешудің мысалы ретінде $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ теңсіздігін қарастырайық. Алдымен $y = \sin x$ функциясының графигі мен $y = -\frac{1}{2}$ түзуінде бір координаталық жазықтыққа саламыз (21.1, *a*-сурет).

$y = \sin x$ функциясының периоды 2π-ге тең болғандықтан, берілген теңсіздіктің $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ кесіндісіне тиісті барлық шешімдерін табамыз, одан кейін $y = \sin x$ функциясының периодтылығын ескереміз.



a)   *ә*)

21.1-сурет

$\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ теңсіздігінің шешімі $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ кесіндісіндегі $y = \sin x$ функциясының графигі $y = -\frac{1}{2}$ түзуінің графигінен жоғары орналасқан немесе ол графикті қиятын x айнымалысының барлық мәндері, яғни $\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}\right]$ кесіндісі.

$y = \sin x$ функциясының периоды 2π-ге тең болғандықтан, табылған шешімдерге $2\pi n$ ($n \in Z$) сандарын қоссақ, берілген теңсіздіктің қалған шешімдері табылады.

Демек, $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ теңсіздігінің шешімі $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

Тригонометриялық теңсіздіктерді бірлік шеңбердің көмегімен шығаруға болады.

$\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ теңсіздігін бірлік шеңбердің көмегімен шығарайық.

Алдымен координаталық жазықтықта бірлік шеңбер саламыз және $y = -\frac{1}{2}$ түзуін жүргіземіз (21.1, *ә*-сурет). $\sin x$-тің мәні $-\frac{1}{2}$-ден үлкен немесе тең болғандықтан шеңбердің $y = -\frac{1}{2}$ түзуінен жоғары жатқан бөлігін аламыз. Енді бірлік шеңбердің $y = -\frac{1}{2}$ түзуімен қиылысу нүктелеріне сәйкес бұрыштарды анықтаймыз. $x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ және $x_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.

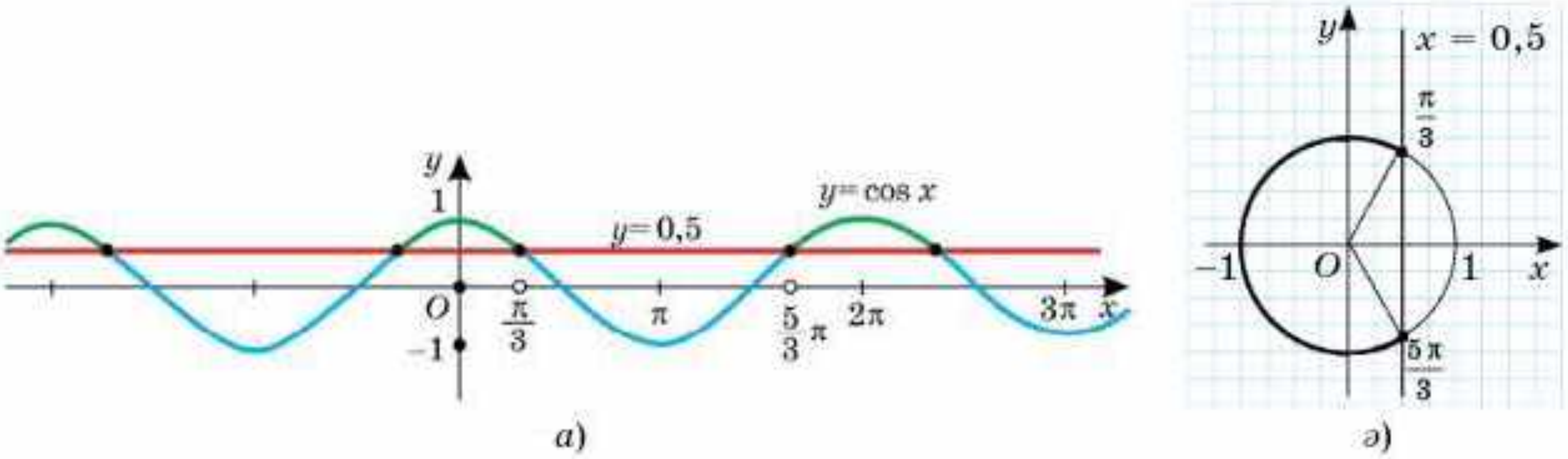
Демек, $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$, $y = \sin x$ функциясының периодын ескеріп $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$, аламыз.

21.1-суретті қолданып $\sin x < -\frac{1}{2}$ теңсіздігін шешіңдер.

$\cos x < a$ тригонометриялық теңсіздігі

Тригонометриялық теңсіздікті графиктік тәсілмен шешуді $\cos x < \frac{1}{2}$ теңсіздігін шешу мысалы арқылы қарастырайық. Алдымен $y = \cos x$ функциясының графигі мен $y = \frac{1}{2}$ түзуін бір координаталық жазықтыққа саламыз (21.2, *а*-сурет).

$y = \cos x$ функциясының периоды 2π-ге тең болғандықтан, берілген теңсіздіктің [0; 2π] кесіндісіне тиісті барлық шешімдерін тауып, $y = \cos x$ функциясының периодтылығын ескереміз.



21.2-сурет

$\cos x < \frac{1}{2}$ теңсіздігінің [0; 2π] кесіндісіндегі шешімі $y = \frac{1}{2}$ түзуінің графигінен төмен орналасқан $y = \cos x$ функциясының графигіне тиісті x айнымалысының барлық мәндері, яғни $\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}\right]$ аралығы.

$y = \cos x$ функциясының периоды 2π-ге тең болғандықтан, табылған шешімдерге $2\pi n$ $(n \in Z)$ сандарын қоссақ, берілген теңсіздіктің қалған шешімдері табылады.

Демек, $\cos x < \frac{1}{2}$ теңсіздігінің шешімі $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

$\cos x < \frac{1}{2}$ теңсіздігін бірлік шеңбердің көмегімен шешуді қарастырайық.

Координаталық жазықтықта бірлік шеңбер салып, $x = \frac{1}{2}$ түзуін жүргіземіз. $\cos x$-тің мәні $\frac{1}{2}$-ден кем болғандықтан шеңбердің $x = \frac{1}{2}$ түзуінен сол жақта орналасқан бөлігін аламыз (21.2, *ә*-сурет).

Енді шеңбер мен түзудің қиылысу нүктелеріне сәйкес бұрыштарды анықтаймыз.

$x_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $x_2 = 2\pi - \arccos\frac{1}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Сонда $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$.

Енді $y = \cos x$ функциясының периодын ескеріп, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$, аламыз.

21. 2-суретті қолданып $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$ теңсіздігін шешіңдер.

$\operatorname{tg}x \leqslant a$ тригонометриялық теңсіздігі

Тригонометриялық теңсіздікті графиктік тәсілмен шешудің мысалы ретінде $\operatorname{tg}x \leqslant 1$ теңсіздігін қарастырайық. Алдымен $y = \operatorname{tg}x$ функциясының графигі мен $y = 1$ түзуін бір координаталық жазықтыққа саламыз.

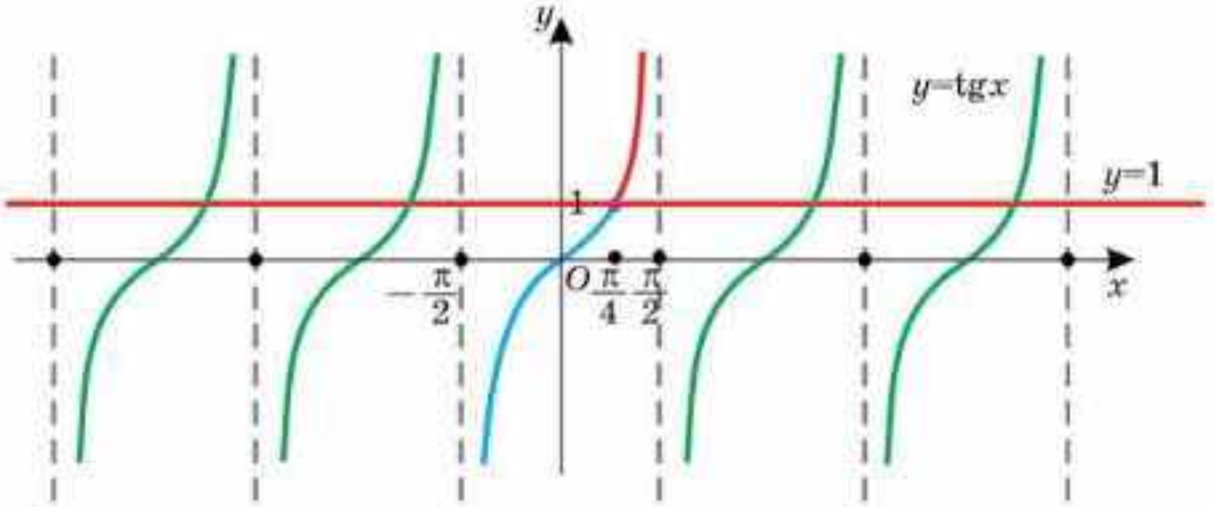
$y = \operatorname{tg}x$ функциясының периоды π-ге тең болғандықтан, берілген теңсіздіктің $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалына тиісті барлық шешімдерін табамыз, одан кейін $y = \operatorname{tg}x$ функциясының периодтылығын ескереміз (21.3-сурет).

$\operatorname{tg}x \leqslant 1$ теңсіздігінің $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалындағы шешімі $y = 1$ түзуінің графигінен төмен орналасқан немесе осы түзуді қиятын $y = \operatorname{tg}x$ функциясының графигіне тиісті x айнымалысының барлық мәндері, яғни $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ жарты интервалы.

$y = \operatorname{tg}x$ функциясының периоды π-ге тең болғандықтан, табылған шешімдерге πn $(n \in Z)$ сандарын қоссақ, берілген теңсіздіктің қалған шешімдері табылады.

Демек, $\operatorname{tg}x \leqslant 1$ теңсіздігінің шешімі $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in Z$, жиыны болады.

21. 3-суретті қолданып, $\operatorname{tg}x \geqslant 1$ теңсіздігін екі тәсілмен шешіңдер.



21.3-сурет

$\operatorname{ctg}x \leqslant a$ тригонометриялық теңсіздігі

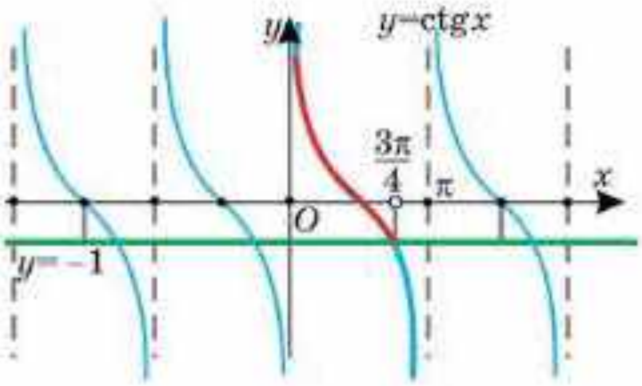
Тригонометриялық теңсіздікті графиктік тәсілмен шешудің мысалы ретінде $\operatorname{ctg}x > -1$ теңсіздігін қарастырайық. Алдымен $y = \operatorname{ctg}x$ функциясының графигі мен $y = -1$ түзуін бір координаталық жазықтыққа саламыз.

$y = \operatorname{ctg}x$ функциясының периоды π-ге тең болғандықтан, алдымен берілген теңсіздіктің $(0; \pi)$ интервалына тиісті барлық шешімдерін табамыз, одан кейін $y = \operatorname{ctg}x$ функциясының периодтылығын ескереміз (21.4-сурет).

$\operatorname{ctg}x > -1$ теңсіздігінің $(0; \pi)$ интервалындағы шешімі $y = -1$ функциясының графигінен жоғары орналасқан $y = \operatorname{ctg}x$ функциясының графигіне тиісті x айнымалысының барлық мәндері, яғни $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$ аралығы.

$y = \operatorname{ctg}x$ функциясының периоды π-ге тең болғандықтан, табылған шешімдерге πn $(n \in Z)$ сандарын қоссақ, берілген теңсіздіктің қалған шешімдері табылады.

Демек, $\operatorname{ctg}x > -1$ теңсіздігінің шешімі $\left(\pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$, жиыны болады.



21.4-сурет

21.4-суретті қолданып $\operatorname{ctg}x \leqslant -1$ теңсіздігін шешіңдер.

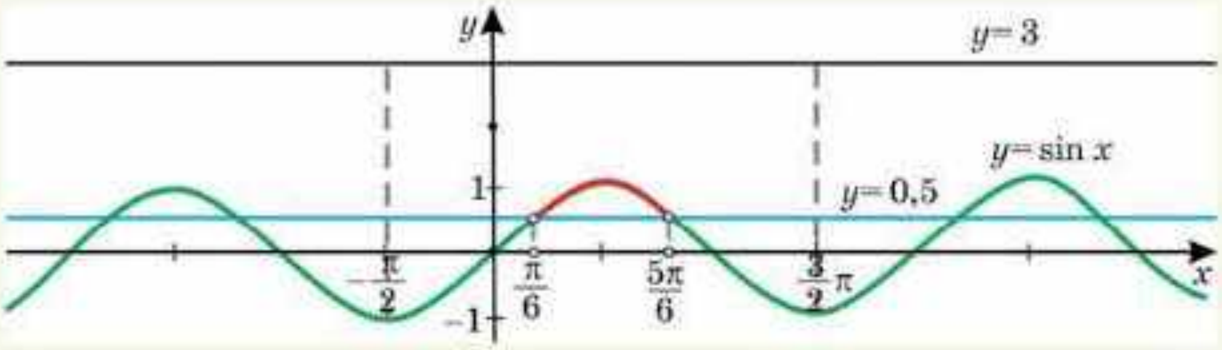
Тригонометриялық теңсіздіктерді шешуді үйренесіңдер.

МЫСАЛ **2.** $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 < 0$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. $\sin x = y$ алмастыруын қолданып, $2y^2 - 7y + 3 < 0$ теңсіздігін аламыз. $2y^2 - 7y + 3$ үшмүшесінің түбірлерін табамыз: $y_1 = 0{,}5$ және $y_2 = 3$. Енді теңсіздікті интервалдар әдісімен шешеміз (21.5-сурет).

21.5-сурет

Сонда $0{,}5 < y < 3$ немесе $0{,}5 < \sin x < 3$ (21.6-сурет).



21.6-сурет

Жауабы: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z\right)$.

1. 1) $\sin x > 0$; 2) $\sin x < 0$; 3) $\cos x > 0$; 4) $\cos x < 0$; 5) $\operatorname{tg} x < 0$; 6) $\operatorname{ctg} x > 0$ теңсіздігінің шешімін табыңдар.

2. Теңсіздікті шешіңдер:
1) $\sin x \geqslant 1$; 2) $\sin x \leqslant -1$; 3) $\cos x \geqslant 1$; 4) $\cos x \leqslant -1$.

Жаттығулар

А

Теңсіздікті шешіңдер **(21.1—21.4)**:

21.1. 1) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x > -1$.

21.2. 1) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x < \frac{1}{2}$; 3) $\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x > -1$.

21.3. 1) $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\operatorname{tg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x \geqslant -1$.

21.4. 1) $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\operatorname{ctg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{ctg} x \geqslant \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$.

21.5. Теңсіздіктің шешімін табыңдар:

1) $\sin x \cos x > \frac{1}{4}$; 2) $\cos^2 x - \sin^2 x \leqslant \frac{1}{2}$;

3) $\sin 2x \cos 2x \leqslant \frac{1}{4}$; 4) $\cos^2 x - \sin^2 x > \frac{1}{2}$.

Теңсіздікті шешіңдер **(21.6-21.7)**:

21.6. 1) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1$; 2) $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > 1$;

3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1$.

21.7. 1) $\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{6} \leqslant \frac{1}{2}$;

2) $\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21.8. Дәрежені төмендету тәсілімен шешіңдер:

1) $\sin^2 x \leqslant 0{,}5$; 2) $\cos^2 x \geqslant 0{,}5$;

3) $\sin^2 x \geqslant 1$; 4) $\cos^2 x < 1$.

B

21.9. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sin^2 x - 2\sin x < 0$; 2) $\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x \geqslant 0$;

3) $\sin^2 2x + \sqrt{2}\sin 2x \geqslant 0$.

21.10. Теңсіздікті қосымша аргумент енгізу тәсілімен шешіңдер:

1) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x < 0$; 2) $\sqrt{3}\cos x - \sin x > \sqrt{2}$;

3) $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x \geqslant \sqrt{3}$.

21.11. Теңсіздіктің шешімін табыңдар:

1) $2\sin x < \sin 2x\cos x$, мұндағы $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$;

2) $\sin 2x\sin x > 2\cos x$, мұндағы $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

21.12. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{2\sin x - 1} + \sqrt{7x - x^2}$;

2) $y = \dfrac{1}{2\sin x - 1} + \sqrt{6x - x^2}$;

3) $y = \sqrt{2\sin x - \sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$;

4) $\sqrt{1 - 2\cos x} + \sqrt{4x - x^2}$.

21.13. Теңсіздіктің шешімін табыңдар:

1) $\sqrt{2}(\sin 2x - \cos x) + 2\sin x > 1$, мұндағы $x \in [0; \pi]$;

2) $\sqrt{2}(\sin 2x + \sin x) - 2\cos x \leqslant 1$, мұндағы $x \in [0; \pi]$.

C

21.14. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x < 0$; 2) $\cos x\cos 3x \leqslant 0{,}5\cos 2x$.

21.15. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $|\cos x| < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $|\mathrm{tg}\,3x| \geqslant 1$;

3) $\left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}$; 4) $\left|\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

21.16. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \dfrac{2x - 3}{\sqrt{5x - 6 - x^2}} + \arcsin(3x - 2)$;

2) $y = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{x^2 - x - 6}} + \arccos(x^2 - 3)$;

3) $y = \dfrac{1 - x}{\sqrt{5x + 6 - x^2}} + \arcsin(x - 1)$;

4) $y = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}} + \arccos(x^2 - 8)$.

***21.17.** $\sin(2\pi\cos x) < 0$ теңсіздігін шешіңдер.

21.18. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $2\cos^4 x \leqslant 0{,}5 + \cos 2x$; 2) $2\cos 2x - 5 < 4\sqrt{3}\sin x$.

***21.19.** Теңсіздікті жаңа айнымалы енгізу тәсілімен шешіңдер:

1) $4\sin x + \dfrac{3}{\sin x} > 8$; 2) $4\cos x - \dfrac{5}{\cos x} > 8$.

ҚАЙТАЛАУ

21.20. Функцияның графигін салыңдар және бірсарындылық аралықтарын көрсетіңдер:

1) $y = x^2 - 2x - 1$; 2) $y = -x^2 + 2x + 2$;

3) $y = 2x^2 - 4x - 3$.

21.21. Функцияның графигін салыңдар және бірсарындылық аралықтарын көрсетіңдер:

1) $y = |x^2 + 2x - 1|$; 2) $y = |-x^2 + 2x - 1|$;

3) $y = |-2x^2 - 4x + 3|$.

***21.22.** Функцияның периодын табыңдар:

1) $y = \{2x\} + \mathrm{tg}\,2\pi x$; 2) $y = \mathrm{ctg}\,6x - \sin 3x$;

3) $y = 2\{x\} + \cos 4\pi x$; 4) $y = \left\{\dfrac{x}{3}\right\} + 2\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi x}{3}$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $\sin 5x\cos 3x - \cos 5x\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ теңдеуінің түбірлері:

A) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$; B) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$;

C) $\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$; D) $\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + 0{,}5\pi k,\ k \in Z$.

2. $4\cos 2x + 3\sin 2x - 5 = 0$ теңдеуінің шешімі:

A) $\{\mathrm{arctg}3\}$; B) $\left\{\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z\right\}$;

C) $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z\right\}$; D) $\{\mathrm{arctg}3 + \pi n,\ n \in Z\}$.

3. $[-\pi;\ 2\pi]$ кесіндісіне тиісті болатын $\cos x = -0{,}7$ теңдеуі түбірлерінің саны:

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

4. $[-\pi;\ \pi]$ кесіндісіне тиісті болатын $2\cos x > -\sqrt{3}$ теңсіздігінің бүтін шешімдерінің саны:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5.

5. $\mathrm{tg}3x + \sqrt{3} = 0$ теңдеуінің түбірлері:

A) $-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$; B) $-\frac{\pi}{9} + \pi k,\ k \in Z$;

C) $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$; D) $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$.

6. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1$ теңдеуінің түбірлері:

A) $\pi k,\ k \in Z$; B) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;

C) $\frac{\pi}{4} + 0{,}5\pi k,\ k \in Z$; D) $-\pi + 0{,}5\pi k,\ k \in Z$.

7. $\mathrm{ctg}3x \geqslant -1$ теңсіздігінің шешімі:

A) $\left(\frac{\pi k}{3};\ -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}\right],\ k \in Z$; B) $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3};\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{3}\right],\ k \in Z$;

C) $\left(\frac{\pi k}{3};\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}\right],\ k \in Z$; D) $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3};\ \frac{\pi k}{3}\right],\ k \in Z$.

8. $\arcsin 2x = \frac{\pi}{3}$ теңдеуін шешіңдер:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; C) $\sqrt{3}$; D) 1.

9. $\arccos(x-2) < \frac{\pi}{4}$ теңсіздігі ақиқат болатын жиын:

A) $\left(-1,5;\ -2+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$; B) $\left[-1,5;\ 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$;

C) $[1;\ \sqrt{2})$; D) $\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2};\ 3\right]$.

10. $|\sin x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ теңсіздігі ақиқат болатын жиын:

A) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+\pi k\right]$, $k \in Z$; B) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k \in Z$;

C) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $k \in Z$; D) $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k \in Z$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Натурал сандар, көбейту, жиын, жиынның элементі, ішкі жиын, таңдау тәсілі.

5 КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ ЖӘНЕ ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ

§22. КОМБИНАТОРЛЫҚ ЕСЕПТЕР. ҚОСЫНДЫ ЕРЕЖЕСІ ЖӘНЕ КӨБЕЙТІНДІ ЕРЕЖЕСІ

Комбинаторлық есеп ұғымымен, қосынды ережесімен, көбейтінді ережесімен танысасыңдар; қосынды ережесін, көбейтінді ережесін қолданып комбинаторлық есептерді шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Комбинаторика, комбинаторикалық есеп, қосу ережесі, көбейтінді ережесі

Сендер берілген цифрлардан, мысалы, үштаңбалы сандарды құру және олардың санын анықтау есептерін шығарып үйрендіңдер. Мұндай есептер комбинаторикалық есептерге жатады.

Анықтама. *Шектелген жиынның элементтерінен қандай да бір ережелер бойынша әртүрлі комбинациялар құрастырылатын және олардың саны табылатын есептерді* ***комбинаторикалық есептер*** *деп атайды.*

Комбинаторикалық есептерді қарастыратын математиканың бөлігі ***комбинаторика*** *деп аталады.*

Комбинаторикалық есептермен адамдар ежелден таныс. Бірнеше мың жыл бұрын Ежелгі Қытайда сиқырлы шаршылар (горизонталь, вертикаль және диагональ бойымен орналасқан сандардың қосындысының мәні бірдей болатындай етіп жазылған) құрастырылған. Сонымен қатар, комбинаторикалық есептер дойбы, домино және т.б. ойындарына байланысты пайда болған.

Комбинаторикалық есептерге шифрларды құрастыру және анықтаумен, ежелгі қолжазбаларды зерттеумен айналысқан математиктер де қызығушылық танытқан.

Комбинаторика XVII ғасырда ғана ғылым ретінде қарастырылған. Ол кезде ықтималдықтар теориясы пайда болған еді.

Сендер мүмкін болатын нұсқаларды қолдана отырып, комбинаторикалық есептер шығардыңдар.

МЫСАЛ 1. Қазақ, орыс, ағылшын тілдерінің кез келгенінен екінші бір тілге аударма жасауға болатындай қанша сөздік шығару қажет?

Шешуі. Мүмкін болатын нұсқаларды, яғни қанша сөздік шығару керектігін былай көрсетуге болады:

қазақша-орысша	қазақша-ағылшынша	орысша-қазақша
орысша-ағылшынша	ағылшынша-қазақша	ағылшынша-орысша

Жауабы: 6 сөздік.

Егер нұсқалар саны көп болса, онда мүмкін болатын нұсқаларды қолдана отырып есептер шығару қиынға түседі. Сондықтан комбинаторикада комбинаторикалық есептерді шығару ережелері бар.

Көптеген комбинаторикалық есептер қосынды ережесі мен көбейтінді ережесі қолданылып шығарылады.

Қосынды ережесі екі жиынды біріктіріп элементтер санын табуға мүмкіндік береді.

Егер X және Y жиындарының ортақ элементі болмаса және X жиынында a элемент, Y жиынында b элемент болса, онда X және Y жиындарының бірігуі $(a + b)$ элементтен тұрады.

МЫСАЛ **2.** Сыныпта 12 қыз бала және 15 ер бала бар. Сыныпта қанша оқушы бар?

Шешуі. X — сыныптағы қыз балалар жиыны. X жиынында 12 элемент бар. Y — сыныптағы ер балалар жиыны. Y жиынында 15 элемент бар. Қосындының ережесі бойынша X және Y жиындарының бірігуі $12 + 15$, яғни 27 элементтен тұрады.

Жауабы: 27 оқушы.

Егер X және Y жиындарының ортақ элементтер саны c, X жиынында a элемент, Y жиынында b элемент болса, онда X және Y жиындарының бірігуі $(a + b) - c$ элементтен тұрады.

Расында, X жиынының элементтер санын Y жиынының элементтер санымен қосса, онда c элементтер саны екі рет қосылады, өйткені ол элемент X жиынында да Y жиынында да бар.

МЫСАЛ **3.** Сыныптың барлық оқушылары жүзумен немесе теннис ойнаумен айналысады. 12 оқушы жүзумен, 15 оқушы теннис ойнаумен, 7 оқушы жүзумен де теннис ойнаумен де айналысады. Сыныпта қанша оқушы бар?

Шешуі. X – сыныптағы жүзумен айналысатын оқушылар саны. X жиынында 12 элемент бар. Y — сыныптағы теннispен айналысатын оқушылар саны. Y жиынында 15 элемент бар. Сыныптың 7 оқушысы жүзумен де теннispен де айналысады. Сондықтан 7 оқушы жүзумен айналысатын 12 оқушының санына да, теннispен айналысатын 15 оқушының санына да кіреді.

Онда қосындының ережесі бойынша X және Y жиындарының бірігуі $12 + 15 - 7$, яғни 20 элементтен тұрады.

Жауабы: 20 оқушы.

Қосынды ережесінің екінші тұжырымдамасы:

Егер $a \in A$ элементін m тәсілімен, $b \in B$ элементін n тәсілімен таңдауға болса және A мен B жиындарының ортақ элементі болмаса, онда a немесе b элементін $m + n$ тәсілмен таңдауға болады.

МЫСАЛ **4.** Егер бір сатушыда 4 қаз, екінші сатушыда 6 қаз болса, онда қазды қанша тәсілмен сатып алуға болады?

Шешуі. A — бірінші сатушыдағы қаз санының жиыны. Онда 4 қаз бар. B — екінші сатушыдағы қаз санының жиыны. Онда 6 қаз бар. 1 қаз сатып алу керек. Онда қосынды ережесі бойынша $4 + 6 = 10$.

Жауабы: 10 тәсіл.

МЫСАЛ

5. Әртүрлі 4 жейде мен әртүрлі 3 шалбардан жейде мен шалбардан тұратын қанша комплект құрастыруға болады (22.1-сурет)?

Шешуі.

Ж$_1$-мен 3 комплект: ж$_1$, ш$_1$; ж$_1$, ш$_2$; ж$_1$, ш$_3$.

Ж$_2$-мен 3 комплект: ж$_2$, ш$_1$; ж$_2$, ш$_2$; ж$_2$, ш$_3$.

Ж$_3$-пен 3 комплект: ж$_3$, ш$_1$; ж$_3$, ш$_2$; ж$_3$, ш$_3$.

Ж$_4$-пен 3 комплект: ж$_4$, ш$_1$; ж$_4$, ш$_2$; ж$_4$, ш$_3$ құруға болады.

Барлығы 3 комплекттен 4 рет құрастыруға болады, яғни $3 \cdot 4 = 12$ (комплект).

22.1-сурет

Мысалда жейдені 4 тәсілмен, шалбарды үш тәсілмен таңдауға болады. Жейде мен шалбар жұбын $3 \cdot 4$ тәсілмен алуға болады.

Жауабы: 12 тәсіл.

Көбейтінді ережесі:

Егер $x \in X$ элементін m тәсілмен, $y \in Y$ элементін k тәсілмен таңдауға болса, онда x және y жұбын $m \cdot k$ тәсілмен таңдауға болады.

МЫСАЛ

6. Әртүрлі 5 конверт және әртүрлі 4 марка бар. Маркаларды қанша тәсілмен конверттерге желімдеуге болады?

Шешуі: X — конверттер жиыны, онда 5 конверт; Y — маркалар жиыны, онда 4 марка.

Конверт пен маркадан тұратын жұп құрастырып, ондай жұптардың санын табу керек. Көбейтіндінің ережесі бойынша $5 \cdot 4 = 20$.

Жауабы: 20 тәсіл.

Көбейту ережесі 3 (4, 5 және т.б.) элементті 3 (4, 5 және т.б.) жиыннан табуды қажет ететін жағдайлар үшін де орындалады.

МЫСАЛ

7. Егер санның жазылуындағы цифрлар қайталанбайтын болса, онда 5, 6, 7 цифрларын қолданып, қанша үштаңбалы сан жазуға болады?

Шешуі. Ізделінді санның бірінші цифрын үш тәсілмен таңдауға болады (ол не 5, не 6, не 7 саны болуы мүмкін).

Ізделінді санның екінші цифрын екі тәсілмен таңдауға болады, өйткені санның жазылуындағы цифрлар қайталанбайды (егер бірінші цифры 5 болса, онда екінші цифры не 6, не 7 саны болуы мүмкін, егер бірінші цифры 6 болса, онда екінші цифры не 5, не 7 саны болуы мүмкін және т.с.с.).

Ізделінді санның үшінші цифрын 1 тәсілмен таңдауға болады. Сонда көбейтіндінің ережесі бойынша үштаңбалы сан $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ тәсілмен таңдалады.

Жауабы: 6 үштаңбалы сан.

Осы есепті мүмкін болатын нұсқаларды қарастырып шығарыңдар және шыққан сандарды жазыңдар.

1. Комбинаторикалық есепке мысал келтіріңдер.
2. Қандай жағдайда: 1) қосынды ережесі; 2) көбейтінді ережесі қолданылады?
3. Мүмкін болатын нұсқаларды табу тәсілі комбинаторикалық есептерді шешу тәсілі бола ма?
4. Мүмкін болатын нұсқаларды табу тәсілін қай уақытта қолданған тиімді, қай уақытта тиімсіз?

Жаттығулар

A

22.1. Егер дүкенде алманың 4 түрлі сорты және алмұрттың 3 түрлі сорты болса, онда 1 кг алма немесе алмұртты қанша тәсілмен алуға болады?

22.2. Егер дүкенде кәмпиттің 8 түрлі сорты және тәтті нанның 10 түрлі сорты болса, онда 1 кг кәмпит пен 1 кг тәтті нанды қанша тәсілмен алуға болады?

22.3. 12 оқушы математика және орыс тілі бойынша емтихан тапсырды. Екі емтихан бойынша 1 оқушы математикадан, 3 оқушы орыс тілінен, 1 оқушы екі пәннен емтихан тапсыра алмады. Үлгерімі төмен оқушылар саны қанша?

22.4. Қызғалдақтан 7 гүлшоғы, нәркестен 9 гүлшоғы, қызғалдақ пен нәркестен 3 гүлшоғы жасалды. Барлығы қанша гүлшоғы жасалды?

22.5. 12 оқушы дойбыдан, 23 оқушы шахматтан, 10 оқушы шахмат және дойбыдан жарысқа қатысты. Осы жарыстарға барлығы қанша оқушы қатысты?

22.6. 42 оқушы математикадан, 37 оқушы орыс тілінен, 19 оқушы екі пән бойынша олимпиадаға қатысты. Осы пәндер бойынша олимпиадаға қанша оқушы қатысты?

B

22.7. 9 жай және жұп сандардың 7-еуі жай сан, 1-еуі жай жұп сан. Осы 9 санның қаншасы жұп сан?

22.8. 30 санның ішінде 10 санынан үлкен 20 жай сан, 25 тақ сан бар. Солардың ішінде қанша жай тақ сан бар?

22.9. Тіктөртбұрыш, ромб, шаршының барлық саны 17. Оның 10-ы ромб, 9-ы тіктөртбұрыш. Шаршының саны қанша?

C

22.10. Жауынды күндер саны 15, желді күндер 10, суық күндер 6, жауынды және желді күндер 3, желді және суық күндер 2, жауынды және суық күндер 4, желді, жауынды және суық күндер 2. Ауа райы қолайсыз күндердің саны қанша?

22.11. Топта 9 оқушы емтиханнан өте жақсы, 15-і жақсы, 7-еуі қанағаттанарлық, 6-уы өте жақсы және жақсы, 3-еуі қанағаттанарлық және жақсы, 3-еуі өте жақсы және қанағаттанарлық, 2-уі өте жақсы, қанағаттанарлық және жақсы баға алды. Топтағы оқушылар саны қанша?

22.12. 80 ашықхаттың 40-ында қызғалдақ, 20-сында нәркес, 10-ында қызғалдақ пен серігүл, 5-еуінде нәркес пен серігүл, 5-еуінде қызғалдақ пен нәркес, 10-ында қызғалдақ, нәркес және серігүл бейнеленген. Серігүл бейнеленген ашықхаттардың саны қанша?

22.13. 100 сыйлық жинағының 50-інде конфет, 45-інде жаңғақ, 35-інде мандарин, 20-сында конфет, жаңғақ, мандарин, 25-інде конфет және жаңғақ, 15-інде жаңғақ және мандарин болды. Конфет пен мандариннен тұратын сыйлықтың жинағы қанша?

22.14. 50 қызметкердің 40-ы қазақ тілін, 20-сы ағылшын тілін, 10-ы түрік тілін, 15-і қазақ және ағылшын тілдерін, 5-еуі қазақ және түрік тілдерін, 5-еуі ағылшын және түрік тілдерін меңгерген. Қанша қызметкер қазақ, ағылшын, түрік тілдерін, яғни үш тілді меңгерген?

ҚАЙТАЛАУ

22.15. Функцияның графигін салыңдар және периодын табыңдар:

1) $y = \sin(2x - 3)$; 2) $y = \cos\left(\frac{x}{2} - 2\right)$;

3) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 1\right)$.

22.16. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $5 - 2x^2 > 10$; 2) $0 < x^2 - 4 \leqslant 1$; 3) $x^2 - 4|x| < 0$.

22.17. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sqrt{x^2 - 4} = 2$; 2) $\sqrt{1 - 2x^2} = 4$; 3) $\sqrt{x^2 - 4} = 2x - 1$;

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Реттелген жиын, санды жиын, берілген құрамдағы топтар саны, натурал сандар жиыны.

§23. ҚАЙТАЛАНАТЫН ЖӘНЕ ҚАЙТАЛАНБАЙТЫН ОРНАЛАСТЫРУЛАР МЕН АЛМАСТЫРУЛАР

Орналастыру, алмастыру ұғымдарымен, қайталанатын және қайталанбайтын орналастырулар мен алмастыруларды есептеу формулаларымен танысасыңдар; қайталанатын және қайталанбайтын орналастырулар мен алмастыруларды есептеу формулаларын қолдануды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Алмастырулар, орналастырулар

Әрбір элементінің орнын анықтауды қажет ететін $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ жиынын қарастырайық. Мұндай реттелген жиындар жай жақшамен жазылады. (x_1, x_2) және (x_2, x_1) жазулары әртүрлі, өйткені оларда элементтердің орналасу реті бірдей емес: $(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$. Бірақ $\{x_1, x_2\}$ және $\{x_2, x_1\}$ жиындары бірдей.

Анықтама: $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *жиынының барлық n элементін қамтитын реттелген жиындар n элементтен тұратын* ***қайталанбайтын алмастырулар*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

1. $A = \{1, 7, 8, 9\}$ жиыны берілсе, $(1, 7, 8, 9)$, $(7, 1, 8, 9)$, $(9, 7, 1, 8)$ жиындары A жиынының 4 элементінен тұратын қайталанбайтын алмастырулар болып табылады.

Белгіленуі: P_n — n элементтен тұратын қайталанбайтын алмастырулар саны.

Теорема. ***n элементтен тұратын қайталанбайтын алмастырулар саны $n!$-ға тең.***

$n!$ (эн факториал) белгісі 1-ден n-ге дейінгі барлық натурал сандардың көбейтіндісін береді $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Ал $1! = 1$ және $0! = 1$ деп саналады.

МЫСАЛ

2. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$; $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$.

Теореманың қысқаша жазылуы: $P_n = n!$.

Дәлелдеуі. $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ жиынының n элементтен тұратын қайталанбайтын алмастыруларын құрастыру процесін қарастырайық.

Алмастыруды құрастыру дегеніміз – A жиынының қай элементі бірінші, қайсысы екінші және т.с.с. болатынын анықтау. A жиынында n элемент болғандықтан, бірінші элементті n тәсілмен, екінші элементті $(n - 1)$ тәсілмен (себебі элементтер қайталанбайды) таңдап алуға болады. Үшінші элементті таңдау $(n - 2)$ тәсілмен таңдалады. Осы процесті жалғастыра отырып, n-элементті бір ғана тәсілмен таңдауға болатынына көз жеткіземіз. Көбейтінді ережесі бойынша барлық n элемент $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 1 = n!$ тәсілімен таңдалады. ◻

МЫСАЛ **3.** Бір цифр екі рет қайталанбайтындай 1, 3, 4 цифрларынан үш таңбалы сандар құрастырайық.

Шешуі. {1, 3, 4} жиыны берілген. Жиынды реттеп, алмастырулар санын табу керек: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Жауабы: 6.

1, 2, 3, 4 төрт цифрын $P_4 = 4! = 24$ тәсілмен алмастыруға болады.

Белгіленуі: $P(n_1, n_2, ..., n_k)$ — n элементтен тұратын қайталанатын алмастырулар саны, бірінші элемент n_1 рет, екінші элемент n_2 рет және т.с.с. k-элемент n_k рет қайталанады.

Теорема: $P(n_1, n_2, ... , n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$, **мұндағы** $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Дәлелдеуі. $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ жиыны берілсін. Ұзындығы n болатын жолды құрастырайық, мұнда x_1 элементі n_1 рет, x_2 элементі n_2 рет, ..., x_k элементі n_k рет қайталанады, яғни

$$\Big(\underbrace{x_1, x_1, ..., x_1}_{n_1 \text{ рет}} \quad \underbrace{x_2, x_2, ..., x_2}_{n_2 \text{ рет}} \quad ... \quad \underbrace{x_k, x_k, ..., x_k}_{n_k \text{ рет}}\Big)$$

және $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Барлық топ n элементтен тұрады. Оның элементтерінің орындарын көрсетеміз. Сонда қайталанатын алмастыруларды аламыз. Олардың саны $P(n_1, n_2, ..., n_k)$. Барлығы $n!$ алмастыру болады.

Элементтер қайталанғандықтан, әртүрлі алмастырулар аз болады. Осы алмастыруларды өзгертпейтін элементтердің алмастыру санын табайық. x_1 элемент n_1 рет қайталанғандықтан, алмастыруларды өзгертпейтін x_1 элементінің алмастыру саны $n_1!$, ал x_2 — $n_2!$, ..., x_k — $n_k!$ болады.

Берілген алмастыруларды өзгертпейтін $x_1, x_2, ..., x_k$ алмастырулар саны көбейту ережесі бойынша $n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!$.

Демек, $n! = P(n_1, n_2, ..., n_k) \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!$. Бұдан

$P(n_1, n_2,..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$, мұндағы $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$. ■

МЫСАЛ **4.** "Математика" сөзінің әріптерінен қанша алмастырулар алуға болады?

Шешуі. Берілген сөзде 10 әріп, демек $n = 10$. "*М*" әрпі 2 рет қайталанады, $n_1 = 2$, ал "*А*" әрпі 3 рет қайталанады, $n_2 = 3$. "*Т*" әрпі 2 рет қайталанады, $n_3 = 2$. Қалған әріптер 1 реттен қайталанған: $n_4 = 1$, $n_5 = 1$, $n_6 = 1$.

Сонда $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$.

$$P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.$$

Жауабы: $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$.

Егер қандай да бір жиыннан қайталанатын элементтерді таңдау және олардың ретін анықтау қажет болса, онда қайталанатын орналастырулар туралы айтылғаны. Мысалы, 1, 2, 3 цифрларын қолданып, екітаңбалы сандарды құрастыру керек.

Анықтама: *X жиынының n элементінен алынған* ***k-дан құралған орналастырулар*** *деп берілген n элементтің әр тобында m элемент болатын топтарды айтады.*

Белгіленуі: $\bar{A}_n^k$ — n элементтен алынған k-дан құралған орналастырулар саны.

Теорема: $\bar{A}_n^k = n^k$.

Дәлелдеуі. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, жиыны берілсін және $n(X) = n$. n элементтен алынған k-дан құралған орналастыруларды құрастыру жолын қарастырайық. Бірінші элементті n тәсілмен таңдауға болады. Элементтер қайталанады. Ендеше екінші элемент n тәсілмен және т.с.с. k-элемент n тәсілмен таңдалады. Көбейту ережесі бойынша k-элементті $\underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k \text{ рет}} = n^k$ тәсілмен таңдауға болады. ■

МЫСАЛ

5. Миллионнан кіші қанша санды 9, 8 және 7 цифрлары арқылы жазуға болады?

Шешуі: Миллионнан кіші сандар біртаңбалы, екітаңбалы, үштаңбалы, төрттаңбалы, бестаңбалы және алтытаңбалы болады. 9, 8 және 7 цифрларынан 3 біртаңбалы сан құрастыруға болады. 3 элементтен тұратын {9, 8, 7} жиынынан екітаңбалы сандарды құрастыру үшін 2 элемент (олар бірдей болуы мүмкін) алып, оларды реттеу қажет, яғни элементтер саны 2-ге тең жиынды құрастырамыз. Екітаңбалы сандар $\bar{A}_3^2 = 3^2 = 9$, үштаңбалы сандар $\bar{A}_3^3 = 3^3 = 27$, төрттаңбалы сандар $\bar{A}_3^4 = 3^4 = 81$, бестаңбалы сандар $\bar{A}_3^5 = 3^5 = 243$, алтытаңбалы сандар $\bar{A}_3^6 = 3^6 = 729$. Барлығы: $3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 = 1092$.

Жауабы: 1092 сан.

Анықтама. *n элементтен тұратын жиынның түрлі k элементінен реттелген жиындарды n элементтен алынған* ***k-дан құралған қайталанбайтын орналастырулар*** *деп айтады.*

Белгіленуі: A_n^k — n элементтен алынған k-дан құралған қайталанбайтын орналастырулар саны.

Теорема: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ **немесе** $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$.

Дәлелдеуі. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ жиыны берілсін және $n(X) = n$.

n элементтен алынған k-дан құралған қайталанбайтын орналастыруларды құрастыруды қарастырайық.

Реттелген жиынның бірінші элементі n тәсілмен;
екінші элементі $(n - 1)$ тәсілмен;
үшінші элементі $(n - 2)$ тәсілмен және т.с.с.
k-элементі $(n - k + 1)$ тәсілмен таңдалады.

k-элементтерді таңдау тәсілінің санын көбейту ережесімен табамыз:

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-k)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

$A_n^k = \frac{P_n}{(n-k)!}$ формуласы ақиқат. ■

МЫСАЛ

6. Қазақ, орыс, ағылшын, француз және неміс тілдерінен осы тілдердің кез келгеніне аударма жасау үшін қанша сөздік басып шығару керек?

Шешуі: X = {қазақ, орыс, ағылшын, француз, неміс} және $n(X) = 5$. Реттелген жұптарды құрастыру керек (элементтері қайталанбайды), яғни екі элементтен тұратын реттелген жиынды құрастырамыз. Мысалы, (қазақша, орысша), (орысша, қазақша) және т.с.с.

Демек, $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 20.$

Жауабы: 20 сөздік.

?

1. Комбинаторлық есепке мысал келтіріңдер.
2. Қайталанбайтын алмастырулар мен орналастыруларда қандай ұқсастық және қандай өзгешелік бар?
3. Қайталанатын алмастырулар мен орналастыруларда қандай ұқсастық және қандай өзгешелік бар?

Жаттығулар

А

23.1. 1) n элементтен тұратын қайталанбайтын алмастырулар саны қандай формуламен есептеледі?

2) n элементтен (мұндағы $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$) тұратын қайталанатын алмастырулар саны қандай формуламен есептеледі?

23.2. Есептеңдер:

1) P_4; 2) P_6; 3) $\frac{P_7}{P_5}$; 4) $\frac{P_6}{P_8}$; 5) $\frac{P_8}{P_7} + \frac{P_5}{P_6}$; 6) $\frac{P_9}{P_7} - \frac{P_7}{P_5}$.

23.3. 1) 3334 саны өзгеретіндей етіп цифрларды алмастыру санын табыңдар.

2) 3334 саны өзгермейтіндей етіп цифрларды алмастыру санын табыңдар.

3) "Комбинаторика" сөзі өзгермейтіндей етіп әріптерді алмастыру санын табыңдар.

23.4. 1) Бір цифр екі рет қайталанбайтындай етіп 6, 7, 8, 9 цифрларынан құрастырылатын төрттаңбалы сандар қанша?

2) Үшбұрыш, дөңгелек және шаршыны түстері әртүрлі болатындай етіп көк, қызыл және сары түстермен бояу тәсілдерінің санын табыңдар.
3) Жарысқа қатысушы 7 ойыншыға 7 орынды үлестірудің қанша тәсілі бар?

23.5. Есептеңдер: 1) A_7^4; 2) $\bar{A}_7^4$; 3) A_5^4; 4) $\bar{A}_5^4$.

B

23.6. Теңдеуді шешіңдер:
1) $A_x^1 = 2$; 2) $A_x^1 = 2x$; 3) $A_x^2 = 2x$; 4) $A_x^2 = x + 8$.

23.7. 1) 20 оқушыдан сынып басшысы мен спорт жұмыстарына жауап берушіні таңдаудың қанша тәсілі бар?
2) $\{3;\ 4;\ 5\}$ бағаларының бірін екі оқушыға қоюдың қанша тәсілі бар?

C

23.8. 1) 3 фигураны 5 түспен бояудың қанша тәсілі бар?
2) 1 және 2 цифрларының көмегімен жазылатын 1000-нан кіші натурал сандар қанша?

23.9. Теңдеуді шешіңдер:
1) $\bar{A}_x^3 = 8$; 2) $\bar{A}_x^4 = 16$; 3) $\bar{A}_x^2 = x(x - 1)$.

23.10. Теңдеудің түбірін табыңдар:
1) $\bar{A}_x^3 = 2x^2 + 3x$; 2) $\bar{A}_x^3 = 2x^2 + 8x$; 3) $\bar{A}_x^3 = 2x^2 + 15x$.

ҚАЙТАЛАУ

23.11. 1) Арбаның алдыңғы дөңгелегінің шеңберінің ұзындығы 3 м, артқысының шеңберінің ұзындығы 4,5 м. Егер алдыңғы дөңгелек артқысына қарағанда 20 айналым артық жасаған болса, онда арбамен қандай аралық жүрілген?
2) Қар тазалайтын екі мәшине белгілі ауданды бірігіп 12 сағ-та тазалайды. Егер алдымен бірінші мәшине жұмыстың жартысын, қалған жұмысты екінші мәшине тазалайтын болса, онда барлық жұмыс 25 сағ-та орындалады. Берілген ауданды әр мәшине жеке қанша уақытта тазалайды?

23.12. Теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиынын координаталық жазықтықта көрсетіңдер:

1) $\begin{cases} x^2 - y - 2 \leqslant 0, \\ y - |x| \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 16 \leqslant 0, \\ y - 2|x| \geqslant 2. \end{cases}$

23.13. Қосындысының мәні нөлге тең болатындай 18; 16; 14;... арифметикалық прогрессиясының қанша мүшесін алу керек?

23.14. Теңдеуді шешіңдер:

1) $4 - \cos^2 x = 4\sin x$;
2) $4 - 5\cos x - 2\sin^2 x = 0$.

23.15. Функцияның графигін салыңдар:

1) $f(x) = 2\sin 2x$;
2) $f(x) = 3\cos 0{,}5x$;
3) $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$;
4) $f(x) = |2 - \sqrt{x+2}|$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Натурал сандар, факториал, орналастырулар, алмастырулар, қайталанбайтын орналастырулар, қайталанбайтын алмастырулар, қайталанатын алмастырулар мен орналастырулар.

§24. ҚАЙТАЛАНАТЫН ЖӘНЕ ҚАЙТАЛАНБАЙТЫН ТЕРУЛЕР

Қайталанбайтын және қайталанатын терулер ұғымдарымен, қайталанбайтын терулердің қасиеттерімен танысасыңдар; қайталанбайтын және қайталанатын терулердің формулаларын, қайталанбайтын терулердің ережелерін қолдануды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Терулер, жиын, ішкі жиын

Анықтама. *Барлық элементтері әртүрлі және орналасуы реттелмеген k элементтен тұратын ішкі жиындар n элементінен алынған* ***k-дан құралған қайталанбайтын терулер*** *деп аталады.*

Белгіленуі: C_n^k — n элементтен алынған k-дан құралған қайталанбайтын терулер саны.

Теорема: $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Дәлелдеуі: $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ жиыны берілсін және $n(X) = n$. n элементтен алынған k-дан құралған қайталанбайтын терулерді құрастыру жолын қарастырайық. k элементті таңдау мен реттеу A_n^k тәсілмен жүргізіледі, яғни $\dfrac{n!}{(n-k)!}$, өйткені теруде элементтердің орналасуы маңызды емес, бірақ терулер саны k элементтен қанша алмастырулар жасалса, сонша есе, яғни $k!$ рет кіші болады: $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. ■

МЫСАЛ

1. 49 нөмірден 6 нөмірді қанша тәсілмен таңдауға болады?

Шешуі: $A = \{1, ..., 49\}$ нөмірлер жиыны берілген. Осы жиыннан 6 нөмірді таңдау қажет. Нөмірлерді таңдау реті рөл атқармайды. Қайталанбайтын терулер санын табамыз:

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13\ 983\ 816.$$

Жауабы: 13 983 816 тәсіл.

Қайталанбайтын терулердің кейбір қасиеттері

1-қасиет. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Дәлелдеуі. $C_n^0 = \dfrac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$.

$C_n^n = \dfrac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$. Ендеше, $C_n^0 = C_n^n = 1$. ■

МЫСАЛ **2.** 1) $C_7^0 = C_7^7 = 1$. 2) $C_4^0 = C_4^4 = 1$.

2-қасиет. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Дәлелдеуі. $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ және $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Ендеше, $C_n^k = C_n^{n-k}$. ■

МЫСАЛ **3.** 1) $C_7^3 = C_7^4$; 2) $C_9^6 = C_9^3$.

3-қасиет. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Дәлелдеуі. $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot ((n-1)-(k-1))!} + \dfrac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} =$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{n}{(n-k) \cdot k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = C_n^k. \ ■$$

МЫСАЛ **4.** 1) $C_7^3 + C_7^4 = C_8^4$. 2) $C_5^2 = C_4^1 + C_4^2$.

4-қасиет. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Теорема. ***n элементтен тұратын жиынның 2^n ішкі жиыны бар.***

Дәлелдеуі. Дәлелдеу математикалық индукция әдісімен жүргізіледі. Теореманың $n = 1$ болғандағы ақиқаттығын тексереміз:

$C_1^0 + C_1^1 = 2$; $2^1 = 2$; $2 = 2$ — теңдік тура.

$n = k$ болғанда тұжырым ақиқат деп есептейміз, яғни

$C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k$.

Енді $n = k + 1$ үшін ақиқат екенін дәлелдейік, яғни

$C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + \ldots + C_{k+1}^{k+1} = 2^{k+1}$.

Расында, $C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k$. $2(C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k) = 2 \cdot 2^k$.

$C_k^0 + (C_k^0 + C_k^1) + \ldots + (C_k^{k-1} + C_k^k) + C_k^k = 2^{k+1}$ (1—3-қасиеттер бойынша).

Демек, $C^0_{k+1} + C^1_{k+1} + \dots + C^{k+1}_{k+1} = 2^{k+1}$.

МЫСАЛ **5.** Егер жиынның 3 элементі болса, онда оның 2^3 ішкі жиыны, яғни 8 ішкі жиыны болады.

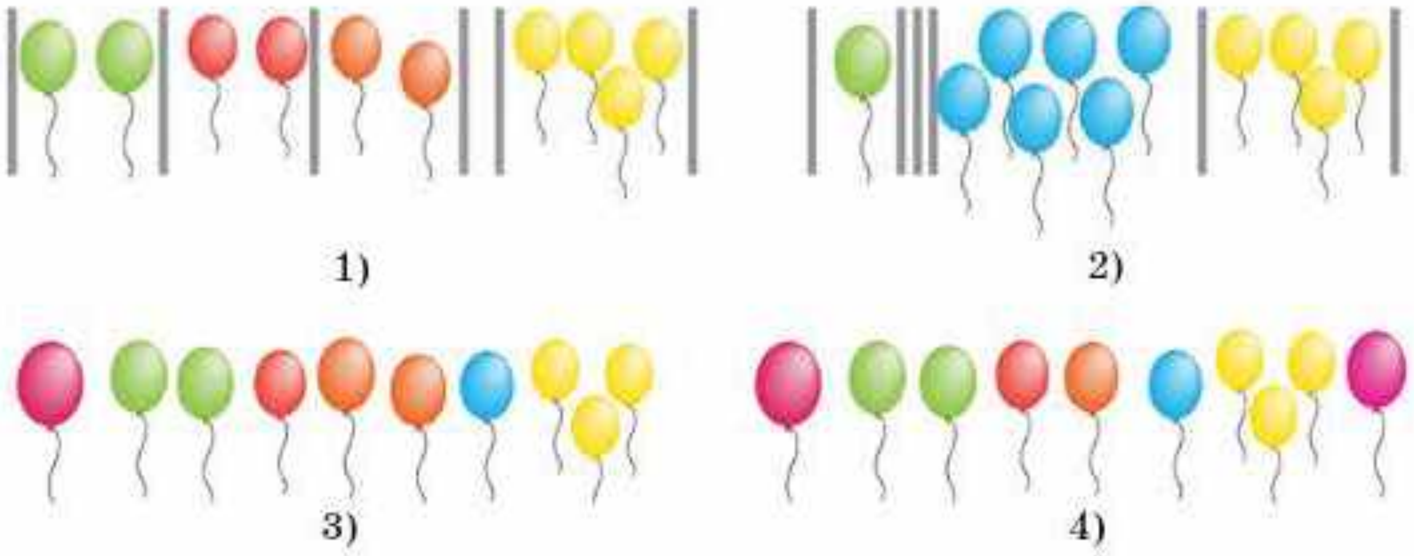
Егер жиынның 5 элементі болса, онда оның 2^5 ішкі жиыны, яғни 32 ішкі жиыны болады.

Қайталанатын терулерді енгізуге әкелетін жағдайды қарастырайық. Әртүрлі n түрі бар заттар берілсін. Мысалы, 7 түстен тұратын шарларды алайық (24.1-сурет).

24.1-сурет

Егер комбинациядағы k элементтердің орналасуын ескермей, бірақ бірдей түрдегі заттар қайталанатын болса, онда осы шарлардан k элементтен тұратын комбинацияларды қанша тәсілмен құруға болатынын қарастырайық.

МЫСАЛ **6.** 10 шар сатып алу керек болсын. Әр түстен 10-нан кем емес шар бар. Түрлі нұсқалардың арасында 24.2-суретте көрсетілгендей комбинациялар болуы мүмкін.



1) 2) 3) 4)

24.2-сурет

Анықтама. *Бір түрдің элементтері бір-бірінен ең болмағанда элементтердің санымен өзгешеленетін k элементтен тұратын реттелмеген жиынтық әртүрлі k типті n элементтен тұратын* ***қайталанатын терулер*** *деп аталады.*

Әртүрлі k типті n элементтен тұратын қайталанатын терулер санының белгіленуі: $\overline{C}_n^k$.

Әртүрлі k типті n элементтен тұратын қайталанатын терулер санын анықтауға мысал қарастырайық.

МЫСАЛ **7.** Бір түсті шарларды сызықпен бөлу арқылы сызба құрастырайық (24.3-сурет).

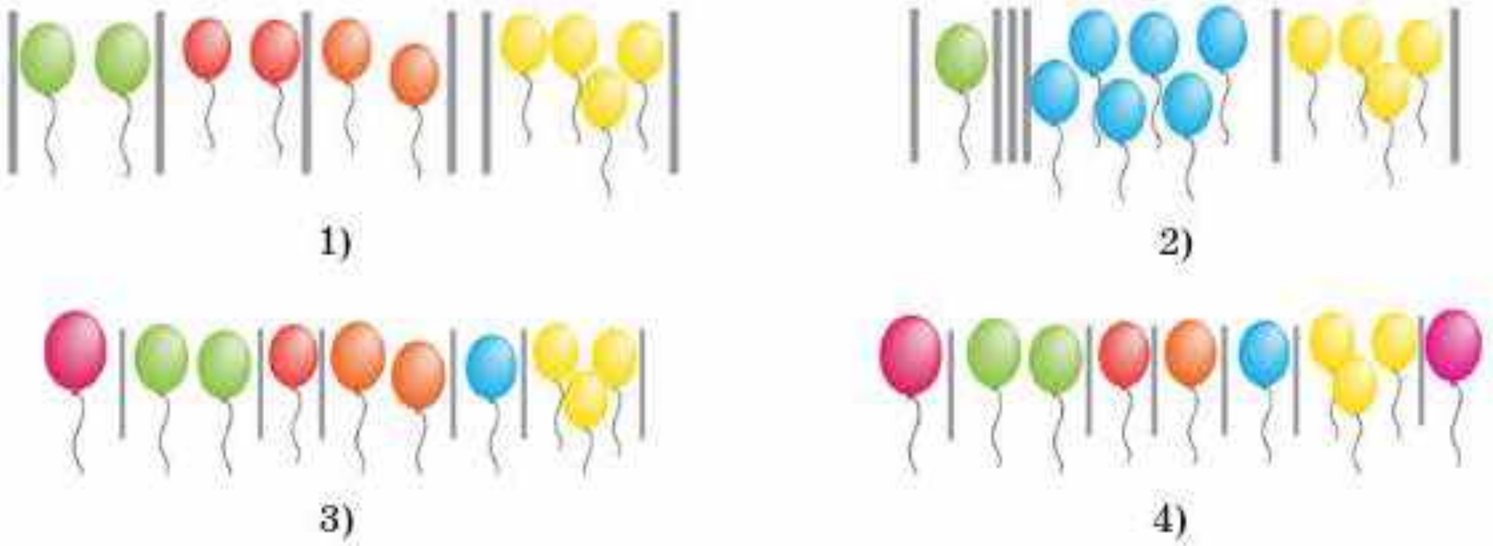
Ондай топтар саны 7-ге тең. Сондықтан топтарды бір-бірінен ажырату үшін 6 таяқша керек. Егер 7 түстің біреуінен тұратын шарлар болса, оны таяқша арқылы білуге болады. Суреттен барлығы 10 шар екенін байқаймыз. Әр жағдай үшін таяқшалар саны 6-ға тең.

Түрлі сатып алуға 10 шардан және 6 таяқшадан тұратын түрлі комбинациялар сәйкес. Керісінше шарлар мен таяқшалардың әр комбинациясына бір сатып алу сәйкес келеді.

Сондықтан 10 шардан 7 түсті шар сатып алу тәсілдерінің саны (10 + 6) элементтен тұратын қайталанатын терулер санына тең. Яғни,

$$\overline{C}_7^{10} = P(10;\ 6) = \frac{16!}{10! \cdot 6!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8008.$$

Жауабы: 8008.


1) 2)

3) 4)

24.3-сурет

Сонымен, k типті n элементтен тұратын қайталанатын терулер $\overline{C}_n^k$ терулер санын табу үшін k бірліктен және $n-1$ таяқшадан тұратын қайталанатын алмастырулар алынды. Сонда k типті n элементтен тұратын қайталанатын терулер $\overline{C}_n^k$ терулер саны k бірліктен және $n-1$ таяқшадан тұратын қайталанатын алмастырулар, яғни $P(k;\ n-1)$ санына тең.

$$P(k;\ n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!} \text{ болғандықтан, } \overline{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = C^k_{n+k-1}.$$

МЫСАЛ **8.** Дүкенде түрлі түсті қағаздардың 5 сұрпы бар. Сыйлық жасау үшін: 1) 14 парақтан; 2) 3 парақтан тұратын түрлі түсті қағазды қанша тәсілмен сатып алуға болады?

Шешуі. Сыйлық жасау үшін бір түсті немесе түрлі түсті қағаз сатып алу үшін: 1) 14-ті; 2) 3-ті 5 элементтен тұратын қайталанатын терулер санын табу қажет. Мұнда қағаздың түсін таңдау реті маңызды емес.

Сонымен, қайталатын терулер санын есептейміз:

1) 14-ті 5 элементтен алу $\bar{C}_5^{14} = P(14;\ 4) = \frac{18!}{14!\cdot 4!} = 3060.$

2) 3-ті 5 элементтен алу $\bar{C}_5^{3} = P(3;\ 4) = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = 35.$

Жауабы: 1) 3060 тәсіл, 2) 35 тәсіл.

1. k элементі бар қандай да жиынның n элементтен тұратын қайталанбайтын терулер осы жиын үшін не болады?
2. Қайталанбайтын терулер мен орналастырулардың қандай ұқсастығы және қандай өзгешелігі бар? Қайталанбайтын терулер мен қайталанатын терулердің қандай ұқсастығы және қандай өзгешелігі бар?
3. 16 ішкі жиыны бар жиынның қанша элементі бар?

Жаттығулар

А

24.1. Есептеңдер: 1) C_5^4; 2) C_5^3; 3) C_6^2; 4) C_{11}^4.

24.2. 1) 5 қаламның 2-уін және 3 қарындаштың 2-уін таңдау тәсілінің санын табыңдар.
2) 10 раушангүлдің 3-еуін және 7 қалампырдың 4-еуін таңдау тәсілінің санын табыңдар.
3) 20 ер баланың 2-уін және 21 қыз баланың 2-уін таңдау тәсілінің санын табыңдар.

24.3. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:
1) $C_8^4 + C_8^3 = C_9^4$; 2) $C_8^4 + C_8^3 + C_9^5 = C_{10}^5$;
3) $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + ... + C_6^6 = 64$.

В

24.4. Теңдеуді шешіңдер:
1) $C_n^2 = 28$; 2) $C_n^{n-3} = 20$; 3) $C_{30}^n = 435$.

24.5. Асхана мәзірінде 7 түрлі сұйық, 9 түрлі қою тағам және 4 түрлі сусын ұсынылған. Сұйық, қою және сусыннан тұратын түскі тамақты қанша тәсілмен таңдауға болады?

24.6. Теңдеуді шешіңдер:
1) $C_{2n+1}^{n-1} : C_{2n}^{n+1} = \frac{5}{3}$; 2) $A_{2x+3}^{x-1} : A_{2x}^{x+1} = \frac{1}{30}$; 3) $C_n^2 \cdot A_n^2 = 32$.

24.7. Байланыс бөлімшесінде ашық хаттың 10 түрі бар.
1) 12 ашық хатты; 2) 8 ашық хатты; 3) әртүрлі 8 ашық хатты қанша тәсілмен сатып алуға болады?

24.8. Нан дүкенінде нанның 3 түрі бар. 9 нанды қанша тәсілмен сатып алуға болады?

C

***24.9.** Шеңбердің бойында A_1, A_2, ... , A_{11}, A_{12} нүктелері тізбектей белгіленген. 1) Ұштары осы нүктелерде болатын хордалар санын; 2) төбелері осы нүктелерде болатын үшбұрыштар санын; 3) төбелері осы нүктелерде болатын дөңес төртбұрыштар санын табыңдар.

***24.10.** a және b түзулері параллель және $a \neq b$. a түзуінің бойынан 8 нүкте, b түзуінің бойынан 11 нүкте белгіленген.
1) Төбелері осы нүктелерде болатын үшбұрыштар санын;
2) төбелері осы нүктелерде болатын дөңес төртбұрыштар санын (төртбұрыштың үш төбесі бір түзудің бойында жатпайды);
3) төбелері осы нүктелерде болатын, қабырғалары a және b түзулерінде жатпайтын сынықтың өзара қиылыспайтын он алты қабырғасының санын табыңдар.

***24.11.** Әртүрлі 6 жәшік пен 4 ақ және 3 қара шар бар. Әр жәшікте бір шардан болатындай етіп барлық шарды жәшіктерге қанша тәсілмен салуға болады?

ҚАЙТАЛАУ

24.12. $f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар:

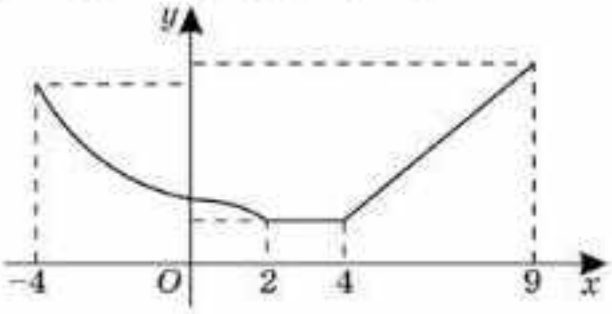
1) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$; 2) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 9}$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{25 - x^2}$; 4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$.

24.13. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\sin x \geqslant \dfrac{1}{2}$; 2) $\sin^2 x \leqslant \dfrac{1}{4}$; 3) $\cos^2 x \geqslant \dfrac{1}{4}$; 4) $\mathrm{tg}\, x \leqslant 1$.

24.14. 24.4-суретте $y = f(x)$ функциясының графигі берілген. $y = f(x)$ функциясы үшін мына тұжырымдардың қайсысы ақиқат болмайтынын көрсетіңдер: 1) $f(2) = f(4)$; 2) функция $(0; 9)$ аралығында өседі; 3) функция $(2; 4)$ аралығында тұрақты; 4) $x = 2$ нүктесі минимум нүктесі; 5) функция $x \in (1; 9)$ болғанда өседі.



24.4-сурет

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Екімүше, дәрежеге шығару, қысқаша көбейту формулалары, комбинаториканың негізгі элементтері: алмастырулар, орналастырулар, терулер және олардың формулалары.

§25. ЖУЫҚТАП ЕСЕПТЕУГЕ АРНАЛҒАН НАТУРАЛ КӨРСЕТКІШТІ НЬЮТОН БИНОМЫ

Ньютон биномы, биномдық коэффициенттер; Ньютон биномының қасиеттері, Σ белгісімен танысасыңдар;
жуықтап есептеуге арналған натурал көрсеткішті Ньютон биномын қолдануды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Ньютон биномы, екімүше, дәреже, дәреженің көрсеткіші, жұп сан, тақ сан, натурал сан

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Сендер қысқаша көбейту формулаларын оқыдыңдар. Атап айтқанда, екімүшенің қосындысының квадраты $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ және екімүшенің қосындысының кубы $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$.

Екімүшенің қосындысының төртінші дәрежесінің формуласын алу үшін екімүшенің қосындысының кубы формуласы мен көпмүшені көпмүшеге көбейтуді қолданамыз: $(x + a)^4 = (x + a)^3(x + a) = (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3)(x + a) = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$.

Осылай жалғастыра отырып, екімүшенің қосындысының n-дәрежесінің формуласын алуға болады:

$$(x + a)^n = x^n + n \cdot a \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \ldots + \\ + \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot a^k \cdot x^{n-k} + \ldots + a^n. \qquad (1)$$

Енді (1)-формуланың оң жақ бөлігіндегі коэффициенттерді $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ терулер санымен алмастырсақ, (1)-формула мына түрге көшеді:

$$(x + a)^n = C_n^0 \cdot a^0 \cdot x^n + C_n^1 \cdot a^1 \cdot x^{n-1} + C_n^2 \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \ldots + \\ + C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot x^1 + C_n^n \cdot a^n \cdot x^0. \qquad (2)$$

Мұндағы $C_n^0 = 1$; $a^0 = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!}$; … ;
$C_n^k = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$; … ; $C_n^{n-1} = n$; $C_n^n = 1$; $x^{n-n} = 1$.

(1) және (2) формулалар ***Ньютон биномы*** *деп аталады.*

“Бином” сөзі француз тілінен аударғанда алгебралық екімүше дегенді білдіреді.

Ньютон биномы биномдардың дәрежесін есептеу үшін қолданылады.

Ньютон биномының формуласындағы коэффициенттер ***биномиалды коэффициенттер*** *деп аталады.*

(2)-формуланың қысқаша түрі:

$(x + a)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$, мұндағы $\sum$ қосу белгісі.

Ньютон биномының қасиеттері:

1) Ньютон биномының қосылғыштарының саны биномның дәреже көрсеткішінен бір санға артық;

2) x-тің дәреже көрсеткіші n-нен нөлге дейін кемиді, a-ның дәреже көрсеткіші нөлден n-ге дейін өседі. Әрбір қосылғыштың дәрежелерінің көрсеткіштерінің қосындысы биномның дәреже көрсеткішіне тең;

3) биномда басынан және соңынан бірдей қашықтықта орналасқан қосылғыштардың коэффициенттері өзара тең;

4) биномның кез келген мүшесі мына формула арқылы табылады:

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}, \qquad (3)$$

мұндағы k-ның мәні 0-ден n-ге дейін өзгереді;

5) егер $x = a = 1$ болса, онда $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$,

яғни Ньютон биномының коэффициенттерінің қосындысы 2^n-іне тең;

6) егер биномның дәреже көрсеткіші тақ натурал сан болса, онда бином қосылғыштарының саны жұп; егер биномның дәреже көрсеткіші жұп натурал сан болса, онда бином қосылғыштарының саны тақ болады;

7) коэффициенті ең үлкен болатын биномның қосылғышы *ортаңғы мүше* деп аталады. Егер биномның дәреже көрсеткіші тақ сан болса, онда жіктелуде екі ортаңғы мүше, ал биномның дәреже көрсеткіші жұп сан болса, онда жіктелуде бір ортаңғы мүше болады.

МЫСАЛ

1. $(x + a)^5$ өрнегінің дәрежесін көпмүше түрінде жазайық.

Шешуі. $(x + a)^5 = x^5 + 5 \cdot a \cdot x^4 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot a^2 \cdot x^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^3 \cdot x^2 +$
$+ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^4 \cdot x + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot a^5 \cdot x^0 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$.

Жауабы: $(x + a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$.

МЫСАЛ

2. $(x + a)^{25}$ биномының төртінші және жиырмасыншы мүшелерін табайық.

Шешуі. Биномның төртінші және жиырмасыншы мүшелерін табу үшін (3)-формуланы қолданамыз:

$T_{3+1} = C_{25}^3 \cdot a^3 \cdot x^{22} = 2300a^3x^{22}$ және $T_{19+1} = C_{25}^{19} \cdot a^{19} \cdot x^6 = 177100a^{19}x^6$.

Жауабы: $T_4 = 2300a^3x^{22}$; $T_{20} = 177100a^{19}x^6$.

Ньютон биномының формулаларын жуықтап есептеу үшін қолдануға болады. Көп жағдайда формуланың тұтас емес, қандай да бір бөлігі қолданылады. Атап айтқанда, егер Ньютон биномының $(x + a)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$ формуласында $a = 1$ алмастыруын енгізсе, онда келесі теңдік шығады:

$$(1 + x)^n = 1 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n. \qquad (4)$$

x-тің мәні үлкен болмаған жағдайда, яғни $|x| < 1$ болғанда x^2, x^3, ... , x^n мәндері де өте кіші болады. Сондықтан $(1 + x)^n$ өрнегінің жуық мәнін алу үшін (1)-формуладан x^2, x^3, ... , x^n мүшелері бар қосылғыштар алынып тасталады. Сонда $(1 + x)^n \approx 1 + C_n^1 x$. Мұндағы $C_n^1 = n$ болғандықтан $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.

ЕСТЕ САҚТАҢДАР

Жуықтап есептеу формуласы: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.

МЫСАЛ

3. $1{,}002^5$ өрнегінің мәнін есептейік.
Шешуі. $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ формуласын қолданамыз:
$1{,}002^5 = (1 + 0{,}002)^5 \approx 1 + 5 \cdot 0{,}002 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$.

Жауабы: $1{,}002^5 \approx 1{,}01$.

Жуықтау қателігін табамыз. Берілген өрнектің мәнін калькулятордың көмегімен есептейміз: $1{,}002^5 = 1{,}0100400801$. Сонда есептеудегі қателіктің шамалы екенін байқаймыз: $1{,}0100400801 - 1{,}01 = 0{,}0000400801$.

1. Қандай түрлендірулерде Ньютон биномы қолданылады?
2. "Бином" сөзі, $\sum$ белгісі нені білдіреді?
3. Биномдық коэффициент не болып табылады?

Жаттығулар

A

25.1. Дәрежені көпмүше түрінде жазыңдар:
1) $(x + a)^5$; 2) $(3x + 2a)^6$; 3) $(3x - a)^5$.

25.2. Биномның жіктелуіндегі x^n-нің коэффициентін табыңдар:
1) $(x + 2)^{10}$, $n = 3$; 2) $(1 - 2x)^7$, $n = 4$; 3) $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^8$, $n = -5$.

25.3. $(a + b)^{11}$ Ньютон биномының биномиалды коэффициенттерінің қосындысын табыңдар.

B

25.4. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:
1) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} kC_n^k = 0$.

25.5. $\left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ биномының жіктелуіндегі төртінші қосылғыштың үшіншісіне қатынасы $3\sqrt{2}$-ге тең болса, онда n-ді табыңдар.

25.6. Өрнектің жуық мәнін табыңдар:
1) $1{,}02^{11}$; 2) $1{,}022^{15}$; 3) $0{,}98^8$; 4) $0{,}97^{12}$.

C

25.7. $\left(2na + \frac{1}{2na^2}\right)^{3n}$ жіктелуінің биномиалды коэффициенттерінің қосындысы 64-ке тең. Құрамында a болмайтын қосылғышты табыңдар.

25.8. $\left(\frac{1}{a} + \sqrt{a}\right)^n$ биномының жіктелуіндегі бесінші қосылғышының құрамында a өрнегі болса, онда A_n^2-ні табыңдар.

25.9. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 3 \cdot C_n^3 + \ldots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$;
2) $C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 3 \cdot C_n^2 + \ldots + (n + 1) \cdot C_n^n = (n + 2) \cdot 2^{n-1}$.

ҚАЙТАЛАУ

25.10. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \sqrt{10 - 3x - x^2}$; 2) $y = \frac{x}{\sqrt{2x^2 - x - 3}}$;
3) $y = \arcsin\frac{1}{x}$; 4) $y = \arccos\sqrt{x}$.

25.11. 15-кестені толтырыңдар:

15-*кесте*

Астық өнімділігі (ц/га)	9–11	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21
Шаруашылықтар саны	4	6	11	5	3	1
Жинақталған жиілік						

1) Қанша шаруашылықтың өнімділігі 17 ц/га-дан кем емес?
2) Қанша шаруашылықтың өнімділігі ең кіші болған?
3) Шаруашылықтардың басым көпшілігінің өнімділігі қандай?

25.12. Теңдеуді шешіңдер:

1) $2\cos 2x + 2\sin x\cos 2x = 1 + \sin x$; 2) $4\sin^2 x\cos^2 x = 2$.

25.13. Футболдан болған турнирге 6 команда қатысты. Егер турнир айналма жүйе түрінде өтсе, онда барлығы қанша ойын болған?

25.14. Сыныптаға 27 оқушыдан үш оқушыны таңдап алу керек. Егер: 1) біріншісі тригонометриялық теңдеуді шығара алуы тиіс, екіншісі бор әкелуге баруы керек, үшіншісі сыныпта кезекші болуы тиіс; 2) олардың бәрі би билеуі тиіс болса, онда үш оқушыны қанша тәсілмен таңдауға болады?

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Оқиға, элементар оқиға, жиілік, салыстырмалы жиілік, ықтималдық, статистика, статистикалық ықтималдық, ықтималдықтың классикалық анықтамасы.

§26. ОҚИҒАНЫҢ ЫҚТИМАЛДЫҒЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Кездейсоқ оқиға ұғымымен, кездейсоқ оқиғаның түрлерімен танысасыңдар;
кездейсоқ оқиғаларға мысалдар келтіруді; ықтималдықтың қасиеттерін қолданып, кездейсоқ оқиғаның ықтималдығын табуды; комбинаторика формулаларын қолданып, ықтималдыққа есептер шығаруды үйренесіңдер.

Оқиғаның орындалатыны немесе орындалмайтыны туралы айтуға болатын құбылысты түсінеміз.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Кездейсоқ оқиға, мүмкін емес оқиға, ақиқат оқиға, ықтималдық, теңмүмкіндікті оқиғалар, үйлесімсіз оқиғалар, қарама-қарсы оқиғалар

МЫСАЛ **1.** 1) Таңертең жаңбыр жауады; 2) оныншы сынып оқушылары "Алгебра және анализ бастамалары" пәнін оқиды; 3) шыршада алма өседі; 4) телефон соққанда абонент бос болмайды; 5) уақыттың әр мезетіндегі телефон соғудың саны; 6) ату барысындағы нысанаға тигізу.

Тәжірибенің, бақылау мен өлшеулердің нәтижесі де оқиға болады.

МЫСАЛ **2.** 1) Лақтыру барысында тиынның "елтаңба" жағымен түсуі; 2) лақтыру барысында тиынның "сан" жағымен түсуі.

Тәжірибе жүргізу дегеніміз қарастырылатын оқиғалардың (нәтиженің) орындалу немесе орындалмау шарттарының жиыны.

Шарттар жиыны бірнеше рет қайталанған жағдайда *тәжірибелер топтамасы* туралы айтылады.

Оқиғалар A, B, C және т.б. әріптерімен белгіленеді.

Оқиғалар ақиқат, кездейсоқ және мүмкін емес оқиғаларға бөлінеді.

Оқиғалар		
Ақиқат	Кездейсоқ	Мүмкін емес
Тәжірибе барысында міндетті түрде орындалатын оқиға ақиқат оқиға деп аталады.	Тәжірибе барысында орындалатын немесе орындалмайтын оқиға кездейсоқ оқиға деп аталады.	Тәжірибе барысында орындалмайтын оқиға мүмкін емес оқиға деп аталады.

МЫСАЛ **3.** Кездейсоқ оқиғалардың мысалы болатын оқиға:
1) тиынды лақтыру барысында "елтаңба" жағымен түсуі бір жағдайларда орындалатын тәжірибемен, екінші бір жағдайларда орындалмайтын тәжірибелермен байланысты;

2) "таңертең жаңбыр жауады" оқиғасының бір жағдайларда орындалуы, екінші бір жағдайларда орындалмауы ауа райына байланысты.

Ақиқат оқиғаның мысалы болатын оқиға:
1) "оныншы сынып оқушылары "Алгебра және анализ бастамалары" пәнін оқиды";
2) "күзден кейін қыс келеді".

Мүмкін емес оқиғаның мысалы болатын оқиға:
1) "бес теңгелік тиынды лақтырғанда екі теңгелік тиын түседі";
2) "маусымнан кейін қаңтар болады".

Тәжірибе нәтижесінде түрлі кездейсоқ оқиғалар болуы мүмкін. "Ойын сүйегін лақтырғанда төрт саны түсті" оқиғасы элементар оқиға болады. Себебі оны жай оқиғаларға бөлуге болмайды. "Ойын сүйегін лақтырғанда тақ сан түсті" оқиғасы элементар оқиға болмайды, себебі оны одан жай оқиғаларға бөлуге болады. Атап айтқанда келесі оқиғаларға бөлуге болады: "Ойын сүйегін лақтырғанда бір саны түсті", "Ойын сүйегін лақтырғанда үш саны түсті", "Ойын сүйегін лақтырғанда бес саны түсті".

Анықтама. *__Элементар оқиға__ деп жай оқиғаларға бөлуге болмайтын оқиғаны айтады.*

Анықтама. *Тәжірибе нәтижесінде ізделінді оқиғаның орындалуын __қолайлы нәтиже__ деп атайды.*

МЫСАЛ

4. Сыныпта 25 оқушы бар. Оның 17-сі ер бала. *A* оқиғасы: "Кездейсоқ таңдалған оқушы ер бала болды". *A* оқиғасын беретін қолайлы нәтиже саны 17-ге тең.

Егер қандай да бір жиыннан бір элемент таңдалып, қалған элементтерге таңдалған элементпен салыстырғанда артықшылық берілмесе, онда жиынның әр элементіне таңдалуға тең мүмкіндік қамтамасыз етіледі (тең мүмкіндік қағидасы). Мұндай оқиғалар *теңмүмкіндікті оқиғалар* деп аталады.

Анықтама. *Орындалуына бәріне бірдей мүмкіндік берілетін тәжірибелер нәтижесі __теңмүмкіндікті нәтижелер__ деп аталады.*

МЫСАЛ

5. Теңмүмкіндікті оқиғалардың мысалы:
A: "Ойын сүйегін лақтырғанда 1 саны түсті";
B: "Ойын сүйегін лақтырғанда 2 саны түсті";
C: "Ойын сүйегін лақтырғанда 3 саны түсті";
D: "Ойын сүйегін лақтырғанда 4 саны түсті";
E: "Ойын сүйегін лақтырғанда 5 саны түсті";
F: "Ойын сүйегін лақтырғанда 6 саны түсті".

Тәжірибе барысында екі оқиға бірдей орындалатын болса, онда мұндай оқиғалар *үйлесімді оқиғалар* деп аталады.

Тәжірибе барысында екі оқиғаның біреуі екіншісінің орындалуын жоққа шығарса, онда мұндай оқиғалар *үйлесімсіз оқиғалар* деп аталады.

МЫСАЛ

6. Екі мерген нысанаға атқандағы үйлесімді оқиғалар:
A: "Бірінші мергеннің нысанаға тигізуі";
B: "Екінші мергеннің нысанаға тигізуі".

Ойын сүйегін бір рет лақтырғандағы үйлесімсіз оқиғалар:
A: "Ойын сүйегін лақтырғанда 5 санының түсті";
B: "Ойын сүйегін лақтырғанда 6 санының түсті".

Анықтама. *A оқиғасы орындалмағанда пайда болатын оқиға A оқиғасына **қарама-қарсы** оқиға деп аталады.*

A оқиғасына қарама-қарсы оқиғаның белгіленуі: $\overline{A}$.

МЫСАЛ

7. Қарама-қарсы оқиғалар жұбы:

— "Атқан кезде нысанаға тигізу" және "Атқан кезде нысанаға тигізбеу";

— "Жүйенің барлық элементтерінің бірдей жұмыс атқаруы" және "Жүйенің бір элементінің жұмыс істемеуі";

— "Лақтырғанда тиынның "елтаңба" жағымен түсуі" және "Лақтырғанда тиынның "сан" жағымен түсуі".

Жасыл, сары және көк шарлары бар жәшіктен бір шар алу тәжірибесі барысында орындалған "Жәшіктен көк шар алынды" оқиғасына қарама-қарсы оқиға "Жәшіктен алынған шар көк емес", яғни сары немесе жасыл шар алынды.

Ақиқат оқиғаның белгілеуі: U.
Мүмкін емес оқиғаның белгілеуі: V.

$$\overline{U} = V,\ \overline{V} = U.$$

Іс жүзінде бір жағдайда бір емес бірнеше тәжірибе жүргізіледі. Тәжірибелер саны көп болуы мүмкін. Қандай да бір оқиғаның пайда болуының жиілігін анықтау үшін тәжірибелер санын ұлғайтады.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Мысалы, n тәжірибе барысында қандай да бір оқиға k рет орындалсын. Онда бақыланып отырған оқиғаның жиілігі $\frac{k}{n}$-ге тең болады.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Оқиғаның пайда болу санының жүргізілген тәжірибелер санына қатынасы *оқиғаның жиілігі* деп аталады.

Неліктен кез келген оқиғаның жиілігі 0 мен 1-дің аралығында орналасқан? Мүмкін емес және ақиқат оқиғаның жиілігін табыңдар.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Егер тәжірибе нәтижелерінің пайда болу мүкіндіктері тең және өзара тәуелсіз болса, онда A оқиғасының орындалуына қолайлы нәтижелер санының барлық нәтижелер санына қатынасы *A оқиғасының пайда болу ықтималдығы* деп аталады.

Ықтималдық латын әліпбиінің P бас әрпімен белгіленеді (мүмкіндік, ықтималдық деген мағына беретін француз тілінің "probabilite" сөзінің бірінші әрпінен алынған).

A оқиғасының ықтималдығы $P(A)$ символымен белгіленеді.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

A оқиғасының ықтималдығы төмендегі формуламен есептеледі: $P(A)=\frac{m}{n}$, мұндағы $m \leqslant n$; $m, n \in N$, m — тәжірибенің A оқиғасына қолайлы нәтиже лер саны, n — барлық нәтижелер саны.

МЫСАЛ

8. Тиынды лақтырғанда A — "елтаңба жағының түсуі" және B — "сан жағының түсуі" болса, онда $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}5$ немесе $P(A) = 50\%$, $P(B) = 50\%$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неге A оқиғасының ықтималдығы оның жиілігіне ұқсас 0 мен 1 сандарының арасында жатады: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$?

МЫСАЛ

9. Ойын сүйегін лақтырғанда X — "жай санның түсуі" оқиғасының ықтималдығын табайық.

Шешуі: X оқиғасының ықтималдығын табу үшін келесі формуланы қолданамыз: $P(X)=\frac{m}{n}$, m — тәжірибенің A оқиғасына қолайлы нәтижелер саны, n — барлық нәтижелер саны.

Тәжірибе нәтижесінде 1; 2; 3; 4; 5; 6 сандары түсуі мүмкін және осы сандардың ішінде жай сандар тек 2; 3; 5, сондықтан $n = 6$, $m = 3$. Олай болса, $P(X)=\frac{3}{6}=0{,}5$.

Жауабы: 0,5.

МЫСАЛ

10. Қорапта 10 ақ және 8 қызыл шар бар. Кездейсоқ 8 шар алынды. Алынған шарлардың екеуі ақ, біреуі қызыл шар болуының ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. Оқиғаның ықтималдығын табу үшін n және m мәндерін табу керек. Элементар оқиғалардың жалпы саны $n = C_{18}^{3}$, $m = C_{10}^{2} \cdot C_{8}^{1}$, өйткені 10 ақ шар мен 8 қызыл шардан алынады.

Енді классикалық ықтималдықтың анықтамасын қолданамыз: $P=\frac{m}{n}$.

Демек, $P(A)=\frac{C_{10}^{2}\cdot C_{8}^{1}}{C_{18}^{3}}=\frac{10!}{2!\cdot 8!}\cdot\frac{8!}{1!\cdot 7!}\cdot\frac{3!\cdot 15!}{18!}=\frac{15}{34}$.

Жауабы: $\frac{15}{34}$.

Ықтималдықтың қасиеттері

1-қасиет. *Ақиқат оқиғаның* ықтималдығы 1-ге тең.

2-қасиет. Мүмкін емес немесе *жалған оқиғаның* ықтималдығы 0-ге тең.

3-қасиет. Толық топты құрайтын оқиғаның ықтималдығы 1-ге тең.

4-қасиет. *Қарама-қарсы оқиғаның* ықтималдығы 1 мен берілген оқиға ықтималдығының айырмасына тең, яғни $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Оқиғаның ықтималдығының маңыздылығы — оқиғаның ықтималдығын тәжірибе жасамай-ақ, логикалық талдаулар жасау арқылы табуға болады.

1. Қандай жағдайларда оқиғаның ықтималдығын тәжірибе жасамай-ақ табуға болады?
2. Оқиғаның ықтималдығы қандай мәндерге тең бола алады?

Жаттығулар

А

26.1. Ойын сүйегін лақтырған кезде 1-ден 6-ға дейінгі сандар түседі. Төмендегі оқиғалардың ықтималдықтарын табыңдар:
1) 2 санының түсуі;
2) 1 немесе 2 санының түсуі;
3) 4 немесе 6 санының түсуі;
4) жұп санның түсуі.

26.2. а) Қорапшада 2 ақ және 5 қызыл шар бар. Қорапшадан кездейсоқ алынған бір шардың: 1) ақ; 2) қызыл; 3) жасыл болуының ықтималдығын табыңдар.

ә) Қорапшада 3 қызыл және 9 көк шар бар. Қорапшадан кездейсоқ алынған бір шардың: 1) ақ емес; 2) қызыл; 3) көк болуының ықтималдығын табыңдар.

26.3. Тәжірибе: ойын сүйегі лақтырылды. A, B, және C оқиғаларын қарастырайық. A = {ойын сүйегінің жоғарғы жағындағы сан 12-ге бөлінеді}, B = {ойын сүйегінің жоғарғы жағындағы сан 2-ге тең}, C = {ойын сүйегінің жоғарғы жағындағы сан 2-ге бөлінеді}. Төмендегі теңдіктердің қайсысы дұрыс? Жауаптарыңды түсіндіріңдер:
1) $P(A) = 1$;
2) $P(A) = 0$;
3) $P(C) = 0{,}5$;
4) $P(\bar{B}) = \frac{5}{6}$;
5) $P(B) = \frac{1}{6}$.

26.4. 1) Сыныпта 25 оқушы бар. Олардың ішінде 5 оқушы "өте жақсы", 12 оқушы "жақсы", 6 оқушы "қанағаттанарлық" деген бағаға, ал 2 оқушының үлгерімі "төмен". Сыныптан кездейсоқ таңдап алынған бір оқушы бағасының "өте жақсы" немесе "жақсы" болуының ықтималдығын табыңдар.

2) 25 емтихан билетінің ішінде 5 "жеңіл" билет бар. Екі оқушы кезекпен бір билеттен алады. Бірінші оқушының "жеңіл" билетті алуының ықтималдығын табыңдар.

26.5. 100 лотерея билетінің 15-інде ұтыс бар. Бір билет сатып алынған. Сатып алынған билетте:
1) ұтыс болуының; 2) ұтыс болмауының ықтималдығын табыңдар.

B

26.6. Екі ойын сүйегі лақтырылды. Түскен сандардың көбейтіндісі 1) 5; 2) 6 санына тең болуының ықтималдығын табыңдар.

26.7. 1) Бір тиын екі рет лақтырылды. Ең болмағанда бір рет “елтаңба” жағымен түсуінің ықтималдығын табыңдар.
2) Бір тиын үш рет лақтырылды. Екі рет “елтаңба” жағымен түсуінің ықтималдығын табыңдар.

26.8. 16-кестеде бір күн ішінде Алматыдан шығатын пойыздарға сатылған билеттер жөнінде мәліметтер келтірілген.

16-*кесте*

Пойыздың типі	Жүйрік пойыз	Жүрдек пойыз	Жолаушылар пойызы	Қала маңына қатынайтын пойыз
Бір күнде сатылған билеттер саны	150	445	734	896

Кезекті жолаушы: 1) жүйрік пойызға; 2) жолаушылар пойызына; 3) қала маңына қатынайтын пойызға билет сатып алуының ықтималдығын табыңдар.

26.9. Емтиханға 1-ден 25-ке дейін нөмірленген билеттер дайындалған. Бір оқушының кездейсоқ алған билетінің нөмірі: 1) бір орынды сан; 2) екі орынды сан болуының ықтималдығын табыңдар.

26.10. Кездейсоқ екітаңбалы сан таңдап алынды. Төмендегі оқиғалардың ықтималдықтарын табыңдар: 1) алынған сан 0-мен аяқталады; 2) алынған сан бірдей цифрлардан құралған; 3) алынған сан 27-ден артық, 46-дан кем; 4) алынған сан бүтін санның квадраты болмайды.

C

26.11. 100 лотерея билетінің 10 билетінде ұтыс бар. Бес билет сатып алынған. Сатып алынған билеттердің арасында екеуі ұтысы бар билеттер болуының ықтималдығын табыңдар.

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

26.12. XVII ғасырдың ортасына дейін кездейсоқ құбылыстарды зерттеу тек сандық сипатта болды.
XIX ғасырда ықтималдықтар теориясы практикалық қолданысы бар есептерді шығару үшін пайдаланыла бастады.
Қазіргі уақытта ықтималдықтар теориясы әртүрлі процестер мен құбылыстар анализінде қолданылады. Ықтималдықтар теориясы біртекті қоғамдық құбылыстар бағынатын сандық заңдылықтарды зерттейді, сондықтан қоғамдық құбылыстарды болжауға мүмкіндік береді.

ҚАЙТАЛАУ

26.13. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\arcsin(2 - x) = -\frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos(1 - 2x) = \frac{\pi}{2}$.

26.14. Шахмат турниріне 10 ойыншы қатысты. Егер турнир дөңгелек тәртіппен ұйымдастырылса, онда барлығы қанша ойын болды?

26.15. Сыныпта барлығы 27 оқушы, оның ішінде қыз балалардың саны 15. Жеңіл атлетикадан жарысқа қатысу үшін бір оқушыны таңдау керек. Таңдап алынған оқушының: 1) ер бала; 2) қыз бала болуының ықтималдығын табыңдар.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Сынақ, оқиға, кездейсоқ оқиға, кездейсоқ оқиғаның жиілігі, ықтималдық, статистика, статистикалық мәліметтер, бас жиынтық, таңдама, статистикалық қорытынды.

§ 27. ШАРТТЫ ЫҚТИМАЛДЫҚ. ЫҚТИМАЛДЫҚТАРДЫ ҚОСУ ЖӘНЕ КӨБЕЙТУ ЕРЕЖЕЛЕРІ

? Шартты ықтималдық, ықтималдықтарды қосу және көбейту ережелерімен танысасыңдар; ықтималдықтар теориясының ықтималдықтарды қосу және көбейту ережелерін қолдануды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Оқиғалар қосындысы, оқиғалардың көбейтіндісі, шартты ықтималдық

1. Үйлесімсіз оқиғалардың қосындысының ықтималдығы

Анықтама. *А немесе В оқиғаларына тиісті болатын элементар оқиғалардан құралған оқиға* ***А және В оқиғаларының қосындысы*** *деп аталады және А + В символымен белгіленеді.*

МЫСАЛ

1. Қорапшада 30 шар бар: 15 қызыл, 10 көк, 5 жасыл. Кездейсоқ алынған бір шардың жасыл болмауының ықтималдығын табыңдар (*А* оқиғасы).

Егер алынған шар қызыл (*В* оқиғасы) немесе көк түсті (*С* оқиғасы) болса, онда *А* оқиғасы орындалады, яғни *А* оқиғасы үйлесімсіз *В* және *С* оқиғаларының қосындысына тең. Сондықтан $P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} = \frac{5}{6}$.

Жауабы: $\frac{5}{6}$.

Анықтама: *А және В оқиғаларына тиісті болатын элементар оқиғалардан құралған оқиға* ***А және В оқиғаларының көбейтіндісі*** *деп аталады және АВ символымен белгіленеді.*

МЫСАЛ 2. Егер тиын мен ойын сүйегін бірге лақтырса, онда тиын "елтаңба" жағымен және ойын сүйегінде "5" санының түсуінің ықтималдығын табыңдар.

"Елтаңба" түсуінің ықтималдығы $\frac{1}{2}$, "5" санының түсуінің ықтималдығы $\frac{1}{6}$.

Осы екі оқиғаның көбейтіндісінің ықтималдығы: $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Жауабы: $\frac{1}{12}$.

Егер m – A оқиғасына қолайлы, орындалу мүмкіндіктері бірдей элементар оқиғалар саны, k – A оқиғасымен үйлесімді емес B оқиғасына қолайлы, орындалу мүмкіндіктері бірдей элементар оқиғалар саны, n — толық топты құрайтын орындалу мүмкіндіктері бірдей барлық элементар оқиғалар саны болса, онда $P(A) = \frac{m}{n}$, және $P(B) = \frac{k}{n}$.

$A + B$ оқиғасының анықтамасы "A немесе B орындалады" деген мағынаны береді. Мұндай оқиғаға қолайлы, орындалу мүмкіндіктері бірдей элементар оқиғалар саны $m + k$, сондықтан $P(A + B) = \frac{m + k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n}$, яғни $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

ЕСТЕ САҚТАҢДАР

Соңғы теңдік оқиғалардың кез келген саны үшін дұрыс болады.

ЕСТЕ САҚТАҢДАР

Өзара үйлесімсіз оқиғалардың қосындысының ықтималдығы олардың ықтималдықтарының қосындысына тең.

2. Үйлесімсіз оқиғалардың қосындысының ықтималдығы

m – A оқиғасына қолайлы, орындалу мүмкіндіктері бірдей элементар оқиғалар саны, k – B оқиғасына қолайлы, орындалу мүмкіндіктері бірдей элементар оқиғалар саны және $m + k$ элементар оқиғаларының ішінде A оқиғасына да, B оқиғасына да қолайлы элементар оқиғалар саны, q, n — толық топты құрайтын орындалу мүмкіндіктері бірдей барлық элементар оқиғалар саны болсын. Онда $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(B) = \frac{k}{n}$, $P(AB) = \frac{q}{n}$.

$A + B$ жазуы: "A оқиғасы немесе B оқиғасы немесе екеуі де" орындалатынын білдіреді. Мұндай оқиғаға $(m + k - q)$ элементар оқиға қолайлы болып табылады. Сондықтан:

$$P(A + B) = \frac{m + k - q}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{q}{n}, \text{ яғни } P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Бұл формула $P(A + B) = P(A) + P(B)$ формуласының жалпыламасы болып табылады.

ЕСТЕ САҚТАҢДАР

Өзара үйлесімсіз екі оқиғаның қосындысының ықтималдығы олардың бірдей орындалу ықтималдығын алмағандағы осы екі оқиғаның ықтималдықтарының қосындысына тең.

МЫСАЛ

3. Бір тәжірибе нәтижесінде орындалатын бір-бірімен байланысты екі оқиғаны қарастырайық.

Тәжірибе: Қорапта 3 ақ, 2 қара шар бар. Әуелі кездейсоқ бір шар, содан кейін кездейсоқ тағы бір шар алынды.

A оқиғасы: бірінші алынған шардың түсі ақ.

B оқиғасы: екінші алынған шардың түсі ақ.

A оқиғасының ықтималдығын, яғни $P(A)$-ны табайық.

Анықтама бойынша: егер тәжірибе нәтижелерінің пайда болу мүкіндіктері тең және өзара тәуелсіз болса, онда A оқиғасының орындалуына қолайлы нәтижелер m санының барлық нәтижелердің n санына қатынасы A *оқиғасының пайда болу ықтималдығы* деп аталады, яғни $P(A) = \frac{m}{n}$. Яғни m және n сандарын табамыз.

Егер қораптан бірінші шар алынса, онда $m = 3$, $n = 5$ болады, сондықтан $P(A) = \frac{3}{5}$.

Егер A оқиғасы орындалса, онда қорапта 2 ақ, 2 қара шар қалады. Онда B оқиғасының орындалу ықтималдығы: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Егер A оқиғасы орындалмаса, онда қорапта 3 ақ, 1 қара шар қалады. Онда B оқиғасының орындалу ықтималдығы: $\frac{3}{4}$. Сонымен, B оқиғасының орындалу ықтималдығы A оқиғасының орындалуы немесе орындалмауына тәуелді болады екен. Мұндай жағдайда:

1) B оқиғасы A оқиғасынан тәуелді;

2) B оқиғасының орындалу ықтималдығы *шартты* деп аталады.

Анықтама. *Бір оқиғаның орындалғаны белгілі болған жағдайда екінші оқиғаның орындалу ықтималдығы* ***шартты ықтималдық*** *деп аталады.*

Белгіленуі: A оқиғасының орындалғаны белгілі болған жағдайда B оқиғасының орындалуының шартты ықтималдығы $P(B/A)$ символымен белгіленеді.

Біздің мысалда $P(B/A) = \frac{1}{2}$.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

$P(A/B)$ жазуы нені білдіреді?

Жоғарыдағы мысалға оралайық. Алынған екі шардың да ақ болуының, яғни A және B оқиғаларының көбейтіндісінің ықтималдығын табайық. Берілген мысалда A және B оқиғалары тәуелді оқиғалар: B оқиғасының орындалу ықтималдығы A оқиғасының орындалуына немесе орындалмауына тәуелді. Тәуелді оқиғалардың ықтималдықтарын есептеу формуласын әзірге білмейміз. Осы формуланы қорытып шығарайық.

A оқиғасы (бірінші алынған шар ақ) орындалған жағдайда B оқиғасының (екінші шардың ақ болуы) орындалу ықтималдығын, яғни $P(B/A)$ шамасын табу үшін A және B оқиғаларының екеуіне де (бірінші алынған шар да, екінші алынған шар да ақ) қолайлы элементар оқиғалар санын және ақ шарлардың санын білу керек. AB оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар саны d, A оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар саны m және барлық элементар оқиғалар саны n болсын. Сонда

$$P(B/A) = \frac{d}{m} = \frac{\frac{d}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (1)$$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (2)$$

теңдігінің орындалатынына көз жеткізіңдер.

Анықтама. *AB оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар санының B оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар санына қатынасы B оқиғасы орындалған жағдайда* ***A оқиғасының шартты ықтималдығы*** *деп аталады (B оқиғасының шартты ықтималдығының анықтамасына ұқсас).*

(1) және (2) формулаларын қолдансақ:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A), \qquad (3)$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B). \qquad (4)$$

Ереже: Екі оқиғаның көбейтіндісінің ықтималдығы бірінші оқиғаның ықтималдығы мен екінші оқиғаның бірінші оқиға орындалған жағдайдағы шартты ықтималдығының көбейтіндісіне тең.

Өзіміздің мысалға оралайық. Алынған екі шардың да ақ түсті болуының ықтималдығын, яғни $P(AB)$ шамасын табайық. (3)-формуланы және жоғарыда табылған $P(A) = \frac{3}{5}$ және $P(A/B) = \frac{1}{2}$ мәндерін ескерсек:

$$P(AB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Егер A және B оқиғалары өзара тәуелсіз болса, онда

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (5)$$

Ереже: Екі өзара тәуелсіз оқиғалардың ықтималдығы олардың ықтималдықтарының көбейтіндісіне тең болады.

МЫСАЛ

4. Бір тәжірибе нәтижесінде орындалатын бір-бірімен байланысты екі оқиғаны қарастырайық. Екі ойын сүйегі лақтырылды. Бір ойын сүйегінде “3” санының түсуінің, екінші ойын сүйегінде жұп санның түсуінің ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. Келесі оқиғаларды қарастырайық:

A оқиғасы: бір ойын сүйегінде “3” санының түсуі.

B оқиғасы: екінші ойын сүйегінде жұп санның түсуі.

ТҮСІНДІРІҢДЕР

Неге A және B оқиғалары өзара тәуелсіз болады?

МЫСАЛ 5. Ойын сүйегін лақтырғандағы барлық мүмкін жағдай саны 6. Себебі 1, 2, 3, 4, 5, 6 сандарының біреуі түсуі мүмкін. Сондықтан $P(A) = \frac{1}{6}$. 1, 2, 3, 4, 5, 6 сандарының үшеуі жұп болғандықтан, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Есептің шарты бойынша бір уақытта екі ойын сүйегін лақтырады, сондықтан $P(AB)$ шамасын табамыз. A және B өзара тәуелсіз болғандықтан, $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Жауабы: $\frac{1}{12}$.

1. Қандай жағдайда оқиғаның ықтималдығын тәжірибе жасамай-ақ табуға болады?
2. Оқиғаның ықтималдығы қандай мәндерге тең бола алады?
3. Өзара үйлесімсіз оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысын есептеу мен өзара тәуелсіз оқиғалардың ықтималдықтарының көбейтіндісін есептеудің ұқсастығы неде?

Жаттығулар

А

27.1. Кез келген ретпен екі P әрпі және екі H әрпі жазылған.
1) P әрпі соңғы жазылған; 2) H әрпі екінші жазылған;
3) H әрпі бірінші жазылған жағдайда екі H әрпі қатар тұруының ықтималдығын табыңдар.

27.2. 100 лотерея билеттерінің ішінде 10 билет ұтыс билеті болып табылады.
1) Кездейсоқ алынған екі билет ұтыс билеттері болуының ықтималдығын табыңдар.
2) Кездейсоқ алынған екі билеттің тек біреуі ұтыс билеті болуының ықтималдығын табыңдар.

27.3. Қорапта төрт шар бар: көк, жасыл және екі қызыл. Қораптан кездейсоқ екі шар алынады.
1) Алынған екі шардың қызыл болуының;
2) бірінші алынған шардың жасыл, екінші алынған шардың қызыл болуының ықтималдығын табыңдар.

27.4. Бірінші қорапта 6 қызыл және 4 сары, екінші қорапта 5 қызыл, 5 сары шар бар. Әуелі кездейсоқ бір қорап таңдап алынады, содан кейін таңдап алынған қораптан кездейсоқ бір шар алынады.

1) Алынған шардың қызыл болуының; 2) алынған шардың екінші қораптан алынған болуының ықтималдығын табыңдар.

27.5. Екі атқыш нысанаға бір-бірден оқ атады. Бірінші атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы 0,7, екінші атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы 0,7. Екі атқыштың да нысанаға оқ тигізу ықтималдығын табыңдар.

27.6. 100 лотерея билеттерінің ішінде 10 билет ұтыс билеті болып табылады. Осы билеттердің ішінен кездейсоқ 3 билет сатып алынады. A, B, C, оқиғаларын келесі түрде анықтайық: A – бірінші билет ұтады; B – екінші билет ұтады; C – үшінші билет ұтады. Тек үшінші билеттің ұтуының ықтималдығын табыңдар.

27.7. Екі қораптың әрқайсысында 5 текше бар: 2 көк, жасыл, ақ және қызыл. Әуелі, кездейсоқ бір қорап таңдап алынады, содан кейін таңдап алынған қораптан кездейсоқ бір текше таңдап алынады. 1) Алынған текшенің ақ болуының; 2) екінші қорап таңдап алынып, одан алынған текшенің көк болуының ықтималдығын табыңдар.

27.8. Кілтті бұраған кезде қозғалтқыштың іске қосылуының ықтималдығы 0,9. Қозғалтқыш оталу үшін кілтті ең көп дегенде 3 рет бұрау ықтималдығын табыңдар.

B

27.9. Үш станокта жұмыс істеп отырған оператор белгілі бір уақытқа үзіліс жасады. Станоктардың осы уақытта жұмысшыны қажет етпеуінің ықтималдықтары 0,7; 0,8; 0,8. Оператор болмаған кезде бірде-бір станоктың жұмысшыны қажет етпеуінің ықтималдығын табыңдар.

27.10. Кернеуді арттырған кезде тізбектей жалғанған үш құрылғының істен шығу ықтималдықтары — 0,4; 0,3; 0,5. Кернеу артқан кезде электр тізбегінің істен шықпауының ықтималдығын табыңдар.

27.11. 1) Нысанаға екі атқыш бір мезетте оқ атты. Бірінші атқыштың нысанаға оқ тигізу ықтималдығы 0,7, екінші атқыштың тигізу ықтималдығы 0,8. Екеуі қатар атқан кезде тек бір атқыштың тигізу ықтималдығын табыңдар.
2) Екі атқыш бір-бірінен тәуелсіз нысаналарға оқ атты. Бірінші атқыштың нысанаға оқ тигізу ықтималдығы 0,9, екінші атқыштың тигізу ықтималдығы 0,8. Нысанаға ең болмағанда бір атқыштың оқ тигізу ықтималдығын табыңдар.

27.12. 100 лотерея билетінің ішінде 20 ұтыс билеті бар.
1) Кездейсоқ алынған үш билеттің барлығы ұтыс билеттері болуының ықтималдығын табыңдар.
2) Кездейсоқ таңдап алынған екі билеттің ішінде ұтыс билеттері болуының ықтималдығын табыңдар.

27.13. Бір уақытта екі ойын сүйегі лақтырылды. Түскен сандардың: 1) екеуі де 2; 2) 3 және 4 болуының ықтималдықтарын табыңдар.

27.14. Өндіріс орнында дайындалған тетіктің іске жарамды болуының ықтималдығы $\frac{92}{100}$. Іске жарамды тетіктердің ішінен кездейсоқ алынған тетіктің бірінші сортты болу ықтималдығы $\frac{72}{100}$. Барлық тетіктердің ішінен кездейсоқ алынған тетіктің бірінші сортты болуынынң ықтималдығын табыңдар.

27.15. Жәшікте 2 ақ, 3 қызыл, 5 жасыл шар бар. Жәшіктен кездейсоқ алынған шардың: 1) қызыл немесе жасыл; 2) ақ немесе қызыл болуының ықтималдығын табыңдар.

C

27.16. 1) Қорапта 7 ақ, 3 қызыл шар бар. Қораптан кездейсоқ екі шар алынады. Бірінші ақ немесе қызыл бір шар алынғаннан кейін алынған екінші шардың ақ болуының ықтималдығын табыңдар.
2) Қорапта 30 шар бар. Оның ішінде 1 ақ, 5 қызыл, 10 көк, 14 жасыл шар. Қораптан кезекпен үш шар алынады, бірақ қорапқа қайта салынбайды. Бірінші алынған шардың қызыл, екінші шардың көк, үшінші шардың жасыл болуының ықтималдығын табыңдар.

27.17. Егер оқушы қойылған екі сұрақтың біреуіне жауап берсе, онда ол емтиханды тапсырған болып есептеледі. Емтиханға барлығы 40 сұрақ дайындалған, оқушы ол сұрақтардың ішінде 8 сұрақтың жауабын білмейді. Оқушының емтиханды тапсыруының ықтималдығын табыңдар.

27.18. 10 лотерея билетінің ішінде 4 билет ұтыс билеті болып табылады. Кездейсоқ сатып алынған 4 билеттің ең болмағанда біреуі ұтыс билеті болуының ықтималдығын табыңдар.

27.19. Үш дос кездесуге келісті. Олардың кездесуге келулерінің ықтималдықтары $p_1 = 0,8$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,7$. Кездесуге үшеуінің екеуі немесе үшеуінің де келуінің ықтималдығын табыңдар.

27.20. 1) Бес парақшада і, к, п, а, т әріптері жазылған. Парақшаларды кезекпен алып, алынған ретпен орналастырады. Нәтижесінде "кітап" сөзінің пайда болу ықтималдығын табыңдар.

2) Тоғыз парақшада д, а, а, а, с, т, р, х, н әріптері жазылған. Парақшаларды кезекпен алып, алынған ретпен орналастырады. Нәтижесінде "дастархан" сөзінің пайда болу ықтималдығын табыңдар.

27.21. Құрылғыны жинау үшін үш станоктан шыққан тетіктер қажет. Бірінші, екінші, үшінші станоктардан шыққан тетіктердің жарамсыз болу ықтималдығы сәйкес 0,002, 0,003, 0,004. Егер құрылғыны жинауға бірінші станоктан 250 тетік, екінші станоктан 200 тетік, үшінші станоктан 100 тетік алынған болса, осы тетіктердің арасында жарамсыз тетік бар болуының ықтималдығын табыңдар.

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

27.22. 1718 жылы шартты ықтималдық ұғымын енгізген және ықтималдықтарды көбейту теоремасын келтірген ағылшын математигі А. Муавр болып табылады.

Абрахам де Муавр
(1667—1754)

ҚАЙТАЛАУ

27.23. Екі ойын сүйегін лақтырған кезде төмендегі оқиғалар қандай оқиғалар болып табылады (жалған, ақиқат немесе кездейсоқ):
1) бірінші ойын сүйегінде 5 түсті, екіншісінде 1 түсті;
2) екі ойын сүйегінде түскен сандардың қосындысы 1-ге тең;
3) екі ойын сүйегінде түскен сандардың қосындысы 11-ге тең;
4) екі ойын сүйегінде түскен сандардың қосындысы 14-тен кем?

27.24. Қазақ тілі оқулығының кез келген бетін ашып, сол жақ бетіндегі екінші сөз таңдап алынады. Төмендегі оқиғалардың түрлерін анықтаңдар: 1) таңдап алынған сөз "Ә" немесе "Қ" әрпінен басталады; 2) таңдап алынған сөз "Б" әрпінен басталады.

27.25. 1) "Таң атты"; 2) "бүгін кесте бойынша 10 сабақ"; 3) "бүгін 1 қаңтар"; 4) "Алматы қаласында ауа температурасы +35°" оқиғалары арқылы үйлесімді оқиғалар жұбын және үйлесімсіз оқиғалар жұбын құрыңдар.

27.26. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:
1) $x^3 - 3x + 2$; 2) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$; 3) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$.

27.27. Берілген цифрлар ішінен кездейсоқ алынған цифрдың жұп болу ықтималдығын табыңдар:
1) 1; 2; 3; 6; 7; 9; 2) 0; 3; 4; 5; 6; 7; 9.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Оқиға, үйлесімсіз оқиға, ықтималдық, статистика, статистикалық мәліметтер, бас жиынтық, таңдама, статистикалық қорытынды.

§28. ТОЛЫҚ ЫҚТИМАЛДЫҚ ФОРМУЛАСЫ. БАЙЕС ФОРМУЛАСЫ

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Толық ықтималдық формуласы, Байес формуласы, апостериорлы ықтималдық, априорлы ықтималдық.

Толық ықтималдық, Байес формулаларымен танысасыңдар; оларды есептер шығаруда қолдануды үйренесіңдер.

Егер A оқиғасы үйлесімсіз оқиғалардың толық тобын құрайтын B_1, B_2, ..., B_n оқиғаларының бірі орындалғанда орындалатын болса, онда A оқиғасының ықтималдығы төмендегі формуламен есептеледі:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \dots + P(B_n)P(A/B_n).$$

ЕСТЕ САҚТАҢДАР

Бұл формула *толық ықтималдық формуласы* деп аталады.

МЫСАЛ

1. Дүкенге үш өндіріс орнынан жаңа тауар түсті. Барлық өнімнің: бірінші түрдегі тауар — 20%, екінші түрдегі тауар — 30%, үшінші түрдегі тауар — 50% құрайды. Жоғарғы сұрыпты тауардың үлесі: бірінші өндіріс орнында — 10%, екінші өндіріс орнында — 5%, үшінші өндіріс орнында — 20%. Кездейсоқ сатып алынған тауардың жоғарғы сұрыпты болуының ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. Сатып алынған тауардың бірінші сұрыпты болуын B, ол тауардың бірінші, екінші, үшінші өндіріс орындарынан сатып алынуын, сәйкес A_1, A_2, A_3, символдарымен белгілейік. Онда

$P(A_1) = 0{,}2;$ $P(B/A_1) = 0{,}1;$

$P(A_2) = 0{,}3;$ $P(B/A_2) = 0{,}05;$

$P(A_3) = 0{,}5;$ $P(B/A_3) = 0{,}2.$

Табылған мәндерді толық ықтималдық формуласына қойсақ:

$$P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}135.$$

Жауабы: 0,135.

Ықтималдықтары сәйкес $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_n)$ болатын B_1, B_2, ..., B_n үйлесімсіз оқиғаларының толық тобын қарастырайық.

A оқиғасы *гипотезалар* деп аталатын B_1, B_2, ..., B_n оқиғаларының кемінде біреуімен қатар орындалатын болсын.

Онда толық ықтималдық формуласы бойынша:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \dots + P(B_n)P(A/B_n).$$

A оқиғасының орындалуы гипотезалардың $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_n)$ ықтималдықтарының мәндерін өзгертеді. Ықтималдықтарды көбейту формуласы бойынша:

$$P(AB_1) = P(B_1)P(A/B_1) = P(A)P(B_1/A), \text{ бұдан } P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}.$$

Дәл осылай, басқа да гипотезалар үшін төмендегі формулаларды аламыз: $P(B_i/A) = \dfrac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)}$, $i = 1, \ldots, n$.

ЕСТЕ САҚТАҢДАР

Соңғы формула *Байес (Бейес) формуласы* деп аталады.

$P(B_i/A)$ шамалары *апостериорлы ықтималдықтар* (тәжірибеден кейін бағаланған) деп аталады, шамалары *априорлы ықтималдықтар* (тәжірибеге дейін бағаланған) деп аталады.

МЫСАЛ

2. Үш атқыштың нысанаға екі рет оқ атуға мүмкіндігі бар. Бір атқаннан бірінші атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы — 0,3, екінші атқыштың тигізу ықтималдығы — 0,5, үшінші атқыштың тигізу ықтималдығы — 0,8. Егер нысанаға оқ тимегені белгілі болса, онда оқты бірінші атқыштың атуының ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. Үш гипотеза жасаймыз:

A_1 — бірінші атқыштың атуы,

A_2 — екінші атқыштың атуы,

A_3 — үшінші атқыштың атуы.

Үш атқыштың да нысанаға оқ ату мүмкіндіктері бірдей болғандықтан:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Егер нысанаға оқтың тимеуін B оқиғасы десек, онда жасалған гипотезалар негізінде B оқиғасының орындалуының шартты ықтималдығы:

$P(B/A_1) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49;$

$P(B/A_2) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25;$

$P(B/A_3) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$

Байес формуласын қолданып, тәжірибеден кейін A_1 гипотезасының орындалу ықтималдығын табамыз:

$$P(A_1/B) = \frac{0,49 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot 0,49 + \frac{1}{3} \cdot 0,25 + \frac{1}{3} \cdot 0,04} = \frac{0,49}{0,78} \approx 0,628.$$

Жауабы: ≈0,628.

1. Толық ықтималдық формуласы қандай жағдайда қолданылады?
2. Байес формуласы қандай жағдайда қолданылады?
3. Байес формуласын жазыңдар. Неге бұл формуланы гипотезалар формуласы деп атайды?

Жаттығулар

A

28.1. Үш қорапта шарлар бар. Бірінші қорапта 4 қызыл, 3 сары, екінші қорапта 5 қызыл, 2 сары, үшінші қорапта 2 қызыл, 5 сары. Кездейсоқ бір қорап таңдап алынады да, таңдап алынған қораптан кездейсоқ бір шар алынады. 1) Алынған шардың қызыл болуының; 2) қызыл шардың екінші қораптан алынуының ықтималдығын табыңдар.

28.2. Оқ ату жарысына үш атқыш қатысады. Нысанаға оқты бірінші атқыштың тигізу ықтималдығы — 0,3, екінші атқыштың тигізу ықтималдығы — 0,8, үшінші атқыштың тигізу ықтималдығы — 0,5. Егер үшеуінің біреуі атып, нысанаға тигізгені белгілі болса, онда оқты үшінші атқыштың атуының ықтималдығын табыңдар.

28.3. Оператор бір-біріне тәуелсіз үш станокпен жұмыс істейді. 1 сағ ішінде станоктардың оператордың қызметін қажет етпеу ықтималдықтары сәйкесінше біріншісі 0,9-ға, екіншісі 0,8-ге, үшіншісі 0,8-ге тең. Бір сағат ішінде:

1) бірде-бір станок оператордың қызметін қажет етпеу;

2) кем дегенде бір станоктың оператор қызметін қажет етпеуі ықтималдығын табыңдар.

28.4. Мұғалім геометрия пәнінен емтиханға 25 билет дайындады. Оқушы тек 20 билетке дайындалды. 1) Оқушы емтиханға бірінші кірсе; 2) оқушы емтиханға екінші кірсе, онда емтиханды тапсыру ықтималдығын табыңдар.

28.5. Тиынды 8 рет лақтырғана “сан” жағының 8 рет түсу ықтималдығын табыңдар.

B

28.6. Құрылғы жасауға қажет тетік екі цехтан келеді: бірінші цехтан — 70%, екінші цехтан — 30%. Бірінші цехта дайындалған тетіктердің ішінде 10%-ы жарамсыз, екінші цехта дайындалған тетіктердің ішінде 20%-ы жарамсыз. Егер кездейсоқ алынған тетіктің іске жарамды екені белгілі болса, онда алынған тетіктің бірінші цехта дайындалуының ықтималдығын табыңдар.

28.7. Құрылғы дайындауға қажет тетік үш автоматта дайындалады: бірінші автомат дайындаған тетіктердің 3%-ы жарамсыз, екінші автомат дайындаған тетіктердің 2%-ы жарамсыз, үшінші автомат дайындаған тетіктердің 4%-ы жарамсыз. Егер бірінші автоматтан 100, екінші автоматтан 200, үшінші автоматтан 250 тетік алынған болса, онда құрылғыны жинауға жарамсыз тетіктің бар болуы ықтималдығын табыңдар.

28.8. Үш автомат тізбектей жалғанған. Бірінші, екінші, үшінші автоматтардың істен шығу ықтималдықтары сәйкес, 0,2; 0,15 және 0,1-ге тең болса, онда тізбектің істен шығуы ықтималдықтарын табыңдар.

C

28.9. Нысанаға үш атқыш бірге оқ атты. Бірінші, екінші, үшінші атқыштың нысанаға тигізу ықтималдықтары, сәйкесінше, 0,4; 0,5; 0,6. Бірінші атқыштың нысанаға дәл тигізуінің ықтималдығын табыңдар.

28.10. Төрт қорапта шарлар бар: бірінші қорапта 1 ақ, 1 қызыл, екінші қорапта 2 ақ, 3 қызыл, үшінші қорапта 3 ақ, 5 қызыл, төртінші қорапта 4 ақ, 7 қызыл. Қораптардың таңдап алыну ықтималдықтары $P(A_1) = \frac{1}{10}$; $P(A_2) = \frac{2}{10}$; $P(A_3) = \frac{3}{10}$; $P(A_4) = \frac{4}{10}$. Кездейсоқ бір қорап таңдап алынып, таңдап алынған қораптан кездейсоқ бір шар алынады. Алынған шардың: 1) ақ; 2) қызыл болуының ықтималдығын табыңдар.

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

28.11. Ағылшын математигі Т. Байес ықтималдықтар теориясының негізгі есептерінің бірін шешті (Байес теоремасы).
Байес формуласы ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистикада маңызды рөл атқарады.

Томас Байес
(1702-1761)

ҚАЙТАЛАУ

28.12. $f(n) = \frac{C_n^3 \cdot C_n^2}{(n-2)!}$ функциясы берілген. 1) $n = 4$; 2) $n = 5$; 3) $n = 7$ болғанда берілген функцияның мәндерін табыңдар.

28.13. Берілген өрнекті екімүшенің дәрежесі түрінде жазыңдар:
1) $x^3 - 6x^2a + 12xa^2 - 8a^3$; 2) $y^3 - 9y^2a + 27ya^2 - 27a^3$;
3) $x^4 + 8x^3a + 24x^2a^2 + 48xa^3 + 16a^4$.

28.14. Берілген екімүшенің жіктелуін жазыңдар:
1) $(y + 2a)^5$; 2) $(2x + 3a)^6$; 3) $(3x - 2a)^4$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Оқиға, кездейсоқ оқиға, ықтималдық, оқиғаның ықтималдығы, теру, тәжірибе, тәуелсіз тәжірибе.

§29. БЕРНУЛЛИ ФОРМУЛАСЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ САЛДАРЫ. НАҚТЫ ҚҰБЫЛЫСТАР МЕН ПРОЦЕСТЕРДІҢ ЫҚТИМАЛДЫҚ МОДЕЛЬДЕРІ

? Сендер Бернулли сызбасы мен Бернулли теоремасын қолдану жағдайларымен танысасыңдар; Бернулли формуласын және оның салдарын есептер шығаруда, нақты құбылыстар мен процестердің ықтималдық модельдерін құруда қолданып үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Бернулли сызбасы,
Бернулли формуласы,
ықтималдық модельдері

Бірдей жағдайда тәжірибе бірнеше рет қайталанып жасалсын. Әрбір тәжірибеде A оқиғасының орындалу ықтималдығы $P(A)$ болсын және A оқиғасының орындалу ықтималдығы әрбір тәжірибеде өзгеріссіз, яғни тұрақты болсын ($P(A) = \text{const}$). Мұндай тәжірибелер *тәуелсіз* деп аталады, тәжірибелерді жасау сызбасы *Бернулли сызбасы* деп аталады.

A оқиғасына қарама-қарсы оқиға $\overline{A}$ деп белгіленеді және қарама-қарсы оқиғалардың ықтималдығы 1-ге тең, яғни $p + q = 1$.

Бернулли теоремасы. *Егер A оқиғасының түсу ықтималдығы кез келген тәжірибеде тұрақты болса, онда n рет тәуелсіз тәжірибе жасағанда A оқиғасының k рет түсу ықтималдығы*

$$P_{n,\,k}(A) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

формуласымен анықталады.

Мұндағы

$P_{n,\,k}(A)$ — *n рет тәжірибе жасағанда A оқиғасының k рет түсу ықтималдығы;*

C_n^k — *n элементтен алынған k элемент бойынша терулер саны;*

p — *A оқиғасының ықтималдығы;*

q — *$\overline{A}$ оқиғасының ықтималдығы.*

ЕСТЕ САҚТАҢДАР

$P_{n,\,k}(A) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ — *Бернулли формуласы* деп аталады.

МЫСАЛ

1. Егер A оқиғасының тұрақты ықтималдығы $p = 0,8$, тәуелсіз тәжірибе саны $n = 5$ болса, онда A оқиғасының үш рет ($k = 2$) ықтималдығын табайық.

Шешуі. A оқиғасының ықтималдығы $p = 0,8$ болса, онда $\overline{A}$ оқиғасының ықтималдығы $q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$:

$$P_{5,\,3}(A) = C^3_{\ 5} \cdot (0,8)^2 \cdot (0,2)^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot (0,8)^2 \cdot 0,008 = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3!} \cdot 0,64 \cdot 0,008 = 0,0512.$$

Жауабы: 0,0512.

Бернулли формуласының салдары

1. n рет тәжірибе жасалғанда A оқиғасының кемінде бір рет орындалу ықтималдығы: $P_n(m \geqslant 1) = 1 - q^n$.

2. n рет тәжірибе жасалғанда A оқиғасының орындалу саны k немесе k-дан артық болу ықтималдығы келесі формуламен есептеледі:

$$P_n(m \geqslant k) = \begin{cases} \sum\limits_{m=k}^{n} P_n(m), & k > \frac{n}{2}; \\ 1 - \sum\limits_{m=0}^{k-1} P_n(m), & k < \frac{n}{2}. \end{cases}$$

МЫСАЛ **2.** Көліктер базасының қалыпты жұмысы үшін көліктердің саны 8-ден кем болмау қажет, базада 10 көлік бар. Әрбір көліктің жұмысқа шықпау ықтималдығы 0,1. Көлік базасының қалыпты жұмыс жасауының ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. Егер жұмысқа сегіз көлік шықса (A оқиғасы) немесе тоғыз көлік шықса (B оқиғасы) немесе он көлік шықса (C оқиғасы), онда көліктер базасы қалыпты жұмыс жасайды (D оқиғасы). Ықтималдықтарды қосу теоремасы бойынша:

$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10)$.

Әрбір қосылғышты Бернулли формуласымен табамыз. Әрбір көліктің жұмысқа шықпау ықтималдығы 0,1 болғандықтан, әрбір көліктің жұмысқа шығу ықтималдығы 0,9, яғни $p = 0,9$, $q = 0,1$. Есептің шарты бойынша $n = 10$, $m = 8; 9; 10$.

Сондықтан, $P(D) = P_{10}(m \geqslant 8) = C_{10}^{8} \cdot (0,9)^8 \cdot (0,1)^2 + C_{10}^{9} \cdot (0,9)^9 \cdot (0,1)^1 + C_{10}^{10} \cdot (0,9)^{10} \cdot$ $\cdot (0,1)^0 \approx 0,1937 + 0,3874 + 0,3487 = 0,9298$.

Жауабы: 0,9298.

3. n рет тәжірибе нәтижесінде A оқиғасының орындалу санының k немесе k-дан кіші болу ықтималдығы келесі формуламен есептеледі:

$$P_n(m \leqslant k) = \sum_{m=0}^{k} P_n(m).$$

4. Егер A оқиғасының орындалу ықтималдығы осы оқиғаның келесі орындалу ықтималдықтарынан артық болса, онда A оқиғасының m^* орындалу саны *ең ықтимал сан* деп аталады және төмендегі теңсіздіктер орындалады: $np - q \leqslant m^* \leqslant np + p$.

МЫСАЛ **3.** Бір рет атқанда нысанаға оқтың тию ықтималдығы 0,8. Бес рет атқанда нысанаға тигізудің ықтимал санын және осы санға сәйкес ықтималдықты табыңдар.

Шешуі. Төмендегі теңсіздікті қолданамыз: $np - q \leqslant m^* \leqslant np + p$.

$np - q = 5 \cdot 0,8 - 0,2 = 3,8$; $np + p = 5 \cdot 0,8 + 0,8 = 4,8$ болғандықтан, $m^* = 4$. Бастапқы ықтималдықты Бернулли формуласымен табамыз: $P_{5,4}(A) = C_5^4 (0,8)^4 \cdot 0,2 =$ $= 0,4096$.

Жауабы: 0,4096.

?

1. Қандай тәжірибелер тәуелсіз тәжірибелер деп аталады?
2. Бернулли формуласы қандай жағдайларда қолданылады? Осы формуланы жазыңдар.
3. n рет тәуелсіз тәжірибелер нәтижесінде оқиғаның кемінде бір рет орындалу ықтималдығы қалай табылады?

Жаттығулар

А

29.1. Қорапта 6 бірдей және нөмірленген кубиктер бар. Кубиктер бір-бірден алынған. Алынған кубиктердің нөмірлері өспелі ретте болуының ықтималдығын табыңдар.

29.2. Қорапта 3 көк және 2 қызыл шар бар. Қораптан екі шар алынған. Алынған екі шардың:
1) біреуі көк түсті; 2) екеуі де көк түсті;
3) ең болмағанда біреуі көк түсті болуының ықтималдығын табыңдар.

29.3. Тиын және ойын сүйегі лақтырылды. Лақтыру барысында:
1) тиын "елтаңба" жағымен, ойын сүйегінде 4 ұпайдың;
2) тиында "сан" жағының, ойын сүйегінде тақ санның түсуінің ықтималдығын табыңдар.

29.4. 0; 1; 2; 3; 4 цифрларынан екітаңбалы сан құрастырылған. Құрастырылған сан: 1) жұп; 2) тақ; 3) 5-ке бөлінетін; 4) 4-ке бөлінетін сан болуының ықтималдығын табыңдар.

29.5. Құралдардың бір тобында ақауы бар құралдар 3% -ды екінші тобында 4% -ды құрайды. Әр топтан бір құралдан алынған. Алынған екі құрамда ақауы бар құралдар болуының ықтималдығын табыңдар.

29.6. Құрылғының сенімділігінің (жұмыс барысында істен шықпауының) ықтималдығы 0,8. Жұмыс сәтті жүру үшін берілген құрылғыға $n - 1$ құрылғы параллель жалғанады. Жұмыстың сәтті жүру ықтималдығын 0,98-ге жеткізу үшін параллель қанша құрылғы қосу қажет?

В

29.7. Тетік дайындау барысында үш деңгейден өтеді. Бірінші және үшінші деңгейлерден өту барысында ақау болуының ықтималдығы 0,01-ге, екінші деңгейде 0,02-ге тең. Үш деңгейден өткеннен кейін құрал стандартты болуының ықтималдығын табыңдар.

29.8. Кез келген кезекпен он цифр аталды. 5 цифры тура 7 рет аталуының ықтималдығын табыңдар.

29.9. Ойын сүйегін лақтыру барысында 5 немесе 6 ұпайының түсуі сәтті деп саналады. 200 рет лақтырудың 125-і сәтті болуының ықтималдығын табыңдар.

29.10. Кесінді тең төрт бірдей бөлікке бөлінген. Кесіндіде кездейсоқ 8 нүкте белгіленген. Әр бөлікте екі нүктеден болуының ықтималдығын табыңдар. Нүктенің кесіндіге түсуінің ықтималдығы кесіндінің ұзындығына пропорционал және оның орналасуына тәуелді емес деп ұйғарылған.

29.11. Цехта дайындалған тетіктердің 90%-ы стандартқа сай. Тауардың сапалылығын тексерудің қарапайым әдісі тауардың стандартқа сай деп тануының ықтималдығы 0,96, стандарқа сай емес деп тануының ықтималдығы 0,06. 1) Кездейсоқ таңдап алынған тетік сапалық тексерістен сәтті өтуінің; 2) сапалық тексерістен сәтті өткен тетіктің стандартқа сай болуының ықтималдығын табыңдар.

29.12. Тігін шеберханасында тігілген тауардың 4%-ы стандартқа сай емес. Тексеріске алынған 30 тауардың ішінде екеуінің стандартқа сай болмауының ықтималдығын табыңдар.

C

29.13. Егер A оқиғасының орындалу саны 4-тен кем болмаса, онда B оқиғасы орындалады. Егер әрқайсысында A оқиғасының орындалу ықтималдығы 0,8-ге тең болатын 5 тәуелсіз тәжірибе жасалса, онда B оқиғасының орындалу ықтималдығын табыңдар.

29.14. Тетіктерді дайындау барысында жұмысшының жарамсыз тетік дайындауының ықтималдығы 0,3. Осы жұмысшы дайындаған 200 тетіктің ішінде жарамсыз тетіктердің ең ықтимал санын табыңдар.

29.15. Шахмат жарысында бір ойында оқушының жеңу ықтималдығы 0,8. Оқушының жеңістерінің ең жоғары ықтимал саны 20-ға тең болу үшін ол қанша ойын өткізу қажет?

29.16. Бақылау N қаласында қыркүйек айында 12 жаңбырлы күн болғанын көрсетті. Қыркүйек айының кездейсоқ таңдап алынған 8 күнінің ішінде: 1) үш күн; 2) үш күннен кем емес; 3) үш күннен артық емес жаңбырлы күн болуының ықтималдығын табыңдар.

ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

29.17. Д. Бернулли – бірнеше практикалық есептерді шешу үшін ықтималдықтар теориясының әдістерін қолдану арқылы математикалық статистиканы дамытқан швейцар математигі.

Даниил Бернулли
(1700—1782)

ҚАЙТАЛАУ

29.18. Көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $x^3 + 3x - 4$; 2) $x^3 + 2x^2 - 3x - 6$; 3) $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$.

29.19. Теңдеуді айнымалыны ауыстыру әдісімен шешіңдер:

1) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$; 2) $x^4 + 4x^2 - 45 = 0$;

3) $x^2 - 4x - 3\sqrt{(x-2)^2} = 14$; 4) $x - 3 + 2\sqrt{x-3} = 8$;

5) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) = 0$; 6) $(x + 1)^2(x^2 + 2x) = 12$.

29.20. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $(x^2 + 3x + 1)(x - 3) - 3x^2 + 3$;

2) $(x - 1)(x^2 + 2x) - 12x^2 + 3x - 2$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. 0, 2, 5, 7, 8 цифрларынан құрастырылған екітаңбалы сандар саны:

A) 16; B) 22; C) 42; D) 20.

2. Сыныптағы 30 оқушыдан төртеуден тұратын кезекшілерді қанша тәсілмен құрастыруға болады:

A) 16 000; B) 27 405; C) 13 800; D) 27 000?

3. 1, 2 және 3 жүлделі орындарды 15 қатысушының арасында қанша тәсілмен бөлуге болады:

A) 2 100; B) 2 700; C) 2 730; D) 2 250?

4. Он баскетболшы ойын алдында сапқа тұрды. Бірінші капитан тұрса, қалғандары кездейсоқ сапқа тұратын болса, онда команданы сапқа тұрғызудың тәсілдерінің санын табыңдар:

A) 9!; B) 8!; C) 10!; D) 11!.

5. 20 адамнан топты 7 және 13 адамнан тұратын екі топқа бөлу тәсілдерінің санын табыңдар:

A) C_{20}^{10}; B) C_{20}^{7}; C) C_{13}^{7}; D) 7!.

6. $\dfrac{C_6^3 - C_6^2}{P_3 \cdot A_6^2}$ өрнегінің мәні:

A) $\dfrac{1}{6}$; B) 0,4; C) 0,5; D) $\dfrac{1}{36}$.

7. $C_{n+1}^2 - C_n^2 = 49$ теңдеуінің түбірі:

A) 7; B) 49; C) 42; D) 50.

8. $(x - 2)^{10}$ биномының жіктелуіндегі төртінші мүшенің коэффициенті:

A) −960; B) 120; C) −40; D) 90.

9. Жәшікте 5 ақ және 10 қызыл шар бар. Жәшіктен екі шар алынды. Алынған екі шар ақ түсті болуының ықтималдығын табыңдар:

A) $\frac{4}{9}$; B) $\frac{1}{3}$; C) $\frac{2}{21}$; D) 0,5.

10. Үш мерген нысанаға атты. Бірінші мергеннің нысанаға тигізуінің ықтималдығы 0,6-ға, екіншінікі 0,7-ге, үшіншінікі 0,8-ге тең. Нысанаға бірде-бір мергеннің тигізе алмауының ықтималдығын табыңдар.

A) 0,024; B) 0,24; C) 0,016; D) 0,04.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Екімүшелік, көпмүшелік, көпмүшеліктің стандарт түрі, көпмүшеліктің дәрежесі.

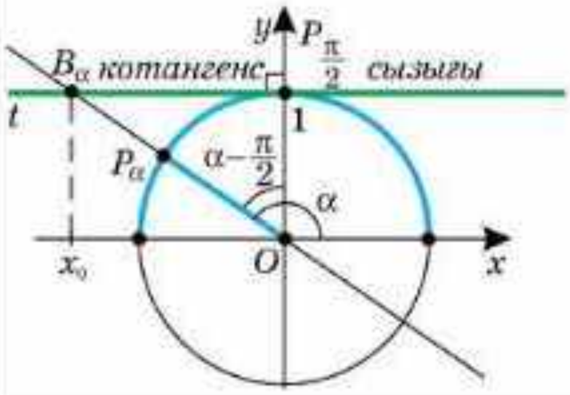
Глоссарий

a санының арккосинусы	a ($\lvert a\rvert \leqslant 1$) *санының арккосинусы* деп косинусы a-ға тең $[0;\ \pi]$ аралығындағы санды айтады
a санының арккотангенсі	*a санының арккотангенсі* деп котангенсі a-ға тең $(0;\ \pi)$ интервалындағы санды айтады
a санының арксинусы	a ($\lvert a\rvert \leqslant 1$) *санының арксинусы* деп синусы a-ға тең $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралығындағы санды айтады
a санының арктангенсі	*a санының арктангенсі* деп тангенсі a-ға тең $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалындағы санды айтады
Анықталмағандықты ашу	$x \to a$ ($x \to \infty$) ұмтылғанда анықталмағандықты беретін функцияның шегін табу *анықталмағандықты ашу* деп аталады
Аргументінің өсімшесі	Функцияның анықталу облысынан алынған екі аргументтің айырымының мәні *функция аргументінің өсімшесі* деп аталады
Арккосинус	$y = \cos x$ функциясына кері функция *арккосинус* деп аталады және $y = \arccos x$ деп белгіленеді
Арксинус	$y = \sin x$ функциясына кері функция арксинус деп аталады және $y = \arcsin x$ деп белгіленеді
Арккотангенс	$y = \mathrm{ctg}\, x$ функциясына кері функция *арккотангенс* деп аталады және $y = \mathrm{arcctg}\, x$ деп белгіленеді
Арктангенс	$y = \mathrm{tg}\, x$ функциясына кері функция *арктангенс* деп аталады және $y = \mathrm{arctg}\, x$ деп белгіленеді
Аркфункциялар	Тригонометриялық функцияларға кері функциялар *кері тригонометриялық функциялар* немесе *аркфункциялар* деп аталады
Асимптота	M нүктесі берілген сызық бойымен шексіздікке жылжығанда осы нүктеден a түзуіне дейінгі қашықтық нөлге ұмтылса, онда a түзуі *қисықтың асимптотасы* деп аталады
Биномиалды коэффициенттер	Ньютон биномының формуласындағы C_n^k коэффициенттері *биномиалды коэффициенттер* деп аталады
Біртекті көпмүше	Көпмүшенің әрбір бірмүшелерінің дәрежелері көрсеткіштерінің қосындысының мәні бірдей болса, онда көпмүше *біртекті* деп аталады
Біртекті тригонометриялық теңдеу	Сол жақ бөлігіндегі $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты барлық мүшелерінің дәреже көрсеткіштерінің қосындысы бірдей, оң жақ бөлігі 0-ге тең болатын теңдеу $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты *біртекті тригонометриялық теңдеу* деп аталады
Бөлшек-сызықтық функция	$y = \frac{ax + b}{cx + d}$, $c \neq 0$, $ad \neq bc$, түріндегі функция *бөлшек-сызықтық функция* деп аталады

Жалғасы

Гармоникалық тербелістер	$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ немесе $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ заңдарымен сипатталатын қозғалыстарды *гармоникалық тербелістер* деп атайды. A — тербелістің *амплитудасы*, ω — тербеліс *жиілігі*, φ — тербелістің *бастапқы фазасы* деп аталады. $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ және $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ функцияларының $\frac{2\pi}{\omega}$-ға тең периоды *гармоникалық тербелістің периоды* деп аталады
Дискретті (үзілісті) кездейсоқ шама	Бір-бірінен оқшау, бөлек мән қабылдайтын кездейсоқ шама *дискретті (үзілісті) кездейсоқ шама* деп аталады
Дискретті кездейсоқ шаманың геометриялық үлестірімі	Бір-біріне тәуелсіз n тәжірибенің әрқайсысында A оқиғасының орындалу ықтималдығы p, орындалмау ықтималдығы $q = 1 - p$ болсын. Тәжірибе A оқиғасы бірінші рет орындалатын k-тәжірибеден кейін тоқтатылады. X дискретті кездейсоқ шамасының мүмкін мәндерінің ықтималдықтары $P(X = k) =$ $= q^{k-1}p$ формуласымен есептелетін үлестірім *геометриялық үлестірім* деп аталады
Дискретті кездейсоқ шаманың гипергеометриялық үлестірімі	Егер N — белгілі бір жиынның элементтерінің жалпы саны, M — осы жиынның белгілі бір қасиетті қанағаттандыратын элементтерінің саны, n — барлық элементтер ішінен кездейсоқ алынған элементтер саны, m — таңдап алынған элементтер ішінен берілген қасиетті қанағаттандыратын элементтер саны болса, онда X дискретті кездейсоқ шамасының мүмкін мәндерінің ықтималдығы $P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ формуласымен есептелетін үлестірім *гипергеометриялық үлестірім* деп аталады
Дисперсия	X кездейсоқ шамасының математикалық күтімінен ауытқуының квадратының математикалық күтімі *кездейсоқ шаманың дисперсиясы* деп аталады және $D(X) = M((X - M(\mathrm{X}))^2)$ формуласымен есептеледі
Дифференциалдау	Функцияның туындысын табу амалын *дифференциалдау* деп атайды
Дөңес функция	Көп жағдайда жоғары қарай дөңестелген функцияны *дөңес функция* деп атайды (49.1.2-сурет)
Екінші туынды	$y = f(x)$ функциясының *екінші туындысы* деп $f'(x)$ туындысынан алынған туындыны айтады
Жиында дифференциалданатын функция	Егер жиынның әрбір нүктесінде функцияның шектелген туындысы болса, онда *функция жиында дифференциалданады* деп айтады
Жоғары қарай дөңестелген функция	Егер дифференциалданатын функцияның графигі X интервалының кез келген X нүктесіне жүргізілген жанамадан төмен болмаса, онда функция X интервалында жоғары *қарай дөңестелген* деп аталады

Жалғасы

Иілу нүктесі	Егер M нүктесінің кіші аймағында қисық осы нүктеде жүргізілген жанаманың екі жағында орналасса, онда M нүктесі *иілу нүктесі* деп аталады
Қайталанатын терулер	Бір түрдің элементтері бір-бірінен ең болмағанда элементтердің санымен өзгешеленетін k элементтен тұратын реттелмеген жиынтық әртүрлі k типті n элементтен тұратын *қайталанатын терулер* деп аталады
Қайталанбайтын орналастырулар	n элементтен тұратын жиынның k элементінен реттелген жиындарды n элементтен алынған k-дан құралған *қайталанбайтын орналастырулар* деп айтады
Қайталанбайтын терулер	Барлық элементтері әртүрлі және орналасуы реттелмеген k элементтен тұратын ішкі жиындар n элементінен алынған k-дан құралған *қайталанбайтын терулер* деп аталады
Кездейсоқ шама	Тәжірибе нәтижесінде бірнеше мәндердің бірін қабылдайтын шама *кездейсоқ шама* деп аталады және бұл мәндердің қайсысын қабылдайтынын алдын ала білу мүмкін емес
Кездейсоқ шаманың ауытқуы	Кездейсоқ шама мен оның математикалық күтімінің айырмасы, яғни $X - M(X)$ шамасы *кездейсоқ шаманың ауытқуы* деп аталады
Кездейсоқ шаманың үлестірімі	Кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері мен олардың ықтималдықтарын тізіп жазу *кездейсоқ шаманың үлестірімі* деп аталады
Кездейсоқ шаманың биномдық үлестірімі	Кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің ықтималдықтары Бернулли формуласымен есептелетін үлестірім *биномдық үлестірім* деп аталады
Күрделі функция	$y = f(x)$ функциясының x аргументінің орнына $y = g(x)$ функциясы алынған $y = f(g(x))$ түріндегі функция *күрделі функция* (функциялардың композициясы) деп аталады
Комбинаторика	Комбинаторикалық есептерді қарастыратын математиканың бөлігі *комбинаторика* деп аталады
Комбинаторикалық есептер	Шектелген жиынның элементтерінен қандай да бір ережелер бойынша әртүрлі комбинациялар құрастырылатын және олардың саны табылатын есептерді *комбинаторикалық есептер* деп атайды
Котангенстер сызығы	t түзуін *котангенстер сызығы* деп атайды 

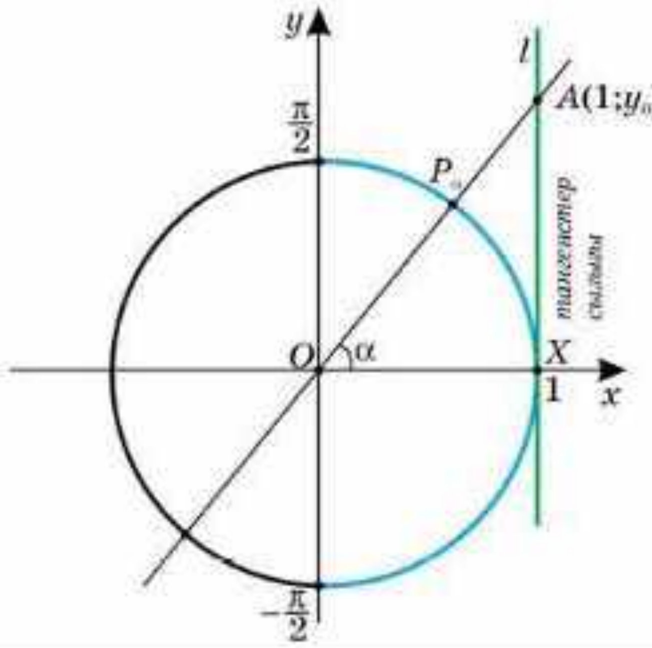
Жалғасы

Көпмүше	Бірмүшелердің қосындысы *көпмүше* деп аталады
Көпмүшенің дәрежесі	*Көпмүшенің дәрежесі* деп құрамындағы бірмүшелер дәрежелерінің ең үлкен дәрежесін айтады. *Бірмүшенің дәрежесі* деп құрамындағы айнымалылардың дәреже көрсеткіштерінің қосындысының мәнін айтады
Көпмүшенің мүшелері	Көпмүшенің құрамына кіретін бірмүшелер *көпмүшенің мүшелері* деп аталады
Көпмүшенің түбірі	Егер $x = x_0$ болғанда $P(x)$ көпмүшесінің мәні нөлге тең болса, онда x_0 санын $P(x)$ *көпмүшесінің түбірі* деп атайды
Максимум нүктесі	a нүктесінің қандайда бір аймағында әрбір x ($x \ne a$) үшін $f(x) < f(a)$ теңсіздігі орындалған жағдайда ғана a нүктесі $y = f(x)$ *функциясының максимум нүктесі* деп аталады
Математикалық күтімі	Мәндері $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ сандары болатын және оларға сәйкес ықтималдықтары $p_1, p_2, p_3, p_4, ..., p_n$ болатын дискретті кездейсоқ шаманың мәндерінің оларға сәйкес ықтималдықтарына көбейтінділерінің қосындысы, яғни $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + + ... + x_n \cdot p_n$ саны дискретті кездейсоқ шаманың *математикалық күтімі* деп аталады
Минимум нүктесі	a нүктесінің қандай да бір аймағында әрбір x ($x \ne a$) үшін $f(x) > f(a)$ теңсіздігі орындалған жағдайда ғана a нүктесі $y = f(x)$ *функциясының минимум нүктесі* деп аталады
Мода	Кездейсоқ шаманың ықтималдығы жоғары мәні *кездейсоқ шаманың модасы* деп аталады
Оқиғалардың көбейтіндісі	A және B оқиғаларына тиісті болатын элементар оқиғалардан құралған оқиға *A және B оқиғаларының көбейтіндісі* деп аталады және AB символымен белгіленеді
Оқиғалардың қосындысы	A немесе B оқиғаларына тиісті болатын элементар оқиғалардан құралған оқиға *A және B оқиғаларының қосындысы* деп аталады және $A + B$ символымен белгіленеді
Ойыс функция	Көп жағдайда төменге қарай дөңестелген функцияны *ойыс функция* деп атайды
Өзара кері функциялар	Егер $y = \phi(x)$ — берілген функция, $y = f(x)$ — берілген функцияға кері функция болса, онда $y = f(x)$ және $y = \phi(x)$ функциялары *өзара кері функциялар* деп аталады
n дәрежелі көпмүше	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ (мұндағы n — бүтін теріс емес сан, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ — кез келген сандар және $a_n \ne 0$) түрінде берілген өрнекті x айнымалысына қатысты *n дәрежелі көпмүше* деп атайды. Кез келген санды *нөлінші дәрежелі көпмүше* деп атайды
n элементтен тұратын қайталанбайтын алмастырулар	$A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ жиынының барлық n элементін қамтитын реттелген жиындар n элементтен тұратын *қайталанбайтын алмастырулар* деп аталады

Жалғасы

Нүктеде дифференциалданатын функция	Шектелген туындысы бар функция *нүктеде дифференциалданатын функция* деп аталады
Нүктеде үзіліссіз функция	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ теңдігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясы $x = x_0$ болатын *нүктеде үзіліссіз функция* деп аталады. Кері жағдайда $y = f(x)$ функциясы $x = x_0$ нүктесінде үзілісті болады
Нүктенің аймағы	Нүкте тиісті болатын кез келген интервал *нүктенің аймағы* деп аталады
Ньютон биномы	(1) және (2) формулалары *Ньютон биномы* деп аталады. $(x + a)^n = x^n + n \cdot a \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + ... +$ $+ \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot a^k \cdot x^{n-k} + ... + a^n \quad (1)$ $(x + a)^n = C_n^0 \cdot a^0 \cdot x^n + C_n^1 \cdot a^1 \cdot x^{n-1} + C_n^2 \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + ... + C_n^k \cdot a^k \cdot$ $\cdot x^{n-k} + ... + C_n^{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot x^1 + C_n^n \cdot a^n \cdot x^0 \quad (2)$
Сандық функция	Анықталу облысы *D болатын сандық функция* деп D жиынының кез келген x санына қандай да бір ереже бойынша x-тен тәуелді бір ғана y саны қойылатын сәйкестікті айтады
Стационар нүкте	$f'(x_0) = 0$ болса, онда x_0 нүктесі *функцияның стационар нүктесі* деп аталады
Стандарт түрдегі көпмүше	Стандарт түрдегі ұқсас емес бірмүшелерден тұратын көпмүшені *стандарт түрдегі көпмүше* деп атайды.
Симметриялы көпмүше	Шетінен бірдей қашықтықта орналасқан мүшелердің коэффициенттері болатын бір айнымалысы бар n-ші дәрежелі көпмүше *симметриялы көпмүше* деп аталады
Симметриялы көпмүше	x және y айнымалыларынан тұратын көпмүшеде x-ті y-пен және y-ті x-пен алмастырғанда көпмүшенің түрі өзгермесе, онда ол *симметриялы көпмүше* деп аталады
Симметриялы теңдеу	Шеттерінен бірдей қашықтықта орналасқан коэффициенттері тең болатын n-ші дәрежелі теңдеу *симметриялы теңдеу* деп аталады
Синусоида	$y = \sin x$ және $y = \cos x$ функцияларының графигі *синусоида* деп аталады
Сындық нүкте	$f'(x_0)$ туындысы нөлге тең немесе болмаса, онда x_0 нүктесі функцияның *сындық нүктесі* деп аталады
Тангенсоида	$y = \mathrm{tg}x$ функциясының графигі *тангенсоида* деп аталады

Жалғасы

Тангенстер сызығы	l түзуін *тангенстер сызығы* деп атайды 
Тригонометриялық теңдеу	Белгісіз (айнымалысы) тригонометриялық функцияның аргументі түрінде берілген теңдеуді *тригонометриялық теңдеу* деп атайды
Тригонометриялық теңсіздік	Белгісіз (айнымалысы) тригонометриялық функцияның аргументі түрінде берілген теңсіздікті *тригонометриялық теңсіздік* деп атайды
Төмен қарай дөңестелген функция	Егер дифференциалданатын функцияның графигі X интервалының кез келген X нүктесіне жүргізілген жанамадан төмен орналасса, онда функция X интервалында *төменге қарай дөңестелген* деп аталады
Үзіліс нүктелері	1. Егер біржақты $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ немесе $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ шектерінің ең болмағанда біреуі шексіз болса, онда абсциссасы x_0 болатын нүкте II текті үзіліс нүктесі болады; 2. Егер $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ немесе $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ біржақты шектері шектелген және әртүрлі болса, онда абсциссасы x_0 болатын нүкте I текті үзіліс нүктесі болады. 3. Егер $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = b$ және $f(x_0) \neq b$ немесе $f(x_0)$ анықталмаған болса, онда абсциссасы x_0 болатын нүкте жойылатын *үзіліс нүктесі* болады
Үзіліссіз кездейсоқ шама	Мәндерінің жиыны белгілі бір екі санның арасындағы мәндердің барлығын қабылдайтын кездейсоқ шама *үзіліссіз кездейсоқ шама* деп аталады
Үзіліссіз функция	Егер функция аралықтың барлық нүктелерінде үзіліссіз болса, онда ол осы аралықта *үзіліссіз* болады
Үлестірімнің гистограммасы	Абсциссада кездейсоқ шаманың x_1, x_2, x_3, ..., x_n мәндері, ординатада сәйкесінше p_1, p_2, ... , p_n ықтималдықтары болатын жазықтықтың $(x_i,\ p_i)$ нүктелері арқылы өтетін сынық сызық үлестірімнің көпбұрышы, оған сәйкес гистограмма *үлестірімнің гистограммасы* деп аталады

Жалғасы

Үлестірім қатары (заңы)	X кездейсоқ шамасының x_1, x_2, x_3, ..., x_n мәндері мен олардың p_1, p_2, ... , p_n ықтималдықтары көрсетілген кесте X дискретті кездейсоқ шамасының *үлестірім қатары* (*заңы*) деп аталады
Шартты ықтималдық	Бір оқиғаның орындалғаны белгілі болған жағдайда екінші оқиғаның орындалу ықтималдығы *шартты ықтималдық* деп аталады. AB оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар санының B оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар санына қатынасы B оқиғасы орындалған жағдайда A *оқиғасының шартты ықтималдығы* деп аталады (B оқиғасының шартты ықтималдығының анықтамасына ұқсас)
Шексіз үлкен функция	Егер $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x) = \infty$ болса, онда $x \to a$ ($x \to \infty$) ұмтылғанда $y = f(x)$ *функциясы шексіз үлкен* деп аталады
Функциясының ең кіші мәні	Кез келген $x \in X$, $x \neq x_0$ болғанда $f(x) \geqslant f(x_0)$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x_0)$ мәнін X аралығындағы $f(x)$ *функциясының ең кіші мәні* деп атайды. Белгіленуі: $\min\limits_{x\in X} y = f(x_0)$
Функцияның ең үлкен мәні	Кез келген $x \in X$, $x \neq x_0$ болғанда $f(x) \leqslant f(x_0)$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x_0)$ мәнін X аралығындағы $f(x)$ *функциясының ең үлкен мәні* деп атайды. Белгіленуі: $\max\limits_{x\in X} y = f(x_0)$
Функция максимумы	Функцияның максимум нүктесіндегі мәні *функцияның максимумы* деп аталады
Функция минимумы	Функцияның минимум нүктесіндегі мәні *функцияның минимумы* деп аталады
Функцияның оң жақ шегі	Егер x айнымалысы a санына ұмтылған кезде x тек қана a-дан үлкен мәндерді қабылдаған жағдайда A_2 саны $y = f(x)$ функциясының шегі болса, онда A_2 саны $y = f(x)$ функциясының a нүктесіндегі *оң жақ шегі* деп аталады
Функцияның өсімшесі	Мәндер жиынынан алынған функцияның екі мәнінің айырымы *функцияның өсімшесі* деп аталады
Функцияның сол жақ шегі	Егер x айнымалысы a санына ұмтылған кезде x тек қана a-дан кіші мәндерді қабылдаған жағдайда A_1 саны $y = f(x)$ функциясының шегі болса, онда A_1 саны $y = f(x)$ функциясының a нүктесіндегі *сол жақ шегі* деп аталады
Функцияның туындысы	Функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесінің нөлге ұмтылғандағы шегі бар болса, ол шек *функцияның туындысы* деп аталады. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Жалғасы

Функциясының шегі	Егер кез келген $\varepsilon > 0$ болғанда $0 < \lvert x - a \rvert < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген $x \neq a$ үшін $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $\delta > 0$ табылса, онда A саны x айнымалысының a санына ұмтылғандағы $y = f(x)$ *функциясының шегі* деп аталады
Функцияның экстремум нүктелері	Максимум және минимум нүктелері *функцияның экстремум нүктелері* деп аталады
Экстремум	Максимум және минимум нүктелері функцияның экстремум нүктелері, ал экстремум нүктесіндегі функцияның мәні *функцияның экстремумы* деп аталады

ЖАУАПТАРЫ

7—9-сыныптардағы алгебра курсын қайталауға арналған жаттығулар

1. 1) $1\frac{1}{3}(p-5)^2q^5$; 2) $\frac{15bc^2}{d^3}$; 3) $\frac{2a^3x^2y^2}{y-2}$; 4) 0; 5) 3; 6) $4+2x$; 7) $x+6$; 8) 2. **2.** 1) $\{-2; 3\}$; 2) $\{-8; 2\}$; 3) $\left\{\frac{3\pm\sqrt{145}}{4}\right\}$; 4) $\{-3-\sqrt{17}; 4\}$; 5) $\left\{\frac{-1+\sqrt{35}}{2}; \frac{-4-\sqrt{14}}{2}\right\}$; 6) $\varnothing$. **3.** 5) $\{-4; -3; 1; 2\}$; 6) $\{-7; 2\}$. **4.** 1) $(-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -5] \cup \left[\frac{1}{3}; 1,5\right]$; 3) $(-\infty; -4] \cup \{2; 5\}$; 4) $(-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$; 5); $\left(\frac{-1+\sqrt{113}}{4}; -2\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{113}}{4}\right)$; 6) $(-3; -1,8] \cup (-1; 3)$. **5.** 1) $(\infty; -3] \cup [6; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3,4] \cup [1; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (2,5; +\infty)$. **6.** 1) 2; 2) 11; 3) 4; 4) 8; 5) 15; 6) 10. **7.** 1) -3; 2) 3; 3) -4; 4) -11; 5) 0; 6) -5. **8.** 1) $\{(-5; 12), (4; 3)\}$; 2) $\{(-6; -22), (3; 5)\}$; 5) $\{(5; 2), (2; -1)\}$; 6) $\{(-7; 1), (-1; 7\}$. **9.** 1)$\{(2; \pm\sqrt{3}), (-2; \pm\sqrt{3})\}$; 3) $\{(1; 3); (3; 1); (-1; -3); (-3; -1)\}$; 5) $\{(2; \sqrt{11}); (2; -\sqrt{11}); (-2; \sqrt{11}); (-2; -\sqrt{11})\}$; 6) $\{(1; 1)\}$. **11.** 1) (3; 4), (4; 3); 2) (2, −1), (−1, 2); 3) (−2; 3), (−18; −13), (2; − 3), (18; 13). **12.** 1) $\{(4; 2); (-4; -2); (\sqrt{10}; \sqrt{10}); (-\sqrt{10}; -\sqrt{10})\}$; 2) $\{(-2; 1); (2; -1); (-0,5; 0,5); (0,5; -0,5)\}$; 3) $\{(1; -1); (-1; 1)\}$. **13.** 1) $\{(2; -1); (-2; -1)\}$; 2) $\{(1; 2); (-1; -2); (-1; 2); (1; -2)\}$; 3) $\{(1: 1); (-1; -1)\}$; 4) $\{(2; 3); (-2; 3); (2; -3); (-2; -3)\}$. **14.** 1) (3; 5); 2) $\varnothing$; 3) (−2; 4]. **17.** 1) 5; 2) 9. **18.** 1) 55 км/сағ; 2) 50 км/сағ; 3) 50 км/сағ. **19.** 1) 6 км/сағ және 4 км/сағ; 2) 20 күн және 30 күн; 3) 4 м/с және 3 м/с. **20.** 1) 3 кг, 5 кг; 2) 10 кг және 8 кг. **21.** 1) 32; 2) 14. **26.** 2) а) $y=\frac{1}{x-3}$; ә) $y=-2+\frac{1}{x}$; б) $y=3+\frac{1}{x+4}$; 3) а) $y=3\sqrt{x-3}$; ә) $y=3-\sqrt{x}-2$; б) $y=3\sqrt{x+4}-3$. **27.** 1) $f(x)=-x^2+2x+3$; 2) $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$; 3) $f(x)=\sqrt{x+2}-2$. **28.** 2) $f(x)=-x^2+3x$; $D(f)=R$; $E(f)=(-\infty; -2,25]$; функция $(-\infty; 1,5]$ аралығында өседі, $[1,5; +\infty)$ аралығында кемиді. **30.** 1) $a<0$; $b<0$; $c<0$; $D=0$; 2) $a<0$; $b=0$; $c<0$; $D<0$. **31.** 1) а), в); 2) а), б), г). **32.** 1) $d=2$; $a_n=15,5$; 2) $d=5$; $a_n=4$; 3) $d=-4$; $a_n=7$; 4) $d=-2$; $a_n=-14,9$. **33.** 1) $a_1=8,5$; $d=2$; 2) $b_1=16,8$; $q=\pm\sqrt{\frac{27}{14}}$; 3) 8,5. **34.** 1) $n=5$; $S_m=-135$; 2) $n=2$; $S_m=-27$. **35.** 1) 105; 2) −40; 3) −43. **36.** 1) $q=2$; $b_n=22,4$; $S_n=44,1$; 2) $q=3$; $b_n=48,6$; $S_n=72,6$; 3) $q=-7$; $b_n=68,6$; $S_n=60$. **37.** 1) $b_1=2$ және $S_5=\frac{1267}{896}$; 2) $b_1=-81$ және $S_5=-211$. **38.** 1) $1,5\cdot(\sqrt{3}-1)$; 2) $\sqrt{2}+1$. **39.** 1) $2\frac{31}{99}$; 2) $\frac{103}{999}$; 3) $2\frac{338}{990}$; 4) $45\frac{23}{990}$. **40.** 1) $1-\sqrt{3}$; 2) $1-\sqrt{3}$; 3) 0; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $-2-\frac{\sqrt{3}}{6}$; 6) 0. **41.** 1) $1-3\sqrt{3}$; 2) 4; 3) $-8,5$; 4) $\frac{18-17\sqrt{3}}{6}$. **42.** 1) $-2\sqrt{0,21}$; $-1,6\sqrt{0,21}$; 0,68; 3) $-\frac{1}{3}$; $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $-\frac{7}{9}$. **43.** 1) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{9}$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{7}}{6}}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{6}}$; $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{\frac{2}{7}}$. **44.** $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3\sqrt{105}-1}{32}$, $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3\sqrt{7}-\sqrt{15}}{32}$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{3\sqrt{7}+\sqrt{15}}{3\sqrt{105}-1}$, **45.** $\cos(\alpha-\beta)=\frac{42+\sqrt{195}}{56}$, $\sin(\alpha+\beta)=\frac{6\sqrt{15}+7\sqrt{13}}{56}$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{6\sqrt{15}-7\sqrt{13}}{42+\sqrt{195}}$. **46.** 1) $\frac{2\sqrt{3}-6}{3}$; 2) 2; 3) $-\frac{5\sqrt{3}}{18}$; 4) 2. **47.** 1) $-\cos\alpha$; 2) $-\operatorname{ctg}2\alpha$; 3) $\sin\alpha$; 4) $\operatorname{tg}^6\alpha$. **49.** 1) −1; 2) 3; 3) 4; 4) $-2\sin^2\alpha$. **51.** 1) 36 м/мин және 54 м/мин; 2) 600 м-ден 1400 м-ге дейін; 3) 18 м/мин-тан 90 м/мин-қа дейінгі кез келген мән; 4) ≈ 9 мин; 5) 10 с-та 21 қадам. **52.** 1) 3 км/сағ; 2) 3 сағ; 3) 1,5 км/сағ. **53.** 1) 52,5 кг; 2) 3 кг; 3) 5 кг; 4) 24,375%. **54.** 1) $1\frac{1}{3}$ есе; 2) 24 с; 3) Мараттың жылдамдығы эскалатор жылдамдығынан 2 есе артық. **55.** 3) $n=25$; $\bar{X}\approx 57,24$; 4) $D(X)\approx 1,7$. **56.** 60 %.

1-тарау. ФУНКЦИЯ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

1.1. 1) R; 2) R; 3) R; 4) R. **1.2.** 1) R; 2) R; 3) R; 4) R. **1.3.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2) \cup$ $\cup (-2; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$. **1.4.** 1) $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; -\sqrt{7}) \cup$ $\cup (-\sqrt{7}; \sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; +\infty)$; 3) R. **1.5.** 1) $[-11; +\infty)$; 2) $[23; +\infty)$; 3) $[-19; +\infty)$; 4) $(-\infty; 10]$. **1.7.** 1) $E(y) = R$; 2) $E(y) = R$; 3) $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 4) $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **1.8.** 1) $E(y) = [-20{,}25; +\infty)$; 3) $[-0{,}25; +\infty)$; 4) $(-\infty; 60{,}25]$. **1.9.** 1) $E(y) = [2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0]$; 3) $(-\infty; 10]$; 4) $(-\infty; -2{,}3]$. **1.10.** 1) $E(y) = [4; +\infty)$; 2) $E(y) = [-11; +\infty]$; 3) $E(y) = (-\infty; 6]$; 4) $E(y) = (-\infty; -2]$. **1.11.** 1) $D(y) = R$; $E(y) = (-\infty; 5]$; 2) $D(y) = (-\infty; 3]$; $E(y) = (-\infty; 1]$; 3) $D(y) = (-\infty; 2]$; $E(y) = [-1; +\infty)$. **1.12.** 1) $(-19; +\infty)$; 2) $(17; +\infty)$; 4) $(-\infty; 20)$. **1.13.** 1) $[-11; +\infty)$; 2) $[1{,}3; +\infty)$; 3) $(-4; 12{,}5]$; 4) $(0{,}3; 6]$. **1.14.** 4) $(-\infty; -0{,}7) \cup \left(-0{,}7; -\frac{2}{11}\right) \cup$ $\cup \left(-\frac{2}{11}; +\infty\right)$. **1.15.** 1) $(-\infty; 2) \cup (2; 4) \cup (4; 6) \cup (6; +\infty)$. **1.16.** 1) $[9; +\infty)$; 2) $[-11; -2) \cup$ $\cup (-2; 5) \cup (5; +\infty)$. **1.17.** 2) $\left[\frac{1}{9}; 2\frac{2}{3}\right)$; 3) $(-2; -1] \cup (2; +\infty)$; 4) $[-3; 2) \cup (3; +\infty)$. **1.18.** 1) $(10; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1{,}5)$; 4) $[-3; 5)$. **1.19.** 1) $[5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 4]$; 4) $(-\infty; 3]$; 5) R; 6) R; 7) R; 8) R. **1.20.** 1) $[1; 5]$; 2) $[-1; 3]$; 4) $(0; 3) \cup \{4\}$. **1.21.** 1) $[-18; +\infty)$. **1.22.** 1) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$; 2) $[-6; -4] \cup [6; 8)$. **1.23.** 1) $[-12{,}25; +\infty)$; 2) $E(y) = \begin{cases} \left(-\infty; \frac{4}{a}\right], a > 0, \\ R, a = 0, \\ \left[\frac{4}{a}; +\infty\right), a < 0. \end{cases}$

1.24. 1) $a \geqslant 0$; 2) $-1{,}8 < a < 0$; 3) $\varnothing$; 4) $a = -1{,}8$; 5) $a < -1{,}8$. **1.27.** 1) $\frac{7}{8}$. **1.28.** 1) -2 және 1. **2.1.** 1) функцияның графигі; 2) функция графигі; 4) функцияның графигі.

2.2. 1) $y = \begin{cases} x + 6, & -5 \leqslant x < -1, \\ 2 - x, & -1 \leqslant x < 4, \\ -1, & x = 4; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} |x + 2|, & -2 \leqslant x < 3, \\ 2, & x = 3; \end{cases}$ 3) $y = \begin{cases} -(x - 1)^2 + 5, & x \neq 4, \\ 3, & x = 4; \end{cases}$

4) $y = \sqrt{x + 3} - 2$. **2.5.** 1) $D(y) = R$; $E(y) = (-\infty; 3{,}5] \cup \{5\}$; 2) $D(y) = R$; $E(y) = (-2; +\infty)$.

2.6. 1) $y = x - 2$; 2) $y = 0{,}5x$; 3) $y = x^2 - 7$; 4) $y = x^2 + 1$. **2.7.** $\begin{cases} f(-x) = x^2 + 4x + 3, \\ f(x + 2) = x^2 - 1, \\ f(1 - x) = x^2 + 2x; \end{cases}$

1) $\begin{cases} E(f(-x)) = [-1; +\infty), \\ E(f(x + 2)) = [-1; +\infty), \\ E(f(1 - x)) = [-1; +\infty); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} A(0; 3); \\ A(0; -1); \\ A(0; 0); \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 = -3; \ x_2 = -1, \\ x_{1/2} = \pm 1, \\ x_1 = -2; \ x_2 = 0. \end{cases}$ **2.9.** 1) $y = x^2 + 2x - 3$;

2) $y = ||x - 3| - 1|$; 3) $y = 3 + \frac{1}{x - 2}$; 4) $y = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ 4 - x^2, & x > 0. \end{cases}$ **2.12.** 1) $y - x = 0$; 2) $y + x = 0$; 3) $3y - 2x = 0$; 4) $2y + x = 0$. **2.13.** 3) $x^2 - y - x = 0$; 4) $2x^2 + 3x - y = 0$;

2.14. 1) $y = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0, \\ -(x - 1)^2 + 4, & x > 0. \end{cases}$ 2) $y = |x^2 - 4|$; 3) $y = \left|\frac{x - 2}{x - 1}\right|$; 4) $y = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

2.16. $d(5) = 1$; $d(7{,}5) = 1$; $d(-44) = 1$; $d(1{,}9(3)) = 1$; $d(\sqrt{10}) = 0$; $d(5\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 0$; $d\left(\frac{\sqrt{180} - \sqrt{20}}{\sqrt{125}}\right) = d\left(\frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}\right) = d\left(\frac{4}{5}\right) = 1$. **2.17.** $R(0{,}7) = \frac{1}{10}$; $R(0{,}(5)) = \frac{1}{9}$; $R(0{,}(63)) = \frac{1}{11}$;

$R(0,2(3)) = \frac{1}{30}$; $R\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$; $R\left(\frac{\sqrt{50}+\sqrt{2}}{\sqrt{200}}\right) = \frac{1}{5}$. **2.18.** $\frac{1}{x+2}$. **2.19.** 10 км/сағ. **2.21.** 5; 6. **3.4.** 1) $B_2(-2; -4)$; 2) $B_2(-2; 2)$. **3.10.** 1) Парабола; 2) парабола; 3) гипербола; 4) гипербола. **3.18.** 1) $(-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$; 2) $[1,5; 2)$; 3) $\left[1\frac{1}{3};\ 2\right]$. **3.19.** 2) $(1; 4)$ және $(-2,5; -1,25)$. **4.10.** 1) Үш түбір; 2) екі түбір; 3) бір түбір; 4) екі түбір. **4.11.** 1) $y = \sqrt{x-2} - 1$; 2) $y = \sqrt{3-x} - 2$. **4.16.** 1) $-0,5$; 2) $[4; +\infty)$; 3) -1. **5.1.** 1) $A(2; 5)$; 2) $A\left(2\frac{2}{3};\ 5\right)$; 3) $A(1; 5)$. **5.2.** 1) $C(4; 3)$; 2) $C(5; 3)$; 3) $C\left(-2\frac{2}{3};\ 3\right)$. **5.3.** 1) $M(-8; 6)$; 2) $M(-6; 6)$; 3) $M(-5; 6)$. **5.4.** $y = (3x)^2 - 2 = 9x^2 - 2$. **5.5.** $y = (0,4x)^2 + 3(0,4x) = 0,16x^2 + 1,2x$. **5.8.** 1) 2 нүкте; 2) 2 нүкте. **5.10.** 1) 2 түбір; 2) 3 түбір. **5.13.** 1) $\varnothing$; 2) $\frac{2}{3}$. **5.14.** 1) $(-\infty; -2]$; 2) $(1; 2)$. **6.11.** 1) $(-2; 1,5] \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3) \cup [0,5; 1,5) \cup (1,5; 3)$. **7.8.** 1) $y_{\text{ең кіші}} = -10,5$, $y_{\text{ең үлкен}} = 7,5$; 3) $y_{\text{ең кіші}} = -38$, $y_{\text{ең үлкен}}$ – жоқ; 4) $y_{\text{ең кіші}} = 9,4$, $y_{\text{ең үлкен}} = 14,4$; 10) $y_{\text{ең кіші}}$ – жоқ, $y_{\text{ең үлкен}} = 10,6$. **7.40.** 1) $g(x) = 4 + x^2$; 2) $g(x) = -5 + x^2$. **7.41.** 1) $f(x) = \operatorname{sign}x \cdot \sqrt{|x|}$; 2) $f(x) = -\operatorname{sign}x \cdot (x^2 - 4|x|)$. 3) $f(x) = -\operatorname{sign}x \cdot (x^2 - 2|x|)$. **7.42.** 1) $x_{\max} = 2$, $x_{\min} = 0$, $x_{\min} = 4$; 2) $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = -4$, $x_{\min} = 2$; 3) $x_{\max} = -2$, $x_{\min} = -6$, $x_{\min} = 2$. **7.48.** 1) $\frac{3 + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{12}$; 2) $\frac{1 - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{4}$. **7.49.** 1) $[-2; +\infty)$; 2) $[-2,25; +\infty)$. **8.7.** 1) $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$; 2) $f(x) = -2 + \frac{1}{x+1}$. **8.11.** $f(x) = \left|\frac{2x-1}{x+1}\right|$. **8.15.** 1) $\cos\alpha$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha$; 3) $\sqrt{2}\cos\alpha$; 4) $0,5\sin\alpha$. **8.16.** 1) 1; 2) $\sqrt{3} - 1$; 3) 1; 4) $\sqrt{3}$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.1.** 1) Жұп; 2) тақ; 3) тақ; 4) жұп. **9.2.** 1) $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; $E(f) = \{-1; 1\}$; 2) $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; $E(f) = \{-1; 1\}$; 3) $D(f) = [0; 4) \cup (4; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; -0,5] \cup (0; +\infty)$; 4) $D(f) = [2; 3) \cup (3; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$. **9.8.** 1) $y_{\text{ең кіші}} = -2,25$, $y_{\text{ең үлкен}} = -2$; 2) $y_{\text{ең кіші}} = -14$, $y_{\text{ең үлкен}} = 2$. **9.14.** 1) $f(2x) = 4x^2 - 2$; 2) $g(x^2) = \frac{1}{x^2+2}$. **9.16.** 1) $\sin\alpha$; 2) $-\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) 1. **9.17.** 1) III немесе IV ширекте; 2) I немесе IV ширекте; 3) II немесе III ширекте. **10.2.** 1) $f(3x) = 3x - 1$; $f(2x-1) = 2x - 2$; $f(2x^2 - 1) = 2x^2 - 2$; 2) $f(3x) = 3 - 18x^2$; $f(2x-1) = 3 - 2(2x-1)^2$; $f(2x^2-1) = 3 - 2(2x^2-1)^2$; 3) $f(3x) = 9x - 9x^2$; $f(2x-1) = 6x - 3 - (2x-1)^2$; $f(2x^2-1) = 6x^2 - 3 - (2x^2-1)^2$. **10.3.** 1) $x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$; 2) $x = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$. **10.5.** 1) Иә; 2) иә; 3) жоқ. **10.7.** 1) $f(g(x)) = \sqrt{3x-2} - 1$, $f(f(x)) = x - 2$, $g(g(x)) = \sqrt{3\sqrt{3x-2} - 2}$; 2) $f(g(x)) = 3 - \frac{2}{(x-2)^3}$, $f(f(x)) = 3 - 2(3 - 2x^3)^3$, $g(g(x)) = \frac{x-2}{5-2x}$; 5) $f(g(x)) = \sin(3(x^2-1)) + 5(x^2-1)$, $f(f(x)) = \sin(3(\sin3x + 5x)) + 5(\sin3x + 5x)$, $g(g(x)) = (x^2-1)^2 - 1$. **10.8.** 1) Болады; 2) болады; 3) болмайды; 4) болады. **10.9.** 1) Болады; 2) болады; 3) болмайды; 4) болмайды. **10.10.** 1) Болады; 2) болмайды; 3) болады; 4) болады. **10.12.** 1) Жоқ; 2) мүмкін; 3) жоқ; 4) мүмкін. **10.14.** 1) $y = \sqrt{x-1}$; 2) $y = -1 - \sqrt{-x}$; 3) $y = 1 + \sqrt{x}$; 4) $y = 2 - \sqrt{x}$. **10.15.** 1) $y = 1 + \sqrt{x+1}$; 2) $y = -1 - \sqrt{x+1}$; 3) $y = 1,5 - \sqrt{2,25 + x}$; 4) $x \geqslant 2$ болғанда $y = 2 + (x-2)^2$. **10.17.** 1) -1; 2) 0,5; 3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2-тарау. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР, ОЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИКТЕРІ

11.5. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) 6π. **11.6.** 1) 2π; 2) 0,5π; 3) π; 4) π; 5) 0,25π; 6) 3π. **11.7.** 1) Болмайды; 2) болмайды. **11.17.** 1) 1; 2) 1; 3) 0,5; 4) 3. **11.18.** 1) $-\frac{3\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$; 2) 1. **11.19.** 1) − cosα; 2) −ctg4α. **12.5** 1) π; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) π; 4) 0,5π; 5) $\frac{2\pi}{7}$ 6) 2π. **12.7.** 1) 2π; 2) 0,5π; 3) π; 4) π; 5) 0,5π; 6) 6π. **12.8.** Жоқ. **12.20.** 1) 2; 2) 2. **12.21.** 1) 1; 2) 1; 3) 0,25; 4) 4. **12.22.** 1) ctgα · ctgβ; 2) $\mathrm{ctg}^6\alpha$; 3) $\frac{1}{\sin\beta}$. **13.6.** 1) 2π; 2) π; 3) π; 4) 0,5π; 5) 0,5π; 6) 3π. **13.7.** Болмайды. **13.9.** 1) $\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) > \mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{8}\right)$; 2) $\mathrm{ctg}\frac{4\pi}{9} < \mathrm{ctg}\frac{3\pi}{8}$. **13.18.** 1) Шексіз жиын; 2) шексіз жиын. **13.19.** 1) 1; 2) π; 3) 0,5; 4) 3. **13.20.** 1) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$; 2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **13.21.** 1) 0; 2) 0. **14.4.** 1) $D(f) = R$, $E(f) = [-3; 1]$; 2) $D(f) = R$, $E(f) = [1; 5]$; 3) $D(f) = R$, $E(f) = [1; 3]$. **14.11.** 1) [−0,5; 0,5]; 2) [−1; 1]; 3) (0; 4]; 4) [−1; 1]; 5) (0; 3]; 6) [1; 2). **14.12.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) 2π; 4) 5π. **14.15.** 1) A = 220 В, T = 0,1, жиілік — 20π; 2) A = 360 В, T = 0,2, жиілік − 10π; 3) A = 110 В, $T = \frac{1}{15}$, жиілік − 30π; 4) A = 220 В, $T = \frac{1}{30}$, жиілік − 60π. **14.16.** 1) $A = 5a$, T = 0,1, жиілік — 20π; 2) A = 0,25 а, T = 0,2, жиілік — 10π; 3) A = 10а, $T = \frac{1}{15}$, жиілік − 30π; 4) A = 0,8а, $T = \frac{1}{30}$, жиілік − 60π. **14.17.** 1) $y = 3\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $y = -2\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$. **14.18.** 1) $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ аралығында кемиді, $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$ аралығында өседі; 2) өседі; 3) $\left(-1; \frac{\pi}{6}\right]$ аралығында кемиді, $\left[\frac{\pi}{6}; 1\right)$ аралығында өседі; 4) $\left[-\frac{7\pi}{12}; -\frac{\pi}{3}\right]$ аралығында өседі, $\left[-\frac{\pi}{3}; 0\right]$ аралығында кемиді. **14.19.** 2) $p = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in N$. **14.20.** 1) $-\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leqslant p \leqslant 4\pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leqslant p \leqslant \frac{13\pi}{6} + 4\pi n$, $n \in Z$. **14.21.** 1) cos4, sin3, cos5, sin2; 2) sin4, sin6, sin3, sin7. **14.23.** 1) $(0{,}5; +\infty)$; 2) $(-\infty\ -1) \cup (1; +\infty)$. **14.24.** 1) 1; 2) 0. **14.25.** 1) Теріс; 2) оң; 3) оң; 4) теріс.

3-тарау. КЕРІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

15.1. 1) 1; 2) 1; 3) 2; 4) 1; 5) 2; 6) 0. **15.2.** 1) $t = \frac{5\pi}{6}$; 2) $t = \frac{\pi}{3}$; 3) $t = \frac{\pi}{4}$; 4) $t = \pi$. **15.3.** 1) $t = -\frac{\pi}{3}$; 2) $t = \frac{\pi}{6}$; 3) $t = \frac{\pi}{4}$ және $t = \frac{3\pi}{4}$; 4) $t = \frac{\pi}{2}$. **15.4.** 1) $t = -\frac{\pi}{6}$; 2) $t = \frac{\pi}{3}$; 3) $t = \frac{\pi}{4}$; 4) $t = \frac{3\pi}{4}$. **15.5.** 1) $t = -\frac{\pi}{3}$; 2) $t = \frac{\pi}{6}$; 3) $t = \frac{\pi}{4}$; 4) $t = \frac{3\pi}{4}$. **15.6.** 1) $-\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) $-\frac{\pi}{6}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. **15.7.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$. **15.8.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 0; 3) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $-\frac{\pi}{6}$. **15.9.** 1) Жоқ; 2) иә; 3) иә; 4) жоқ. **15.10.** 1) Жоқ; 2) иә; 3) иә; 4) жоқ. **15.11.** 1) Иә; 2) иә; 3) иә; 4) иә. **15.12.** 1) Жоқ; 2) жоқ; 3) иә; 4) жоқ; 5) иә; 6) иә. **15.13.** 1) Артық; 2) артық; 3) кем; 4) тең. **15.14.** 1) $\frac{7\pi}{12}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $-\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{5\pi}{12}$. **15.15.** 1) $\frac{5\pi}{12}$; 2) $-\frac{7\pi}{12}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$. **15.16.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $-\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{19\pi}{12}$. **15.17.** 1) $-\frac{5\pi}{6}$; 2) $\frac{7\pi}{3}$; 3) $\frac{7\pi}{6}$; 4) $\frac{\pi}{3}$. **15.20.** 1) $\arcsin\frac{\pi}{6}$, $\arcsin\frac{\pi}{9}$, arcsin(−0,1), arcsin(−0,3); 2) arccos(−1), arccos(−0,2), $\arccos\frac{\pi}{9}$, $\arccos\frac{\pi}{5}$. **15.21.** 1) arctg(−7,3), arctg(−0,3), $\mathrm{arctg}\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{arctg}\frac{5\pi}{9}$; 2) $\mathrm{arcctg}\frac{5\pi}{9}$, $\mathrm{arcctg}\frac{2\pi}{5}$, arcctg(−2,2), arcctg(−111). **15.22.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 2) 0. **15.23.** 1) cos2α; 2) sinα. **16.1.** 1) [−0,5; 0,5]; 2) [0; 1]; 3) [−1; 0];

4) $[-3; -1]$. **16.2.** 1) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$; 2) $[0; 1]$; 3) $[-2; -1]$; 4) $[2; 4]$. **16.5.** 1) $[-1; 2\pi - 1]$; 2) $\left[1-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}+1\right]$; 3) $[2-\pi; 2]$; 4) $[2-\pi; 2+\pi]$. **16.6.** 1) $(\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. **16.7.** 1) $\arcsin(-0{,}2)$; $\arcsin\frac{\pi}{6}$; $\arcsin 0{,}8$; 2) $\arcsin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\arcsin(-0{,}1)$; $\arcsin 0{,}9$; 3) $\arcsin(-0{,}8)$; $\arcsin\frac{\pi}{18}$; $\arcsin 0{,}3$. **16.8.** 1) $\arccos 0{,}8$; $\arccos\frac{\pi}{6}$; $\arccos(-0{,}2)$; 2) $\arccos 0{,}9$; $\arccos(-0{,}1)$; $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $\arccos 0{,}3$; $\arccos 0$; $\arccos(-0{,}7)$. **16.9.** 1) Жұп та емес, тақ та емес; 2) жұп; 4) жұп та емес, тақ та емес. **16.18.** 1) 0; 2) $2\cos^2\alpha$. **17.1.** 1) 0,2; 2) $-0{,}3$; 3) $-\frac{\sqrt{5}}{4}$; 4) 0,6; 5) $-0{,}4$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **17.3.** 1) $-\frac{5\pi}{12}$; 2) $-\frac{\pi}{12}$; 3) $\frac{5\pi}{4}$; 4) $-\frac{2\pi}{3}$. **17.4.** 1) Жоқ; 2) жоқ; 3) иә; 4) жоқ; 5) иә; 6) жоқ. **17.5.** 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$; 3) $\frac{\sqrt{15}}{8}$; 4) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$. **17.6.** 1) 0,2; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $-\frac{7}{8}$; 4) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. **17.7.** 1) 1,5; 2) $-1{,}5$; 3) $\frac{6\sqrt{37}}{37}$; 4) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$. **17.8.** 1) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{21}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{15}}{15}$; 4) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

17.9. 1) 20°; 2) -40°; 3) 10°; 4) 70°. **17.10.** 1) Иә; 2) иә; 3) иә; 4) жоқ; 5) жоқ; 6) иә. **17.11.** 1) Жоқ; 2) иә; 3) жоқ; 4) жоқ; 5) иә; 6) иә. **17.12.** 1) Иә; 2) иә; 3) иә; 4) жоқ; 5) жоқ; 6) жоқ. **17.13.** 1) Жоқ; 2) иә; 3) жоқ; 4) жоқ; 5) жоқ; 6) иә. **17.14.** 1) $[1; 3]$; 2) $[1; 2]$; 3) $\sqrt{2} \leqslant |a| \leqslant 2$; 4) $[-2{,}5; -1{,}5]$; 5) $[3; 4]$; 6) $\sqrt{2} \leqslant |a| \leqslant \sqrt{3}$. **17.15.** 1) 1,2; 2) $\pi - 2$; 3) $6 - 2\pi$; 4) $20 - 6\pi$. **17.16.** 1) 1,1; 2) 2; 3) $2\pi - 6$; 4) $20 - 6\pi$. **17.17.** 1) 1,2; 2) $5 - 2\pi$; 3) $2\pi - 6$; 4) $10 - 3\pi$. **17.18.** 1) $\frac{1+8\sqrt{3}}{15}$; 2) $\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{6}}{20}$; 3) $-\frac{6}{7}$; 4) $\frac{19}{9}$. **17.19.** 1) $\frac{120}{119}$; 2) $-0{,}75$; 3) 0,8. **17.20.** 1) $\varnothing$; 2) $\{0\}$; 3) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$; 4) R. **17.21.** 1) $\frac{7\sqrt{170}}{170}$; 2) $\frac{\sqrt{5}\left(1+4\sqrt{6}\right)}{25}$; 3) $\frac{0{,}2+4\sqrt{0{,}96}}{\sqrt{0{,}96}-0{,}8}$; 4) $\frac{5\sqrt{0{,}84}+0{,}4}{2-\sqrt{0{,}84}}$. **17.24.** 1) $\{\pm\sqrt{2}\}$; 2) $\{\pm 2\}$; 3) $\{\pm\sqrt{2}\}$; 4) $\{\pm 3\}$. **17.25.** 1) $1 \pm \sqrt{5}$; 2) $\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$; 3) ± 2; 4) 4. **18.1.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; 3) $\frac{\sin 1}{2}$; 4) 0. **18.2.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$. **18.3.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 0. **18.4.** 1) 1; 2) $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 4; 4) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$. **18.5.** 1) $\varnothing$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 4; 4) -1. **18.6.** 1) $\frac{9-\sqrt{3}}{12}$; 2) $\varnothing$; 3) $1\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{4}$. **18.7.** 1) 3 және $\frac{1}{3}$; 2) 0 және $1\frac{2}{3}$; 3) -2 және 2; 4) $\pm\sqrt{3}$. **18.8.** 1) 3; 2) -2 және 2; 3) 0 және 3; 4) 0; 3 және 5. **18.9.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{3}$; 2) ± 1; 3) 9 және -1; 4) 2 және 3. **18.10.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 0,5; 4) $\varnothing$. **18.11.** 1) 1; 2) 1; 3) 0; 4) -1. **18.12.** 1) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. **18.13.** 1) 0. **18.14.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $[0; 1]$; 4) $[-1; 1]$. **18.17.** 1) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$. **18.18.** 1) $0{,}16\sqrt{21}$; 0,68; 2) 0,75; $-\frac{24}{7}$; 3) $-\frac{1}{3}$; $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **18.19.** 1) $\frac{1}{3}$; $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; 2) $-\frac{\sqrt{7}}{3}$; $-\frac{\sqrt{14}}{7}$. **18.20.** $\frac{3\sqrt{105}-1}{32}$; $\frac{3\sqrt{7}-\sqrt{15}}{32}$.

4-тарау. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ТЕҢСІЗДІКТЕР

19.1. 1) $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z\right\}$; 2) $\left\{\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z\right\}$; 3) $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z\right\}$; 4) $\left\{\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z\right\}$; 5) $\left\{\pm\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right\}$; 6) $\{2\pi n, n \in Z\}$. **19.2.** 1) $\left\{(-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z\right\}$; 2) $\left\{(-1)^n\frac{\pi}{4} +\right.$

$+\pi n,\ n\in Z\Big\}$; 3) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z\right\}$; 4) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z\right\}$; 5) $\{\pi n,\ n\in Z\}$; 6) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z\right\}$. **19.3.** 1) $\{\mathrm{arctg}3+\pi n,\ n\in Z\}$; $\{\mathrm{arctg}(-2)+\pi n,\ n\in Z\}$; 3) $\left\{-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z\right\}$; 4) $\left\{\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z\right\}$; 5) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\right\}$; 6) $\{\pi-\mathrm{arcctg}3+\pi n,\ n\in Z\}$. **19.4.** 1) $\{\pm(\pi-\arccos 0{,}7)+2\pi n,\ n\in Z\}$; 2) $\left\{(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{4}+\pi n,\ n\in Z\right\}$; 3) $\{\pm\arccos 0{,}3+$ $+2\pi n,\ n\in Z\}$; 4) $\{\pi-\mathrm{arcctg}5+\pi n,\ n\in Z\}$; 5) $\{\pi n,\ n\in Z\}$; 6) $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z\right\}$. **19.5.** 1) $\left\{(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\pi n,\ n\in Z\right\}$; 2) $\left\{\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z\right\}$; 3) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+0{,}5\pi n,\ n\in Z\right\}$; 4) $\left\{-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z\right\}$; 5) $\{0{,}25\pi n,\ n\in Z\}$; 6) $\left\{-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{3}\pi n,\ n\in Z\right\}$. **19.6.** 1) $\varnothing$; 2) $\varnothing$; 3) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}+3\pi n,\ n\in Z\right\}$; 4) $\left\{-\frac{\pi}{30}+0{,}2\pi n,\ n\in Z\right\}$; 5) $\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\pi n,\ n\in Z\right\}$; 6) $\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{1}{3}\pi n,\ n\in Z\right\}$. **19.7.** 1) $\left\{(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\pi n,\ n\in Z\right\}$; 2) $\left\{\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z\right\}$; 3) $\Big\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+$ $+1+0{,}5\pi n,\ n\in Z\Big\}$; 4) $\left\{-\frac{\pi}{3}-4+2\pi n,\ n\in Z\right\}$; 5) $\{0{,}25+0{,}25\pi n,\ n\in Z\}$; 6) $\left\{\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\right\}$. **19.8.** 1) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\pi n,\ n\in Z\right\}$; 2) $\left\{\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z\right\}$; 3) $\Big\{(-1)^n\frac{\pi}{18}-$ $-1+\frac{1}{3}\pi n,\ n\in Z\Big\}$; 4) $\left\{-\frac{\pi}{15}+0{,}4+0{,}2\pi n,\ n\in Z\right\}$; 5) $\left\{0{,}75-\frac{\pi}{8}+0{,}5\pi n,\ n\in Z\right\}$; 6) $\left\{-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z\right\}$. **19.9.** 1) $\left\{(-1)^n\frac{\pi}{21}+\frac{1}{7}\pi n,\ n\in Z\right\}$; 2) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+0{,}5\pi n,\ n\in Z\right\}$; 3) $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\right\}$; 4) $\left\{\pm\frac{\pi n}{21}+\frac{2\pi n}{7},\ n\in Z\right\}$. **19.10.** 1) $\left\{\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\right\}$; 2) $\left\{\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ n\in Z\right\}$; 3) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\right\}$. **19.11.** 1) $\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6},\ n\in Z\right\}$; 2) $\left\{\pm\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\right\}$; 3) $\left\{-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\right\}$; 4) $\left\{\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z\right\}$. **19.12.** 1) $\{135^\circ,\ 165^\circ\}$; 2) $\{310^\circ,\ 350^\circ\}$; 3) $\{370^\circ,\ 410^\circ\}$; 4) $\{130^\circ,\ 170^\circ\}$. **19.13.** 1) 90°; 2) 45°; 3) $40^\circ,\ 80^\circ$; 4) 210°. **19.14.** 1) $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\right\}$. 2) $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z\right\}$; 3) $\left\{\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z\right\}$; 4) $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\right\}$. **19.15.** 1) $\{130^\circ;\ 126^\circ\}$; 2) $\{18^\circ;\ 162^\circ\}$; 3) $\{25^\circ;\ 27^\circ\}$; 4) $\{234^\circ\}$. **19.16.** 1) $\varnothing$; 2) 2; 3) 2; 4) шексіз жиын. **19.17.** 1) $\pm\sqrt{\frac{6}{2n-1}},\ n\in N$; 2) $\frac{1}{2}+n,\ n\in Z$; 3) 180°. **19.18.** 1) 0; 2) 1; 3) 1. **19.19.** 1) Шексіз; 2) шексіз; 3) 2; 4) 2. **19.20.** 1) $\left[0;\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6};6\right]$; 2) $[2;\ \pi)\cup(\pi;\ 2\pi)\cup(2\pi;\ 7]$. **19.22.** 1) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$. **20.1.** 1) $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z\right\}$; 2) $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z\right\}$; 3) $\left\{\frac{\pi n}{3},\ \pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in Z\right\}$; 4) $\left\{\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\right\}$. **20.2.** 1) $\{-25^\circ+180^\circ\cdot n,\ n\in Z\}$; 2) $\{95^\circ+180^\circ\cdot n,\ n\in Z\}$; **20.3.** 1) $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{6};\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $\left\{\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\right\}$. 3) $\frac{\pi n}{8},\ n\in Z$; 4) $\frac{\pi n}{7},\ \frac{\pi n}{5},\ n\in Z$; **20.4.** 1) $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\right\}$; 2) $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ \mathrm{arctg}2+\pi n,\ n\in Z\right\}$; 3) $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ -\mathrm{arctg}\frac{2}{5}+\pi n,\ n\in Z\right\}$; 4) $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ \mathrm{arctg}\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in Z\right\}$.

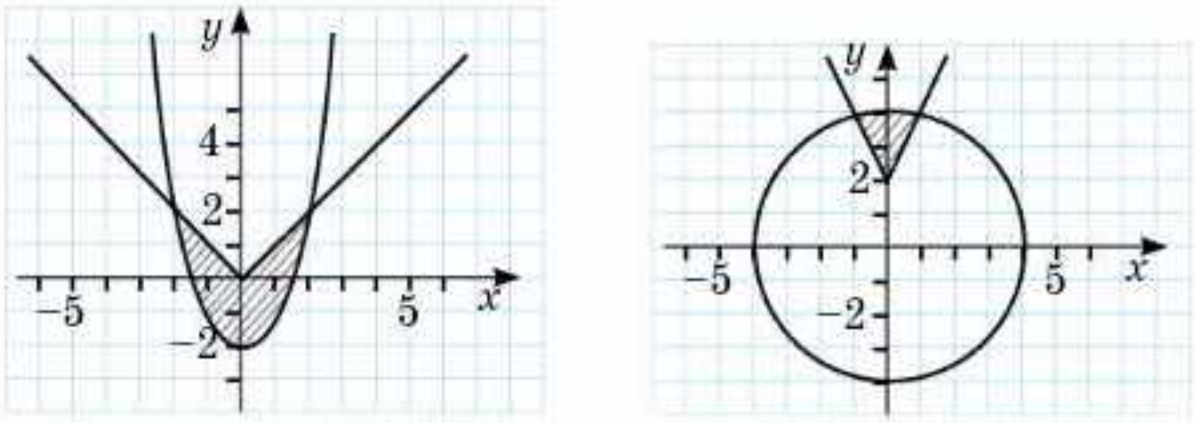
20.5. 1) $\left\{-\frac{\pi}{4} \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z\right\}$; 2) $\left\{\frac{\pi}{8} \pm \frac{3\pi}{8} + \pi n,\ n \in Z\right\}$; 3) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z\right\}$; 4) $\left\{\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z\right\}$. **20.6.** 1) 90°; 2) 720°; 3) 486°; 4) 780°. **20.7.** 1) $\frac{\pi n}{3},\ n \neq 3m,\ n, m \in Z$; 2) $\varnothing$. **20.8.** 1) $\left\{\frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi n}{2},\ n \in Z\right\}$; 3) $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z\right\}$; 5) $\left\{\pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z;\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z\right\}$; 6) $\left\{\frac{9\pi n}{2},\ n \in Z;\ \frac{9\pi}{2} + 9\pi n,\ n \in Z\right\}$. **20.9.** 1) $\frac{\pi n}{8},\ n \in Z;\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;\ \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z;\ \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; 4) $\frac{\pi n}{14},\ n \in Z$; 6) $\frac{2\pi n}{15},\ n \in Z;\ \frac{\pi}{17} + \frac{2\pi n}{17},\ n \in Z$. **20.10.** 1) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;\ -\frac{\pi n}{12} + \pi n,\ n \in Z$; 2) $\frac{\pi n}{12} + \pi n,\ n \in Z;\ \frac{7\pi}{48} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$; 4) $\pi n,\ n \in Z;\ \left\{\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z\right\}$. **20.11.** 1) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z\right\}$; 2) $\left\{-\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z\right\}$; 3) $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z\right\}$. **20.12.** 1) $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right),\ n \in Z$; 2) $\left(\frac{7\pi}{6} + \pi n;\ -\frac{\pi}{6} + \pi n\right),\ n \in Z$; 3) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n,\ -\pi n\right),\ \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{3} - \pi n\right),\ n \in Z$. **20.13.** 1) $\left\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z\right\};\ \left\{\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z\right\}$; 2) $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z;\ (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z\right\}$; 3) $\left\{-\frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z\right\}$; 4) $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z\right\}$. **20.14.** 1) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z\right\};\ \left\{\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z\right\}$; 2) $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z\right\}$; 3) $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z\right\}$; 4) $\{\pi n,\ n \in Z\}$. **20.15.** 1) $\left\{\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\right\}$; 2) $\left\{\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z\right\}$; 4) $\left\{\frac{9\pi n}{2},\ n \in Z;\ \frac{9\pi}{2} + 9\pi n,\ n \in Z\right\}$; **20.16.** 1) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z\right\}$; 2) $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z\right\}$; 3) $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z\right\}$; 4) $\left\{-\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z\right\}$. **20.17.** 1) $\left(2\pi n \pm \frac{\pi}{3};\ 2\pi k\right) \left(2\pi n \pm \frac{2\pi}{3};\ 2\pi k + \pi\right);\ k, n \in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi m;\ 2\pi k\right);\ \left(\pi m;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right);\ k, m \in Z$; 3) $\left(\frac{\pi}{2} - k - \frac{1}{4};\ \frac{\pi}{2} + k + \frac{1}{4}\right),\ k \in Z$. **20.18.** 1) $(0{,}5;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$. **20.19.** 1) Оң; 2) теріс; 3) теріс; 4) оң. **20.20.** 1) $(-\infty;\ -3] \cup \{2\} \cup [4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty; -6] \cup \left[\frac{2}{3};\ 1{,}5\right]$; 3) $(-3;\ -1{,}8] \cup (-1;\ 3)$. **20.21.** 1) $(-\infty; -6] \cup [3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3{,}4] \cup [1; +\infty)$; 3) $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right) \cup (2{,}5; +\infty)$. **20.22.** 1) $\cos 4 < \sin 3 < \cos 5 < \sin 2$; 2) $\sin 4 < \sin 6 < \sin 3 < \sin 7$. **21.1.** 1) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z$; 2) $\left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z$; 3) $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi\right],\ n \in Z$; 4) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$; **21.2.** 1) $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z$; 3) $\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right],\ n \in Z$; 4) $(-\pi + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n),\ n \in Z$. **21.3.** 1) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ -\frac{\pi}{6} + \pi n\right),\ n \in Z$; 3) $\left[\frac{\pi}{3} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$; 4) $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$. **21.4.** 1) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{3} + \pi n\right),\ n \in Z$; 2) $\left(\frac{2\pi}{3} + \pi n;\ \pi + \pi n\right),\ n \in Z$; 3) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{6} + \pi n\right),\ n \in Z$; 4) $\left[\frac{3\pi}{4} + \pi n;\ \pi + \pi n\right),\ n \in Z$. **21.5.** 1) $\left[\frac{\pi}{12} + \pi n;\ \frac{5\pi}{12} + \pi n\right],\ n \in Z$; 2) $\left[\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{5\pi}{6} + \pi n\right],\ n \in Z$; 3) $\left[-\frac{7\pi}{24} + 0{,}5\pi n;\ \frac{\pi}{24} + 0{,}5\pi n\right],\ n \in Z$; 4) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{6} + \pi n\right),\ n \in Z$. **21.6.** 1) $\left[\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + \pi n\right],\ n \in Z$; 2) $\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right),$

$n \in Z$; 3) $[4\pi n; \pi + 4\pi n]$, $n \in Z$. **21.7.** 1) $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$. **21.8** 1) $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in Z$; 2) $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in Z$; 4) $(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in Z$. **21.9.** 1) $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; 3) $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right.$, $n \in Z$. **21.10.** 1) $\left(-\frac{2\pi}{3} + \pi n; -\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$; 2) $\left(-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n; \frac{\pi}{12} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; 3) $\left[\pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in Z$. **21.11.** 1) $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right)$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$. **21.12.** 1) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{6}; 7\right]$; 2) $\left[0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left(\frac{5\pi}{6}; 6\right]$; 3) $\left(2; \frac{2\pi}{3}\right]$; 4) $\left[\frac{\pi}{3}; 4\right]$. **21.13.** 1) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$. **21.14.** 1) $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$; 2) $\left[\frac{\pi}{8} + 0{,}5\pi n; \frac{3\pi}{8} + 0{,}5\pi n\right]$, $n \in Z$. **21.15.** 1) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$; 2) $\left[\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}; -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}\right)$, $k \in Z$; 3) $\left[\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k\right] \cup \left[\pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right]$, $k \in Z$. **21.16.** 1) $\varnothing$; 2) $(-2; 2]$. **21.17.** $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; 2\pi n\right) \cup \left(2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$. **21.18.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 2) $x \neq (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$. **21.19.** 1) $\left(2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$, $k \in Z$; 2) $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$. **21.22.** 1) 0,5; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) 1; 4) 3.

5-тарау. КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ ЖӘНЕ ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ

22.1. 12. **22.3.** 3. **22.4.** 13. **22.5.** 25. **22.6.** 60. **22.7.** 3. **22.8.** 20. **22.9.** 2. **22.10.** 24. **22.11.** 21. **22.12.** 10. **22.13.** 10. **22.14.** 5. **22.15.** 1) π; 2) 4π; 3) 2π; 4) 2π. **22.16.** 1) $\varnothing$; 2) $[-\sqrt{5}; -2) \cup (2; \sqrt{5}]$; 3) $(-4; 0) \cup (0; 4)$. **22.17.** 1) $\{\pm 2\sqrt{2}\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\varnothing$. **23.1.** 1) $n!$; 2) $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$. **23.2.** 1) 24; 2) 720; 3) 42; 4) $\frac{1}{56}$; 5) $8\frac{1}{6}$; 6) 30. **23.3.** 1) 4; 2) 4; 3) 16. **23.4.** 1) 24; 2) 27; 3) 5040. **23.5.** 1) 840; 2) 7^4; 3) 120; 4) 5^4. **23.6.** 1) 2; 2) $\varnothing$; 3) 3; 4) 4. **23.7.** 1) 380; 2) 9. **23.8.** 1) 125; 2) 14. **23.9.** 1) 2; 2) 2; 3) 3. **23.10.** 1) 3; 2) 4; 3) 5. **23.11.** 1) 180 м; 2) 20 сағ және 30 сағ.

23.12.



1) 2)

23.13. 19. **23.14.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **24.1.** 1) 5; 2) 10; 3) 15; 4) 330. **24.2.** 1) 30; 2) 4200; 3) 3990. **24.4.** 1) $n = 8$; 2) $n = 6$; 3) $n = 2$ немесе 28. **24.5.** $7 \cdot 9 \cdot 4 = 252$. **24.6.** 1) 7; 3) түбірі жоқ. **24.7.** 1) 293 930; 2) 24 310; 3) 45. **24.8.** 55. **24.9.** 1) $C_{12}^{2} = 66$; 2) $C_{12}^{2} = 220$; 3) $C_{12}^{4} = 495$. **24.10.** 1) $8 \cdot C_{11}^{2} + 11 \cdot C_{8}^{2} = 748$; 2) $C_{8}^{2} \cdot C_{11}^{2} = 1540$; 3) $C_{11}^{2} = 55$. **24.11.** $6(C_{5}^{2} + C_{5}^{2} + 5) = 150$. **24.12.** 1) $(-\infty; -1)$ және $(-1; +\infty)$ аралығында өседі; 2) $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ және $(3; +\infty)$ аралығында кемиді; 3) $(-5; 5)$, және $(5; +\infty)$ аралығында өседі; 4) $(-\infty; -2)$ және $(-2; 0]$ аралығында кемиді, $[0; 2)$ және $(2; +\infty)$ аралығында өседі. **24.13.** 1) $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; 2) $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

25.2. 1) $128 \cdot C_{10}^{7}$; 2) $16 \cdot C_{7}^{3} = 560$; 3) 1792. **25.3.** $2^{11} = 2048$. **25.5.** 5. **25.6.** 1) ≈1,22; 2) ≈1,33; 3) ≈0,84; 4) ≈0,64. **25.7.** 240; үшінші қосылғыш. **25.8.** $A_{12}^{2} = 132$. **25.10.** 1) $[-5; 2]$; 2) $(-1; 1{,}5)$; 3) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; 4) $[0; 1]$. **25.11.** 1) 4; 2) 4; 3) 13—15 ц/га. **25.12.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 2) түбірі жоқ. **25.13.** 15 ойын. **25.14.** 1) $A_{27}^{3} = 17\,550$; 2) $C_{27}^{3} = 2925$.

26.1. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$. **26.2.** а) 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 0; ә) 1) 1; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$. **26.3.** 1) Ақиқат емес; 2) ақиқат; 3) ақиқат; 4) ақиқат; 5) ақиқат. **26.4.** 1) $\frac{17}{25}$; 2) $\frac{1}{5}$. **26.5.** 1) $\frac{3}{20}$; 2) $\frac{17}{20}$. **26.6.** 1) $\frac{1}{18}$; 2) $\frac{1}{9}$. **26.7.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{3}{8}$. **26.8.** 1) $\frac{445}{2225} = \frac{89}{445}$; 2) $\frac{734}{2225}$; 3) $\frac{896}{2225}$. **26.9.** 1) $\frac{16}{25}$; 2) $\frac{9}{25}$. **26.10.** 1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{14}{15}$. **26.11.** $P(A) = \frac{C_{90}^{3} \cdot C_{10}^{2}}{C_{100}^{5}} = \frac{5! \cdot 95!}{100!} \cdot \frac{90!}{3! \cdot 87!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{15 \cdot 89}{98 \cdot 87 \cdot 2} = \frac{1305}{19012} \approx 0{,}069$. **26.13.** 1) $\varnothing$; 2) 0,5. **26.14.** 90 ойын. **26.15.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{5}{9}$. **27.1.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$. **27.2.** 1) $\frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} = \frac{1}{110}$; 2) $\frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} + \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{99} = \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{2}{11}$. **27.3.** 1) $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$. **27.4.** 1) $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} = \frac{11}{20}$; 2) $P(A_2/A) = \frac{P(A_2) \cdot P(A/A_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10}}{\frac{11}{20}} = \frac{5}{11}$. **27.5.** 0,94. *Нұсқау*. Бірінші немесе екіншінің тигізуі бір-бірінен тәуелсіз болғандықтан $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94$. **27.6.** $\frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98} = \frac{89}{11 \cdot 98} \approx 0{,}083$. **27.7.** 1) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$. **27.8.** $0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}999$. **27.9.** 0,448. **27.10.** $P = P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}21$. **27.11.** 1) 0,38; 2) $P = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}98$. **27.12.** 1) $\frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{18}{98} = \frac{19}{2695} \approx 0{,}0097$; 2) $\frac{20}{100} \cdot \frac{80}{99} + \frac{80}{100} \cdot \frac{20}{99} + \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} = \frac{179}{495}$. **27.13.** 1) ≈0,0278; 2) ≈0,0556. **27.14.** ≈0,66. **27.15.** 1) $\frac{4}{5}$; 2) 0,5. **27.16.** 1) $\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{10}$; 2) $P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) = \frac{5}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{14}{28} \approx 0{,}029$. **27.17.** ≈0,96. *Шешуі*. A және B — оқушының билеттің сәйкесінше бірінші сұрағына және екінші сұрағына жауап беруі. Онда $\overline{A}$ және $\overline{B}$ оқушының сұраққа жауап бермеуі. C — оқушы емтихан тапсырды, яғни ең болмағанда бір сұраққа жауап берді. Демек, $\overline{C}$ оқушы бірде-бір сұраққа жауап бермеді. Сонда $P(\overline{C}) = P(\overline{A} / \overline{B}) = P(\overline{A}) = P(\overline{B} / \overline{A}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{39} \approx 0{,}04$. Бұдан $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}04 \approx 0{,}96$. **27.18.** $\frac{13}{14}$. **27.19.** 0,712. **27.20.** 1) $\frac{1}{120}$; 2) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{210}$. **27.21.** $\frac{3}{1100}$. **27.23.** 1) кездейсоқ;

2) мүмкін емес; 3) кездейсоқ; 4) ақиқат. **27.24.** 1) кездейсоқ; 2) мүмкін емес. **27.26.** 1) $(x-1)^2(x+3)$; 2) $(x+2)(x+3)(x-3)$; 3) $(x^2+2)(x-3)$. **27.27.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{7}$. **28.1.** 1) $P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{11}{21}$; 2) $P(A_2/A)=\frac{P(A_2)\cdot P(A/A_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}}{\frac{11}{21}}=\frac{5}{11}$. **28.2.** $\frac{5}{16}$. **28.3.** 1) 0,576; 2) $P(\overline{A})=1-0{,}1\cdot0{,}2\cdot0{,}2=0{,}996$. **28.4.** 1) $P(A)=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$; 2) $P(A)=\frac{4}{5}$. *Шешуі.* $P(A)=P(B)\cdot P(A/B)+P(C)\cdot P(A/C)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}+\frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}=\frac{4}{5}\cdot$ **28.5.** $P(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^8=$ $=\frac{1}{256}=0{,}0039$. **28.6.** $P(A)=\frac{0{,}7\cdot0{,}9}{0{,}7\cdot0{,}9+0{,}3\cdot0{,}8}=\frac{0{,}63}{0{,}87}\approx0{,}724$. **28.7.** $P(A)=0{,}03\cdot\frac{100}{550}+$ $+0{,}02\cdot\frac{200}{550}+0{,}04\cdot\frac{250}{550}=\frac{34}{1100}$. **28.8.** 0,358. **28.9.** $\frac{0{,}2}{0{,}38}=\frac{10}{19}$. *Шешуі.* $P(A)=\frac{0{,}4+0{,}5}{0{,}4\cdot0{,}5+0{,}6\cdot0{,}3}=$ $=\frac{0{,}63}{0{,}87}\approx0{,}724$. **28.10.** *Нұсқау:* $P(A)=P(A_1)\cdot P(A/A_1)+P(A_2)\cdot P(A/A_2)+P(A_3)\cdot P(A/A_3)+$ $+P(A_4)\cdot P(A/A_4)$. 1) $\frac{1707}{4400}$; $P(A)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{11}=\frac{1707}{4400}$; 2) $\frac{2693}{4400}$. $P(A)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{7}{11}=\frac{2693}{4400}$. **28.12.** 1) $f(4)=12$; 2) $f(5)=\frac{50}{3}$; 3) $f(7)=\frac{49}{8}$. **28.13.** 1) $(x-2a)^3$; 2) $(y-3a)^3$; 3) $(x+2a)^4$. **28.14.** 1) $y^5+10y^4a+40y^3a^3+80y^2a^3+$ $+80ya^4+32a^5$. **29.1.** $\frac{1}{720}$. **29.2.** 1) $\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=0{,}6$; 2) $\frac{C_3^2}{C_5^2}=0{,}3$; 3) 0,9. **29.3.** 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{4}$. **29.4.** 1) $\frac{4\cdot3}{4\cdot5}=0{,}6$; 2) $\frac{4\cdot2}{4\cdot5}=0{,}4$; 3) $\frac{4\cdot1}{4\cdot5}=0{,}2$; 4) $\frac{6}{4\cdot5}=0{,}3$. **29.5.** $P(C)=P(A\cdot B)=$ $=P(A)\cdot P(B)=0{,}03\cdot0{,}04=0{,}0012$. **29.7.** $P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}99\cdot0{,}98\cdot0{,}99=$ $=0{,}960498$. **29.8.** $P(A)=P_{10}(7)=C_{10}^7(0{,}1)^7\cdot(0{,}9)^3$. **29.9.** $P_{200}(125)=C_{200}^{125}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{125}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{75}$. **29.10.** $C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$. **29.11.** 1) 0,87; 2) ≈0,993. *Шешуі.* A — бұйым бақылаудан өтеді, B_1 — алынған бұйым стандартты, B_2 — алынған бұйым стандартты емес. $P(B_1)=0{,}9$, $P(B_2)=0{,}1$. $P(A/B_1)=0{,}96$; $P(A/B_1)=0{,}06$. Демек, 1) $P(A)=0{,}9\cdot0{,}96+$ $+0{,}1\cdot0{,}06=0{,}87$; 2) $P(B_1/A)=\frac{0{,}9\cdot0{,}96}{0{,}87}=\approx0{,}993$. **29.12.** $P_{30}(2)=C_{30}^2\cdot(0{,}04)^2\cdot$ $\cdot(0{,}96)^{28}=0{,}202$. **29.13.** $P_5(4)+P_5(5)=0{,}74$. **29.14.** 60 тетік. **29.15.** 25 топтамасы. **29.16.** 1) 0,27869; 2) 0,62489; 3) 0,653309. *Нұсқау:* $P=\frac{12}{30}=0{,}4$, $q=1-0{,}4=0{,}6$. $P_{n,k}(A)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=0{,}27869$. 1) $n=8$, $k=3$, $p=0{,}4$ және $q=0{,}6$. Онда $P_{8,3}(A)=$ $=C_8^3\cdot p^3\cdot q^{8-3}$; 2) $n=8$; $3\leqslant k\leqslant8$; $p=0{,}4$ және $q=0{,}6$, онда $P_8(3\leqslant k\leqslant8)=P_8(3)+$ $+P_8(4)+P_8(5)+P_8(6)+P_8(7)+P_8(8)=1-P_8(0)-P_8(1)-P_8(2)=1-(0{,}6)^8-8\cdot0{,}4\cdot$ $\cdot(0{,}6)^7-28\cdot(0{,}4)^2\cdot(0{,}6)^7=0{,}62489$. 3) $n=8$; $0\leqslant k\leqslant3$; $p=0{,}4$ және $q=0{,}6$, онда $P_8(0\leqslant k\leqslant3)=P_8(0)+P_8(1)+P_8(2)+P_8(3)=0{,}016796+0{,}149292+0{,}209019+0{,}27869=$ $=0{,}653309$. **29.18.** 1) $(x-1)(x^2+x+4)$; 2) $(x+2)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$; 3) $(x+3)(x^2+3)$. **29.19.** 1) $\pm\sqrt{6}$; 2) $\pm\sqrt{5}$; 3) $\{-4; 8\}$; 4) $\{7\}$; 5) $\{-3; 0\}$; 6) $\{-3; 1\}$. **29.20.** 1) x^3-3x^2+8x; 2) x^3-11x^2+x-2.

МАЗМҰНЫ

1-тарау. ФУНКЦИЯ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

2-тарау. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР, ОЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИКТЕРІ

3-тарау. КЕРІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

4-тарау. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ТЕҢСІЗДІКТЕР

5-тарау. КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ ЖӘНЕ ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Кучер Татьяна Павловна
Корчевский Владимир Евгеньевич
Жумагулова Зауре Абдыкеновна

АЛГЕБРА

Часть 1

Учебник для 10 классов
естественно-математического направления
общеобразовательных школ
(*на казахском языке*)

Редакторы *Ж. Өміржанова*
Көркемдеуші редакторы *А. Сланова*
Техникалық редакторы *И. Тарапунец*
Корректоры *С. Дәуірхан*
Компьютерде беттеген *С. Жұмагелдиева*

Баспаға Қазақстан Республикасы Білім және ғылым
министрлігінің № 0000001 мемлекеттік лицензиясы
2003 жылы 7 шілдеде берілген

ИБ № 5868

Басуға 18.06.19 қол қойылды. Пішіні $70 \cdot 100^{1}/_{16}$. Офсеттік қағаз.
Қаріп түрі “SchoolBook Kza”. Офсеттік басылыс.
Шартты баспа табағы 19,35+0,32 қосарбет. Шартты бояулы беттаңбасы 78,69.
Есептік баспа табағы 12,3+0,54 қосарбет. Таралымы 85 000 дана. Тапсырыс №

“Мектеп” баспасы, 050009, Алматы қаласы, Абай даңғылы, 143-үй
Факс.: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz