АЛГЕБРА и НАЧАЛА АНАЛИЗА

10

Часть 2

Учебник для 10 класса
естественно-математического направления
общеобразовательных школ

*Утверждено Министерством образования
и науки Республики Казахстан*

Алматы «Мектеп» 2019

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72
А45

Авторы:
А. Е. Абылкасымова, Т. П. Кучер,
В. Е. Корчевский, З. А. Жумагулова

Условные обозначения:

— проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

— задания для самостоятельного выполнения

— конец доказательства теоремы или свойства

— дополнительные сведения

— вопросы для самопроверки

A — упражнения, выполнение которых обязательно для каждого учащегося

B — упражнения среднего уровня сложности

C — упражнения повышенной трудности

ПОВТОРИТЕ — упражнения для повторения пройденного материала

А45 **Алгебра и начала анализа:** Учебник для 10 кл. естеств.-матем. направл. общеобразоват. шк. Часть 2 /А. Е. Абылкасымова, Т. П. Кучер, В. Е. Корчевский, З. А. Жумагулова. — Алматы: Мектеп, 2019. — 176 с., илл.

ISBN 978—601—07—1184—6

$А\dfrac{4306020503-084}{404(05)-19}$ 63(1)—19

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72

ISBN 978—601—07—1184—6

6 МНОГОЧЛЕНЫ

§ 30. МНОГОЧЛЕНЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СТАНДАРТНЫЙ ВИД. ОДНОРОДНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ. СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Вы ознакомитесь с понятиями: *многочлен с несколькими переменными; симметрические и однородные многочлены;*
научитесь приводить многочлены к стандартному виду, находить степень многочлена стандартного вида; распознавать симметрические и однородные многочлены.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Симметрические многочлены, однородные многочлены

ВЫ ЗНАЕТЕ: *Одночленами* являются числа, переменные, их степени с целым неотрицательным показателем и произведения.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему выражения x^3y^3, $8a^3y^5$, 13, y, m^2 являются одночленами, выражения $x^3 + y^3$, $a^3 - 8y^3$, $13 + 67$, $y - 5$ не являются одночленами?

Определение. ***Многочленом*** *называется сумма одночленов.*

ОБЪЯСНИТЕ

Почему выражение $\frac{z+x+y}{8}$ является многочленом, выражение $\frac{x^4}{y-23} + 2x - x^2$ не является многочленом?

Определение. ***Членами многочлена*** *называются все одночлены, входящие в многочлен.*

Перечислите члены многочлена $xy + 1{,}5x^7 - 7y^5$.

Различают многочлены с одной переменной и многочлены с несколькими переменными.

ПРИМЕР 1. $x + 1{,}5x^7 - 7x^5$ — многочлен с одной переменной x;
$y + 1{,}5y^7 - 7y^5$ — многочлен с одной переменной y;
$xy + 1{,}5x^7 - 7y^5$ — многочлен с двумя переменными x и y;
$xy + 1{,}5x^7 - 7z^5$ — многочлен с тремя переменными x, y и z.

Определение. ***Многочленом стандартного вида*** *называется многочлен, состоящий из одночленов стандартного вида, который не имеет подобных членов.*

ОБЪЯСНИТЕ

Почему многочлены $7xx - 9yxy^2 - 8xy + 5xy$ и $7x^2 - 9xy^3 - 8xy + 5xy$ нельзя назвать многочленами стандартного вида, а многочлен $7x^2 - 9xy^3 - 3xy$ — можно?

ПРИМЕР 2. Приведем многочлен $0{,}5x \cdot 2y + 0{,}5x^7 + x^7 - 7y^5$ к стандартному виду.

Решение. Сначала приведем каждый член многочлена к стандартному виду. Получим: первый член $0{,}5x \cdot 2y = xy$, остальные члены уже записаны в стандартном виде. Затем приведем подобные слагаемые. Получим многочлен стандартного вида: $xy + 1{,}5x^7 - 7y^5$.

Определение. ***Степенью многочлена стандартного вида*** *называется наибольшая степень из степеней входящих в него одночленов.* ***Степенью одночлена*** *называется значение суммы показателей степеней входящих в него переменных (неизвестных).*

ПРИМЕР 3. Степень многочлена $7x^2 - 9xy^3 - 3xy$ равна 4, так как степень одночлена $7x^2$ равна 2, степень одночлена $9xy^3$ равна $1 + 3 = 4$, степень одночлена $3xy$ равна $1 + 1 = 2$.

Рассмотрим многочлены: $a + b$, xy, $x^2y + xy^2$.

Эти многочлены обладают особенностью: если одну переменную заменить на другую (в первом случае: a заменить на b и b заменить на a, во втором — x на y и y на x), то получится выражение, тождественно равное рассматриваемому многочлену: $a + b = b + a$, $xy = yx$, $x^2y + xy^2 = y^2x + yx^2$.

Такие многочлены называют *симметрическими*.

Определение. *Многочлен от x и y называется* ***симметрическим,*** *если при замене x на y, y на x он становится тождественно равным данному многочлену.*

ОБЪЯСНИТЕ

Почему многочлены: $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $xy(x + y)$ являются симметрическими, а многочлены $x^2y - xy^2$, $x^3 - y^3$ — нет?

Самыми простыми являются симметрические многочлены $x + y$ и xy. Их называют *элементарными симметрическими многочленами* от x и y.

Определение. Однородным многочленом *называется многочлен, у всех членов которого значение суммы показателей степеней входящих в него переменных (неизвестных) одинакова.*

ОБЪЯСНИТЕ

Почему многочлены: $x + 3y$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $xy(x + y)$, $x^2y - xy^2$, $x^3 - y^3$ являются однородными, а многочлены: $x + y^2$, $x^3 - 3y$ — нет?

1. Приведите пример многочлена с двумя переменными.
2. Приведите пример однородного многочлена.
3. Приведите пример симметрического многочлена.
4. Приведите пример однородного симметрического многочлена с двумя переменными четвертой степени.

Упражнения

А

30.1. Запишите в виде многочлена стандартного вида выражение:
1) $(x-1)(x+1)(x-3)$; 2) $(x-1)(x+3)(x-3)$;
3) $(x-2)(x+1)(x+2)$; 4) $(x-1)(x+1)+(x^2-2)(x-3)$.

30.2. Найдите степень и выпишите набор всех коэффициентов многочлена $f(x)$:
1) $f(x)=2x^5-x^2-9x^3+9$; 2) $f(x)=-x^5-x^4-9x^2+1$;
3) $f(x)=x^6-x^4-x^3$; 4) $f(x)=x^5-3x^2-7x^3+\sqrt{3}$.

30.3. Придумайте и запишите в стандартном виде многочлен степени n, если:
1) $n=5$; 2) $n=3$; 3) $n=0$; 4) $n=1$.

30.4. Запишите в виде многочлена стандартного вида выражение:
1) $(x-1)^2-x(x+1)(x-3)$; 2) $(x-1)x^2+3(x-3)^2$;
3) $(x-2)^2+3(x+1)^3-(x+9)$; 4) $(x-3)(x+1)+2x(x^2-2x)$.

В

30.5. Запишите в виде многочлена выражение с двумя переменными $x^5y^2+x^3y^4-2x^4y^5-y^4x^4+15x^4y^2-x^2(x^5y-x^2y^4)$.
Какие из следующих утверждений верны:
1) степень многочлена равна 7;
2) многочлен является симметрическим многочленом степени 9;
3) многочлен не имеет подобных членов;
4) степень многочлена равна 9?

30.6. Придумайте и запишите симметрический многочлен с двумя переменными степени n, если:
1) $n=1$; 2) $n=2$; 3) $n=3$; 4) $n=5$.

30.7. Приведите к многочлену стандартного вида выражение:
1) $a^2b(a^3b-b^2a^2)+4a^3b^2a^2-2aba^4b+7ab^0a^4b^2-3a^3bab^2$;
2) $3x^2y(x^3y-y^2x^2)-5x^3y^2x^2-2xyx^4y+5xy^2x^4y^2-4x^3yxy^2$.
Найдите степень полученного многочлена.

30.8. Приведите пример однородного симметрического многочлена с двумя переменными степени n, если:
1) $n=1$; 2) $n=2$; 3) $n=3$; 4) $n=5$.

C

30.9. Замените (*) и (**) такими одночленами, чтобы стало симметрическим многочленом выражение:
1) $x^4-(*)-(**)+y^4$; 2) $yx^7-(*)-(**)+xy^7$;
3) $5y^2x^7-6(*)-(**)+5x^2y^7$.

30.10. Представьте в виде многочлена выражение:
1) $(ax-3y)(x^2-py^2)$; 2) $(ax+5y)(y^2-xy+px^2)$.
Найдите значения параметров a и p так, чтобы полученный многочлен с переменными x и y был симметрическим.

ПОВТОРИТЕ

30.11. Представьте в виде рациональной дроби выражение:
1) $\frac{3x^3}{5y^3}:\frac{27x^5}{4y^4}\cdot\frac{45}{8y^2x^{-3}}$; 2) $\frac{25a(b-1)}{81d}:\frac{5cd^2}{27ab}:\frac{a^3(b-1)}{2c^3d^3}$.

30.12. Найдите период функции:
1) $y=\sin 4\pi x+\operatorname{tg} 2\pi x$; 2) $y=\operatorname{ctg} 6x-\sin 3x$;
3) $y=2\operatorname{tg}\pi x+\cos 2\pi x$; 4) $y=1-\cos\frac{\pi x}{3}+2\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}$.

30.13. Методом понижения степени решите неравенство:
1) $\cos^2 x\geqslant 0{,}5$; 2) $\sin^2 x\geqslant 1$; 3) $\cos^2 x<1$.

30.14. Методом интервалов решите неравенство:
1) $(x+4)(x-3)(x+2)^2\geqslant 0$; 2) $(2x-3)(x+6)(3x-6)^3\leqslant 0$;
3) $\frac{2x^2-5x+3}{x-3}\leqslant 0$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Многочлен, степень многочлена, старший коэффициент многочлена, формулы сокращенного умножения, квадратный трехчлен, корни квадратного трехчлена.

§31. ОБЩИЙ ВИД МНОГОЧЛЕНА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДЕЛЕНИЕ "УГОЛКОМ" МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Вы ознакомитесь с понятием *многочлен степени n от переменного x*;
научитесь распознавать многочлен с одной переменной и приводить его к стандартному виду; находить старший коэффициент, степень и свободный член многочлена с одной переменной; выполнять деление "уголком" многочлена на многочлен.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Многочлен, деление с остатком

Определение. ***Многочленом степени n от переменного x*** *называется алгебраическое выражение вида:* $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_n\cdot x^n$, где n — *целое неотрицательное число,* $a_n, \ldots, a_1, a_0$ — *любые числа, причем* $a_n \neq 0$.

Любое число называют *многочленом нулевой степени.*

Нуль называют *нулем-многочленом.*

В отличие от других многочленов нуль-многочлен не имеет степени.

ПРИМЕР

1. Многочлен пятой степени $\sqrt{2}\,x^5 - x^4 + 2x^3 - \sqrt{1\frac{1}{3}}\,x^2 - 0{,}6x + 14$.

Многочлен четвертой степени $-3x^4 + 2x^3 - \sqrt{1\frac{1}{3}}\,x^2 - 0{,}6x + 14$.

Многочлен третьей степени $2x^3 - \sqrt{1\frac{1}{3}}\,x^2 - 0{,}6x + 14$.

Многочлен второй степени $\sqrt{1\frac{1}{3}}\,x^2 - 0{,}6x + 14$.

ВЫ ЗНАЕТЕ:

Многочлен третьей степени называется *трехчленом.*
Многочлен второй степени называется *двучленом.*

ОБЪЯСНИТЕ

Почему выражение $2x^2 - \frac{1}{x} + 7$ не является многочленом?

Многочлен обычно записывают по убывающим степеням, такой многочлен называется *многочленом стандартного вида.*

ПРИМЕР

2. Запись многочлена в виде $x + 2 + 3x^3 - 7x^2$ считают неудачной, многочлен надо записывать в стандартном виде $3x^3 - 7x^2 + x + 2$.

Термины и обозначения

1) Многочлен от переменного x будем обозначать: $P(x)$; $Q(x)$; $S(x)$; $R(x)$ и т. д.

2) Степень многочлена будем обозначать: ст. $P(x)$.

3) Числа $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ будем называть *коэффициентами многочлена* , при этом a_n — *старший коэффициент,* a_0 — *свободный член.*

ПРИМЕР

3. В многочлене $2x^3 - \sqrt{3}\,x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ старший коэффициент равен 2, свободный член равен 1.

4) Одночлены $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, a_{n-2}x^{n-2}, \ldots, a_1x, a_0$ называются *членами многочлена.* Если $a_i = 0$, то этот член не пишут.

ПРИМЕР

4. Многочлен x^4 имеет коэффициенты: 1, 0, 0, 0.

Многочлен можно считать известным тогда и только тогда, когда известны все его коэффициенты и порядок их следования.

1) Составьте многочлен, если известны его коэффициенты:

а) $-\frac{2}{3}$, 5, 0, 1; б) 1, 2, 0, 0.

2) Сколько можно составить многочленов с коэффициентами 5, -7, 2, 0?

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и их коэффициенты равны:

если $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$, где $a_n \neq 0$;

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + ... + b_1 x + b_0$, где $b_m \neq 0$, то $P(x) = Q(x)$ при условии:

1) ст. $P(x)$ = ст. $Q(x)$, т. е. $m = n$,

2) $a_n = b_m$, $a_{n-1} = b_{m-1}$, $a_{n-2} = b_{m-2}$, ..., $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему многочлены $P(x) = \sin\frac{\pi}{6}x^3 - \sqrt{4+2\sqrt{3}}\,x^2 - x$ и $Q(x) = \frac{1}{2}x^3 - (1+\sqrt{3})x^2 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x$ равны?

ВЫ ЗНАЕТЕ: Многочлены можно складывать, вычитать и умножать.

ОБЪЯСНИТЕ

Как выполнили действия с многочленами:

1) $(3x^3 - 7x^2 + x + 2) + (x^3 + 13x^2 - x - 2) = 3x^3 - 7x^2 + x + 2 + x^3 + 13x^2 - x - 2 = 4x^3 + 6x^2$;

2) $(3x^3 - 7x^2 + x + 2) - (x^3 + 13x^2 - x - 2) = 3x^3 - 7x^2 + x + 2 - x^3 - 13x^2 + x + 2 = 2x^3 - 20x^2 + 2x + 4$;

3) $(3x^3 - 7x^2 + x + 2)(x + 2) = 3x^4 - 7x^3 + x^2 + 2x + 6x^3 - 14x^2 + 2x + 4 = 3x^4 - x^3 - 13x^2 + 4x + 4$?

Сложение, вычитание и умножение многочленов выполнимы для любых многочленов и удовлетворяют следующим свойствам:

1) Переместительное свойство сложения и умножения многочленов:

$$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x);$$
$$P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x).$$

2) Сочетательное свойство сложения и умножения многочленов:

$$(P(x) + Q(x)) + R(x) = P(x) + (Q(x) + R(x));$$
$$(P(x) \cdot Q(x)) \cdot R(x) = P(x) \cdot (Q(x) \cdot R(x)).$$

3) Распределительное свойство умножения многочленов относительно сложения:

$$(P(x) + Q(x)) \cdot R(x) = P(x) \cdot R(x) + Q(x) \cdot R(x).$$

ОБЪЯСНИТЕ

Почему:

ст. $(P(x) + Q(x) + R(x)) \leqslant k$, где $k = \max\{m, g, p\}$ и $m =$ ст. $(P(x))$, $g =$ ст. $(Q(x))$, $p =$ ст.$(R(x))$;

ст. $(P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x)) =$ ст.$(P(x))$ +ст.$(Q(x))$ + ст.$(R(x))$?

ВЫ ЗНАЕТЕ: Для умножения обратным действием является действие деления.

ПРИМЕР 5. Если $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x^2 - x + 1$, $S(x) = x + 1$, то $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$.

В таких случаях говорят, что $P(x)$ делится на $S(x)$ и записывают: $P(x) \vdots S(x)$.

Определение. *Многочлен $P(x)$ делится на многочлен $S(x)$, если существует такой многочлен $Q(x)$, что $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$.*

Если $P(x)$ делится на $S(x)$, то записывают: $P(x) \vdots S(x)$.

Свойства делимости многочленов:

1) Нуль-многочлен делится на любой многочлен: $0 : P(x) = 0$.

2) Если $P(x) \neq 0$, то $P(x)$ не делится на 0.

3) На многочлен нулевой степени делится любой многочлен: $P(x) : c = \left(\frac{1}{c} P(x)\right)$.

4) Если $P(x) \vdots S(x)$ и $P(x) \neq 0$, $S(x) \neq 0$, то ст. $(P(x)) \geqslant$ ст. $(S(x))$.

Доказательство.

По условию $P(x) \vdots S(x)$, тогда по определению существует такой многочлен $Q(x)$, что $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$. Поскольку ст.$(P(x) \cdot S(x))$ = ст.$(P(x))$ + ст.$(S(x))$, то ст. $(P(x)) \geqslant$ ст. $(S(x))$.

Свойства 1 – 3 докажите самостоятельно.

В тех случаях, когда один многочлен не делится на другой, говорят о делении с остатком (по аналогии с делением целых чисел: $73 : 13 = 5$ (ост. 8), так как $73 = 13 \cdot 5 + 8$ или в общем виде при делении p на s имеем $p = s \cdot q + r$, где $0 \leqslant r < s$).

Теорема. *Если $P(x)$ и $S(x)$ многочлены, то существует и при том только одна пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, для которых выполняется равенство: $P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$ и ст. $(R(x)) <$ ст.$(S(x))$, либо $R(x) = 0$.*

ПРИМЕР 6. Разделим многочлен $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$ на многочлен $x^2 - x + 1$.

$x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4 \;\big|\; x^2 - x + 1$	Будем делить "уголком" и рассуждать так, как при делении многозначных чисел.

$\begin{array}{l\|l} x^5-6x^3+2x^2-4 & x^2-x+1 \\ \hline & x^3 \end{array}$ для наглядности выполнения вычитания делимое запишем так: $\begin{array}{l\|l} x^5+0\cdot x^4-6x^3+2x^2+0-4 & x^2-x+1 \\ \hline -\,x^5-x^4+x^3 & x^3 \end{array}$	Сначала старший член делимого разделим на старший член делителя: $x^5 : x^2 = x^{5-2} = x^3$. Запишем x^3 в частном. Затем умножим x^3 на делитель $x^2 - x + 1$ и запишем под делимым: $x^5 - x^4 + x^3$.
$\begin{array}{l\|l} x^5+0\cdot x^4-6x^3+2x^2-4 & x^2-x+1 \\ \hline -\,x^5-x^4+x^3 & x^3 \\ \hline \quad x^4-7x^3+2x^2-4 & \end{array}$	Далее выполним вычитание: $x^5 + 0\cdot x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 0\cdot x - 4 - (x^5 - x^4 + x^3) = x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4$.
$\begin{array}{l\|l} x^5+0\cdot x^4-6x^3+2x^2-4 & x^2-x+1 \\ \hline -\,x^5-x^4+x^3 & x^3+x^2-6x-5 \\ \hline \quad x^4-7x^3+2x^2-4 & \\ \quad -\,x^4-x^3+x^2 & \\ \hline \qquad -6x^3+x^2-4 & \\ \qquad -\,-6x^3+6x^2-6x & \\ \hline \qquad\quad -5x^2+6x-4 & \\ \qquad\quad -\,-5x^2+5x-5 & \\ \hline \qquad\qquad x+1 \text{ остаток.} & \end{array}$	Продолжим деление многочлена $x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4$ на многочлен $x^2 - x + 1$ аналогично делению многочлена $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$ на многочлен $x^2 - x + 1$ и т. д.
Обычно слагаемые вида $0 \cdot x^n$ не пишут. Деление многочленов выглядит так:	$\begin{array}{l\|l} x^5-6x^3+2x^2-4 & x^2-x+1 \\ \hline -\,x^5-x^4+x^3 & x^3+x^2-6x-5 \\ \hline \quad x^4-7x^3+2x^2-4 & \\ \quad -\,x^4-x^3+x^2 & \\ \hline \qquad -6x^3+x^2-4 & \\ \qquad -\,-6x^3+6x^2-6x & \\ \hline \qquad\quad -5x^2+6x-4 & \\ \qquad\quad -\,-5x^2+5x-5 & \\ \hline \qquad\qquad x+1 \text{ остаток.} & \end{array}$

?

1. Приведите пример многочлена с одной переменной четвертой степени.
2. Какой многочлен не имеет степени?
3. Может ли равняться нулю: а) свободный член многочлена; б) старший коэффициент многочлена; в) степень многочлена?
4. Какие действия можно выполнять над многочленами?
5. Всегда ли один многочлен делится на другой?
6. Всегда ли можно выполнить деление одного многочлена на другой многочлен?

Упражнения

А

31.1. Найдите значение суммы многочленов $f(x)$ и $h(x)$:
1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ и $h(x) = 3x^2 - x - 6$ при $x = 2; 3; -1$;
2) $f(x) = -x^3 - 5x^2 + 3$ и $h(x) = 2x^4 - x^2 - 2$ при $x = -2; -1; 2$;
3) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$ и $h(x) = x^2 - 3x - 1$ при $x = 2; 3; -1$;
4) $f(x) = -x^3 - 4x^2 - 3$ и $h(x) = -x^3 - x - 3$ при $x = 2; 3; -1$.

31.2. При каких значениях параметра p многочлен $(p^2 - 4)x^4 - 2x^3 + (2p - 1)x - 6$:
1) является приведенным многочленом;
2) является многочленом четвертой степени;
3) является многочленом третьей степени;
4) принимает одинаковые значения в точках $x = -1$ и $x = 1$?

31.3. Найдите все значения параметров a и b, при которых тождественно равны многочлены $f(x)$ и $h(x)$:
1) $f(x) = 2ax - (a + 1)$ и $h(x) = 4x + (3b - a + 11)$;
2) $f(x) = 3ax - 3a - 2$ и $h(x) = 9x + (2b - 2a + 9)$;
3) $f(x) = ax - 3a + 5$ и $h(x) = -x + (a - 2b + 3)$;
4) $f(x) = -ax - 2a - 2$ и $h(x) = 5x + (2b - a + 4)$.

31.4. Выполните деление "уголком" многочлена:
1) $x^3 - 2x^2 - 3x - 5$ на многочлен $x^2 - 3x - 1$;
2) $2x^3 - 2x^2 + x + 3$ на многочлен $x^2 - 3x - 4$;
3) $x^5 - 3x^3 - x + 2$ на многочлен $x - 2$;
4) $6x^4 - 2x + 3$ на многочлен $2x + 3$.

31.5. Какие из следующих утверждений верны:
1) сумма двух многочленов степени n есть многочлен степени $2n$;
2) разность многочленов степени n есть многочлен степени не выше n;
3) произведение трех многочленов степени n есть многочлен степени не выше n;
4) произведение двух многочленов степени n есть многочлен степени $2n$?

B

31.6. Заполните таблицу 17, если $f(x)$ и $h(x)$ многочлены:

Таблица 17

Степень $f(x)$	Степень $h(x)$	Степень $(f(x) + h(x))$	Степень $(f(x) \cdot h(x))$	Степень $f^2(x)$
4	2			
	5			14
	3		7	
		2		6
		4	14	

31.7. Докажите, что значение суммы всех коэффициентов многочлена $f(x)$ стандартного вида равно $f(1)$.

31.8. Найдите все значения параметра a, при которых тождественно равны многочлены $f(x)$ и $h(x)$:
1) $f(x) = (a^2 - 5)x^4 - 2x^3 + (2a - 1)x - 7$ и
$h(x) = 4x^4 - 2x^3 - (a - 8)x - a - 4$;
2) $f(x) = (a^2 - 2)x^3 - 2x^2 + (2a + 1)x - 4$ и
$h(x) = 2x^3 - 2x^2 + (a - 1)x - a - 6$;

3) $f(x) = (3 - a^2)x^5 - 2x^4 + (2a + 1)x + 3$ и
$h(x) = -x^5 - 2x^4 + (a - 1)x + a + 5$;
4) $f(x) = (a^2 - 2a)x^4 - 2x^2 + (3a - 2)x - 4 + a$ и
$h(x) = -x^4 - 2x^2 + (2a - 1)x - a - 2$.

31.9. Найдите K, P и M так, чтобы было верным равенство:
1) $z^4 + 2z^3 - 16z^2 - 2z + 15 = (z + 1)(z^3 + Kz^2 + Pz + M)$;
2) $3z^5 - z^4 - 3z + 1 = (z^2 + 1)(3z^3 + Kz^2 + Pz + M)$;
3) $z^6 + 3z^3 + 2 = (z^3 + 1)(z^3 + Kz^2 + Pz + M)$.

C

31.10. Известно, что $f(x)$ — многочлен степени n и при всех значениях переменной x выполняется равенство $f(x) = f(-x)$. Докажите:
1) n — четное натуральное число или нуль;
2) коэффициенты многочлена $f(x)$ при нечетных степенях x равны 0.

31.11. При каких значениях a и c многочлен $f(x)$ делится на многочлен $h(x)$:
1) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + c$, $h(x) = x^2 - 3x + 2$;
2) $f(x) = x^4 - 2x^3 + ax + 2$, $h(x) = x^2 + x + c$?

ПОВТОРИТЕ

31.12. Решите дробно-рациональное уравнение:

1) $1 - \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x}{x-2}$; 2) $x^2 + \dfrac{1-3x}{x-4} = 16 - \dfrac{3x-1}{x-4}$;

3) $\dfrac{36}{x^2 - 12x} - \dfrac{3}{x-12} = 3$; 4) $\dfrac{12}{x^2 + 2x} - \dfrac{3}{x^2 + 2x - 2} = 1$.

31.13. Изобразите на координатной прямой множество точек, заданное системой неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 3x \geqslant 0, \\ x - 2 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x - x^2 < 0, \\ 4 - 2x \leqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 1 + x^2 \leqslant 5, \\ 1 - x \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4 - x^2 \geqslant 0, \\ 1 + x^2 \leqslant 17. \end{cases}$

31.14. Постройте график функции $y = |x^2 + 2x - 8|$. Найдите:
1) координаты точек пересечения графика функции с осями координат;
2) промежутки монотонности функции;
3) ось симметрии графика функции;
4) значение параметра p, при котором уравнение $p = |x^2 + 2x - 8|$ имеет три корня.

31.15. 1) Расстояние между двумя речными причалами равно 90 км. Теплоход на весь рейс в оба конца затрачивает 7,5 ч. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения реки составляет 20% от собственной скорости теплохода.

2) За 30 мин катер проходит по течению реки такое же расстояние, что и за 40 мин против течения, причем 2 км против течения он проходит за 10 мин. Найдите собственную скорость катера и скорость течения реки.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Многочлен, уравнение, корень уравнения, симметрические и однородные уравнения.

§32. НАХОЖДЕНИЕ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ. ТЕОРЕМА БЕЗУ. СХЕМА ГОРНЕРА

Вы ознакомитесь с понятием *корень многочлена*, теоремой Безу и ее следствиями, со схемой Горнера; научитесь находить корни многочлена с одной переменной методом разложения его на множители; использовать формулы $x^n - a^n$, $x^{2n+1} + a^{2n+1}$ для разложения многочленов на множители при $n \in N$; применять теорему Безу и ее следствия при решении задач; применять различные способы нахождения корней симметрических и однородных многочленов; применять схему Горнера для нахождения корней многочлена.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Корни многочлена, разложение многочленов на множители

Рассмотрим многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$. Если вместо переменной x подставим число x_0, то получим число

$$P(x_0) = a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_{n-2}x_0^{n-2} + ... + a_1x_0 + a_0.$$

$P(x_0)$ называется *значением многочлена* $P(x)$ при $x = x_0$.

Найдите $P(2)$, $P(0)$, $P(-0,5)$, если $P(x) = 3x^4 - 2x + 1$.

Определение. *Число x_0 называется* ***корнем многочлена P(x)***, *если при $x = x_0$ значение многочлена $P(x)$ равно 0.*

Является ли число 2 корнем многочлена $x^3 + 3x^2 - 7x + 1$?

Замечание. Не путать:
1) многочлен равен 0;
2) значение многочлена при $x = x_0$ равно 0.

ПРИМЕР

1. Многочлен $P(x) = x^3 - 8$ не равен 0.
$P(x) \neq 0$, $P(2) = 0$.

ПРИМЕР

2. Найдем корни многочлена $x^6 - x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 2$ с одной переменной методом разложения на множители, используя способ группировки.

Решение. $x^6 - x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 2 = (x^6 - x^5 - 2x^4) + (x^2 - x - 2) = x^4 \cdot (x^2 - x - 2) + (x^2 - x - 2) = (x^2 - x - 2) \cdot (x^4 + 1) = (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x^4 + 1)$.
Тогда $x^6 - x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 2 = 0$ при $x = 2$ и $x = -1$.

Ответ: -1; 2.

Рассмотрим формулы, позволяющие разложить на множители двучлены n-ой степени вида: $x^n - a^n$ и $x^{2n+1} + a^{2n+1}$.

Проверьте, верны ли равенства:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a^2);$$
$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2);$$
$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3).$$

…………………………………………………………………………….

Установите закономерность, рассмотрев, как изменяются слагаемые в скобках.
Является ли обобщением выше рассмотренных равенств равенство

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + ... + xa^{n-2} + a^{n-1})?$$

Убедитесь, что оно верно, раскрыв скобки в его правой части.

Упростите выражение:

$$(x + a)(x^2 - xa + a^2);$$
$$(x + a)(x^4 - x^3a + x^2a^2 - xa^3 + a^4);$$
$$(x + a)(x^6 - x^5a + x^4a^2 - x^3a^3 + x^2a^4 - xa^5 + a^6).$$

…………………………………………………………………………………………….

Является ли обобщением выше рассмотренных равенств равенство

$$x^{2n+1} + a^{2n+1} = (x+a)(x^{2n} - x^{2n-1}a + x^{2n-2}a^2 - ... - xa^{2n-1} + a^{2n})?$$

Убедитесь, что оно верно, раскрыв скобки в его правой части.

Определение. *Многочлен n-ой степени с одной переменной, в котором коэффициенты равноудаленных от концов членов равны, называется* ***симметрическим многочленом.***

ОБЪЯСНИТЕ

Почему многочлены $x^6 - 116x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 116x + 1$; $13x^5 - x^4 + 47x^3 + 47x^2 - x + 13$ являются симметрическими?

АЛГОРИТМ

Алгоритм нахождения корней симметрического многочлена четной степени $ax^{2n} + bx^{2n-1} + cx^{2n-2} + ... + cx^2 + bx + a$ рассмотрим на примере многочлена четвертой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$:

1) приравнять многочлен к нулю: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$;
2) разделить левую и правую части полученного уравнения на x^2. При этом не происходит потери корней, так как $x = 0$ не является корнем уравнения при $a \neq 0$;
3) полученное уравнение $ax^2 + bx + c + b \cdot \frac{1}{x} + a \cdot \frac{1}{x^2} = 0$ привести к виду $a \cdot (x^2 + \frac{1}{x^2}) + b \cdot (x + \frac{1}{x}) + c = 0$, используя способ группировки;
4) ввести новую переменную $y = x + \frac{1}{x}$;
5) выразить $x^2 + \frac{1}{x^2}$ через y, получив $y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ или $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$;
6) решить полученное квадратное уравнение $ay^2 + by + c - 2a = 0$;
7) перейти к переменной x.

Убедитесь самостоятельно, что симметрический многочлен нечетной степени сводится к симметрическому многочлену четной степени, так как у любого симметрического многочлена нечетной степени один из корней всегда равен –1. Рассмотрите примеры:

$x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 2x + 1$; $\qquad 3x^7 - 4x^6 - 9x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 4x + 3$.

ПРИМЕР **3.** Найдем корни симметрического многочлена пятой степени: $2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2$.

Решение. Разделим многочлен на $(x+1)$, так как $x = -1$ является корнем многочлена, получим $2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2 = (x + 1)\,(2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2)$. Для нахождения корней многочлена $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2$ приравняем к 0 и разделим на x^2. Получим уравнение $2x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$. Используя способ группировки, получим $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$. Введем новую переменную $y = x + \frac{1}{x}$, получим уравнение $2y^2 - 5y + 2 = 0 \Rightarrow y_1 = 2;\ y_2 = 0{,}5$. Возвратившись к переменной x, получим $x + \frac{1}{x} = 2$ и $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$. Решив эти уравнения, получим $x = 1$.

Ответ: -1 и 1.

Найдите остаток $R(x)$ при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ и сравните с $P(a)$, если:
1) $P(x) = 2x^2 + 7x - 1$, $a = 1$;
2) $P(x) = x^5 - 3x^2 + 7x + 2$, $a = -2$;
3) $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2$, $a = 3$.

В результате выполнения данного задания оказалось, что остаток $R(x)$ при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $P(a)$ и это не случайное совпадение.

Теорема Безу. *Остаток при делении любого многочлена на двучлен $(x - a)$ равен значению делимого многочлена при $x = a$.*

Доказательство. Обозначим делимый многочлен $P(x)$. Делитель есть многочлен первой степени, поэтому ст. $R(x) = 0$, т. е. $R(x)$ – const. Пусть $R(x) = c$. Тогда $P(x) = (x - a) \cdot S(x) + c$.

Следовательно, $P(a) = (a - a) \cdot S(a) + c = c$.

Найдите остаток $R(x)$, не выполняя деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$, если:
1) $P(x) = 3x^5 - 2x^4 - 7x^2 + x + 5$, $a = -1$;
2) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 9$, $a = -3$.

Следствие 1. *Многочлен $P(x)$ делится на двучлен $(x - a)$ тогда и только тогда, когда число a является корнем данного многочлена.*

$P(x) \vdots (x - a) \Leftrightarrow a$ — корень $P(x)$, т. е.
1) $P(x) \vdots (x - a) \Rightarrow a$ — корень $P(x)$,
2) a — корень $P(x) \Rightarrow P(x) \vdots (x - a)$.

Доказательство. 1) $P(x) = (x - a) \cdot S(x) + P(a)$. По условию $P(x) \vdots (x - a)$, значит, $P(a) = 0$. Тогда по определению a — корень $P(x)$.

2) $P(x) = (x - a) \cdot S(x) + R(x)$. По условию a — корень $P(x)$, значит, по определению $P(a) = 0$. Поскольку $R(x) = P(a)$, то $R(x) = 0$.

Тогда $P(x) = (x - a) \cdot S(x)$. Следовательно, $P(x) \vdots (x - a)$.

Следствие 2. *Если* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *различные корни многочлена* $P(x)$, *то* $P(x) \vdots (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot ... \cdot (x - a_n)$. (1)

Доказательство. Для этого используем метод математической индукции.

Проверим истинность утверждения при $n = 1$, если a_1 корень многочлена $P(x)$, то $P(x) \vdots (x - a_1)$. Это верно по следствию 1.

Допустим, что утверждение (1) верно при $n = k$. Если $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ различные корни многочлена $P(x)$, то

$$P(x) \vdots (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot ... \cdot (x - a_k) \quad (2)$$

и докажем, что утверждение (1) верно при $n = k + 1$.

Если $a_1, a_2, a_3, ..., a_{k+1}$ различные корни многочлена $P(x)$, то $P(x) \vdots (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \cdot ... \cdot (x - a_{k+1})$.

По предположению $P(x) \vdots (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot ... \cdot (x - a_k)$, поэтому

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) ... (x - a_k) \cdot S(x). \quad (3)$$

Поскольку a_{k+1} корень $P(x)$, то $P(a_{k+1}) = 0$.

Используя (3), получим

$P(a_{k+1}) = (a_{k+1} - a_1)(a_{k+1} - a_2)(a_{k+1} - a_3) ... (a_{k+1} - a_k) \cdot S(a_{k+1}) = 0$.

По условию $a_1, a_2, a_3, ..., a_{k+1}$ различные корни многочлена $P(x)$, поэтому $(a_{k+1} - a_1)(a_{k+1} - a_2)(a_{k+1} - a_3) ... (a_{k+1} - a_k) \neq 0$, следовательно, $S(a_{k+1}) = 0$, a_{k+1} корень $S(x)$. По следствию 1 получим $S(x) \vdots (x - a_{k+1})$.

Тогда $S(x) = (x - a_{k+1}) \cdot F(x)$.

Используя (3), получим $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) ... (x - a_k)(x - a_{k+1}) F(x)$. Это означает, что $P(x) \vdots (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) ... (x - a_k)(x - a_{k+1})$.

Следствие 3. *Число различных действительных корней многочлена, отличного от нуля, не более чем его степень.*

Доказательство. Пусть $P(x) \neq 0$, ст. $P(x) = n$ и пусть k число различных корней $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ многочлена $P(x)$. Тогда по следствию 2 получим $P(x) \vdots (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot ... \cdot (x - a_k)$.

$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) ... (x - a_k) \cdot S(x)$.

Ст. $P(x) = n$, ст. $(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot ... \cdot (x - a_k) = k$,

ст. $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) ... (x - a_k) \cdot S(x) \geqslant k$, поэтому $n \geqslant k$ или $k \leqslant n$.

Схема Горнера

ПРИМЕР **4.** Рассмотрим деление многочлена на двучлен вида $(x - a)$:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & x - 3 \\
\hline
-\ 2x^4 - 6x^3 \qquad\qquad\qquad & 2x^3 + 9x^2 + 22x + 59 \\
\hline
9x^3 - 5x^2 \qquad\qquad & \\
-\ 9x^3 - 27x^2 \qquad\qquad & \\
\hline
22x^2 - 7x \qquad & \\
-\ 22x^2 - 66x \qquad & \\
\hline
59x + 2 & \\
-\ 59x - 177 & \\
\hline
179 &
\end{array}$$

Сравним старшие коэффициенты делимого и частного.

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & x - 3 \\ \cline{2-2} -\ 2x^4 - 6x^3 & 2x^3 \end{array}$$

Эти коэффициенты равны.

Коэффициенты делимого	2	3	–5	–7	2
Число $a = 3$					
Коэффициенты частного	2	9	22	59	179

Как получили следующий коэффициент частного?

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & x - 3 \\ \cline{2-2} -\ 2x^4 - 6x^3 & 2x^3 \\ \cline{1-1} \qquad 9x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & \end{array}$$

Для получения следующего коэффициента частного (числа 9) соответствующий коэффициент делимого (число 3) сложили с предыдущим коэффициентом частного (числом 2), умноженным на 3.

Коэффициенты делимого	2	3	–5	–7	2
Число $a = 3$					
Коэффициенты частного	2	9	22	59	179

Как получили следующий коэффициент частного?

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & x - 3 \\ \cline{2-2} -\ 2x^4 - 6x^3 & 2x^3 + 9x^2 \\ \cline{1-1} \qquad 9x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & \\ \qquad -\ 9x^3 - 27x^2 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 22x^2 - 7x + 2 & \end{array}$$

Для получения следующего коэффициента частного (числа 22) соответствующий коэффициент делимого (число –5) сложили с предыдущим коэффициентом частного (числом 9), умноженным на 3.

Коэффициенты делимого	2	3	–5	–7	2
Число $a = 3$					
Коэффициенты частного	2	9	22	59	179

Как получили остаток?

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & x - 3 \\ \cline{2-2} -\ 2x^4 - 6x^3 & 2x^3 + 9x^2 + 22x \\ \cline{1-1} \qquad 9x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & \\ \qquad -\ 9x^3 - 27x^2 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 22x^2 - 7x + 2 & \\ \qquad\qquad -\ 22x^2 - 66x & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\qquad 59x + 2 & \end{array}$$

Для получения остатка (числа 179) соответствующий коэффициент делимого (число 2) сложили с предыдущим коэффициентом частного (числом 59), умноженным на 3.

Коэффициенты делимого	2	3	–5	–7	2
Число $a = 3$	+				
Коэффициенты частного	2	9	22	59	179

Как получили остаток?

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & x - 3 \\
\underline{2x^4 - 6x^3} & 2x^3 + 9x^2 + 22x + 59 \\
\quad 9x^3 - 5x^2 - 7x + 2 & \\
\quad \underline{9x^3 - 27x^2} & \\
\qquad 22x^2 - 7x + 2 & \\
\qquad \underline{22x^2 - 66x} & \\
\qquad\quad 59x + 2 & \\
\qquad\quad \underline{59x - 177} & \\
\qquad\qquad 179 &
\end{array}
$$

Коэффициенты делимого	2	3	–5	–7	2
Число $a = 3$	+				
Коэффициенты частного	2	9	22	59	179

Для получения каждого следующего коэффициента частного нужно соответствующий коэффициент делимого сложить с предыдущим коэффициентом частного, умноженным на a.

АЛГОРИТМ

Алгоритм деления многочлена $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ на двучлен вида $(x - p)$:

1) выделить 2 строчки — верхнюю и нижнюю, в верхней строчке записать коэффициенты делимого: a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0;

2) левее старшего коэффициента делимого в нижней строчке записать число p;

3) в нижней строчке записать коэффициенты частного b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_1, b_0 (табл. 18).

Таблица 18

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
p	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + pb_{n-1}$	$b_{n-3} = a_{n-2} + pb_{n-2}$		$b_0 = a_1 + pb_1$	остаток

ОБЪЯСНИТЕ

Как нашли частное и остаток при делении многочлена $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 7$ на двучлен $(x + 2)$ (табл. 19)?

Таблица 19

	1	–2	3	0	–7
–2	1	–4	11	–22	37

Частное равно $x^3 - 4x^2 + 11x - 22$, остаток равен 37.

1. В каких случаях используется схема Горнера?
2. Как найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - c)$?

Упражнения

А

32.1. Найдите остаток от деления на двучлен многочлена $P(x)$:
1) $P(x) = 2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 9$ на $(x + 2)$;
2) $P(x) = 2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 4$ на $(x - 1)$;
3) $P(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12$ на $(x + 2)$;
4) $P(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 10$ на $(x - 1)$.

32.2. Запишите многочлен 4-й степени, корнями которого являются числа:
1) $-2, 0, 2, 3$;
2) $-3, -1, 1, 3$;
3) $-3, -1, 0, 3$;
4) $-2, 1, 2, 5$.

32.3. Найдите значение многочлена $P(x)$ в точке $x = a$:
1) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 11$, $a = -3$;
2) $P(x) = 3x^6 - x^3 - 12x^2 - 51$, $a = -2$;
3) $P(x) = 3x^4 - x^2 + x - 31$, $a = 2$;
4) $P(x) = -3x^5 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 10$, $a = -1$.

32.4. Используя схему Горнера, выполните деление многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ и заполните таблицу 20:

Таблица 20

$P(x)$	a	Частное	Остаток
$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 2x - 1$	2		
$2x^4 + 7x^2 - 21x - 30$	-1		
$3x^5 + 5x^4 + 11x^2 + 2x$	1		

32.5. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:
1) $49^n - 25^n$ делится на 24;
2) $25^n - 9^n$ делится на 24;
3) $6^{2n} - 2^{2n}$ делится на 32;
4) $21^n + 4^{n+2}$ делится на 17;
5) $13^n + 3^{n+2}$ кратно 10;
6) $5^n + 7 \cdot 9^n$ кратно 4.

32.6. Докажите, что при любом нечетном натуральном n значение выражения:
1) $5^n + 2^n$ делится на 7;
2) $5^n + 11^n + 2$ делится на 6;
3) $5^n + 13 \cdot 11^{2n} - 4$ делится на 6.

В

32.7. 1) Докажите, что многочлен $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 1$ делится на многочлен $S(x) = 2x^2 + 8x - 2$.

2) Докажите, что многочлен $H(x) = 5x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ делится на многочлен $S(x) = -5x^2 + 4x - 4$.

3) Используя схему Горнера, разделите многочлен $P(x) = 2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2$ на двучлен $x + 2$. Найдите частное и остаток.

32.8. Найдите корни симметрического многочлена:
1) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1$;
2) $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$;

3) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$; 4) $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$;
5) $x^3 - 2x^2 - 2x + 1$; 6) $x^5 + 2x^3 + 2x^2 + 1$.

32.9. Используя схему Горнера, найдите все значения параметра a, при которых число p является корнем многочлена $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + ax - 1$:
1) $p = 1$; 2) $p = 2$; 3) $p = -3$; 4) $p = 0{,}5$.

32.10. Найдите остаток от деления выражения $(x^4 - 6x^2 + 8)(x^4 - 2x^2 - 8)$ на $(x - 2)^2$.

32.11. Найдите целые корни и разложите на множители многочлен:
1) $x^3 - 4x^2 + x + 6$; 2) $x^4 + 5x^2 - 6$;
3) $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 5x + 2$; 4) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$.

C

32.12. Найдите значение суммы коэффициентов выражения $(x^4 - 2x^3 + 3)^2 \cdot (x^4 - 2x^2 - 1)^3$.

32.13. 1) При делении многочлена на двучлен $x - 1$ остаток равен 3, при делении на $x - 3$ остаток равен 5. Найдите остаток от деления этого многочлена на $(x - 1)(x - 3)$.
2) При делении многочлена на двучлен $x + 1$ остаток равен 1, при делении на $x + 4$ остаток равен 7. Найдите остаток от деления этого многочлена на $(x + 1)(x + 4)$.
3) При делении многочлена на двучлен $x - 2$ остаток равен 3, при делении на $2x + 5$ остаток равен 6. Найдите остаток от деления этого многочлена на $(x - 2)(2x + 5)$.

32.14. 1) При делении многочлена на двучлен $x - 1$ остаток равен 1, при делении на двучлен $x + 2$ остаток равен 8. Известно, что число 2 является корнем многочлена. Найдите остаток от деления этого многочлена на $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$.
2) При делении многочлена на двучлен $x - 1$ остаток равен 3, при делении на двучлен $x + 1$ остаток равен 5. Известно, что корень многочлена равен 0,5. Найдите остаток от деления этого многочлена на $(x - 3)(x - 2)(x + 1)$.

ПОВТОРИТЕ

32.15. Решите относительно переменной x неравенство:
1) $\cos 2 \cdot (2x - 4) < 0$; 2) $\sin 3 \cdot \cos 5 \cdot (x^2 - 4) < 0$.

32.16. Найдите знак выражения:
1) $\mathrm{tg} 2 \cdot \mathrm{ctg} 2 + 3\cos^2\pi - \sin^2 15 - \cos^2 15$;
2) $\sin 215^\circ \cdot \sin 4 \cdot \cos 2$;
3) $\cos 1 \cdot \cos(1 + \pi) + \sin 60^\circ - \cos 30^\circ$;
4) $\sin(-5) \cdot \sin 4 \cdot \cos 2$.

32.17. Постройте график функции $f(x)$:

1) $f(x) = |\sin x| + \sin x$;
2) $f(x) = |\cos x| + \cos x$;
3) $f(x) = 2|\sin x| - \sin x$;
4) $f(x) = |\cos x| - 2\cos x$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Многочлен, коэффициенты многочлена, старший коэффициент, свободный член многочлена, действия над многочленами, теорема Безу, разложение числа на множители.

§33. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ. ТЕОРЕМА О РАЦИОНАЛЬНОМ КОРНЕ МНОГОЧЛЕНА С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Вы ознакомитесь с методом неопределенных коэффициентов;
научитесь применять его при разложении многочлена на множители; применять теорему о рациональном корне многочлена с одной переменной с целыми коэффициентами для нахождения его корней.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Метод неопределенных коэффициентов

Для разложения многочленов третьей и четвертой степени можно использовать метод неопределенных коэффициентов.

В основе метода используют утверждения:

1. Два многочлена равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и равны их соответствующие коэффициенты.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Два многочлена равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и соответствующие коэффициенты равны, если:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_n \neq 0$;

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0$, где $b_m \neq 0$, то $P(x) = Q(x)$ при условии:

1) ст. $P(x)$ = ст. $Q(x)$, т. е. $m = n$,

2) $a_n = b_m$, $a_{n-1} = b_{m-1}$, $a_{n-2} = b_{m-2}$, ..., $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$.

2. Любой многочлен третьей степени можно разложить на множители: один из них является многочленом первой степени, другой — многочленом второй степени:

$$a_n x^3 + a_{n-1}x^2 + a_{n-2}x + a_{n-3} = (x - d)\cdot(ax^2 + bx + c).$$

3. Любой многочлен четвертой степени можно разложить на два множителя, каждый из которых является многочленом второй степени:

$$a_n x^4 + a_{n-1}x^3 + a_{n-2}x^2 + a_{n-3}x + a_{n-4} = (ax^2 + bx + c)(mx^2 + px + k).$$

ПРИМЕР

1. Разложим на множители многочлен $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Решение. Используя метод неопределенных коэффициентов, получим: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - d)(ax^2 + bx + c)$.

В правой части равенства раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Получим равенство $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = ax^3 + (b - ad)x^2 + (c - bd)x - dc$.

Используя условия равенства двух многочленов одинаковой степени — равенство соответствующих коэффициентов, получим систему:

$$\begin{cases} a = 1, \\ b - ad = -2, \\ c - bd = -5, \\ dc = -6. \end{cases}$$

Поскольку $dc = -6$, то возможны случаи:

1) $d = -3$, $c = 2$, 2) $d = -2$, $c = 3$, 3) $d = 3$, $c = -2$, 4) $d = 2$, $c = -3$, 5) $d = -1$, $c = 6$, 6) $d = 1$, $c = -6$, 7) $d = 6$, $c = -1$, 8) $d = -6$, $c = 1$.

Рассматривая последовательно эти случаи, находим, что системе удовлетворяют числа: $a = b = 1$, $d = 3$, $c = -2$ и $a = 1$, $b = -1$, $c = -6$, $d = 1$.

Тогда $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x^2 + x - 2)$ и $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$.

Решив уравнение $x^2 + x - 2 = 0$, найдем корни: -2 и 1, поэтому $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x + 2)(x - 1)$.

Решив уравнение $x^2 - x - 6 = 0$, найдем корни: 3 и -2, поэтому $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$.

Теорема 1. *Если целое число k является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то свободный член делится на k.*

По условию многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$, имеет корень k. Надо доказать, что $a_0 \vdots k$.

Доказательство. Поскольку k — корень, то $P(k) = 0$, т. е.

$$a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + a_{n-2}k^{n-2} + ... + a_1k + a_0 = 0.$$

$$a_0 = \underbrace{k(-a_nk^{n-1} - a_{n-1}k^{n-2} - a_{n-2}k^{n-3} - ... - a_1)}_{\text{целое число}}.$$

Это означает, что $a_0 \vdots k$. ■

На теореме основан алгоритм поиска целых корней многочлена с целыми коэффициентами.

АЛГОРИТМ

1) Выписать все делители свободного члена многочлена;

2) вычислить значения многочлена всех делителей свободного члена многочлена;

3) выписать делители свободного члена, при которых значения многочлена равны нулю — корни многочлена.

ПРИМЕР

2. Найдем целые корни многочлена $P(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$.

Решение. Пусть целое число k — корень $P(x)$, тогда по теореме $3 \vdots k$.

$k = \pm 1$; $k = \pm 3$.

$P(1) = 1 + 1 - 6 - 14 - 11 - 3 \neq 0$. Значит, число 1 не является корнем $P(x)$.

$P(-1) = 1 - 1 + 6 - 14 + 11 - 3 = 0$. Значит, число -1 является корнем $P(x)$.
$P(3) = 3^5 + 3^4 - 6 \cdot 3^3 - 14 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 - 3 = 3 \cdot (81 + 27 - 54 - 42 - 11 - 1) = 0$. Значит, число 3 является корнем $P(x)$.
$P(-3) = -3^5 + 3^4 + 6 \cdot 3^3 - 14 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 3 = 3 \cdot (-81 + 27 + 54 - 42 + 11 - 1) = -32$. Значит, число -3 не является корнем $P(x)$.

Ответ: -1; 3.

ПРИМЕР

3. Найдем целые корни многочлена $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
Решение. Пусть k – корень $P(x)$, тогда по теореме $6 \vdots k$.
$k = \pm 1$; $k = \pm 2$; $k = \pm 3$.
$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 - 3 = 0 \to -1$ — корень $P(x)$.
По следствию из теоремы Безу: $P(x) \vdots (x - 1)$.
Используя схему Горнера, разделим многочлен $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на $(x - 1)$ (табл. 21).

Таблица 21

	1	–6	11	–6
1	1	–5	6	0
				остаток

Тогда: $Q(x) = x^2 - 5x + 6$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Ответ: 1; 2; 3.

ОБЪЯСНИТЕ

Как применили теорему для многочлена с рациональными коэффициентами:
$P(x) = 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$;
$P(x) = \frac{1}{6}(12x^3 + 4x^2 - 3x + 5)$;
$P(x) = \frac{1}{6}Q(x)$? Почему корни многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны?

Теорема 2. *Приведенный многочлен с целыми коэффициентами не имеет дробных рациональных корней.*

По условию многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ (где $a_n = 1$) имеет корень k. Надо доказать, что $k \neq \frac{m}{n}$, где m, n — целые числа.

Доказательство. Проведем методом от противного. Пусть $k = \frac{m}{n}$, где m, n — целые числа. Если эта дробь сократимая, то сократим: $k = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = 0;\ \left(\frac{p^n}{q^n}\right) + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2}\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + ... + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

$$\frac{p^n}{q^n} = -a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - a_{n-2}\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} - ... - a_1\frac{p}{q} - a_0.$$

$$\underset{\text{Дробное число}}{\frac{p^n}{q}} = \underbrace{-a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q - \ldots - a_0q^{n-1}}_{\text{Целое число}}.$$

В полученном равенстве левая часть — несократимое дробное число, правая — целое число. Получили противоречие, которое доказывает теорему.

1. В чем заключается суть метода неопределенных коэффициентов?
2. Имеет ли приведенный многочлен рациональные корни, если он не имеет целых корней?
3. Что означают предложения: "Корень многочлена равен нулю", "Значение многочлена равно нулю"?

Упражнения

A

33.1. Какие числа могут быть целыми корнями многочлена:
1) $x^3 - 2x^2 - 4x + 3$; 2) $x^3 - 5x^2 - 6x + 4$;
3) $2x^3 - 3x^2 - 8x - 5$; 4) $3x^3 - 2x^2 - 7x - 6$?

33.2. Какие числа могут быть целыми корнями многочлена:
1) $2x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; 2) $2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$;
3) $2x^3 + 3x^2 - 7x - 10$; 4) $x^3 - 3x^2 + 7x - 6$?

33.3. Разложите на линейные множители многочлен:
1) $x^3 - 2x^2 - x + 2$; 2) $x^4 - 13x^2 + 36$; 3) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

33.4. При каких значениях a и p равны многочлены $P(x)$ и $K(x)$:
1) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$, $K(x) = ax^3 + (a + p)x^2 + 2x - 5$;
2) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 4$, $K(x) = 2x^3 - 4x^2 + (2a + p)x + a - 2p$;
3) $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + (a - p)x - 7$, $K(x) = 3x^3 + (a + p)x^2 + 3x - 7$;
4) $P(x) = -x^3 + 10x^2 + 2x + a - 3p$, $K(x) = x^3 + (a + p)x^2 + 2x - 5$?

33.5. При каких значениях a многочлен $P(x)$ имеет корень, равный 2:
1) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + a^2 - 3a$;
2) $P(x) = -x^3 + x^2 - 2x + a^2 - a$;
3) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2a^2 - 3a - 7$;
4) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + a^2 - 5a$?

B

33.6. При каких значениях a многочлены $P(x)$ и $K(x)$ равны:
1) $P(x) = (2 - a^2)x^3 + 3x^2 + 2x - 9$,
$K(x) = ax^3 + (a^2 + 2a)x^2 + 2x - 9$;
2) $P(x) = 2ax^3 - 14x^2 + 3x + 4$,
$K(x) = -2x^3 + 14ax^2 + (2a^2 - a)x + a + 5$;

3) $P(x) = ax^3 - 4x^2 + 14x - 4$,
$K(x) = -2x^3 - 4x^2 + (2a^2 - 3а)x + + a - 2$;
4) $P(x) = 2ax^3 - 7x^2 + 4x + 2$,
$K(x) = 8x^3 - 7x^2 + (2a^2 - 7a)x + a - 2$?

33.7. Найдите все значения параметра p, при которых многочлен имеет ровно три различных корня:
1) $(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x - p)$; 2) $5(x - 2)(x + 11)(x - 6)(x + p)$;
3) $(x^2 - x - 2)(x - 4)(x - 2p)$; 4) $(x^2 + x - 2)(x + 1)(p - 2x)$.

33.8. Для некоторого приведенного многочлена $P(x)$ известны его степень и все его корни с учетом их кратности. Заполните таблицу 22, запишите разложение многочлена $P(x)$ на множители.

Таблица 22

	Степень многочлена	Корни кратности 1	Корни кратности 2	Корни кратности 3	Разложение многочлена $P(x)$
1	4	–1; 3	2		
2	7		1; 3	– 2	
3	8	2	–1; 4	1	
4	10	0	2; 5; 7	–3	

33.9. 1) Остаток от деления многочлена $P(x)$ на трехчлен $x^2 - 5x + 6$ равен $3x - 2$. Найдите значение выражения $P(2) - 3P(3)$;
2) остаток от деления многочлена $P(x)$ на трехчлен $x^2 - x - 6$ равен $4x - 3$. Найдите значение выражения $P(3) - 2P(-2)$.

C

33.10. Найдите все значения параметра p, при которых многочлен имеет ровно три различных корня:
1) $(x^2 - 2x - 8)(x^2 + 2px + 1)$; 2) $(x^2 - 5x + 6)(px^2 + 4x + 1)$;
3) $(x^2 - 5x - 6)(x^2 - x - 2p)$; 4) $(x^2 - x - 2)(px^2 + 5x + 1)$.

33.11. Докажите, что все корни многочлена $K(x) = x^2 - 7x - 1$ являются корнями многочлена $P(x) = x^5 - 7x^4 - 5x^2 - 15x - 2$.

ПОВТОРИТЕ

33.12. Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$, если:

1) $x + \frac{1}{x} = 3$; 2) $x + \frac{1}{x} = 5$; 3) $x - \frac{1}{x} = 2$; 4) $x - \frac{1}{x} = 4$.

33.13. Постройте график функции $y = |x^2 - 2x - 8|$. Найдите:
1) координаты точек пересечения графика функции с осями координат;
2) промежутки монотонности функции;
3) ось симметрии графика функции;

4) значения параметра p, при которых уравнение $y = |x^2 - 2x - 8|$ имеет четыре корня.

33.14. Решите уравнение:

1) $\frac{x}{x-2} - \frac{7}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$;
2) $\frac{2}{x} + \frac{x^2+8}{x^2-4x} = \frac{6}{x-4}$;
3) $\frac{4x-14}{x-3} = x - 2$;
4) $\frac{x^2-2x}{x-1} - 2 = \frac{2x-1}{1-x}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Уравнение, корни уравнения, квадратное уравнение, формулы нахождения корней квадратного уравнения, многочлен, разложение многочлена на множители, теорема Безу и ее следствия, схема Горнера.

§ 34. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ, ПРИВОДИМЫЕ К ВИДУ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Вы научитесь:
применять метод разложения на множители при решении уравнений высших степеней;
применять метод введения новой переменной при решении уравнений высших степеней.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Метод разложения на множители; метод введения новой переменной; уравнения высших степеней

При решении уравнений высших степеней применяют метод разложения на множители. Основа данного метода заключается в группировке слагаемых таким образом, чтобы каждая группа содержала общий множитель. Для этого иногда приходится применять некоторые искусственные приемы.

ПРИМЕР

1. Решим уравнение $x^4 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$.

Решение. Представим $-3x^2 = -2x^2 - x^2$ и сгруппируем:

$$(x^4 - 2x^2) - (x^2 - 4x + 3) = 0.$$

$(x^4 - 2x^2 + 1 - 1) - (x^2 - 4x + 3 + 1 - 1) = 0.$

$(x^2 - 1)^2 - 1 - (x - 2)^2 + 1 = 0.$

$(x^2 - 1)^2 - (x - 2)^2 = 0.$

$(x^2 - 1 - x + 2)(x^2 - 1 + x - 2) = 0.$

$(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 3) = 0.$

$x^2 - x + 1 = 0$, или $x^2 + x - 3 = 0$.

Уравнение $x^2 - x + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Уравнение $x^2 + x - 3 = 0$ имеет два корня: $x_{1,2} = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\right)$.

Ответ: $\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

АЛГОРИТМ

Алгоритм решения уравнения $f(x) = 0$ методом введения новой переменной:

1) ввести новую переменную (подстановку) $y = x^n$ или $y = g(x)$;
2) выразить $f(x)$ через y, получится новое уравнение $s(y) = 0$;
3) решить уравнение $s(y) = 0$, получатся корни $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$;

4) решить совокупность n уравнений $q(x) = y_1$, $q(x) = y_2$, ... , $q(x) = y_n$;
5) записать множество найденных корней.

ПРИМЕР

2. Решим уравнение $(x^2 + 2x)^2 - 14x^2 - 28x - 15 = 0$.

Решение. Используя подстановку $y = x^2 + 2x$, получим квадратное уравнение $y^2 - 14y - 15 = 0$. Его решениями являются числа -1 и 15, поэтому $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x = -1, \\ x^2 + 2x = 15; \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x + 1 = 0, \\ x^2 + 2x - 15 = 0. \end{array}\right.$

Решением совокупности уравнений является множество $\{-5; -1; 3\}$.

Ответ: $\{-5; -1;3\}$.

ПРИМЕР

3. Решим уравнение $x^4 + 8x^2 + 16 - 7(x^2 + 4) + 12 = 0$.

Решение. Поскольку $x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2 + 4)^2$, то воспользуясь подстановкой $x^2 + 4 = y$, получим квадратное уравнение $y^2 - 7y + 12 = 0$. Его решениями являются числа 4 и 3, поэтому $x^2 + 4 = 4$, или $x^2 + 4 = 3$.

Ответ: $\{0\}$.

Определение. *Уравнение n-ой степени с одной переменной, в котором коэффициенты равноудаленных от концов членов равны, называется* ***симметрическим уравнением.***

ОБЪЯСНИТЕ

Почему уравнения $x^6 - 6x^5 - 11x^4 + x^3 - 11x^2 - 6x + 1 = 0$; $3x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 7x^2 - 4x + 3 = 0$ являются симметрическими?

АЛГОРИТМ

Алгоритм решения симметрического уравнения четвертой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$:

1) разделить левую и правую части уравнения на x^2. При этом не происходит потери решения, так как $x = 0$ не является корнем исходного уравнения при $a \neq 0$;

2) группировкой привести полученное уравнение к виду $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$;

3) ввести новую переменную $t = x + \frac{1}{x}$, тогда выполнено $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, т. е. $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, в новых переменных рассматриваемое уравнение является квадратным $at^2 + bt + c - 2a = 0$;

4) решить его относительно t, возвратиться к исходной переменной.

Любое симметрическое уравнение нечетной степени сводится к уравнению четной степени, так как у любого симметричного уравнения нечетной степени один из корней всегда равен -1.

ПРИМЕР

4. $x^7 + 2x^6 - 5x^5 - 13x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$.

Решение. Очевидно, $x = -1$ корень уравнения.

$(x + 1)(x^6 + x^5 - 6x^4 - 7x^3 - 6x^2 + x + 1) = 0$.

$x = -1$, или $x^6 + x^5 - 6x^4 - 7x^3 - 6x^2 + x + 1 = 0$.

Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения, то разделим обе части уравнения на $x^3 \neq 0$.

$$x^3 + x^2 - 6x - 7 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0.$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 7 = 0.$$

Введем замену.

Пусть $x + \frac{1}{x} = y$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$. Получим:

$y^3 + y^2 - 9y - 9 = 0,$

$(y + 1)(y - 3)(y + 3) = 0,$

$y = -1$, или $y = 3$, или $y = -3$.

$x + \frac{1}{x} = -1$, или $x + \frac{1}{x} = 3$, или $x + \frac{1}{x} = -3$.

У первого уравнения действительных корней нет. Второе уравнение имеет корни $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Третье уравнение имеет корни $x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left\{-1, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

1. Какой прием лежит в основе разложения на множители при решении уравнений высших степеней?
2. В чем суть метода введения новой переменной при решении уравнений высших степеней?
3. В чем отличие решений симметрических уравнений n-ой четной и n-ой нечетной степени?

Упражнения

А

34.1. Найдите действительные корни уравнения:

1) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$; 2) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

3) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$; 4) $x^4 - 13x^2 + 42 = 0$.

34.2. Используя метод разложения на множители, решите уравнение:

1) $4x^3 - 8x^2 - x + 2 = 0$; 2) $x^3 - 2x^2 = 9x - 18$;

3) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$; 4) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$.

34.3. Докажите, что уравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ не имеет рациональных корней.

34.4. Известно, что числа 2 и 3 являются корнями уравнения $2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0$. Найдите m, n и третий корень этого уравнения.

34.5. Решите уравнение способом введения новой переменной:

1) $(x + 1)^2(x^2 + 2x) - 12 = 0$;

2) $(x - 2)^2(x^2 - 4x) - 12 = 0$;

3) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) - 3 = 0$;

4) $(x^2 + 3x + 3)(x^2 + 3x + 1) + 1 = 0$.

34.6. Решите уравнение способом введения новой переменной:

1) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 = 0$;
2) $(x^2 - 3x)(x - 1)(x - 2) - 24 = 0$;
3) $(x^2 - 5x - 1)(x^2 - 5x + 2) - 28 = 0$;
4) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 6 = 0$.

B

34.7. Найдите действительные корни уравнения:

1) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$; 2) $x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$;
3) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$.

34.8. Решите уравнение:

1) $x(x + 3)(x + 5)(x + 8) + 56 = 0$;
2) $x(x - 1)(x + 1)(x + 2) - 24 = 0$;
3) $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) - 4 = 0$;
4) $(x + 4)(x + 3)(x + 2)(x + 1) - 120 = 0$.

34.9. Решите уравнение методом введения новой переменной:

1) $2(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 7(x + \frac{1}{x}) + 9 = 0$;

2) $6(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 5(x + \frac{1}{x}) - 38 = 0$;

3) $(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 7(x - \frac{1}{x}) + 10 = 0$;

4) $(x^2 + \frac{4}{x^2}) - (x + \frac{2}{x}) - 8 = 0$.

C

34.10. Решите симметрическое уравнение:

1) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; 2) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$;
3) $x^4 + 7x^3 + 10x^2 - 7x + 1 = 0$; 4) $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$.

34.11. Решите уравнение методом замены переменной:

1) $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$; 2) $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$;
3) $x^4 - x^3 - 8x^2 + 2x + 4 = 0$; 4) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$.

34.12. Решите уравнение:

1) $(2x + 3)^2 - 3(2x + 3)(7x - 5) + 2(7x - 5)^2 = 0$;
2) $(3x - 2)^2 + 3(5x - 7)(3x - 2) + 2(5x - 7)^2 = 0$;
3) $(x + 5)^4 - 13x^2(x + 5)^2 + 36x^4 = 0$;
4) $4(x - 1)^4 - 5(x - 1)^2(x - 2)^2 + (x - 2)^4 = 0$.

ПОВТОРИТЕ

34.13. Найдите значения суммы и произведения корней квадратного уравнения:

1) $x^2 + 9x - 22 = 0$; 2) $x^2 - 7x + 12 = 0$; 3) $x^2 - x - 72 = 0$;
4) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; 5) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; 6) $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

34.14. Используя теорему, обратную теореме Виета, составьте квадратное уравнение, имеющее корни:

1) -5 и -2; 2) -7 и 2;

3) $2\frac{2}{7}$ и 3; 4) $-5{,}4$ и 8.

34.15. Решите однородное уравнение:

1) $4\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3$;
2) $5\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2$;
3) $2\cos^2 x - \sin x\cos x + 5\sin^2 x = 3$;
4) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 4$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Уравнения, квадратное уравнение, корни уравнения, теорема Виета для корней квадратного уравнения, многочлен третьей степени.

§ 35. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ВИЕТА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Вы ознакомитесь с обобщенной теоремой Виета; научитесь применять ее к многочленам третьего порядка.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Теорема Виета, многочлен третьего порядка

Теорема Виета. *В приведенном квадратном трехчлене значение суммы корней равно второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а значение произведения корней — свободному члену.*

По условию многочлен $P(x) = x^2 + px + q$.

Надо доказать, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Доказательство. По лемме $x^2 + px + q = (x - x_1)\cdot(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$.

Поскольку многочлены равны, если их степени и соответствующие коэффициенты равны, то $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 \cdot x_2$.

Лемма. *Если $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ корни приведенного многочлена $P(x)$ степени n, то $P(x) = (x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ различные корни приведенного многочлена $P(x)$, то по второму следствию из теоремы Безу $P(x) \vdots (x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$, что по определению означает:

$$P(x) = Q(x)\cdot\underbrace{(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)}_{S(x)}.$$

Поскольку ст. $P(x) = n$ и ст. $S(x) = n$, то ст. $Q(x) = 0$, т. е. $Q(x) = c$ — const.

По условию $P(x)$ приведенный многочлен, поэтому по определению $a_n = 1$. Поскольку $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$, то старший коэффициент $Q(x) \cdot S(x)$ должен быть тоже равен 1, а это возможно, когда $Q(x) = c = 1$. Следовательно, $P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n)$.

Теорема Виета. *В приведенном кубическом многочлене* $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ *значение суммы корней равно второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, значение суммы попарных произведений корней — третьему коэффициенту, значение произведения корней — свободному члену, взятому с противоположным знаком.*

По условию многочлен $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$.

Надо доказать, что $x_1 + x_2 + x_3 = -p$, $x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 = q$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -r$.

Доказательство. По лемме $x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$.

Убедитесь самостоятельно: $(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3)x - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$.

Итак, $x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3)x - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$.

Поскольку многочлены равны, если их степени и соответствующие коэффициенты равны, то:

$x_1 + x_2 + x_3 = -p$,

$x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 = q$,

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -r$.

ПРИМЕР Один из корней многочлена $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + r$, где r целое число, в 3 раза больше другого. Найдите этот многочлен и его корни.

Решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -1, \\ x_1x_2x_3 = -r. \end{cases}$$ По условию, $x_3 = 3x_2$. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 3, \\ x_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_1x_2 = -1, \\ 3x_1x_2^2 = -r. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $x_1 = 3 - 4x_2$. Тогда второе уравнение примет вид: $3x_2 - 4x_2^2 + 3x_2^2 + 9x_2 - 12x_2^2 = -1$.

Отсюда получаем квадратное уравнение $13x_2^2 - 12x_2 - 1 = 0$, корнями которого являются числа 1 и $-\frac{1}{13}$.

При $x_2 = 1$ получаем: $x_1 = -1$, $x_3 = 3$, $r = 3$.

Объясните, почему $-\frac{1}{13}$ не может быть корнем $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + r$, где r целое число.

Ответ: $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, его корни $1; -1; 3$.

1. В каком случае второму коэффициенту равно значение суммы: 1) корней; 2) попарных произведений корней?
2. Какому члену многочлена третьей степени равно значение произведения его корней?

Упражнения

A

35.1. При каких значениях p равно 0 значение произведения корней квадратного уравнения:
1) $x^2 + 7x + (p^2 - 3p + 2) = 0$; 2) $x^2 - 3x + (2p^2 - 3p - 5) = 0$;
3) $3x^2 - 2x + (p^2 - 3p - 4) = 0$; 4) $x^2 + 7x + (4p^2 - 9p + 5) = 0$?

35.2. Запишите многочлен третьей степени, корни которого равны:
1) -1, 0; 2; 2) $-$ 2; 2; 1; 3) $-$ 2; 1: 3; 4) -2; -1; 4.

35.3. Заполните таблицу 23:

Таблица 23

Многочлен третьей степени	Значение $x_1 + x_2 + x_3$	Значение $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$	Значение $x_1x_2x_3$
$x^3 - 5x^2 - 2x - 3$			
$x^3 + 3x^2 - 4x + 5$			
$2x^3 - 5x^2 - 6x - 4$			
$3x^3 - 9x^2 - 12x + 9$			

35.4. 1) Один из корней многочлена $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + p$ равен 2. Найдите этот многочлен и все его корни.
2) Один из корней многочлена $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + p$ равен -1. Найдите этот многочлен и все его корни.

B

35.5. Запишите многочлен, корни которого обратны корням многочлена $x^3 - 6x^2 + 12x - 18$, а коэффициент при x^3 равен 2.

35.6. Запишите многочлен, корни которого противоположны корням многочлена $2x^3 - 8x^2 + 3x - 4$, а коэффициент при x^3 равен -5.

35.7. Докажите, что если дано кубическое уравнение $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$, то a, b, c — корни этого уравнения.

35.8. Используя теорему Виета, решите уравнение:
1) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.

C

35.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения $x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

35.10. Найдите все значения параметров a и b, при которых найдутся два различных корня уравнения $x^3 - 5x^2 + 7x - a = 0$, которые будут также корнями уравнения $x^3 - 8x + b = 0$.

35.11. Известно, что уравнение $x^3 - 2ax^2 + (2a - 3)x + 2 = 0$ имеет три различных действительных корня. Один из корней равен значению суммы двух других. Найдите значение параметра a и корни уравнения.

ПОВТОРИТЕ

35.12. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x+2}$; 2) $y = -\sqrt{x-3}$; 3) $y = \sqrt{x+2} - 2$; 4) $y = 3 - \sqrt{x-2}$.

35.13. Постройте график функции $y = \left|\sqrt{x+2} - 1\right|$. Используя график функции, найдите:

1) координаты точек пересечения графика функции с осями координат;

2) промежутки монотонности функции;

3) значения параметра p, при которых уравнение $p = \left|\sqrt{x+2} - 1\right|$ имеет два корня.

35.14. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x^2 - 9}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{2x^2 - 8}$;

3) $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5} + \sqrt{16 - x^2}$; 4) $y = \sqrt{5x^2 + 4x - 12} + \sqrt{36 - x^2}$.

35.15. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 + 5x + 6 \leqslant 0, \\ |x| > 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leqslant 0, \\ |x| < 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 > 0, \\ |x| \geqslant 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2 + 5x - 8 \leqslant 0, \\ |x| \leqslant 4. \end{cases}$

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Частное и остаток от деления многочлена $x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 22$ на многочлен $x - 2$ равны:

A) $x^3 + 2x^2 + 2x - 5$; остаток 22;

B) $x^3 + x^2 + 4x + 11$; остаток 0;

C) $x^3 - x^2 + 2x - 5$; остаток 2;

D) $x^3 - x^2 + 2x + 3$; остаток (-12).

2. Многочлены $f(x) = (a^2 - 7)x^3 - 2x^2 + (2a + 1)x - 3$ и $g(x) = 2x^3 - 2x^2 + (a - 2)x - a - 6$ тождественно равны при:

A) $a = -3$; B) $a = 2$; C) $a = 3$; D) $a = -2$.

3. Остаток от деления многочлена $x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 8$ на двучлен $(x + 1)$ равен:
A) 9; B) −4; C) 10; D) −9.

4. Используя схему Горнера, найдите значения параметра p, при которых число 2 является корнем многочлена $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + px - 8$:
A) $p = 3$; B) $p = -3$; C) $p = -4$; D) $p = 4$.

5. Многочлен $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ имеет корни:
A) $-3; \pm 2$; B) $-2; 3$; C) $-3; \pm 1$; D) $-3; 2$.

6. Многочлен четвертого порядка имеет корни ± 1; 2 и (-3). Тогда этим многочленом является:
A) $x^4 + x^3 + 11x^2 + 6x - 12$; B) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$;
C) $x^4 - x^3 - x^2 + 7x - 6$; D) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 6x - 8$.

7. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на трехчлен $x^2 - 2x - 8$ равен $2x - 3$. Значение выражения $P(4) - 2P(-2)$ равно:
A) 18; B) 9; C) −19; D) 19.

8. Используя обобщенную теорему Виета, найдите многочлен третьей степени, корни которого принадлежат множеству $\{-1; 1; 3\}$:
A) $x^3 - 2x^2 + 7x - 3$; B) $x^3 - x^2 - 7x + 3$;
C) $x^3 - 3x^2 - x + 3$; D) $x^3 - 3x^2 + 5x - 3$.

9. Используя теорему Виета, решите уравнение $x^3 - 7x^2 = 8 - 14x$:
A) $\{-2; 1; 4\}$; B) $\{-1; 3; 4\}$; C) $\{-4; 1; 3\}$; D) $\{1; 2; 4\}$.

10. Один из корней многочлена $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + p$ равен (-1). Найдите этот многочлен и все его действительные корни:

A) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$; $\left\{1; \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$;

B) $x^3 - 2x^2 + 3x + 6$; $\left\{-1; \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$;

C) $x^3 - 2x^2 + 3x + 2$; $\left\{1; \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$;

D) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$; $\left\{1; \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, график функции, область определения функции, множество значений функции, значение функции в точке.

7 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 36. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Вы ознакомитесь с понятиями: *предел числовой последовательности, предел функции в точке и на бесконечности.*

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, предел, неопределенность, нахождение предела

ВЫ ЗНАЕТЕ: Если по какому-то закону каждому натуральному числу k ставится в соответствие единственное число a_k, то говорят, что задана числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots a_k$. Ее обозначают так: $\{a_k\}$ или (a_k).

Наиболее удобный способ задания последовательности — это задать ее общий член a_n. Например, $a_n = 3n + 1$, $a_n = \sqrt{n^2 - 1}$, или $a_n = n^2 - 2$. Иногда последовательность задается рекуррентной формулой через предыдущие члены. Например, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, где $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$, $n > 2$.

Числовая последовательность также может быть задана словесным описанием ее членов. Например, десятичные приближения числа $\sqrt{2}$ запишем так: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41 421, ...

Числовую последовательность можно рассматривать как числовую функцию, заданную на множестве натуральных чисел N. Например, $a_n = f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$. Тогда (a_n) : $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$, ...

Также как и функции, числовые последовательности бывают ограниченными сверху или снизу, монотонно возрастающими или убывающими.

Рассмотрим примеры числовых последовательностей.

ПРИМЕР 1. Пусть задана последовательность $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n}$. Ее общий член $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Из этой формулы видно, что при $n \to$ означение разности $|a_n - 1|$ стремится к нулю.

ПРИМЕР 2. 1) Выпишем несколько членов последовательности (a_n), где $a_n = \frac{\sin n}{n}$: $\frac{\sin 1}{1}$; $\frac{\sin 2}{2}$; $\frac{\sin 3}{3}$; $\frac{\sin 4}{4}$; ... . Так как функция sinx ограниченная, а знаменатель дроби стремится к бесконечности, то последовательность стремится к 0.

2) Рассмотрим последовательность 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41 421; ... , это приближения с недостатком числа $\sqrt{2}$. Члены этой последовательности при возрастании n приближаются к числу $\sqrt{2}$.

Определение. ***Пределом последовательности*** (x_n) ***при n, стремящемся к бесконечности***, *называется такое число A, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* N_0, *что для любого n, удовлетворяющему неравенству* $n > N_0$, *выполняется неравенство* $|x_n - A| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

ПРИМЕР

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Очевидно, что если числовая последовательность имеет предел, то этот предел единственный.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на множестве действительных чисел R.

Пусть значения функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к числу a, неограниченно приближаются к числу 5, принимая при этом значения: 4,9; 4,99; 4,999; ... или 5,1; 5,01; 5,001; ... .

В этих случаях модуль значения разности между каждым из этих чисел и числом 5 стремится к нулю.

Действительно, $|4,9- 5| = 0,1$; $|4,99 - 5| = 0,01$; $|4,999 - 5| = 0,001$; ... или $|5,1 - 5| = 0,1$; $|5,01 - 5| = 0,01$; $|5,001 - 5| = 0,001$; ... .

0,1; 0,01; 0,001; ... $\to$ 0.

Число 5 в приведенном примере называют *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к числу a.

Определение 1. ***Пределом функции*** $y = f(x)$ *при x, стремящемся к числу a, называется такое число A, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta > 0$, *что для любого* $x \ne a$, *удовлетворяющему неравенству* $0 < |x - a| < \delta$, *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Определение 2. *Если число* A_1 *есть предел функции* $y = f(x)$ *при x, стремящемся к числу a так, что x принимает только значения меньшие числа a, то число* A_1 *называется* ***левым пределом функции*** $y = f(x)$ *в точке a.*

Записывают: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$.

Определение 3. *Если число* A_2 *есть предел функции* $y = f(x)$ *при x, стремящемся к числу a так, что x принимает только значения большие числа a, то число* A_2 *называется* ***правым пределом функции*** $y = f(x)$ *в точке a.*

Записывают: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$.

Теорема 1. *Если существуют пределы функций $y = f(x)$ и $y = q(x)$ при x, стремящемся к числу a, то существует предел их суммы, равный сумме пределов этих функций.*

$$\lim_{x\to a}(f(x) + q(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} q(x).$$

Теорема 2. *Если существуют пределы функций $y = f(x)$ и $y = q(x)$ при x, стремящемся к числу a, то существует предел их произведения, равный произведению пределов этих функций.*

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot q(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} q(x).$$

Теорема 3. *Если существуют пределы функций $y = f(x)$ и $y = q(x)$ при x, стремящемся к числу a и $\lim\limits_{x\to a} q(x) \neq 0$, то существует предел их отношения, равный отношению пределов этих функций.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} q(x)}.$$

Следствие 1. *Постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

$$\lim_{x\to a} k\cdot f(x) = k\cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

Следствие 2. *Если n — натуральное число, то выполняются равенства:*

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n;\quad \lim_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.$$

Следствие 3. *Предел многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_1x^{n-1} + \ldots + a^{n-1}x^1 + a_n$ (целой рациональной функции) при x, стремящемся к числу a, равен значению этого многочлена при $x = a$:*

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a).$$

Следствие 4. *Предел дробно-рациональной функции $F(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x^1 + b_n}$ при x, стремящемся к числу a, равен значению этой функции при $x = a$, если число a принадлежит ее области определения:*

$$\lim_{x\to a} F(x) = F(a).$$

ПРИМЕР

4. Вычислим $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^3 - 4x^2 + 18}{-7x^2 + 9}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^3 - 4x^2 + 18}{-7x^2 + 9} = \dfrac{5\cdot 2^3 - 4\cdot 2^2 + 18}{-7\cdot 2^2 + 9} = \dfrac{42}{-19} = -2\dfrac{4}{19}$.

Ответ: $-2\dfrac{4}{19}$.

Введем обозначения.

Если значения переменной x неограниченно увеличиваются, то пишут $x \to \infty$

Если значения переменной x неограниченно уменьшаются, то пишут $x \to -\infty$

Определение. *Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$ $(x \to \infty)$, если* $\lim\limits_{x \to a (x \to \infty)} f(x) = 0$.

Докажите, что функции $y = \operatorname{tg}x$, $y = \sin x$, $y = x$, $y = x^n$, где $n > 0$ — являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Функция $y = (x - 3)^2$ является бесконечно малой при $x \to 3$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to a$ $(x \to \infty)$, если $\lim\limits_{x \to a (x \to \infty)} f(x) = \infty$

При нахождении некоторых пределов функций могут получиться неопределенности вида: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$. Конечно, это только символы, которые числового смысла не несут.

Определение. *Вычисление пределов функций, представляющих собой неопределенности при $x \to a$ или $x \to \infty$ называется **раскрытием неопределенностей**.*

Для раскрытия неопределенностей можно использовать способы: деление числителя и знаменателя на степень x, разложение числителя и знаменателя на множители и т. п.

ПРИМЕР

5. Вычислим $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n-2} - 1}{n^2 - 9}$.

Решение. При $x \to \infty$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Преобразуем это выражение, умножив числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, и в знаменателе применив формулу разности квадратов. Получим: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n-2} - 1}{n^2 - 9} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n - 2 - 1}{(n^2 - 9)(\sqrt{n-2} + 1)} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n - 3}{(n^2 - 9)(\sqrt{n-2} + 1)} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{(n + 3)(\sqrt{n-2} + 1)} = \frac{1}{\infty \cdot \infty} = 0$.

Ответ: 0.

ПРИМЕР

6. Найдем $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$.

Решение. При $x \to 1$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем это выражение, разложив числитель и знаменатель на множители.

Получим: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x - 2)}{(x + 1)} = \frac{1 - 2}{1 + 1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

ПРИМЕР **7.** Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{3x^2+4x+1}$.

Решение. При $x\to\infty$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Преобразуем это выражение, разделив числитель и знаменатель почленно на x^2. Получим: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

ПРИМЕР **8.** Вычислим $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$.

Решение. При $x\to-3$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем это выра жение, разложив числитель на множители, используя формулу сокращенного умножения. Получим: $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}(x-3)=-3-3=-6$.

Ответ: -6.

ПРИМЕР **9.** Вычислим $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16}$.

Решение. При $x\to4$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем это выражение, умножив числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, и в числителе применив формулу разности квадратов.

Получим: $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-3-1}{(x^2-16)(\sqrt{x-3}+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{(x^2-16)(\sqrt{x-3}+1)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{(x+4)(\sqrt{x-3}+1)}=\dfrac{1}{(4+4)(\sqrt{4-3}+1)}=\dfrac{1}{8\cdot2}=\dfrac{1}{16}$.

Ответ: $\frac{1}{16}$.

?

1. Что означает запись $x\to a$, $x\to\infty$?
2. В каких случаях надо раскрывать неопределенности?
3. Что означают словосочетания: "бесконечно большая функция", "бесконечно малая функция"?
4. Приведите пример бесконечно большой функции.

Упражнения

А

36.1. Найдите предел последовательности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n+3}{n^2}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+1}{2n^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin 2n}{n}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos 2n}{n}$.

36.2. Используя определение предела функции в точке, докажите, что:

1) $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 1) = 2$; 2) $\lim\limits_{x \to 2}(3x - 2) = 4$;

3) $\lim\limits_{x \to -2}(5x + 4) = -6$; 4) $\lim\limits_{x \to -0,2}(5x - 1) = -2$.

36.3. Найдите предел функции:

1) $\lim\limits_{x \to -1}(x^2 + 1)$; 2) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 1)$; 3) $\lim\limits_{x \to -1}(2x^2 - 1)$;

4) $\lim\limits_{x \to -2}(2x^2 - 3)$; 5) $\lim\limits_{x \to -2}(2x^2 + 3)$; 6) $\lim\limits_{x \to -1}(2x^2 - x)$.

36.4. Найдите предел выражения:

1) $\lim\limits_{x \to 2}(2x^2 - 3x)$; 2) $\lim\limits_{x \to 0,4}(x^2 + x)$; 3) $\lim\limits_{x \to -1}(-2x^3 - x)$;

4) $\lim\limits_{x \to -2}(x^2 + 2x)$; 5) $\lim\limits_{x \to -2}(x^2 - 2x)$; 6) $\lim\limits_{x \to -0,1}(2x^2 + 2)$.

36.5. Докажите, что предел функции $f(x)$ в точке $a = 2$ равен числу B:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $B = -1$;
2) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $B = 3$;
3) $f(x) = -x^2 - 2x + 2$, $B = -6$;
4) $f(x) = -2x^2 + 3x - 2$, $B = -4$.

36.6. Найдите предел функции:

1) $\lim\limits_{x \to -1}(2(x^2 + 1) - 1)$; 2) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 3x)$;

3) $\lim\limits_{x \to 4}\left(2\sqrt{x} - 1\right)$; 4) $\lim\limits_{x \to 1}\left(2\sqrt{4x} - 3\right)$.

36.7. Найдите предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$:

1) $f(x) = x^2 - 3x$ при $x \to 1$;
2) $f(x) = 2x^2 + x - 5$ при $x \to -2$;
3) $f(x) = -2x^2 + 3x - 3$ при $x \to 2$;
4) $f(x) = -x^2 - x + 5$ при $x \to -3$.

B

36.8. Докажите, что верно равенство:

1) $\lim\limits_{x \to 2}(2x^2 - 3) = 5$; 2) $\lim\limits_{x \to 3}(7 - 2x^2) = -11$; 3) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 3x) = -2$.

36.9. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{x - 6}{x + 2}$; 2) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{3x - 5}{x - 3}$; 3) $\lim\limits_{x \to -3}\frac{5x + 4}{2 - x}$; 4) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{2x^2 - 3}{x - 3}$.

36.10. Найдите значение предела функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = x + \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ в точке $x_0 = 3$;

2) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 4} - 3x$ в точке $x_0 = -4$;

3) $f(x) = \frac{4 - x^2}{x - 2} + x$ в точке $x_0 = -2$;

4) $f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x + 3} - 2x$ в точке $x_0 = -3$.

36.11. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$;   2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{6x - 2x^3}{x^2 - 3}$;

3) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2 - x}$;   4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$.

36.12. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 2}$;   2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6x - 2x^3}{x^3 - 3}$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{2 - x^2}$;   4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x^3 + x + 1}{x^3 - 1}$.

C

36.13. Запишите дробно-рациональную функцию $f(x)$, которая при $x \to -2$ имеет предел, равный числу: 1) 2; 2) 4; 3) −2; 4) $\sqrt{2}$.

36.14. Запишите дробно-рациональную функцию $f(x)$, которая при $x \to \infty$имеет предел, равный числу: 1) −1; 2) 3; 3) −4; 4) $\sqrt{3}$.

36.15. Найдите предел функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = \sin 2x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$;

2) $f(x) = 2\cos 2x$ в точке $x_0 = -\frac{\pi}{12}$;

3) $f(x) = x + \sin 3x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

4) $f(x) = 2x - \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

36.16. Найдите предел последовательности:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2 - \sqrt{n^2 - 1}}{n}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3 + \sqrt{n^2 + 1}}{n}$; 3) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$; 4) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\arcsin 2n}{n}$.

36.17. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{4-\sqrt{x}}{x-16}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x+3}-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2x-3}-1}$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ

Джон Валлис (1616 —1703)

36.18. Знак бесконечности ∞ ввел английский математик, один из предшественников математического анализа Джон Валлис в 1655 г.
Знак предела Lim ввел выдающийся ирландский математик, механик и физик Уильям Роуэн Гамильтон в 1853 г.

Уильям Роуэн Гамильтон (1805 —1865)

ПОВТОРИТЕ

36.19. Решите уравнение:

1) $\operatorname{arctg}4x=\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\arcsin\left(3-\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$; 3) $\arccos(1-2x)=\pi$.

36.20. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}(4\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(2\pi+\alpha)$;

2) $\cos(4\pi-\alpha)\cdot\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2\cdot\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cdot\left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2$.

36.21. Вычислите:

1) $2\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-3\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\operatorname{arctg}(-1)$;

2) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)-\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}1$;

3) $3\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}-4\operatorname{arcctg}(-1)+\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+3\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

4) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)-\arcsin(-1)-2\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, значение функции в точке, тригонометрические функции, тригонометрические формулы, значения тригонометрических функций.

§37. ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Вы ознакомитесь с первым замечательным пределом; научитесь решать примеры на применение первого замечательного предела.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, предел, первый замечательный предел

Рассмотрим предел функции, который наиболее широко используется в математике и ее приложениях.

Теорема. *Предел функции* $y = \frac{\sin x}{x}$ *при* x, *стремящемся к* 0, *существует и равен единице:* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Доказательство. Рассмотрим дугу $\breve{AB}$ единичной окружности (рис. 37.1).

Сравним длину $\breve{AB}$ с длинами отрезков CA и DB. Получим $CA < \breve{AB} < DB$.

Поскольку длина радиуса $R = 1$ и угол α измеряется в радианах, то длина дуги $\breve{AB} = \alpha$. Найдем $CA = \sin\alpha$, $DB = \text{tg}\,\alpha$. Следовательно: $\frac{\sin\alpha}{\text{tg}\,\alpha} < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$, но при $\alpha \to 0$ $\cos\alpha \to 1$.

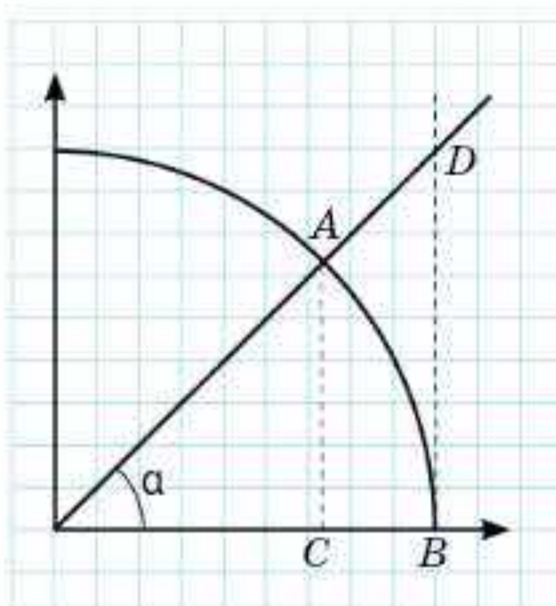


Рис. 37.1

Это значит, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (|\alpha| < \delta \Rightarrow |\cos\alpha - 1| < \varepsilon)$, т. е. $\left|\frac{\sin\alpha}{\alpha} - 1\right| < |\cos\alpha - 1| < \varepsilon$.

Для отрицательных α аналогично, так как $\cos(-\alpha) < \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} < 1.$

Определение. *Предел* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ *называется* ***первым замечательным пределом.***

Первый замечательный предел применяется при вычислении других пределов. Рассмотрим примеры на применение этого предела.

ПРИМЕР

1. Найдем предел функции $y = \frac{\sin(ax)}{bx}$ при $x \to 0$.

Решение. Чтобы применить первый замечательный предел, преобразуем дробь $\frac{\sin(ax)}{bx}$ так, чтобы в знаменателе было выражение ax, т. е. такое, как у аргумента синуса. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на одно и то же число a и применим теорему о пределе произведения.

Получим: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{bx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{ax}\frac{a}{b}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{ax}\lim\limits_{x\to0}\frac{a}{b}=1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$

Ответ: $\frac{a}{b}$.

ПРИМЕР

2. Найдем $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. Сразу применить первый замечательный предел нельзя. Надо сначала преобразовать данную дробь. Применим формулу $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ и представим знаменатель x^2 в виде $\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)^2$. Далее применим теорему и следствия о пределах. Получим: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

ПРИМЕР

3. Найдем $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1.$

Ответ: 1.

ПРИМЕР

4. Найдем $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos3x}{x^2}$.

Решение. Преобразуем дробь, чтобы можно было использовать первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin2x\sin x}{x^2}=2\cdot2\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=4\cdot1\cdot1=4.$$

Ответ: 4.

Теорема. *Предел функции* $\frac{\arcsin x}{x}$, $\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$ *при* $x\to0$ *существует и равен* 1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$.

Доказательство. Пусть $\arcsin x=y$, тогда при $x\to0$ имеем $y\to0$. Поэтому $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\sin y}=1.$ ■

Докажите самостоятельно $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$.

ПРИМЕР **5.** Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{x}$.

Решение. Применим замену переменной $y = 3x$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$, т. е. получим: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3\arcsin 3x}{3x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{3\arcsin y}{y} = 3$.

Ответ: 3

ПРИМЕР **6.** Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x}$.

Решение. Применим замену переменной $y = \frac{x}{2}$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$, т. е. получим: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2}\operatorname{arctg} y}{y} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

1. Почему $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ назвали *замечательным пределом*?

Упражнения

А

37.1. Найдите предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{3x}$ при $x \to 0$; 2) $f(x) = \frac{\sin 6x}{3x}$ при $x \to 0$;

3) $f(x) = \frac{2\sin 2x}{5x}$ при $x \to 0$; 4) $f(x) = \frac{5\sin 3x}{6x}$ при $x \to 0$.

37.2. Докажите, что верно равенство:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x + \sin 3x}{2x} = 2{,}5$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x - \sin 3x}{2x} = -0{,}5$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x - \sin 4x}{5x} = 1$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x + \sin 3x}{2x} = 4$.

37.3. Найдите предел выражения:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin 5x}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 5x + \sin 2x}{\sin 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x - 2\sin 5x}{2\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 2x - 4\sin 5x}{5\sin 2x}$.

37.4. Найдите предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$:

1) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{2x}$ при $x \to 0$; 2) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 6x}{3x}$ при $x \to 0$;

3) $f(x) = \dfrac{2\operatorname{tg} 2x}{5x}$ при $x \to 0$; 4) $f(x) = \dfrac{5\operatorname{tg} 3x}{6x}$ при $x \to 0$.

37.5. Используя замечательный предел, вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{2\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{\sin 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 6x}{\arcsin 3x}$.

B

37.6. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{2x} + \dfrac{\sin 3x}{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{3x} + \dfrac{\sin x}{2x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{3x} + \dfrac{\sin 3x}{2x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{x} - \dfrac{\sin 3x}{3x}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin 5x + \operatorname{tg} 3x)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1} + \dfrac{\sin 6x}{3x}\right)$.

Найдите пределы выражений (**37.7—37.9**):

37.7. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos 2x$; 3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 2x}{\sin 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x + \operatorname{tg} 2x}{\sin x}$.

37.8. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}(x^2)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 2x - 4\sin 5x}{5\sin 3x + \sin 5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 2x - 4\sin x}{5x - \sin 3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x + 2\sin 3x}{2x - 4\sin 2x}$.

37.9. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{x+2}\right)^2$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right)^2$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 + \dfrac{\sin x}{2x-1}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+x^2}{3-x^2}\right)^{-2}$.

37.10. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(x-2)}{x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+1)}{\arcsin(x+1)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1{,}5}\dfrac{\arcsin(2x-3)}{\operatorname{arctg}(2x-3)}$.

37.11. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(-4x)}{5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 4x}$.

C

37.12. Известно, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -1$. Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2f(x) - g(x))$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)\cdot(g(x) - 2))$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$;

4) $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} + 4g(x)\right)$; 5) $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{6}{f(x)} - \dfrac{2f(x)}{g(x)}\right)$; 6) $\lim\limits_{x \to 2}(f(x) + 1)^2$.

Вычислите пределы (**37.13—37.15**):

37.13. 1) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin(-4x)}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x^2}{\sin^2 2x}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(-4x)}{\sin 2x}$; 5) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(-x^2)}{\sin 2x^2}$; 6) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2\operatorname{arctg} x^2}{\sin x^2}$.

37.14. 1) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{(x-1)^2}{3x - x^2 + 3}$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{\sqrt{4 + x^2} - 2}{x}$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{\sqrt{4 + x^2} - 2}{1 - \sqrt{x^2 - 1}}$.

37.15. 1) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2 + \pi x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{\operatorname{tg} x}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2\sin(x + \pi)}{\sin 2x}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$; 5) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$; 6) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin 10x}{2\operatorname{tg} x}$;

7) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$; 8) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

37.16. Постройте график какой-либо функции $f(x)$, обладающей свойствами:

1) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$, $f(2) = 4$; 2) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$, $f(-1) = 2$;

3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$, $f(2)$ — не существует;

4) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

37.17. На рисунке 37.2 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите:

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; 2) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$; 3) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$;

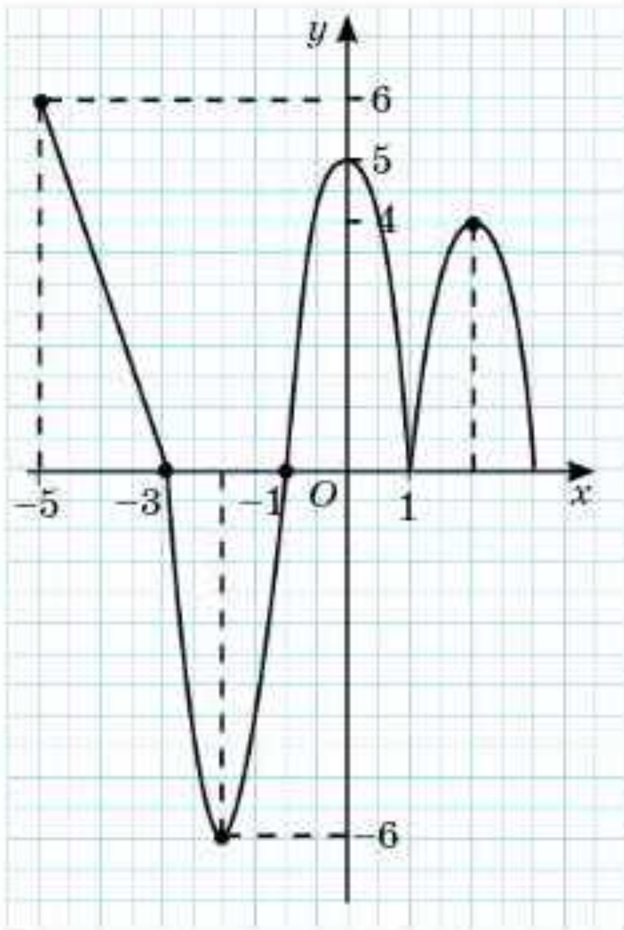
4) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$; 5) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; 6) $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$.

ПОВТОРИТЕ

37.18. Постройте эскиз графика функции:

1) $f(x) = (x + 1)^2 - 1$; 2) $f(x) = |x^2 - 4|$;

3) $f(x) = |\sin x|$; 4) $f(x) = |2\cos x|$.



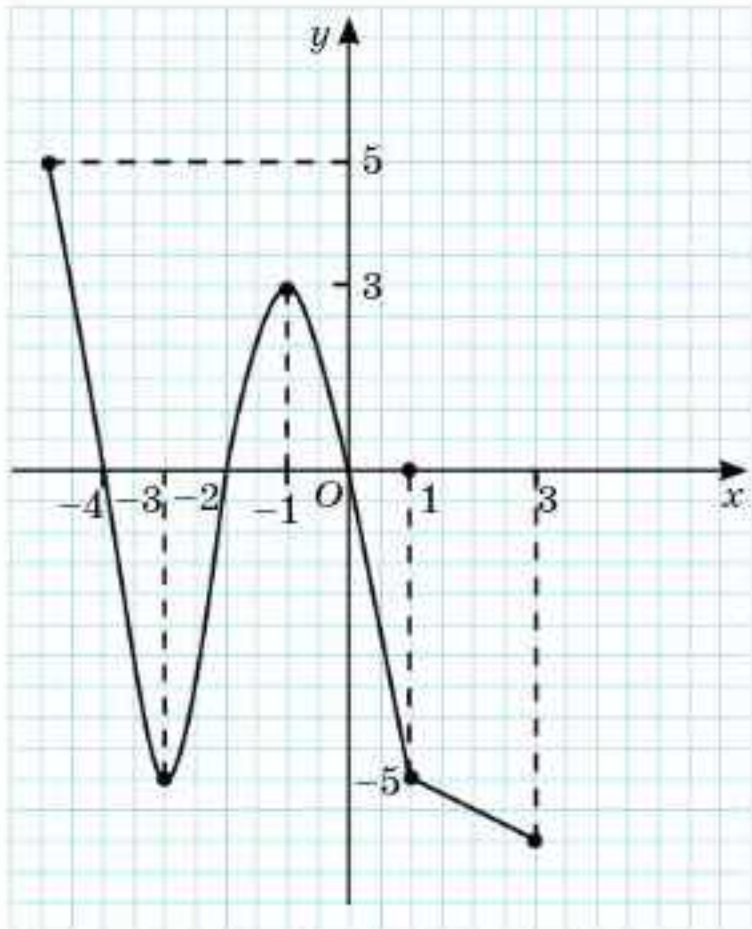


Рис. 37.2

37.19. Преобразуйте в сумму или разность произведение тригонометрических функций:

1) $\sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha$;
2) $\cos 4\alpha \cdot \cos 2\alpha$;
3) $\sin 5\alpha \cdot \sin 3\alpha$;
4) $\sin 2\alpha \cdot \sin 8\alpha$.

37.20. Упростите выражение:

1) $4\sin^6\alpha + 4\cos^6\alpha - 3\cos^2 2\alpha$;

2) $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$;

4) $\dfrac{2\cos\beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta}{\cos 3\beta + \sin\beta \cdot \sin 2\beta}$;

5) $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos\alpha + 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha}$;

6) $\dfrac{\sin 9\alpha - \sin 6\alpha - \sin 7\alpha + \sin 8\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, значение функции в точке, тригонометрические функции, тригонометрические формулы, значения тригонометрических функций, предел функции в точке, график функции.

§ 38. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА МНОЖЕСТВЕ

Вы ознакомитесь с понятиями: *непрерывная функция, точка разрыва*;
научитесь находить точки разрыва, устанавливать непрерывность функции в точке, на множестве.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, график, точка разрыва, непрерывность

Проиллюстрируем непрерывность функции $y = f(x)$ на примерах с помощью ее графика.

ПРИМЕР

1. На рисунке 38.1 изображен график непрерывной функции

$$y = \begin{cases} \frac{4}{x}, \text{ если } x > 4, \\ (0{,}25x)^2, \text{ если } x \leqslant 4. \end{cases}$$

Функции, изображенные на рисунках 38.2—38.4, не являются непрерывными на множестве R.

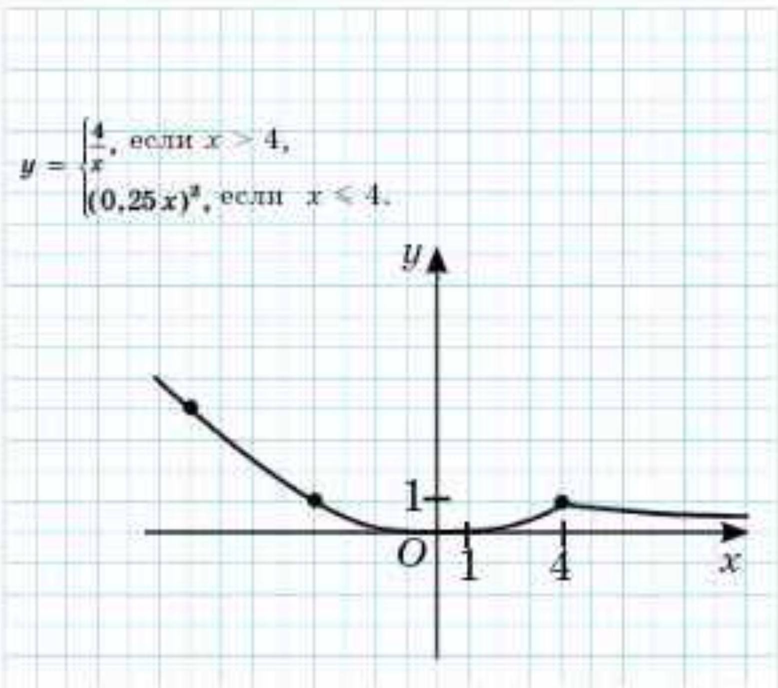


Рис. 38.1

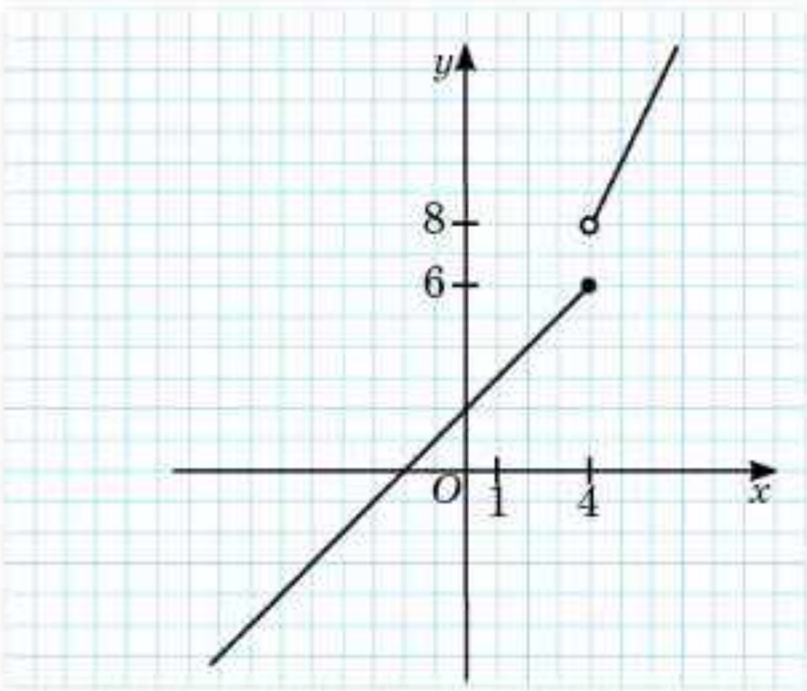


Рис. 38.2

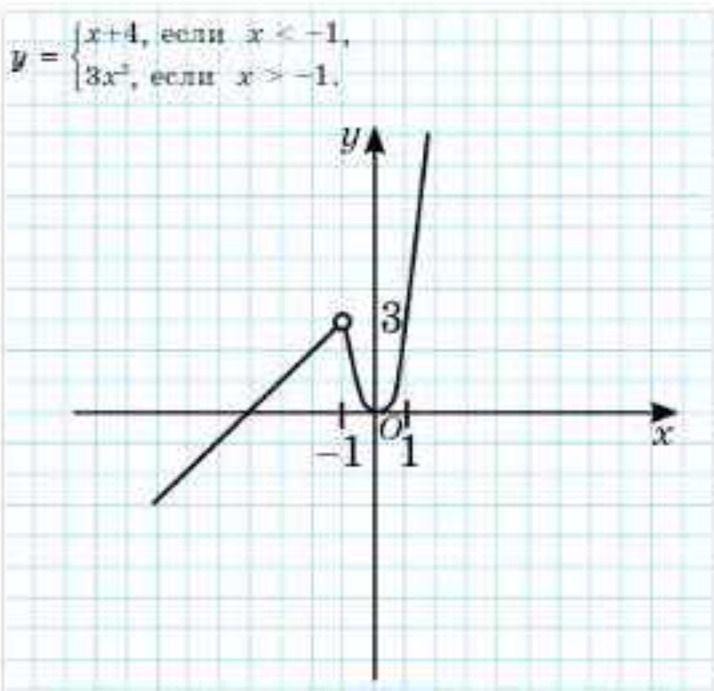


Рис. 38.3

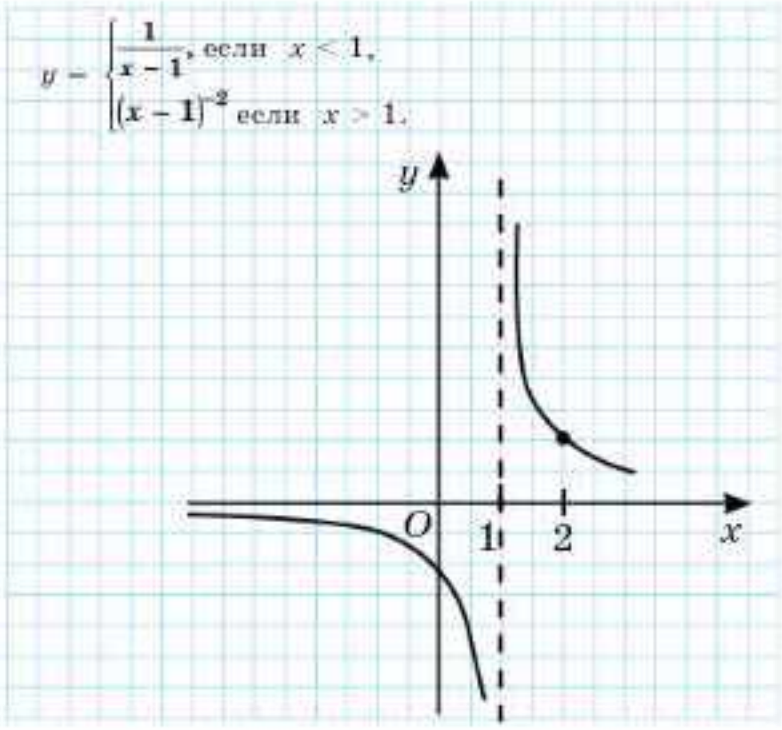


Рис. 38.4

Установите по графикам, какие из функций: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{3x}{x-2}$ непрерывны: 1) на множестве всех действительных чисел; 2) на области определения.

Определение. *Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

В противном случае говорят, что функция $y = f(x)$ имеет разрыв в точке $x = x_0$.

ПРИМЕР

2. Функция, изображенная на рисунке 38.3, имеет разрыв в точке с абсциссой $x = -1$. Действительно, для этой функции $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$, но $y = f(-1)$ не существует, так как -1 не принадлежит области определения этой функции. Значит, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$, т. е. функция разрывна в точке, абсцисса которой равна -1.

Рассмотрим функцию, график которой изображен на рисунке 38.4. Для этой функции $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ бесконечен, значит, в точке, абсцисса которой равна 1, имеет место разрыв.

Может показаться, что точка разрыва не должна принадлежать области определения функции, но это не так. Примером этому является функция, изображенная на рисунке 38.2. Здесь точка с абсциссой 4, которая принадлежит области определения функции, является точкой разрыва. Найдем $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

Для вычисления этого предела надо понять, как именно x приближается к числу 4. Если слева, то $y = f(x) \to 6$, если справа, то $y = f(x) \to 8$, т. е. $\lim\limits_{x \to 4-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4+0} f(x)$.

Значит, чтобы функция была непрерывна в точке x_0, важно чтобы левый и правый пределы функции $y = f(x)$ в точке x_0 были равны и равны значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a, \ f(x_0) = a.$$

Определения. Пусть функция $y = f(x)$ имеет разрыв в точке с абсциссой x_0. Тогда:

если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ *или* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ *бесконечен, то говорят, что x_0 есть* ***точка разрыва* II *рода*;**

если оба эти предела конечны и различны, то x_0 называется ***точкой разрыва* I *рода (скачок)*;**

если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$ *и либо $f(x_0) \neq b$, либо $f(x_0)$ не существует, то x_0 называется* ***точкой устранимого разрыва*.**

Найдите на рисунках 38.2—38.4 точки разрыва II рода, I рода (скачок) и точки устранимого разрыва.

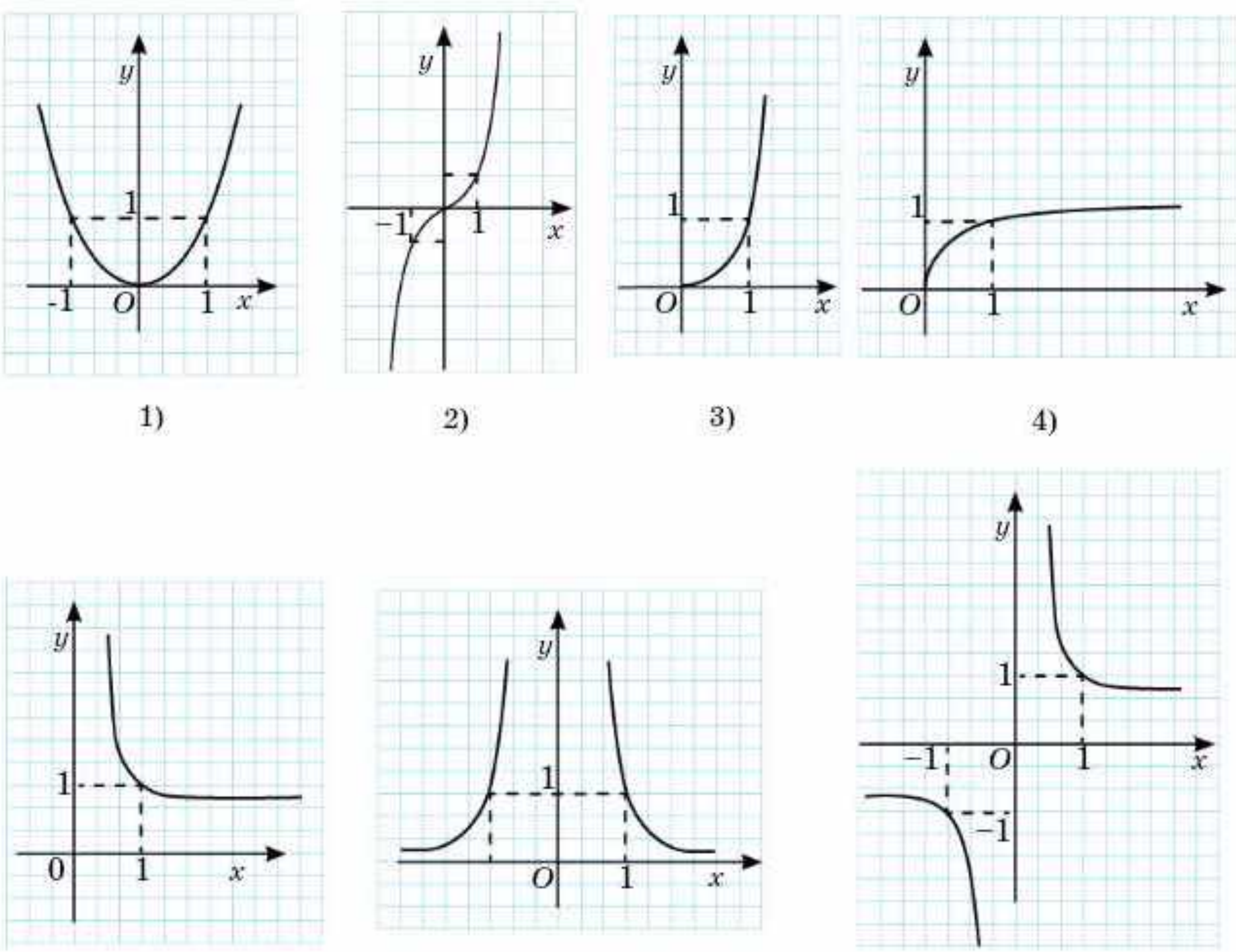
Определение. *Если функция непрерывна во всех точках промежутка, то она называется* ***непрерывной на этом промежутке.***

1. В какой точке функция $y = \operatorname{tg}x$ имеет разрыв? Какого рода этот разрыв?
2. Какие элементарные функции имеют точки разрыва, а какие непрерывны?

Упражнения

А

38.1. Какие из функций, графики которых изображены на рисунке 38.5, имеют точки разрыва?



1) 2) 3) 4) 5) 6) 7)

Рис. 38.5

38.2. Постройте график функции $y = f(x)$. Выясните, является ли функция непрерывной в точке $x_0 = 0$:

1) $y = \begin{cases} 1 - x \text{ при } x \geqslant 0, \\ 1 + x \text{ при } x < 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 2 + x \text{ при } x \geqslant 0, \\ 1 + x \text{ при } x < 0; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 2 - x \text{ при } x \geqslant 0, \\ 2x \text{ при } x < 0. \end{cases}$

38.3. Постройте график функции $y = f(x)$. Выясните, является ли функция непрерывной в точке $x_0 = 1$:

1) $y = \begin{cases} 1 + 2x \text{ при } x \geqslant 1, \\ 4x - 1 \text{ при } x < 1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 5x \text{ при } x \geqslant 1, \\ 3x - 1 \text{ при } x < 1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 8 - 7x \text{ при } x \geqslant 1, \\ x + 3 \text{ при } x < 1. \end{cases}$

38.4. Постройте схематически график функции, имеющей разрыв в точке:

1) $x_0 = 3$; 2) $x_0 = -1{,}5$; 3) $x_0 = 4$; 4) $x_0 = -0{,}5$.

B

38.5. Исследуйте на непрерывность функцию $f(x)$. Постройте график $f(x)$:

1) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 1 - x^2 \text{ при } x > 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} -x \text{ при } x \leqslant 0, \\ x^2 + 1 \text{ при } x > 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \leqslant 2, \\ 1 - x \text{ при } x > 2. \end{cases}$

38.6. Приведите пример функции, имеющей разрыв в точке:

1) $x_0 = 2$ и $x_0 = 4$; 2) $x_0 = -3$ и $x_0 = 0$; 3) $x_0 = -1$ и $x_0 = 2$.

38.7. Постройте график функции $y = f(x)$. Исследуйте функцию на непрерывность:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ при } x \leqslant 2, \\ 5 - x \text{ при } x > 2; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ при } x \leqslant 0, \\ x - 1 \text{ при } x > 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ при } x \leqslant 2, \\ 7 - x^2 \text{ при } x > 2. \end{cases}$

38.8. Постройте график функции и найдите ее точки разрыва:

1) $f(x) = [x]$; 2) $f(x) = x - [x]$; 3) $f(x) = \operatorname{sign} x$.

C

38.9. Постройте график функции $y = f(x)$. Исследуйте функцию на непрерывность:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ при } x \leqslant 2, \\ |x| + 1 \text{ при } x > 2; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 \text{ при } x \leqslant 0, \\ |x| - 1 \text{ при } x > 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x \text{ при } x \leqslant 2, \\ 4 - x^2 \text{ при } x > 2. \end{cases}$

38.10. Исследуйте функцию на непрерывность и постройте ее график:

1) $f(x) = f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leqslant 0, \\ x^2-5, & 0<x\leqslant 3, \\ 4, & x>3; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leqslant 1, \\ x^2-6, & 1<x\leqslant 3, \\ x, & x>3; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ 2x-2, & 0<x\leqslant 2, \\ 2, & x>2; \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} 3x, & x \leqslant -1, \\ 2x-x^2, & -1<x\leqslant 2, \\ 0, & x>2; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leqslant -1, \\ x^2-3, & -1<x\leqslant 3, \\ 3+x, & x>3; \end{cases}$ 6) $f(x) = \begin{cases} 1-2x-x^2, & x \leqslant -1, \\ x^2-5, & -1<x\leqslant 3 \\ 1-2x, & x>3. \end{cases}$

38.11. Найдите значения A, при которых функция:

$f(x) = \begin{cases} H(x), \text{если } x \neq x_0, \\ A, \text{если } x \neq x_0 \end{cases}$ является непрерывной в точке x_0.

1) $H(x) = 2\sin 4x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$; 2) $H(x) = -\cos\dfrac{2x}{3}$, $x_0 = \dfrac{3\pi}{4}$;

3) $H(x) = \dfrac{x^2 - 5x - 14}{x + 2}$, $x_0 = -2$; 4) $H(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$, $x_0 = 4$.

ПОВТОРИТЕ

38.12. Найдите наименьший положительный период и множество значений функции:

1) $f(x) = 3\cos 2x$; 2) $f(x) = 2\sin 4x$; 3) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; 4) $f(x) = 2\{x\}$.

38.13. Найдите предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+3}{x^3-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x^2+3x}{x^3+2x-1}$.

38.14. Постройте график функции:

1) $f(x) = 3 - \cos 2x$; 2) $f(x) = \sin x \cdot \cos 2x$; 3) $f(x) = 2\cos x \cdot \sin x$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, значение функции в точке, предел функции в точке и на бесконечности, график функции, график линейной функции.

§ 39. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Вы ознакомитесь с понятием *асимптота кривой*; научитесь решать примеры на нахождение асимптот.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, график, асимптота

ВЫ ЗНАЕТЕ: Графики степенной функции $y = \frac{1}{x}$ (рис. 39.1.1), $y = \frac{1}{x^2}$ (рис. 39.1.2), $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (рис. 39.1.3) неограниченно приближаются к осям Ox и Oy при $x \to +\infty$ и при $x \to 0$, соответственно, но не пересекают их. Другими словами, при движении точки M по графикам этих функций в бесконечность, расстояние от точки M до осей координат стремится к нулю.

В данных случаях оси координат являются асимптотами кривых линий — графиков этих функций.

Определение. *Прямая а называется* ***асимптотой кривой*** (*графика функции*), *если точка М, смещаясь вдоль этой линии, удаляется в бесконечность, а расстояние от нее до прямой а стремится к нулю.*

Асимптоты бывают: *вертикальные, горизонтальные и наклонные.*

На рисунке 39.1 изображены кривые линии, которые имеют по две асимптоты — горизонтальную и вертикальную.

На рисунках 39.2.1 и 39.2.2 изображены кривые линии, которые имеют по одной вертикальной асимптоте, а на рисунках 39.2.3 и 39.2.4 изображены кривые линии, которые имеют по одной горизонтальной асимптоте.

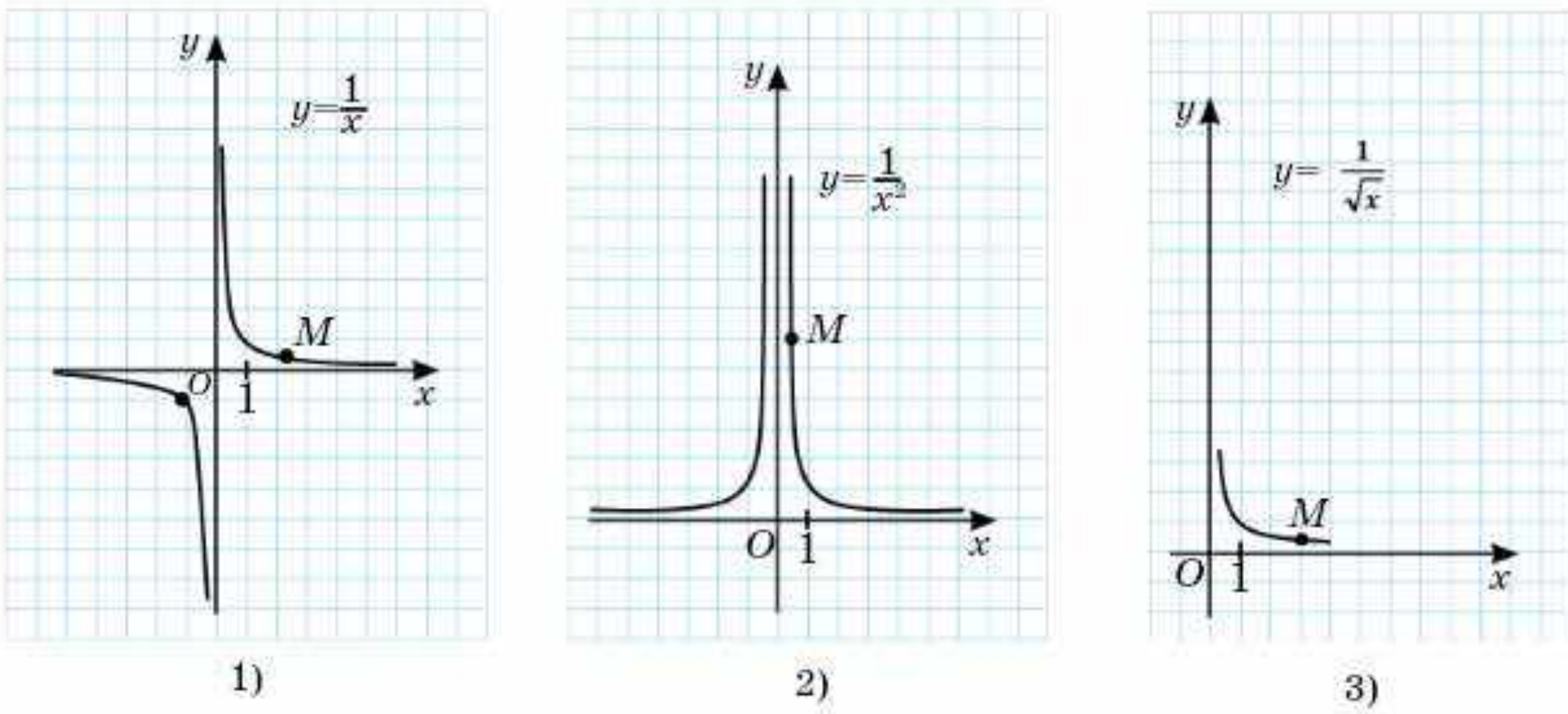


Рис. 39.1

Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ и (или) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, то прямая линия $x=x_0$ является вертикальной асимптотой. (Здесь ∞ это либо $+\infty$, либо $-\infty$).

Продемонстрируйте справедливость этого утверждения с помощью рисунка 39.2.

ПРИМЕР

1. Прямая, заданная уравнением $x=1$ — вертикальная асимптота для графика функции $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$. Действительно,

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty, \quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=+\infty.$$

Объясните, почему прямая, заданная уравнением $x=5$, является вертикальной асимптотой для графика функции $f(x)=\frac{2}{x-5}$.

Рассмотрим, как найти уравнение наклонных асимптот. Если график функции $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту, то она как прямая линия задана уравнением $y=kx+b$.

Пусть кривая линия $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$ (рис. 39.3).

Проведем два перпендикуляра из точки M: один к асимптоте (MP), другой через точку M к оси Ox и введем следующие обозначения.

Обозначим точку пересечения перпендикуляра к асимптоте:

— и кривой линии $y=f(x)$ буквой M;

— с асимптотой буквой P.

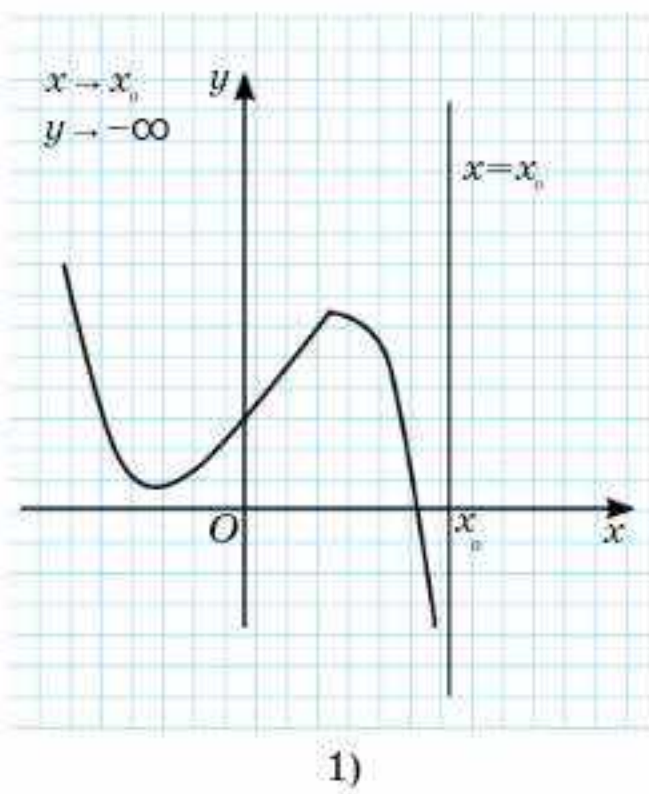


Рис. 39.2

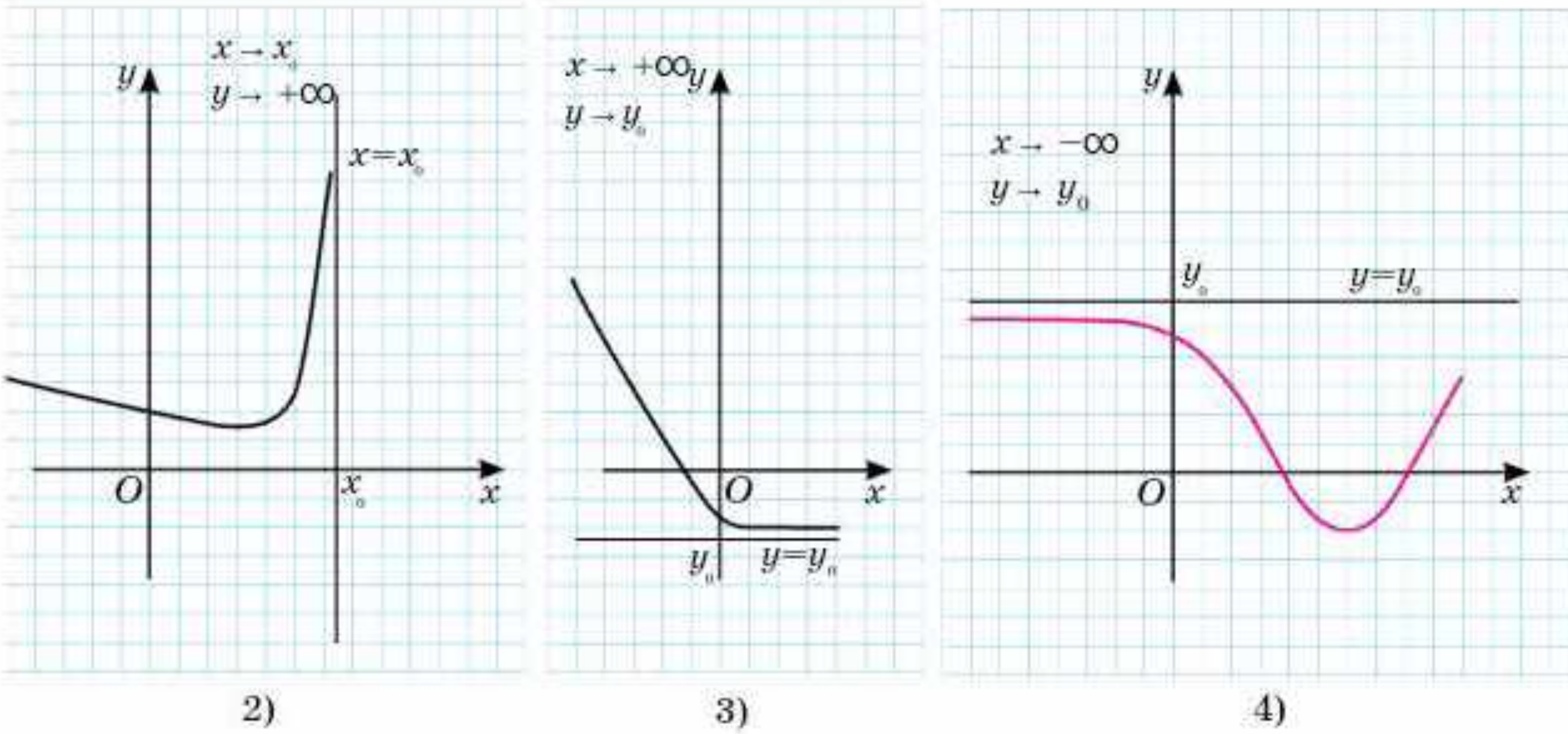


Рис. 39.2

Угол между асимптотой и положительным направлением оси Ox обозначим φ.

Точку пересечения перпендикуляра MG к оси Ox и асимптоты обозначим N.

Пусть $MG = y$ — ордината точки кривой линии $y = f(x)$, $NG = y_1$ — ордината точки N на асимптоте $y = kx + b$ (рис. 39.3).

Докажем, что $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$.

Доказательство. При движении точки M по кривой линии при $x \to +\infty$ точка M неограниченно приближается к точке P, поэтому $\lim\limits_{x \to \infty} |MP| = 0$.

Докажите, что $\angle NMP = \varphi$.

Из ΔMNP получим $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$. Поскольку угол φ — постоянный и не равный 90°, то cosφ можно вынести за знак предела. Тогда получим $\lim\limits_{x \to \infty} |NM| = \dfrac{\lim\limits_{x \to \infty} |MP|}{\cos\varphi} = 0$. Используя рисунок 39.3, получим $|NM| = \big||MG| - |GN|\big| = |y - y_1| = |f(x) - (kx + b)|$. Тогда $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$.

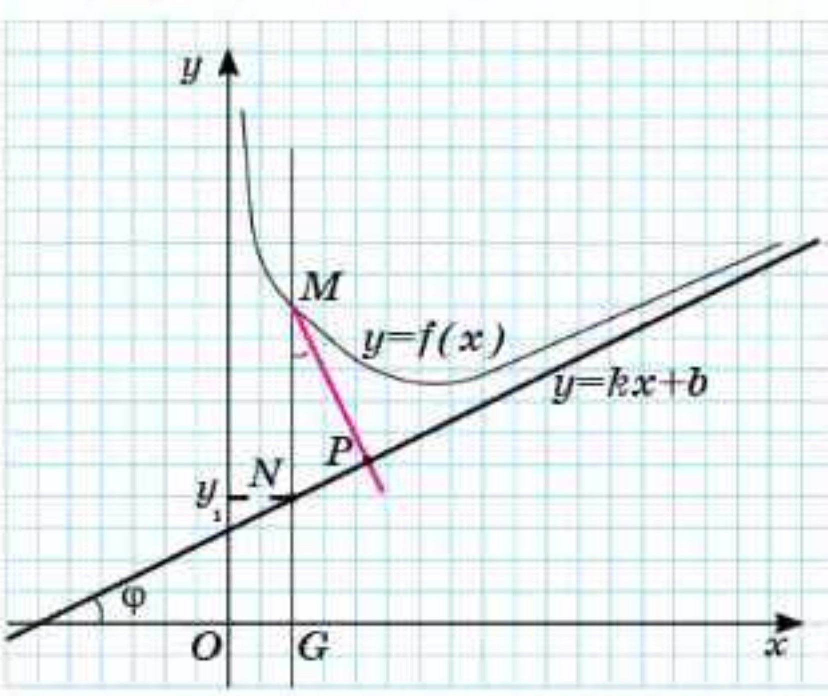


Рис. 39.3

Воспользуемся полученным пределом для вычисления значений k и b асимптоты $y = kx + b$ кривой линии $y = f(x)$.

Для этого в полученном выражении под знаком предела вынесем за скобки x. Получим $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$.

Поскольку $x \to \infty$, то $x \neq 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$ и так как b и k — const, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} k = k$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$. Из последнего равенства выразим k, получим $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

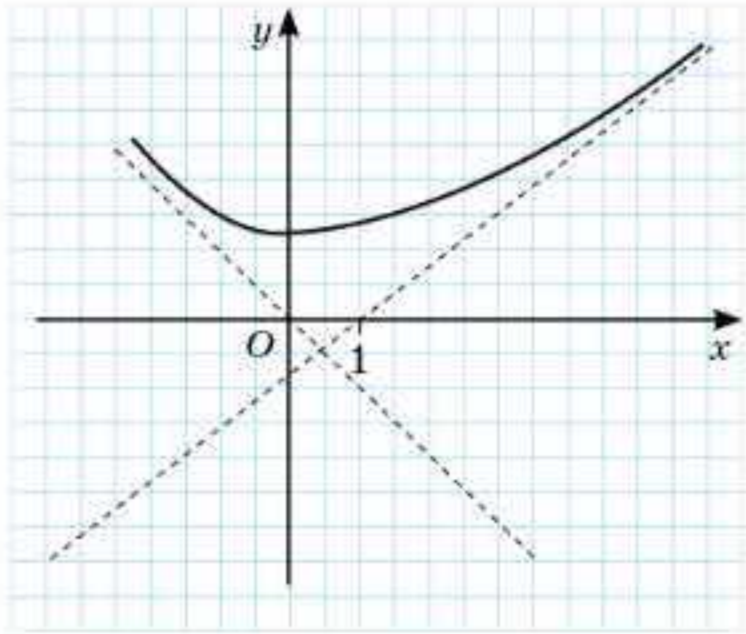


Рис. 39.4

Еще раз применим доказанное равенство $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$. Преобразуем его следующим образом: $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$. Из последнего равенства выразим b, получим $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$.

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k = 0$.

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$ — формулы для нахождения уравнения $y = kx + b$ наклонной или горизонтальной асимптоты.

Если хотя бы один из пределов для нахождения b и k при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) не существует, это означает, что наклонной асимптоты нет.

Примечание:

1) Наклонных асимптот у графика функции может быть две: одна при $x \to +\infty$ и одна при $x \to -\infty$ (рис. 39.4).

2) Кривая линия, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке (рис. 39.5).

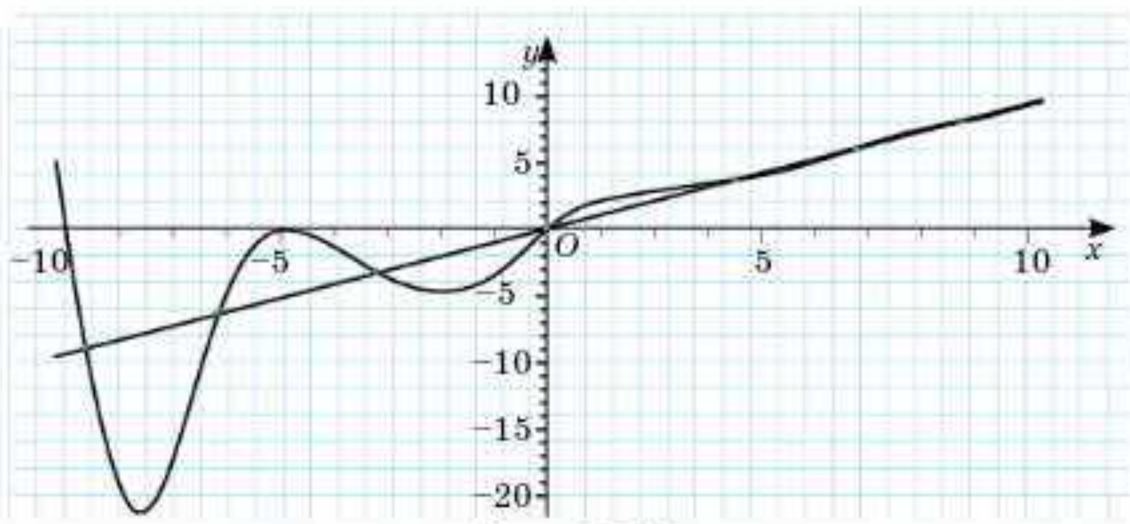


Рис. 39.5

ПРИМЕР

2. Найдем наклонную асимптоту графика функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Решение. Воспользуемся формулами $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx]$. Получим:

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x(x - 1)} = 1$ и $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x(x - 1)} = 1$, т. е. в обоих случаях $k = 1$.

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) = -1$ и

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) = -1$, т. е.

$b = -1$.

Следовательно, график данной функции имеет одну наклонную асимптоту $y = x - 1$ (как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$).

Выше было показано, что график этой функции имеет вертикальную асимптоту $x = 1$. На рисунке 39.6 показан эскиз графика этой функции.

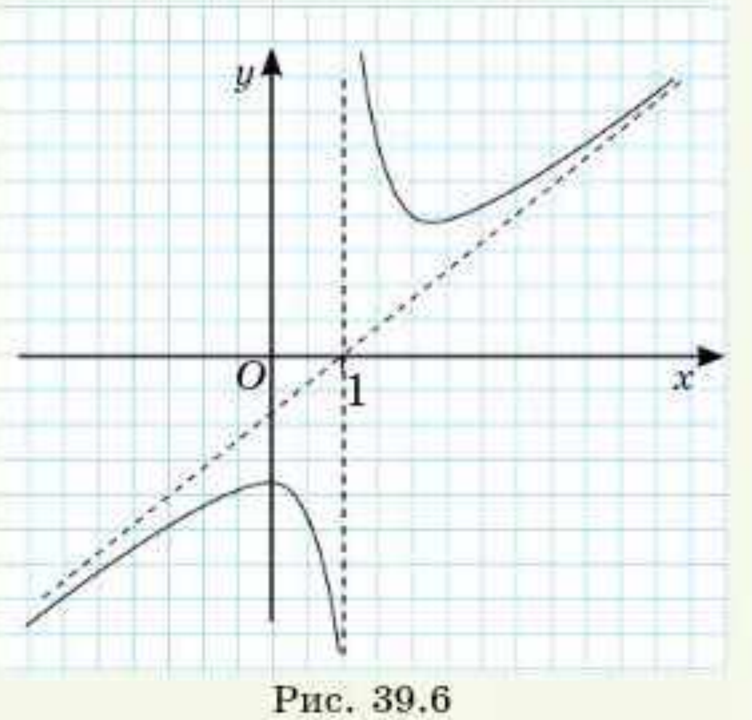


Рис. 39.6

1. Что можно сказать о графике функции, у которого есть асимптота: 1) вертикальная; 2) горизонтальная?
2. Может ли график функции иметь две асимптоты: 1) горизонтальную и вертикальную; 2) наклонную и горизонтальную?
3. Может ли график функции иметь две наклонные асимптоты?

Упражнения

А

39.1. Найдите асимптоты графика функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$; 2) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$;

3) $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x - 2}$; 4) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 5}$;

5) $f(x) = \dfrac{x + 1}{4 - x}$; 6) $f(x) = \dfrac{5 - x}{2x + 3}$.

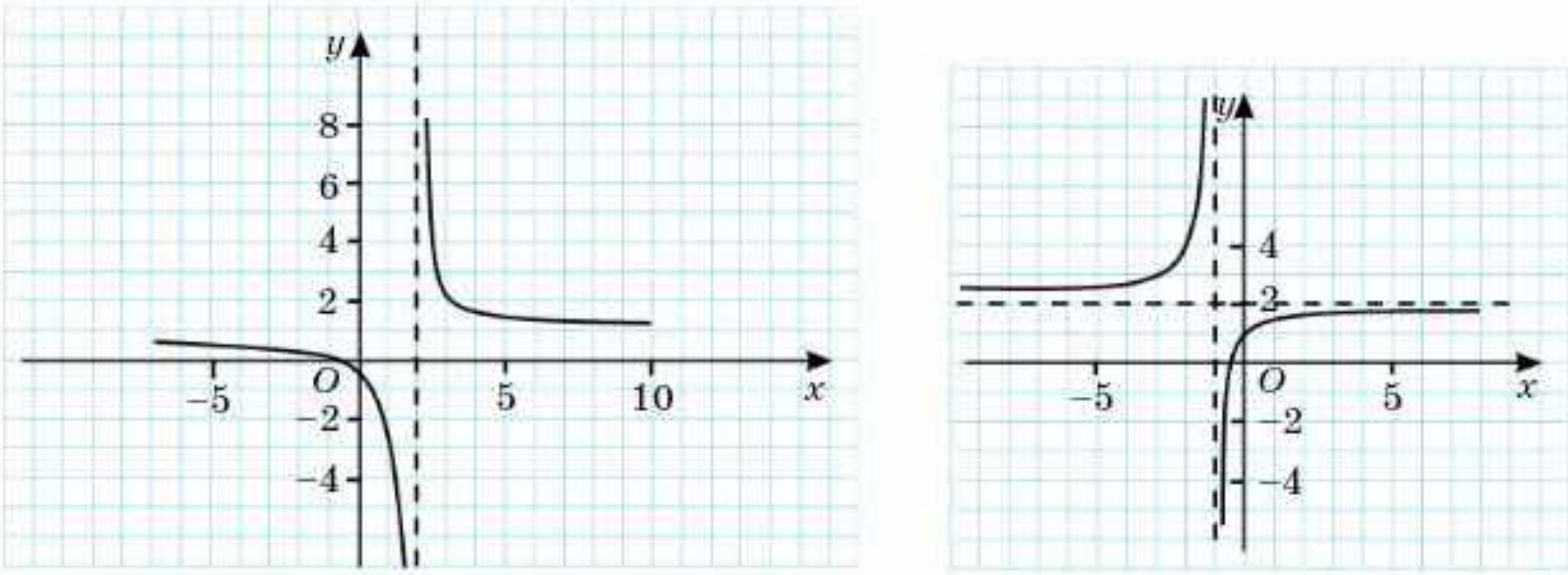
Найдите асимптоты функции $y = f(x)$ (**39.2—39.3**):

39.2. 1) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x - 4}$; 2) $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 4}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 4}$.

39.3. 1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$; 2) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x + 1}$; 3) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x - 2}$.

По графику функции (рис. 39.7—39.9) запишите формулы ее асимптот (**39.4—39.6**).

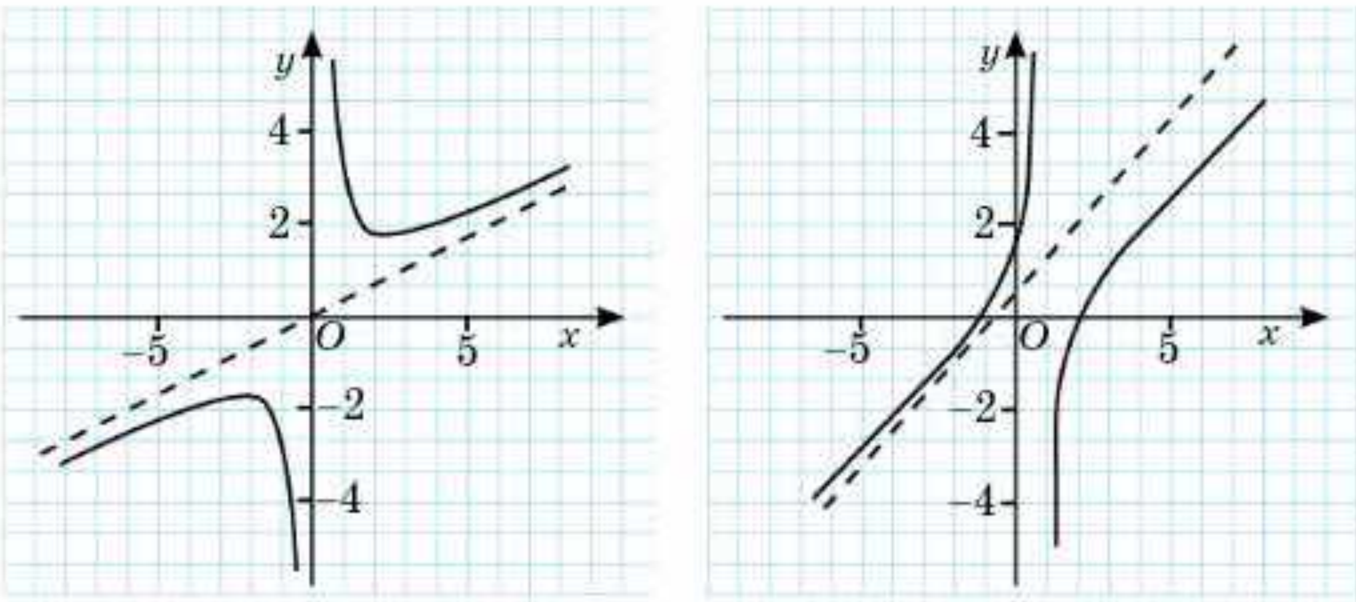
39.4.



1) 2)

Рис. 39.7

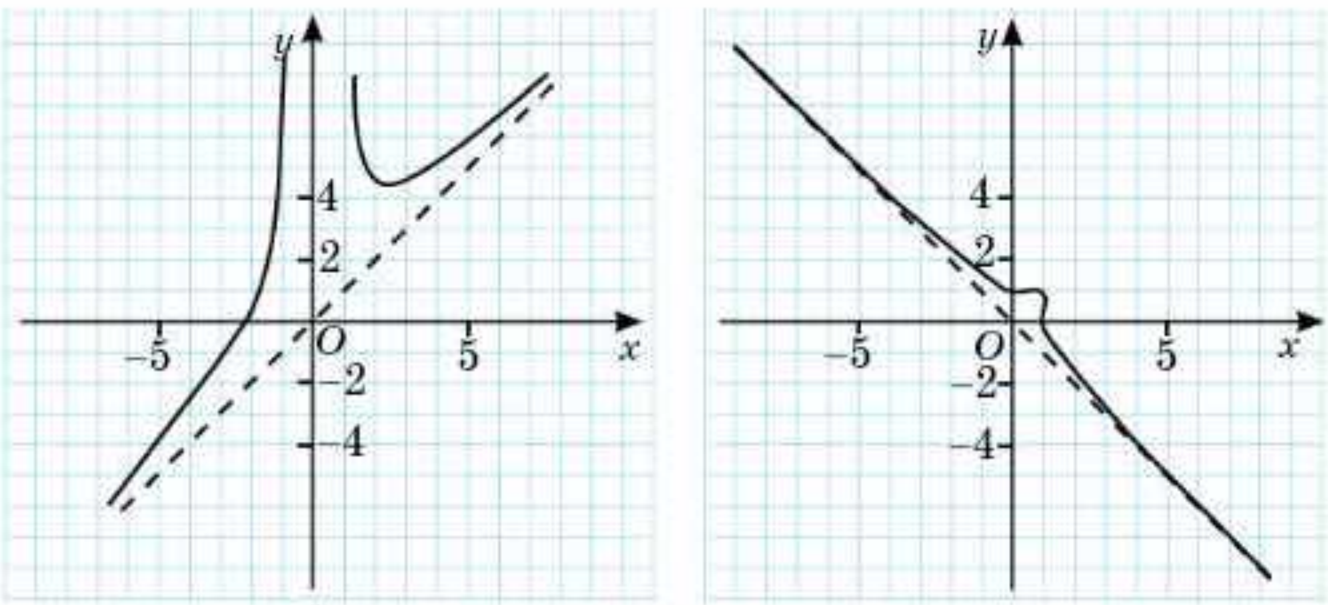
39.5.



1) 2)

Рис. 39.8

39.6.



1) 2)

Рис. 39.9

8. Если функция $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \leqslant -1, \\ B, & x > -1 \end{cases}$ непрерывна в точке $x_0 = -1$, то значение B равно:

A) 5; B) 6; C) 4; D) 2.

9. Найдите предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 6x - \arcsin 2x}{2x}$:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 6.

10. Асимптотами графика функции $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}$ являются прямые:

A) $y = x - 2$; $x = \pm 1$;
B) $y = x + 1$; $x = \pm 1$;
C) $y = 2x - 2$; $x = \pm 1$;
D) $y = 1$; $x = \pm 2$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, график функции, сложная функция, возрастание и убывание функции на множестве, предел функции, правила нахождения предела функции в точке, непрерывность функции в точке и на множестве.

8. Если функция $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \leqslant -1, \\ B, & x > -1 \end{cases}$ непрерывна в точке $x_0 = -1$, то значение B равно:

A) 5; B) 6; C) 4; D) 2.

9. Найдите предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 6x - \arcsin 2x}{2x}$:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 6.

10. Асимптотами графика функции $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}$ являются прямые:

A) $y = x - 2$; $x = \pm 1$;
B) $y = x + 1$; $x = \pm 1$;
C) $y = 2x - 2$; $x = \pm 1$;
D) $y = 1$; $x = \pm 2$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, график функции, сложная функция, возрастание и убывание функции на множестве, предел функции, правила нахождения предела функции в точке, непрерывность функции в точке и на множестве.

8 ПРОИЗВОДНАЯ

§ 40. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Вы ознакомитесь с понятием *производная функция;* научитесь находить производную функции по определению.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, приращение аргумента, приращение функции, производная, дифференцирование

Определение. ***Приращением аргумента*** *для функции $y = f(x)$ называется значение разности двух значений аргумента из области определения этой функции.*

Малое, но конечное приращение аргумента принято обозначать Δx. Записывают: $x_2 - x_1 = \Delta x$.

Определение. ***Приращением функции*** $y = f(x)$ *называется значение разности соответствующих двух значений функции из ее области (множества) значений.*

Приращение функции принято обозначать Δy.

Записывают: $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

Приращение функции находят по схеме.

Пусть аргумент x получил приращение Δx. Тогда получим $x + \Delta x$ — наращенное значение аргумента и соответствующее ему наращенное значение функции $f(x) + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Следовательно, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

ПРИМЕР

1. Найдем приращение аргумента и приращение функции $f(x) = 4x^2 - 2x + 4$, если аргумент изменил свое значение от 1 до 1,5.

Решение. Найдем приращение аргумента $\Delta x = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$. Поскольку $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, найдем $f(x_2)$ и $f(x_1)$. Получим: $f(x_2) = f(1{,}5) = 4 \cdot 2{,}25 - 3 + 4 = 10$, $f(x_1) = f(1) = 6$, поэтому $\Delta y = 10 - 6 = 4$.

Ответ: 0,5 и 4.

ПРИМЕР

2. Найдем приращение функции $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ при $x = -2$ и $\Delta x = 0{,}5$.

Решение. Поскольку $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, то получим: $\Delta y = -(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - 4 + x^2 - 2x + 4 = -x^2 - 2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - 4 + x^2 - 2x + 4 = -2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 + 2\Delta x = 2 - 0{,}25 + 1 = 2{,}75$.

Ответ: 2,75.

Определение. ***Производной функции в точке*** x_0 *называется предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если таковой предел существует.*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Определение. *Функцию, имеющую конечную производную, называют* ***дифференцируемой в точке.*** *Если функция имеет конечную производную в каждой точке множества, то говорят, что она* ***дифференцируема на множестве.***

ПРИМЕР

3. Найдем производную функции $f(x) = x^2$.

Решение. По определению производной получим:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Значит, $(x^2)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

Ответ: $(x^2)' = 2x$.

Определение. *Процесс вычисления производной называется* ***дифференцированием.***

Поскольку $(x^2)' = 2x$ для всех действительных чисел, поэтому функция $y = x^2$ дифференцируема на множестве всех действительных чисел.

ПРИМЕР

4. Найдем производную функции $y(x) = \frac{1}{x}$.

Решение. По определению производной получим:

$y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x - (x + \Delta x)}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(x + \Delta x)x} = -\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x + \Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}.$

Ответ: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

ПРИМЕР

5. Найдем производную функции $y(x) = \sqrt{x}$.

Решение. Применяя определение производной, получим:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$. Заметим, что

$\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2 = x + \Delta x - x = \Delta x.$

Тогда:

$y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Ответ: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

ПРИМЕР

6. Найдем производную константы C'.

Решение. $C' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$

Ответ: $C' = 0$.

Докажите $(x)' = 1$.

Запомните формулы:

Таблица 24

$C' = 0$	$(x)' = 1$	$(x^2)' = 2x$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

1. Что означает производная для функции $y = f(x)$?
2. Всякая ли функция дифференцируема?

Упражнения

А

40.1. Для функции $y = f(x)$ найдите отношение Δf к Δx при переходе от точки с абсциссой x к точке с абсциссой $x + \Delta x$, если:
1) $f(x) = 3x^2 + 1$; 2) $f(x) = x^2 - 2x$;
3) $f(x) = \frac{1}{x}$; 4) $f(x) = \sqrt{3x}$;
5) $f(x) = \cos x$; 6) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

40.2. Найдите Δx и Δf в точке с абсциссой x_0 и отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$:
1) $f(x) = 5x - x^2$, $x_0 = 5{,}2$, $x = 5{,}3$;
2) $f(x) = x + 2x^2 - 1$, $x_0 = -6{,}4$, $x = -6{,}5$;
3) $f(x) = \sin 3x - 2$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{4}$;
4) $f(x) = \cos 2x + 2$, $x_0 = -\frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{4}$.

40.3. Найдите $y'(x_0)$ по определению производной в указанной точке:
1) $y = \frac{x-1}{x+1}$ при $x_0 = 2$; 2) $y = \frac{x^2+1}{x-2}$ при $x_0 = 1$;
3) $y = \frac{x+2}{x-4}$ при $x_0 = 5$; 4) $y = \frac{x^2+1}{x^2+5x}$ при $x_0 = -1$;
5) $y = 2x^3$ при $x_0 = 3$; 6) $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ при $x_0 = -2$.

В

40.4. Точка движется по прямой по закону $s = t^3 + 2t^2 + 3$, где длина пути s измеряется в сантиметрах, время t — в секундах. Найдите среднюю скорость за промежуток времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = 1 + \Delta t$, считая $\Delta t = 0{,}5$; $0{,}2$; $0{,}1$.

40.5. Пользуясь определением производной, найдите значение $y'(x)$ в точке $x_0 = 1$:
1) $y = \frac{2}{x^2}$; 2) $y = \frac{1}{x^3}$;
3) $y = \sqrt{1 + 2x}$; 4) $y = \sqrt{4 - 3x}$.

40.6. 1) Длина стороны квадрата измерена с точностью до 0,2 см. С какой точностью найден периметр квадрата?
2) С какой точностью достаточно измерить длину стороны правильного шестиугольника, чтобы найти его периметр с точностью до 0,1 дм?

C

40.7. Докажите, что не дифференцируема в указанных точках функция:
1) $y = 2x + |x - 1|$, $x_0 = 1$;
2) $y = |x - x^3|$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$;
3) $y = \begin{cases} 2x^2 & \text{при } x < 0, \\ x + 1 & \text{при } x \geqslant 0, \end{cases}$ и $x_0 = 0$;
4) $y = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 3 - x & \text{при } x > 1, \end{cases}$ и $x_0 = 1$;
5) $y = \sqrt{x^3}$, $x_0 = 0$;
6) $y = \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

40.8. Используя определение производной функции в точке, найдите значение производной функции в точке x_0:
1) $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 2x - 1 & \text{при } x > 1, \end{cases}$ и $x_0 = 1$;
2) $y = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 2 - 2x & \text{при } x > 1, \end{cases}$ и $x_0 = 1$.

40.9. Точка движется по координатной прямой и ее координата в момент времени t равна $y = f(t)$. На какое расстояние переместится точка, если:
1) $y = 2t + t^2$, $t \in [1; 3]$;
2) $y = \sqrt{t} + t$, $t \in [4; 9]$?

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ


Леонард Эйлер (1707—1788)

40.10. Обозначение разности Δx в 1755 г. ввел Леонард Эйлер — швейцарский, немецкий и российский математик и механик.
Обозначение производной $f'x$ в 1770 г. ввел Жозеф Луи Лагранж — французский математик, астроном и механик.


Жозеф Луи Лагранж (1736—1813)

ПОВТОРИТЕ

40.11. Среди прямых, заданных формулой, найдите пары параллельных и ортогональных прямых:
1) $y = x - 3$; 2) $y = -2x + 3$; 3) $y = 1 - x$;
4) $y = \frac{1}{3}x - 1$; 5) $y = 5 + \frac{1}{3}x$; 6) $y = 3 - x$.

40.12. Найдите значение выражения:
1) $\sqrt{27 \cdot 125 \cdot 240}$; 2) $\sqrt{64 \cdot 12 \cdot 27}$;
3) $\sqrt{\frac{25 \cdot 27}{12 \cdot 49}}$.

40.13. Найдите область определения функции:
1) $y(x) = \sqrt{\sin(2x + 5)}$; 2) $y(x) = \sqrt{1 - \cos(2x - 1)}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Производная функции; C, x, x^2, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, сумма, произведение и частное двух функций, предел функции, правила нахождения пределов.

§41. ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Вы научитесь находить производные постоянной функции и степенной функции; ознакомитесь с правилами дифференцирования и научитесь их применять.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Функция, производная, производная суммы, производная произведения, производная частного, производная константы

Теорема. *Производная суммы (разности) двух дифференцируемых функций равна сумме (разности) производных:*

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$

Учитывая, что разность можно рассматривать как алгебраическую сумму, кратко эту формулу записывают в виде:

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Доказательство.

$$(u + v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u + v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Доказанная формула распространяется на случай суммы трех и более слагаемых.

ПРИМЕР

1. Найдем производную функции $g(x) = x + x^2 - 3$.

Решение. Функция $y = g(x)$ — это сумма трех дифференцируемых функций, поэтому:
$g'(x) = (x + x^2 - 3)' = (x)' + (x^2)' + (-3)' = 1 + 2x + 0 = 1 + 2x$.

Ответ: $g'(x) = 1 + 2x$.

Теорема. *Производная произведения двух дифференцируемых функций находится с помощью формулы:*

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Кратко эту формулу записывают в виде:

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

Доказательство.

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \left| \begin{matrix} u(x_0 + \Delta x) = u + \Delta u \\ v(x_0 + \Delta x) = v + \Delta v \end{matrix} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta u)v + (\Delta v)u + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = u'v + v'u + u'\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v}_{0} = u'v + v'u.$$

ПРИМЕР

2. 1) Найдем производные функций $f(x) = \frac{5}{x}$; 2) $g(x) = -7\sqrt{x}$.

Решение. 1) Функция $y = f(x)$ представляет собой произведение константы: числа 5 и дифференцируемой функции $y = \frac{1}{x}$, поэтому:

$$f'(x) = \left(\frac{5}{x}\right)' = \left(5 \cdot \frac{1}{x}\right)' = 5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot (5)' = 5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot 0 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{5}{x^2}.$$

2) Первый множитель функции $y = g(x)$ представляет собой константу: число -7, второй — дифференцируемую функцию $y = \sqrt{x}$.

$$g'(x) = (-7\sqrt{x})' = -7(\sqrt{x})' + \sqrt{x} \cdot (-7)' = -7(\sqrt{x})' + \sqrt{x} \cdot 0 = -7 \cdot (\sqrt{x})' = -7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$
$$= -\frac{7}{2\sqrt{x}}.$$

Ответ: $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$; $g'(x) = -\frac{7}{2\sqrt{x}}$.

Докажите, что значение произведения константы и дифференцируемой функции $(Cu)'$ можно вычислить по формуле: $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$, т. е. константу можно вынести за знак производной.

Кратко эту формулу записывают в виде:

$(cu)' = cu'$, где c — const.

ПРИМЕР

3. Определим производную от выражения $2x^2$.

Решение. $(2x^2)' = 2 \cdot (x^2)' = 2 \cdot 2x = 4x$.

Ответ: $4x$.

Теорема. *Производная частного двух дифференцируемых функций* $y = f(x)$ и $y = g(x)$, *причем* $g(x) \neq 0$ *находится с помощью формулы:*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Кратко эту формулу записывают в виде:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Доказательство.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \left\{\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}\right\} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta u)v - (\Delta v)u}{\Delta x v(v + \Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{1}{(v + \Delta v)} -$$

$$- \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \frac{u}{v(v + \Delta v)} = \frac{u'}{v} - \frac{v'u}{v^2} = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

ПРИМЕР 4. Найдем производную степени с натуральным показателем $(x^n)'$. Поскольку $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, то можно предположить, что $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Докажем это равенство.

Доказательство проведем методом математической индукции. Проверим, истинно ли данное утверждение при $n = 1$. $(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1}$ — верно. Допустим, что утверждение истинно, при $n=k$, т. е. $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$ докажем, что утверждение истинно при $n=k+1$, т.е. убедимся в истинности утверждения $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$.

Действительно, $(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = (x)' \cdot x^k + x \cdot (x^k)' = 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} = (k + 1)x^k$.

Следовательно, $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Ответ: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

ПРИМЕР 5. Если $g(x) = x^4$, то $g'(x) = (x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3$.

Ответ: $4x^3$.

Запомните формулу: $(x^n)' = nx^{n-1}$ для любого натурального числа n.

1. Перечислите правила нахождения производных.
2. Для каких функций справедливы правила нахождения производных?

Упражнения

A

Пользуясь правилами вычисления производных, найдите $f'(x)$ **(41.1—41.2):**

41.1. 1) $f(x) = 3x - \sqrt{3}$; 2) $f(x) = x^3 - \sqrt{3}x$;
3) $f(x) = x^2 + 3x - \sqrt{2}$; 4) $f(x) = x^3 - \sqrt{7}\,x + \pi$;
5) $f(x) = 5x^{-4} + 2x - \sqrt{5}$; 6) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \sqrt{3}x^2 - 7$.

41.2. 1) $f(x) = 3x(x - 1)$; 2) $f(x) = x^2(x^3 - \sqrt{3}\,x)$;
3) $f(x) = (x^2 + 3)(x - 5)$; 4) $f(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{7}\,x$;
5) $f(x) = \frac{x - 2}{x + 3} - 5x$; 6) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 4} - 3x + 2$.

41.3. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:
1) $f(x) = x \cdot (x - 3)$, $x_0 = 4$;
2) $f(x) = (x^2 - 5) \cdot (x - 3)$, $x_0 = 1{,}1$;

3) $f(x) = 4 \cdot (x^2 + 3x) \cdot (x - 1)$, $x_0 = -0{,}4$;

4) $f(x) = (2x - 1)(x + 3) - x$, $x_0 = 1\frac{1}{3}$.

41.4. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 2$:

1) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$; 2) $f(x) = \dfrac{5x}{x-3}$;

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5}x + 7x^3}{x+2}$; 4) $f(x) = \dfrac{5(x-5)(x+1)}{x+3} - 4x$.

B

41.5. Решите уравнение $f'(x) = 0$:

1) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x - 1}{x-3}$; 2) $f(x) = \dfrac{2 - 5x^2}{x^2 + 3x}$;

3) $f(x) = \dfrac{5x}{x+5} - x$; 4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x}{x+3} - \dfrac{2x}{x+3}$.

41.6. Решите неравенство $f'(x) \geqslant 0$:

1) $f(x) = x^2 + 1{,}2x - 2\sqrt{3}$; 2) $f(x) = x^3 + 6x^2 - \sqrt{3}$;

3) $f(x) = x^5 + 111x^3 - 21\sqrt{7}$; 4) $f(x) = x^3 + 3x^4 - 3x^2 + 1$.

41.7. Напишите формулу какой-либо функции $f(x)$, производная которой равна:

1) $4x^3 + 6x^2 - 2\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \sqrt{3}x$;

3) $5x^3 - 0{,}6x^2 + \sqrt{7}x - 4$; 4) $-\dfrac{5}{x^3} + x^4 - 7$;

5) $-\dfrac{5}{x^4} + 3x^4 - 7x + 1$; 6) $\dfrac{\sqrt{5}}{3} + \dfrac{5}{x^3} - x^6 - 7x$.

41.8. Найдите значение производной функции в точке $x = -1$:

1) $f(x) = x^2 + \sqrt{x+2} - \sqrt{3}$; 2) $f(x) = x^3 - \sqrt{x+5} - 1$;

3) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + \sqrt{x+2} - \sqrt{2}x$.

C

Найдите производные функций **(41.9—41.11)**:

41.9. 1) $f(x) = 3x^{-4} + x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$; 2) $f(x) = x^{-5} + x^2\sqrt{x} - 4$;

3) $f(x) = x^{-10} + \sqrt{x} - \dfrac{2}{x}$.

41.10. 1) $f(x) = (1 - x^2)\sqrt{x}$; 2) $f(x) = (x^2 - 2x)\sqrt{x}$;

3) $f(x) = x^2 \cdot (\sqrt{x} - 1)$.

41.11. 1) $f(x) = 2 - \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$; 2) $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{x-2} + 3$;

3) $f(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{9 + 2x} - \sqrt{x}$.

41.12. Докажите, что при всех допустимых значениях x производная функции $y = f(x)$ принимает отрицательные значения:

1) $f(x) = -2x + \frac{2}{x^3}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{5}{x^5}$;

3) $f(x) = -3\sqrt{x} + \frac{2}{x}$.

41.13. Найдите производную функции $f(x) = |2x|$ при:
1) $x > 0$; 2) $x < 0$; 3) $x = 0$.

41.14. Найдите значение производной функции в указанных точках:

1) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}$, $x = 1$; 2) $f(x) = \frac{5}{x} - \frac{x^2}{2} - 5$, $x = -2$;

3) $f(x) = 3 + \frac{4}{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}$, $x = 4$.

ПОВТОРИТЕ

41.15. Постройте график функции:

1) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$; 2) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$;

3) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$; 4) $f(x) = \frac{3x^2-12}{x+2}$.

41.16. Постройте график уравнения:

1) $\frac{y-x^2}{x-1} = 0$; 2) $\frac{y-x^2+2}{x^2-4} = 0$; 3) $\frac{y-\sqrt{x+2}}{x-2} = 0$.

41.17. Решите уравнение:
1) $3\sin^2 2x = 2 + \sin 2x \cos 2x$;
2) $2\sin^2 4x - 4 + 4\cos^2 4x = 3\sin 4x \cos 4x$;
3) $\cos^2 x - 7\sin x + \sin x \cos x - 7\cos x = 0$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Производная функции, правила нахождения производных, прямая линия, касательная к графику функции, угловой коэффициент прямой линии, скорость движения точки, пройденный путь.

§ 42. ФИЗИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ

Вы ознакомитесь с понятиями: *дифференциал, геометрический и физический смысл производной*; научитесь решать прикладные задачи, опираясь на физический смысл производной; решать задачи с использованием геометрического смысла производной, вычислять приближенные значения с помощью дифференциала.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Производная, скорость, касательная, дифференциал, приближенные вычисления

Рассмотрим физический смысл производной.

Длина пути, пройденного материальной точкой за время t, задана формулой $s(t)$, а длина пути, пройденного точкой за время $t + \Delta t$, вычисляется по формуле $s(t + \Delta t)$. Тогда длина пути в момент времени от t до $t + \Delta t$ определяется разностью $s(t + \Delta t) - s(t)$.

Если эту разность разделить на Δt, то получим среднюю скорость движения точки за время Δt, $v_{\text{сред.}} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$. Если найдем предел этого выражения при $\Delta t \to 0$, и, учитывая, что $s = v \cdot t$, то получим

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v \cdot (t + \Delta t) - v \cdot t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v \cdot \Delta t}{\Delta t} = v(t).$$

Итак, $v(t) = s'(t)$ — мгновенная скорость движущегося тела в момент времени t. Производная функции $y = f(x)$ в точке x определяет скорость изменения функции в этой точке.

Понятие производной широко используется в современной физике.

Приведем несколько примеров.

ПРИМЕР

1. *Мгновенное ускорение точки* равно $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t)$.

Сила и импульс по второму закону Ньютона связаны соотношением: $F = p'$.

Количество заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника, определяет силу тока: $I = q'$.

В электростатическом поле, изменяющемся только по оси Ox, *напряженность и потенциал* связаны соотношением $E = -\varphi'$.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис.42.1):

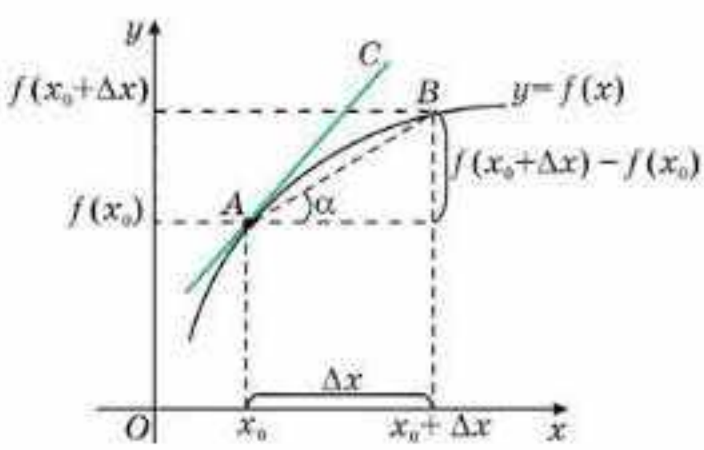


Рис 42.1

Из рисунка 42.1 видно, что для любых двух точек A и B графика функции $y = f(x)$ имеет место равенство: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, где α — угол наклона секущей AB к оси Ox.

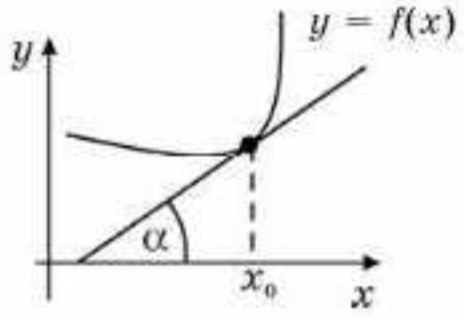
Если зафиксировать точку A и двигать по направлению к ней точку B, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая AB приближается к касательной AC. Следовательно, предел разностного отношения $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ равен угловому коэффициенту касательной в точке с абсциссой A, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

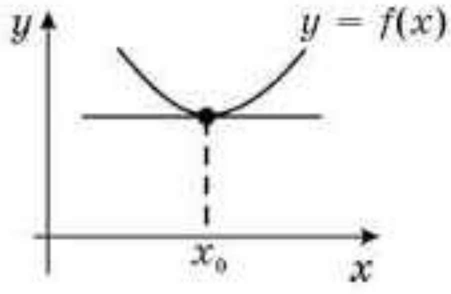
Геометрический смысл производной

Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке:

Отсюда следует, что производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке (рис. 42.2).

В этом и состоит геометрический смысл производной.





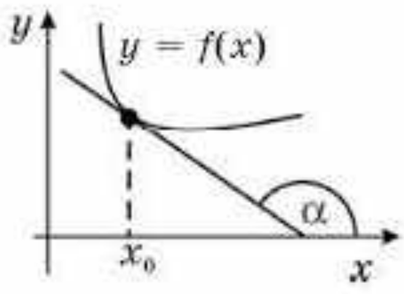


Рис. 42.2

Введем понятие *дифференциал функции*.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на числовом промежутке. Тогда для некоторой точки x этого промежутка имеем: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right) = 0$, или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = 0$. Это значит, что при $\Delta x \to 0$ $\Delta y - f'(x)\Delta x$ есть бесконечно малая высшего порядка малости, чем Δx. Обозначим ее α. Получим $\Delta y - f'(x)\Delta x = \alpha \cdot \Delta x$.

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $f'(x)\Delta x$ — главная линейная часть приращения. Она называется *дифференциалом функции в точке* x и обозначается $dy = f'(x)\Delta x$.

Определение. ***Дифференциалом dy функции в точке*** *x называется главная линейная часть $f'(x)\Delta x$ приращения $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.*

$dy = f'(x)\Delta x$ — определение дифференциала.

Установим связь dx и Δx при $\Delta x \to 0$. Для этого найдем дифференциал функции $y = x$. Получим $dy = x'\Delta x$, или $dy = \Delta x$. Поскольку $y = x$, то $dx = \Delta x$.

Получили важную формулу для нахождения дифференциала функции:

$df = f'(x)dx$ — формула для нахождения дифференциала функции.

ПРИМЕР

2. Найдем дифференциал функции $f(x) = x^3$.

Решение. Применим формулу $df = f'(x)dx$, получим $df(x) = 3x^2dx$.

Ответ: $3x^2dx$.

Рассмотрим применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Вы знаете, что приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x можно представить в виде $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$. Отбросим бесконечно малую $\alpha \cdot \Delta x$, получим приближенное равенство $\Delta y \approx dy$. Это равенство тем точнее, чем меньше Δx.

$\Delta y \approx dy$ — формула для вычисления приближенного приращения любой дифференцируемой функции.

Формула $\Delta y \approx dy$ широко применяется в вычислительной практике, так как дифференциал обычно находится значительно проще, чем приращение функции.

ПРИМЕР **3.** Найдем приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

Решение. Применим формулу: $\Delta y \approx dy = (x^3 - 2x + 1)' \cdot \Delta x = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x$.

$dy = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x = (3 \cdot 2^2 - 2) \cdot 0{,}001 = 10 \cdot 0{,}001 = 0{,}01.$

Получим $\Delta y \approx 0{,}01$.

Найдем допущенную погрешность, вычислив дифференциал функции вместо ее приращения. Для этого найдем Δy:

$\Delta y = ((x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 1) - (x^3 - 2x + 1) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 1 - x^3 + 2x - 1 = \Delta x\,(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2);$

$\Delta y = \Delta x\,(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2) = 0{,}001 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + 0{,}001^2 - 2) = 0{,}010\,006.$

Абсолютная погрешность приближения равна $|\Delta y - dy| = |0{,}010\,006 - 0{,}01| = 0{,}000\,006$. Как видим, равенство $\Delta y \approx dy$ позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

Чтобы получить формулу для вычислений приближенных значений функций, подставим в равенство $\Delta y \approx dy$ значения Δy и dy, получим

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x, \text{ или } f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ — формула для вычисления приближенных значений функций.

Выведем формулу для вычисления приближенного значения функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x = 1 + \Delta x$.

$\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$ — формула для вычисления приближенного значения функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x = 1 + \Delta x$.

Доказательство. Воспользуемся формулой $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$. По условию $f(x) = \sqrt{x}$. Тогда $f(1) = 1$. Найдем производную функции и ее значение при $x = 1$. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ и $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Следовательно, по формуле получим $\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$.

ПРИМЕР **4.** Вычислим приближенно $\sqrt{25{,}75}$.

Решение. $\sqrt{25{,}75} = \sqrt{25 + 0{,}75} = \sqrt{25 \cdot (1 + 0{,}03)} = 5 \cdot \sqrt{1 + 0{,}03} \approx 5 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}03\right) = 5{,}075.$

Ответ: 5,075.

1. Где применяют производную?
2. Каков физический и геометрический смысл производной?
3. Как находится мгновенная скорость ?
4. Как найти среднюю скорость движения в указанный промежуток времени?
5. Как связаны дифференциал функции с ее производной?
6. При каком условии формула для вычислений приближенных значений функций дает более точный результат?

Упражнения

A

42.1. Найдите производную функции в указанной точке, используя определение. Дайте геометрическое и физическое истолкование полученного результата:

1) $y = 2 + \frac{3x+1}{5x+1}$ при $x = 4$;   2) $y = \frac{x^2+2}{2x+3} - 3$ при $x = 1$;

3) $y = \frac{x-2}{x+4}$ при $x = 7$;   4) $y = \frac{x^2+1}{2x^2+3x}$ при $x = 3$;

5) $y = x^3 - 7$ при $x = 3$;   6) $y = \frac{x^3}{3(x+1)^2} - 5{,}2$ при $x = 1$.

42.2. 1) Точка движется по прямой по закону $s = 5t^2 - 4t + 4$, где s — длина пути, измеряемая в метрах, t — время в секундах. Найдите мгновенную скорость при $t = 2$ с и среднюю скорость точки за время от $t = 2$с до $t_1 = 2 + \Delta t$, считая $\Delta t = 0{,}5$.
2) Закон движения точки по прямой задан формулой $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 5$ (s измеряется в метрах, t — в секундах). В какие моменты времени скорость точки равна нулю?

42.3. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y(x)$, проходящей через точку A:
1) $y = 2x^2 - x - 5$, $A(-1; -2)$;
2) $y = 0{,}2x^2 + 2x - 4$, $A(2; 0{,}8)$;
3) $y = -3x^2 - x + 5$, $A(-2; -5)$;
4) $y = x^2 - \frac{1}{x} - 5$, $A\left(3;\ 3\frac{2}{3}\right)$.

42.4. Используя производную функции $f(x)$, найдите $d(f(x))$:

1) $f(x) = x^3 - 1$;   2) $f(x) = 4x^2 - x$;   3) $f(x) = 3\sqrt{x} - 2x$.

42.5. Используя формулу $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$, вычислите приближенные значения функции $f(x)$ при значениях аргумента x_1 и x_2:
1) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2$ при $x_1 = 1{,}03$, $x_2 = 4{,}98$;
2) $f(x) = x^3 - x^2 + 3$ при $x_1 = 2{,}02$, $x_2 = 5{,}995$.

42.6. Используя формулу $\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \Delta x$ для функции $f(x) = \sqrt{x}$, вычислите приближенное значение выражения:

1) $\sqrt{0,98}$; 2) $\sqrt{0,996}$; 3) $\sqrt{4,06}$; 4) $\sqrt{122}$; 5) $\sqrt{224}$.

B

42.7. Докажите, что функция не дифференцируема в указанных точках:
1) $y = 3x - |x - 2|$ при $x_0 = 2$;
2) $y = |x^3 - 8x^2|$ при $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;
3) $y = \sqrt{x^2}$ при $x_0 = 0$;
4) $y = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 2 - x \text{ при } x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$.

42.8. Вычислите производную функции $f(x) = \dfrac{25x^2 - 5}{16x^2 - 4}$ при $x = 2$. Дайте геометрическое и механическое истолкование полученного результата.

42.9. 1) Покажите, что любая касательная к графику кривой $y = x^3 + 9x - 13$ составляет с осью Ox острый угол.
2) Найдите угол, образованный с осью абсцисс касательной к графику функции $y = 0,5x^2$ в точке с абсциссой $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

42.10. Пользуясь графиком функции $y(x)$ (рис. 42.3), отметьте знаком + соответствующее значение ее производной в указанных точках (табл. 25).

Таблица 25

x \ y'	$y' = -1$	$y' = 0$	$y' = 0,5$	$y' = 1$	Не существует
$x = -4$					
$x = -2$					
$x = 0$					
$x = 2$					
$x = 4$					

42.11. Дан график движения материальной точки (рис. 42.4). Что происходит со скоростью движения точки в указанные промежутки времени (табл. 26)? (Вопрос относится не к модулю скорости, а к скорости как величине, имеющей знак).

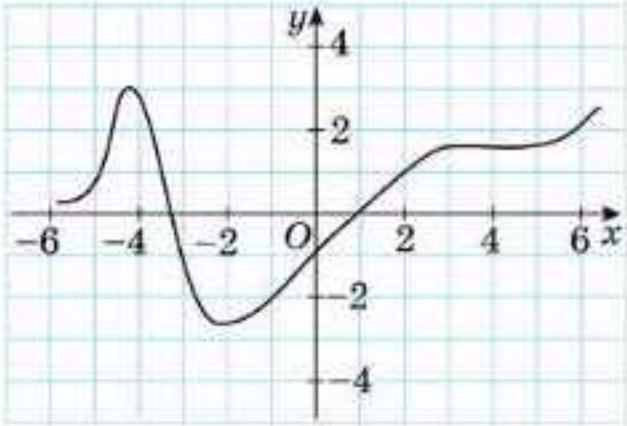


Рис. 42.3

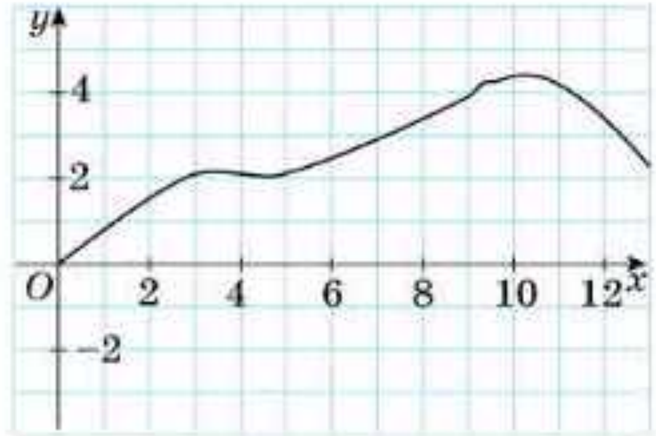


Рис. 42.4

Таблица 26

	$0 < t < 2$	$2 < t < 4$	$4 < t < 6$	$6 < t < 8$	$8 < t < 10$
Скорость равна нулю в течение всего промежутка времени					
Скорость увеличивается					
Скорость постоянна и равна нулю					
Скорость уменьшается					

C

42.12. Найдите координаты точки кривой $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

42.13. Найдите абсциссу точки графика функции $y = x^2 - 3x - 3$, в которой касательная к графику параллельна прямой $y - 2x + 3 = 0$.

42.14. 1) В каких точках графика функции $y = x^3 + x - 3$ касательная к ней параллельна прямой, заданной уравнением $y - 4x - 2 = 0$?
2) Является ли прямая, заданная уравнением $y = 2x - 1$, касательной к графику функции $y = \sqrt{4x-3}$? Если да, то укажите координаты точки касания.

42.15. Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 0{,}25t^2 + 2t - 3$ (длина пути s измеряется в метрах, время x — в секундах). Найдите среднюю скорость движения точки в промежутке от $t = 4$ c до $t = 8$ c и мгновенную скорость при $t = 4$ c и $t = 8$ c.

42.16. При движении тела по прямой расстояние S (в метрах) от начальной точки изменяется по закону $S(t) = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{t}}$ (t — время движения в секундах). Найдите скорость (в метрах в секунду) тела через 4 с после начала движения.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ

42.17. Знак дифференциала dx в 1675 г. ввел Готфрид Вильгельм Лейбниц — немецкий философ, математик, физик, языковед.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716)

ПОВТОРИТЕ

42.18. Постройте график функции:

1) $y = 1 + \sqrt{x + 3}$; 2) $y = 2 - \sqrt{x - 1}$;

3) $y = |1 - \sqrt{x + 3}|$; 4) $y = |\sqrt{x - 1} - 2|$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, график функции, производная функции в точке, правила нахождения производной функции, прямая линия, касательная к графику функции, уравнение прямой, определение tgφ.

§43. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

Вы научитесь составлять уравнение касательной к графику функции в заданной точке.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, график функции, касательная, уравнение касательной

Найдем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, предполагая, что касательная в этой точке существует. Оно имеет вид $y = kx + b$.

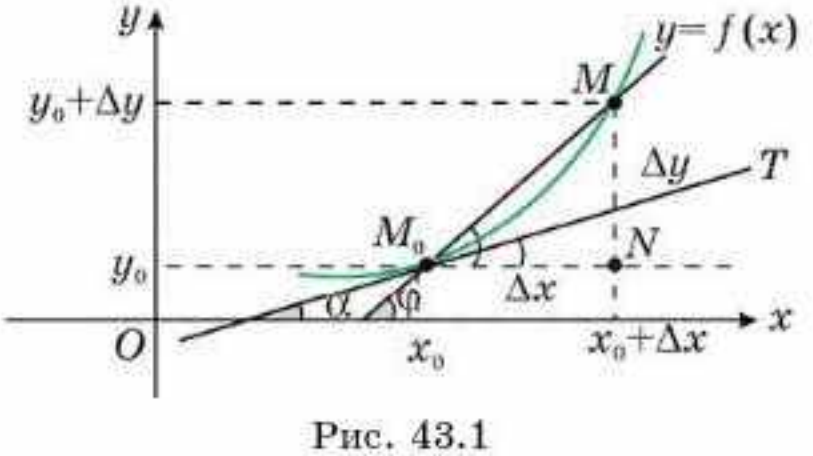


Рис. 43.1

Рассмотрим точку $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$, принадлежащую графику функции $y = f(x)$ (рис. 43.1).

Проведем через точку M_0 секущую M_0M, а через точку M прямые, параллельные осям координат. Получим прямоугольный треугольник M_0NM с катетами $M_0N = \Delta x$ и $NM = \Delta y$.

Пусть секущая M_0M составляет с положительным направлением оси Ox угол φ; тогда $\angle NM_0M = \varphi$. Из прямоугольного треугольника M_0NM получим, что угловой коэффициент секущей

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (1)$$

Действительно, если $M_0(x_0; y_0)$ и $M(x, y)$, то, подставив координаты в уравнение прямой $y = kx + b$, получим систему $\begin{cases} y = kx + b; \\ y_0 = kx_0 + b. \end{cases}$ (2)

Для нахождения коэффициента k вычтем из первого равенства второе. Получим $y - y_0 = k(x - x_0)$. Из полученного равенства следует: $k = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi$.

Если $M \to M_0$, тогда $\Delta x \to 0$ и секущая M_0M стремится к своему предельному положению — касательной M_0T в точке M_0. Обозначим через α угол, образованный касательной M_0T с положительным направлением оси Ox. При $\Delta x \to 0$ угол $\varphi \to \alpha$, если касательная M_0T не перпендикулярна оси Ox, то в силу непрерывности тангенса получим, что $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$. Отсюда, переходя к пределу в равенстве (1), находим угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$ касательной M_0T:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

При решении системы уравнений (2) было получено равенство

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Подставляя $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$ в уравнение прямой $y - y_0 = k(x - x_0)$, получим $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, или $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Используя геометрический смысл производной, дадим наглядное пояснение того, что существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке B с абсциссой, равной b из интервала $(a; c)$, параллельная секущей, проходящей через точки $A_1(a; f(a))$ и $C_1(c; f(c))$.

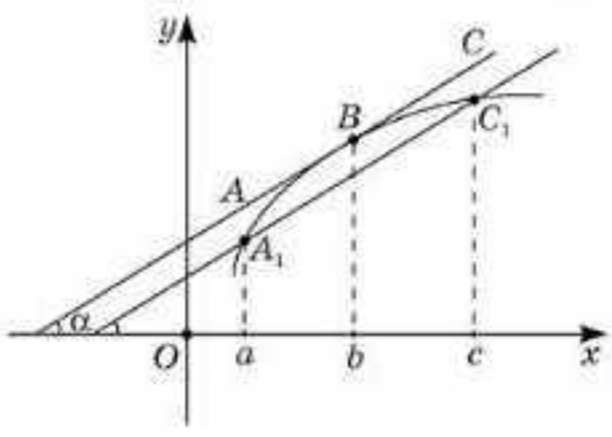


Рис. 43.2

Рассмотрим прямую A_1C_1, параллельную касательной AC, проведенной через точку B графика функц ии $y = f(x)$ (рис. 43.2). Тогда угол α равен углу наклона секущей A_1C_1, т. е. $f'(b) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

Таким образом, если функция дифференцируема на интервале $(a; c)$, то оказывается, найдется точка $b \in (a; c)$, для которой выполняется равенство

$$f'(b) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}. \qquad (4)$$

Формула (4) называется *формулой Лагранжа*.

АЛГОРИТМ

Для того, чтобы написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, используется следующий алгоритм:

1) вычислить значение функции $f(x)$ при x_0;
2) найти производную функции $f(x)$;
3) вычислить значение производной в точке x_0, т. е. найти $f'(x_0)$;
4) найденные значения подставить в уравнение $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ и получить уравнение касательной.

ПРИМЕР

1. Напишем уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x = 1$.

Решение. Вычислим $y(1) = 1$. $y' = 2x$, а значит, $y'(1) = 2$. Подставим эти данные в формулу уравнения касательной. Получим $y = 1 + 2(x - 1)$. Приведем подобные слагаемые, получим уравнение касательной $y = 2x - 1$.

Ответ: $y = 2x - 1$.

ПРИМЕР

2. Запишем уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x = 1$ (рис. 43.3).

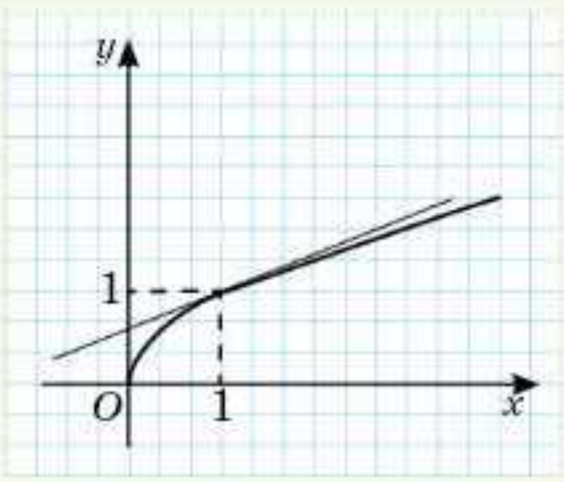


Рис 43.3

Решение.

1. $f(x_0) = f(1) = 1$;

2. $f'(x) = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3. $f'(x_0) = f'(1) = \dfrac{1}{2}$;

4. $y = 1 + \dfrac{1}{2}(x - 1) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Упражнения

A

43.1. Запишите уравнение касательной к функции $y = f(x)$ при $x = x_0$:

1) $y = 2x^2 - 5{,}5$ при $x_0 = -0{,}5$;
2) $y = 0{,}2x^2 - 4$ при $x_0 = 2$;
3) $y = -3x^2 - x$ при $x_0 = -2$;
4) $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$, при $x_0 = 3$.

43.2. Найдите значения x, при которых касательная к графику функции параллельна оси Ox:

1) $y = 2x^2 - 8x$; 2) $y = x^2 + 8x - 5$;
3) $y = 2x^2 - 8x + 5$; 4) $y = x - x^2$.

43.3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точках его пересечения с осью абсцисс:
1) $f(x) = 4 - x^2$; 2) $f(x) = x^2 - 9$;
3) $f(x) = 4x - x^2$; 4) $f(x) = 4x - x^2 - 3$.

43.4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точках его пересечения с осью ординат:
1) $f(x) = 1 - x^2$;
2) $f(x) = x^2 - 3$;
3) $f(x) = 2 + 4x - x^2$;
4) $f(x) = 3x - x^2 - 2$.

43.5. Запишите координаты точек, в которых касательная к графику функции (рис. 43.4):
1) параллельна оси Ox;
2) не существует;
3) составляет с положительным направлением оси Ox угол в 45°.

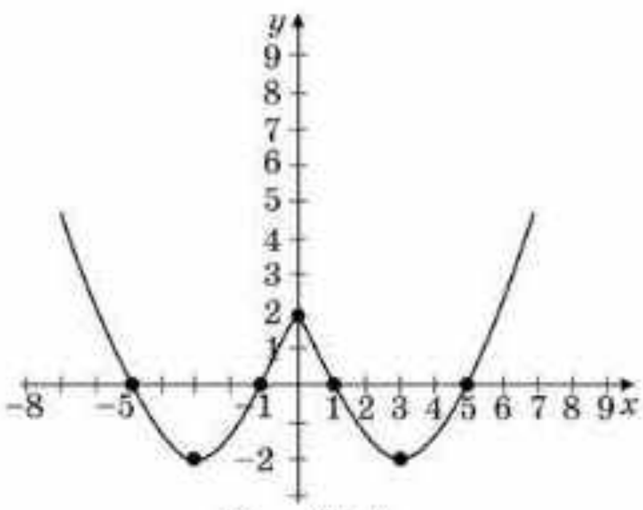


Рис 43.4

43.6. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$:
1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$, $x_0 = -1$;
3) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$, $x_0 = -2$.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 **(43.7—43.8):**

43.7. 1) $y = 3x^2 - 2x - 2$, $x_0 = -1$; 2) $y = 2\sqrt{x} - 10$, $x_0 = 16$;
3) $y = 2x + \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$; 4) $y = x + \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

43.8. 1) $y = 2\sqrt{x} - 2$, $x_0 = 1$; 2) $y = 4\sqrt{x} - 3x$, $x_0 = 4$;
3) $y = 3 - 2\sqrt{x}$, $x_0 = 1$; 4) $y = 8\sqrt{x} - 2x^2$, $x_0 = 4$.

43.9. Напишите уравнения касательных к графику функции:
1) $y = x^2 - 3x$ в точках графика функции с ординатой 4;
2) $y = -x^2 + 5x$ в точках графика функции с ординатой 6.

B

43.10. Найдите координаты точки графика функции $y = x^2$, в которых касательная к графику параллельна заданной прямой:
1) $y = 2x - 1$; 2) $y = 0{,}75x - 2$;
3) $y = -0{,}5x - 6$; 4) $y = -x - 16$.

43.11. Найдите уравнения касательных к графику функции $y = \frac{x^3}{3} - 3$, которые параллельны прямой:
1) $y = 4x - 1$; 2) $y = x + 31$; 3) $y = 9x - 10$.

43.12. Найдите уравнения касательных к графику функции $y = 1 - \frac{1}{x}$, которые параллельны прямой:
1) $y = x + 2$; 2) $y = 4x - 3$; 3) $y = 0,5x - 10$.

43.13. По графику функции (рис. 43.5) найдите точки, в которых:
1) касательная параллельна оси Ox. Запишите ее уравнение;
2) касательная не существует. Запишите координаты этих точек.

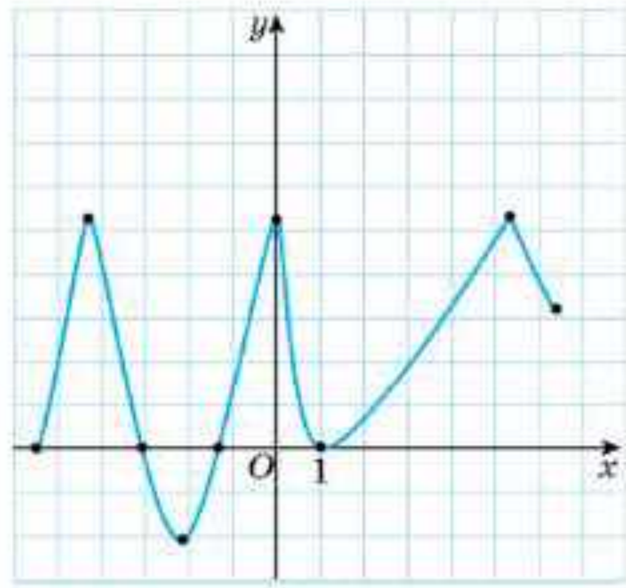


Рис. 43.5

43.14. Составьте уравнения касательных к графику функции $y = x^4 - 2x^2 + 2x - 1$, параллельных прямой $y = 2x - 1$.

43.15. Составьте уравнения касательных к графику функции $y = 3 + 5x - 2x^3$, образующих с положительным направлением оси Ox угол в 135°.

43.16. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 3$ в точке с абсциссой $x = 2$.

43.17. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = 1 - 2\sqrt{x}$, параллельной прямой, заданной уравнением $x + y - 2 = 0$.

C

43.18. 1) Напишите уравнения касательных к графику функции $y = x^2 - 4x + 3$, проходящих через точку $A(2; -5)$, не принадлежащую этому графику.
2) Напишите уравнения касательных к графику функции $y = x^2 - 2x$, проходящих через точку $A(1; -5)$, не принадлежащую этому графику.

***43.19.** На параболе, заданной формулой $y = x^2 - 4$, взяты две точки с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Через эти точки проведена прямая. В какой точке параболы касательная будет параллельна проведенной прямой?

43.20. При каком значении a касательная к параболе $y = ax^2 + x - 3$ в точке $M(1; a - 2)$ параллельна прямой, заданной формулой $y - 2x = 12$?

43.21. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 3)$, касающейся графика функции $y = 8\sqrt{x} - 7$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y = x^2 + 4x - 1$.

43.22. Является ли прямая, заданная формулой $y = 2x - 1$, касательной к графику функции $y = 4\sqrt{x} - 3$?

43.23. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = -x^2 - 7x + 8$, проходящей через точку:
1) $M(1; 1)$; 2) $M(0; 9)$.

ПОВТОРИТЕ

43.24. Найдите предел функции:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x - 5}{x + 3}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{4x}$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 3}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin 2x}{x}$.

43.25. Найдите производную функции:
1) $y = (x - 3) \cdot x^3$; 2) $y = (x^3 - 2x) \cdot \sqrt{2}x$.

43.26. Найдите корни уравнения:
1) $\sin 2x = 1$; 2) $2\cos^2 2x = 1$.

43.27. Найдите область определения функции:
1) $y(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}}$; 2) $y(x) = \sqrt{\frac{1}{x + 5}} + \sqrt{49 - x^2} + \sqrt{\frac{x}{x - 6}}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Определение производной, правила нахождения производных функций, тригонометрические функции, формулы тригонометрии.

§ 44. ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Вы научитесь находить производные тригонометрических функций.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Функция, производная, тригонометрическая функция

Найдем производную тригонометрической функции $y(x) = \sin x$.

Теорема. $(\sin x)' = \cos x$.

Доказательство.
Используя определение производной, получим:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Преобразуем числитель дроби, используя формулу

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Тогда $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin\dfrac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos\dfrac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right).$

Первый предел в данном выражении равен:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = 1$. Поскольку $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$, то для производной синуса получим равенство: $y'(x) = (\sin x)' = \cos x$.

Докажите: $(\cos x)' = -\sin x$.

Найдем производную тригонометрической функции $y(x) = \mathrm{tg}\, x$.

$(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Докажите: $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Запомните!

$(\sin x)' = \cos x;$ $\quad (\cos x)' = -\sin x;$

$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$ $\quad (\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

ПРИМЕР

1. Найдем производную функции $f(x) = x^2 + \sin x$.

Решение. Функция $y = f(x)$ — это сумма двух дифференцируемых функций, поэтому:

$f'(x) = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x.$

Ответ: $f'(x) = 2x + \cos x$.

ПРИМЕР

2. Найдем производную функции $f(x) = x^3 \cdot \cos x$.

Решение. Функция $y = f(x)$ представляет собой произведение двух дифференцируемых функций, поэтому:

$f'(x) = (x^3 \cdot \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\sin x) = x^2 \cdot (3\cos x - x \cdot \sin x).$

Ответ: $f'(x) = x^2 \cdot (3\cos x - x \cdot \sin x)$.

ПРИМЕР

3. Найдем производную функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. $f'(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

Ответ: $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

1. Какое правило нахождения производных использовано для нахождения производной тангенса и котангенса?
2. Производные каких функций надо знать для вывода формул производных тангенса и котангенса?
3. При каких значениях переменной x производные $\mathrm{tg}x$ и $\mathrm{ctg}x$ не существуют?

Упражнения

A

44.1. Найдите производную функции:

1) $f(x) = 2x + \sin x - 3$;
2) $f(x) = \sqrt{x} - \cos x + 2$;
3) $f(x) = \cos x + \sin x - \sqrt{2}$;
4) $f(x) = x^3 - 3\sin x$.

44.2. Найдите значение производной функции в точке x_0:

1) $f(x) = 2\cos x + \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;
2) $f(x) = 2x - \cos x + 3\sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;
3) $f(x) = x^2 - 2\cos x + \sin x$, $x_0 = \dfrac{3\pi}{4}$;
4) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\cos x + 4\sin x$, $x_0 = \dfrac{2\pi}{3}$.

44.3. Найдите производную функции:

1) $f(x) = 2\cos x + 3\mathrm{tg}x$;
2) $f(x) = \sin x + \mathrm{ctg}x$;
3) $f(x) = \cos x - 5\mathrm{tg}x + x^{-3}$;
4) $f(x) = 2\mathrm{tg}x + 3\mathrm{ctg}x + \dfrac{1}{x^3}$.

B

44.4. Найдите значение производной функции в точке x_0:

1) $f(x) = 3\mathrm{ctg}x + 2\sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;
2) $f(x) = x - 2\cos x + 3\mathrm{tg}x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;
3) $f(x) = 2x^2 - 2\mathrm{tg}x + \sin x$, $x_0 = \dfrac{3\pi}{4}$;
4) $f(x) = \dfrac{2}{x} - 2\mathrm{ctg}x + 4\sin x$, $x_0 = \dfrac{2\pi}{3}$.

44.5. Решите неравенство $f'(x) > 0$:

1) $f(x) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$; 2) $f(x) = 2\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2}$;

3) $f(x) = x - \cos x$.

44.6. Решите неравенство $f'(x) \leqslant 0$:

1) $f(x) = 2x - 4\sin x$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

3) $f(x) = \operatorname{ctg} x$; 4) $f(x) = x - 2\cos x$.

44.7. Известна производная функции $y = f'(x)$. Укажите, какой формулой можно задать функцию $y = f(x)$, если:

1) $f'(x) = \cos x + 1$; 2) $f'(x) = 2\cos x + \sin x$;

3) $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}$; 4) $f'(x) = -2\sin x + \frac{1}{\sin^2 x}$.

C

44.8. Найдите производную функции:

1) $f(x) = 2\sin x \cdot \cos x$; 2) $f(x) = 2\sin x\,(\cos x + 1)$;

3) $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{ctg} x$; 4) $f(x) = 2\sin x\,(2x^2 - 1)$;

5) $f(x) = 2\operatorname{tg} x \cdot \cos x$; 6) $f(x) = 2\sin x\,(x + \cos x)$.

44.9. Вычислите значение производной функции в точке x_0:

1) $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$;

2) $f(x) = x^2 - \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = x^2 - \operatorname{ctg} x \cdot \sin x,\ x_0 = \frac{3\pi}{4}$;

4) $f(x) = \frac{2}{x} \cdot \operatorname{ctg} x,\ x_0 = \frac{2\pi}{3}$.

44.10. Найдите скорость изменения функции в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

1) $f(x) = \sin x \cdot (x + 1)$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot (x^2 - 1)$;

3) $f(x) = \sin x \cdot (\operatorname{ctg} x + 3)$.

ПОВТОРИТЕ

44.11. Решите уравнение:

1) $x\,|x| + 7x + 12 = 0$; 2) $x^2 - 5\,|x + 3| + 4 = 0$;

3) $x^2 - 5(\sqrt{x - 2})^2 - 5 = 0$; 4) $|x - 2|x^2 = 10 - 5x$;

5) $\sqrt{x^2 - 2x} = 3x + 1$; 6) $2\sqrt{x^2 - 2x} = x^2 - 2x - 3$;

7) $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = x^2 - 2x - 15$; 8) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = x^2 + 2x - 15$.

44.12. Найдите предел функции:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 3}{x - 2}$; 2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 4x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+11}-\sqrt{x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2\,\mathrm{tg}x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 3x}{\sin 2x}$.

44.13. Исследуйте функцию на непрерывность и постройте ее график:

1) $f(x)=\begin{cases} x+3,\ x\leqslant 0,\\ x^2-1,\ 0<x\leqslant 3,\\ 8,\ x>3;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} 3-x,\ x\leqslant 1,\\ x^2+1,\ 1<x\leqslant 2,\\ 5,\ x>2;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2,\ x\leqslant 0,\\ 2x+1,\ 0<x\leqslant 2,\\ 5,\ x>2.\end{cases}$

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, сложная функция, производная функции, правила и формулы нахождения производных, тригонометрические функции, производные тригонометрических функций, обратные тригонометрические функции.

§ 45. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНЫЕ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Вы ознакомитесь с формулами нахождения производной сложной функции, обратных тригонометрических функций;
научитесь находить производную сложной функции, обратных тригонометрических функций.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Сложная функция, обратная тригонометрическая функция, производная

Пусть $y = f(g(x))$ — сложная функция, причем функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x, функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке u. Тогда функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x, причем $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Запись $f'(g(x))$ означает, что производная вычисляется по формуле для функции $y = f(x)$, но вместо x подставляется $g(x)$.

Формулу для нахождения производной сложной функции кратко можно записать так:

$$f'(x) = f'(t) \cdot t', \text{ где } x \text{ заменяется на } t(x).$$

Доказательство. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f\Delta t}{\Delta x\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta t}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta t}{\Delta x}=$
$=f'(t)\cdot t'$.

ПРИМЕР

1. Найдем производную функции $y(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

Решение. $y'(x) = \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)' = \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' - \left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)'$.

Поскольку $(\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, то, применяя правило производной для сложной функции, найдем:

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' - \left(-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Воспользуемся для упрощения тригонометрическими формулами: $\sin^2x + \cos^2x = 1$ и $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Получим:

$$y'(x) = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot 1}{4\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{\left(2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sin^2 x}.$$

Ответ: $\frac{2}{\sin^2 x}$.

ПРИМЕР

2. Вычислим производную функции $y(x) = \sin^2\sqrt{x}$.

Решение. Применим правило производной сложной функции несколько раз: сначала найдем производную функции $y = t^2$, где $t = \sin\sqrt{x}$; затем функции $t = \sin g$, где $g = \sqrt{x}$. Получим:

$y'(x) = (\sin^2\sqrt{x})' = 2\sin\sqrt{x} \cdot (\sin\sqrt{x})' = 2\sin\sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = 2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Далее, используя формулу двойного угла $\sin 2\sqrt{x} = 2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$, получим:

$y'(x) = \sin 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

Ответ: $\frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

ПРИМЕР

3. Продифференцируем функцию $y(x) = \sin^3x + \cos^3x$.

Решение. Используем формулы для производной суммы функций и производной степенной функции с натуральным показателем.

$y'(x) = (\sin^3x + \cos^3x)' = (\sin^3x)' + (\cos^3x)' = 3\sin^2x \cdot (\sin x)' + 3\cos^2x \cdot (\cos x)'$.

После подстановки производных и упрощения получим: $y'(x) = 3\sin^2x \cdot \cos x + 3\cos^2x \cdot (-\sin x) = 3\sin^2x\cos x - 3\cos^2\sin x = 3\sin x\cos x\,(\sin x - \cos x)$.

Поскольку $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, то получим: $y'(x) = 3\frac{\sin 2x}{2}(\sin x - \cos x) = \frac{3}{2}\sin 2x\,(\sin x - \cos x)$.

Ответ: $\frac{3}{2}\sin 2x\,(\sin x - \cos x)$.

ПРИМЕР

4. Выведем формулу для производной арксинуса.

Решение. Функция $y(x) = \arcsin x$ определена на промежутке $[-1; 1]$. Синус от арксинуса равен $\sin(\arcsin x) = x$.

Возьмем производную от обеих частей (левую часть дифференцируем как сложную функцию):

$$(\sin(\arcsin x))' = (x)',\ \cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1.$$

Отсюда следует, что производная арксинуса равна $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - [\sin(\arcsin x)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, где $-1 < x < 1$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Докажите: $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $-1 < x < 1$; $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$; $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$, $(-\infty < x < +\infty)$.

Запомните!

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $-1 < x < 1$; $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $-1 < x < 1$;

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}$, $-\infty < x < +\infty$; $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$, $-\infty < x < +\infty$

1. Приведите пример сложной функции.
2. В каких случаях можно использовать формулу для нахождения производной сложной функции?
3. При каких значениях аргумента x существует производная функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$?

Упражнения

А

Найдите производные сложных функций **(45.1—45.4)**:

45.1. 1) $f(x) = \sin 3x$; 2) $f(x) = \cos(1 - 2x)$;
3) $f(x) = \mathrm{tg}\, 5x$; 4) $f(x) = \mathrm{ctg}(x - 2)$;
5) $f(x) = \sin(3 - 2x)$; 6) $f(x) = \mathrm{ctg}(5 - 3x)$.

45.2. 1) $f(x) = (3x - 1)^2$; 2) $f(x) = (1 - 2x)^3$;
3) $f(x) = (2 - 3x)^{-3}$; 4) $f(x) = 2 - (1 + 2x)^{-4}$;
5) $f(x) = 5x + (1 - 3x)^{-2}$; 6) $f(x) = x^2 + (1 + 5x)^{-2}$.

45.3. 1) $f(x) = \sqrt{2x - 5}$; 2) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$;
3) $f(x) = \sqrt{2 - 5x}$; 4) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x}$;
5) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x + 1}$; 6) $f(x) = \sqrt{2 - 3x^2 + 5x}$.

45.4. 1) $f(x) = (5x^2 + 7)^6$; 2) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;
3) $f(x) = \dfrac{5}{1 - 2x}$; 4) $f(x) = \dfrac{2}{(2x + 3)^4}$.

B

45.5. Из функций $f(x)$ и $g(x)$ составьте сложные функции $f(g(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$:
1) $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{3x - 2}$;
2) $f(x) = 3 - 2x^3$, $g(x) = \dfrac{1}{x - 2}$;
3) $f(x) = \dfrac{2x}{3x - 1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$;
4) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$;
5) $f(x) = \sin 3x + 5x$, $g(x) = x^2 - 1$;
6) $f(x) = \cos 5x - 6$, $g(x) = \mathrm{tg}\, 7x$.

45.6. Найдите производную функции:
1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x}{3x + 2}}$; 2) $f(x) = (x^2 - 3)\sqrt{3x - 1}$;
3) $f(x) = 3x \cdot \left(\dfrac{1}{4}x - 5x^3\right)^2$; 4) $f(x) = \left(\sqrt{2x - 3} - x\right)^4$.

45.7. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1$:
1) $f(x) = \left(\dfrac{2}{x^3} + x^3\right)^5$; 2) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} - x^4\right)^{10}$;
3) $f(x) = (5x^2 - 3x)^4$; 4) $f(x) = (5x^5 - 4x^4)^{23}$.

45.8. Дана функция $f(x) = \dfrac{(2x - 1)^8}{(x + 1)^5}$. Решите неравенство:
1) $f'(x) > 0$; 2) $f'(x) \geqslant 0$; 3) $f'(x) < 0$; 4) $f'(x) \leqslant 0$.

45.9. Пусть $f(x) = \dfrac{(5x + 4)^{13}}{(x - 3)^6}$. Решите неравенство:
1) $f'(x) > 0$; 2) $f'(x) \geqslant 0$; 3) $f'(x) < 0$; 4) $f'(x) \leqslant 0$.

C

45.10. Найдите производную функции:
1) $f(x) = \sin^2 3x$; 2) $f(x) = \cos^4 2x$;
3) $f(x) = \mathrm{tg}^{-5}(-x)$; 4) $f(x) = \mathrm{ctg}^{-3}(1 - x)$;
5) $f(x) = \arcsin 2x$; 6) $f(x) = \arccos 5x$;
7) $f(x) = \mathrm{arctg}\, 3x$; 8) $f(x) = x^2 - \arccos 2x$.

45.11. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = 2\sin^2 x + \sqrt{3}$, $x_0 = \frac{3\pi}{4}$; 2) $f(x) = \cos^2 x - 1$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$;

3) $f(x) = \cos 3x + 1$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$; 4) $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$, $x_0 = \frac{5\pi}{6}$;

5) $f(x) = \arccos 3x$, $x_0 = \frac{1}{4}$; 6) $f(x) = \arcsin^2 x$, $x_0 = \frac{1}{2}$.

45.12. Решите неравенство $f'(x) \geqslant 0$:

1) $f(x) = \frac{1}{3}\cos 3x + x$; 2) $f(x) = 2\sin\frac{1}{2}x - \sqrt{3}\,x$;

3) $f(x) = 3\cos^2 x + 2\sin^2 x - x$; 4) $f(x) = \sin^2 3x - \frac{1}{12}\cos 6x + 5x$;

5) $f(x) = \arccos 3x + 2x + 3$; 6) $f(x) = \mathrm{arcctg}\, 2x + 2x - 1$.

45.13. Пользуясь правилами и формулами дифференцирования, для функции $f(x)$ найдите производную первого порядка:

1) $f(x) = 2\arccos 4x + 2\sqrt{3}$; 2) $f(x) = \mathrm{arcctg}\, 4x + 2x - 7$;

3) $f(x) = \sin^2 3x + \frac{1}{6}\cos 6x - x$; 4) $f(x) = \sin^4 3x + 4x$;

5) $f(x) = \cos^5 2x - 4\sqrt{5}\,x$; 6) $f(x) = \frac{x+3}{x-5} - 2x + \pi x$.

45.14. Найдите значение производной функции в точке:

1) $f(x) = \arcsin^2 x + x$, $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $f(x) = \mathrm{arctg}^2 x + \sqrt{3}$, $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

3) $f(x) = x - 2\arccos^2 x$, $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $f(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{arcctg}^2 x$, $x_0 = 1$.

ПОВТОРИТЕ

45.15. Найдите значения a и b, при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, x \geqslant 0, \\ x^3 + ax + b, x < 0: \end{cases}$$

1) непрерывна в точке $x_0 = 0$;

2) дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

45.16. Найдите, при каких значениях a и b функция

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, x < 0, \\ x^3 + ax + b, x \geqslant 0: \end{cases}$$

1) непрерывна в точке $x_0 = 0$;
2) дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

45.17. Решите уравнение:

1) $\sin 2x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$;
2) $2\cos 2x + 2\operatorname{tg}^2 x = 5$;
3) $2\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) - \cos x = 0$;
4) $\frac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$;
5) $\frac{4\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} + \sin^2 2x + 1 = 0$;
6) $1 + \cos x = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1$.

45.18. Решите уравнение разложением на множители:

1) $\cos(2(x + 60^\circ)) + 4\sin(x + 60^\circ) = 2{,}5$;
2) $2\cos^2(2x + 60^\circ) - 3\sin^2(x + 30^\circ) = 2$;
3) $9\operatorname{ctg}^2 x + 4\sin^2 x = 6$;
4) $8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1$;
5) $8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7$;
6) $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, непрерывность функции в точке и на множестве, производная функции, правила и формулы нахождения производных, физический смысл первой производной функции.

§ 46. ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Вы ознакомитесь с понятием *вторая производная* и ее физическим смыслом, научитесь находить вторую производную функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, производная, вторая производная, физический смысл

Рассмотрим дифференцируемую функцию $y = f(x)$ на некотором интервале $(a; b)$. Тогда ее производная $f'(x)$ на этом интервале является функцией x. Если эта функция также имеет производную на (a, b), то эта производная называется *второй производной, или производной второго порядка функции* $y = f(x)$. При этом $f'(x)$ называется *первой производной*, или *производной первого порядка функции* $f(x)$.

Определение. ***Второй производной функции*** $y = f(x)$ *называется производная от производной* $f'(x)$.

Обозначение: y'' или $f''(x)$.

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Например, $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$; $(x^4)'' = (4x^3)' = 12x^2$.

ПРИМЕР

1. Найдем значение производной второго порядка для функции $f(x) = x^3 - 2x$ в точке $x_0 = -1$.

Решение. $f''(x) = (x^3 - 2x)'' = (3x^2 - 2)' = 6x$.

Тогда $f''(x_0) = 6x_0 = 6 \cdot (-1) = -6$.

Ответ: -6.

Выясним физический (механический) смысл второй производной функции.

Пусть материальная точка движется прямолинейно равномерно по закону $s = f(t)$, где t — время, $f(t)$ — длина пути, пройденного за время t. Из физики известно, что скорость изменения скорости движения точки есть ускорение движения материальной точки. Значит, ускорение точки в момент времени t равно производной скорости по t.

Физический смысл второй производной

Ускорение $a(t) = v'(t) = s''(t)$ равно второй производной длины пути по времени.

ПРИМЕР

2. Найдем скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону $s = 2\sin\frac{\pi t}{3}$ в момент времени $t = 1$.

Решение. Найдем скорость $v(t)$. Поскольку $v(t) = s'(t)$, то $v(t) = \left(2\sin\frac{\pi t}{3}\right)' = \frac{2\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi t}{3}$, тогда $v(1) = \frac{2\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Найдем ускорение $a(t)$. Поскольку $a(t) = v'(t) = \left(\frac{2\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi t}{3}\right)' = -\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi t}{3} = -\frac{2\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3}$, тогда $a(1) = -\frac{2\pi^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}$.

1. Для каких функций существует вторая производная?
2. Что собой представляет вторая производная длины пути по времени при прямолинейном и равномерном движении?

Упражнения

А

46.1. Найдите производные первого и второго порядка для функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x + 1$;
2) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 7$;
3) $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 2x$.

46.2. Найдите значение производной второго порядка для функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = x^4 - x^3 - x$, $x_0 = 2$;
3) $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $x_0 = -1$; 4) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, $x_0 = 4$.

46.3. Точка движется по закону $x(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 1$ (где t — время в секундах, $x(t)$ — координата точки в метрах). Найдите:
1) скорость движения точки в момент времени $t = 3$ с;
2) ускорение движения точки в момент времени $t = 3$ с.

46.4. Найдите $f''(1)$, если:

1) $f(x) = \sqrt{5 - x}$; 2) $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$;

3) $f(x) = \sqrt{2x + 3}$; 4) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$.

Найдите $f''(x)$ (**46.5—46.8**):

46.5. 1) $f(x) = \sin x$; 2) $f(x) = \mathrm{tg}x$; 3) $f(x) = \sin 2x$;
4) $f(x) = \sin^2 x$; 5) $f(x) = \cos 2x$; 6) $f(x) = \cos^2 x$.

46.6. 1) $f(x) = \sqrt{x}$; 2) $f(x) = \sqrt{2x}$; 3) $f(x) = \sqrt{-x}$;
4) $f(x) = x\sqrt{x}$; 5) $f(x) = x - \sqrt{x}$; 6) $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x}$.

46.7. 1) $f(x) = x\sin x$; 2) $f(x) = x\sin 2x$; 3) $f(x) = (2x - 1)\sin x$;
4) $f(x) = x\cos x$; 5) $f(x) = x\cos 3x$; 6) $f(x) = 3x^2 - \cos(x^2 + 1)$.

46.8. 1) $f(x) = \sin^2 2x$; 2) $f(x) = x^2\sin 2x$;
3) $f(x) = (x^2 - 1)\sin x$; 4) $f(x) = x\cos 2x$;
5) $f(x) = (x + 1)^2\cos 2x$; 6) $f(x) = x\cos(x^2 + 1)$.

46.9. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \cos 3t$ (где t — время в секундах, $x(t)$ — координата точки в метрах). Найдите формулу ускорения движения точки в момент времени t.

B

46.10. Постройте схематический график $f''(x)$, если:

1) $f(x) = 0{,}6\, x^3$; 2) $f(x) = x \cdot (2x^2 - 1)$;

3) $f(x) = \frac{1}{4}\sin^2 x$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}$.

46.11. Найдите производную второго порядка от функции:
1) $f(x) = \mathrm{arctg}x$;
2) $f(x) = x \cdot \mathrm{arctg}x$.

46.12. Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{4t + 3}{t + 4}$ (где t — время в секундах, $s(t)$ — измеряется в метрах). Найдите ускорение движения точки в момент времени $t = 6$ с.

46.13. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t)$, (где t — время в секундах, $s(t)$ — измеряется в метрах). Найдите скорость и ускорение движения точки в момент времени t_0:

1) $s(t) = t^3 - 2t^2 - t$, $t_0 = 2c$; 2) $s(t) = \dfrac{2t+1}{t+3}$, $t_0 = 7c$.

C

46.14. Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону $h(t) = 9t - 2t^2$. Найдите начальную скорость и ускорение тела ($t = 0$) и максимальную высоту подъема, при которой скорость $v(t) = 0$.

46.15. Найдите производную второго порядка:

1) $f(x) = \frac{1}{4}(3 - x) \cdot x^2 - 3x$; 2) $f(x) = \frac{x}{9} \cdot \sin 3x$.

46.16. Проверьте, что функция:

1) $y = \sin 3x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 3\cos 3x + 9\sin 3x = y'$;
2) $y = x\sin x$ удовлетворяет уравнению $y'' + y - 2\cos x = 0$.

46.17. Найдите значение производной второго порядка функции:

1) $f(x) = (x^2 + 1)(x + 1) + 2x$, $x_0 = 2$;
2) $f(x) = (x^2 + 2)(x - 1) + 2x^2$, $x_0 = 2$.

46.18. Для функции $y = f(x)$ найдите вторую производную и постройте график $y = f''(x)$:

1) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - 2x^2$;

2) $f(x) = (x^2 + 2) \cdot (x - 1) + \frac{5}{12}x^4$.

ПОВТОРИТЕ

46.19. Найдите предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 + 2x^2 - 5}{5x - x^3 + 3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x - 1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$.

46.20. Даны функции $f(x) = x \cdot \sin x$ и $g(x) = 2x^2$. Запишите формулу функции:

1) $g(f(x))$; 2) $f(f(x))$; 3) $f(g(x))$.

46.21. Решите неравенство $f'(x) < 0$:

1) $f(x) = x^3 - 3x$; 2) $f(x) = x^2 - x^3$;
3) $f(x) = \sin 2x - x$; 4) $f(x) = -4\cos x + 2x$.

46.22. Найдите множество значений функции:

1) $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$; 2) $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$;
3) $f(x) = 3\sin 2x + 4\cos 2x$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Дана функция $f(x) = x\cos 2x$. Тогда $f'(x)$ равна:
A) $2x\cos 2x\sin x$; B) $\cos 2x - 2x\sin 2x$;
C) $-2\cos x\sin x$; D) $1 - \cos 2x\sin x$.

2. Если $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, то $f'(2)$ равна:
A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; C) $\frac{2}{3}$; D) $2\sqrt{5}$.

3. Дана функция $f(x) = 4 - (2x^2 - 3)^3$. Тогда $f'(x)$ равна:
A) $1 - 12x(2x^2 - 3)^2$; B) $-12x(2x^2 - 3)$;
C) $(3 - 4x)^2$; D) $-12x(2x^2 - 3)^2$.

4. Дана функция $f(x) = \sin^2(3x + 2)$. Тогда $f'(x)$ равна:
A) $2\cos(6x + 4)$; B) $\sin(6x + 4)$;
C) $3\sin(6x + 4)$; D) $2\sin(6x + 4)$.

5. Для функции $f(x) = 5x + \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$ найдите $f'(1)$:
A) 7; B) 3; C) 4; D) 5.

6. Приближенное значение выражения $\sqrt{102}$, найденное с помощью дифференциала, равно:
A) ≈10,2; B) ≈10,03; C) ≈10,15; D) ≈10,1.

7. Тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = 3 - x^2 + x^3$ в точке $x_0 = 2$, равен:
A) −12; B) 16; C) 6; D) 8.

8. Дана функция $f(x) = 2\arcsin x^2$. Тогда $f'(x)$ равна:
A) $-\frac{2x^2}{\sqrt{1 - x^4}}$; B) $-\frac{2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$; C) $-\frac{2}{\sqrt{1 - x^4}}$; D) $\frac{4x}{\sqrt{1 - x^4}}$;

9. Если уравнение кривой имеет вид $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\frac{5}{6}$, то уравнение касательной к графику кривой в точке (1; 1) имеет вид:
A) $y = 4x - 3$; B) $y = 4x - 2$; C) $y = 4x + 1$; D) $y = 4x + 6$.

10. Если материальная точка движется прямолинейно по закону $S = \frac{2}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 5t + 10$, то ее скорость равна нулю в моменты времени:
A) $t = 1$ с; B) $t_1 = 2$ с; $t_2 = 3$ с;
C) $t_1 = 1$ с; $t_2 = 2{,}5$ с; D) $t = 2$ с.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Прямая линия, уравнение прямой, функция, график функции, окрестность точки, предел функции в точке и на бесконечности.

9 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

§47. ПРИЗНАКИ ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ ФУНКЦИИ

Вы ознакомитесь с необходимым и достаточным условиями возрастания (убывания) функции на интервале; научитесь их применять.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, промежутки возрастания, промежутки убывания

ВЫ ЗНАЕТЕ: Геометрическим изображением функции является ее график, а график — это кривая, состоящая из множества точек на координатной плоскости. Используя определения возрастающей и убывающей функций, можно найти промежутки возрастания и убывания функции по ее графику.

В этом параграфе рассмотрим нахождение промежутков возрастания и убывания функции с помощью производной. Для этого введем достаточные условия нахождения промежутков возрастания и убывания функции.

Теорема. *Если для дифференцируемой функции $y = f(x)$ в каждой точке промежутка X производная функции $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то на данном промежутке X функция $y = f(x)$ возрастает (убывает).*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке X. Возьмем любые точки x_1 и x_2 из промежутка X, причем $x_1 < x_2$. Тогда по формуле Лагранжа

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(a) \qquad (1)$$

найдется число a из промежутка $(x_1; x_2)$, для которого выполняется равенство (1). Из принадлежности точек x_1 и x_2 промежутку X следует, что число a принадлежит этому промежутку.

Если для любого x из промежутка X выполняется условие $f'(x) > 0$, тогда $f'(a) > 0$. По предположению $x_1 < x_2$, поэтому $x_2 - x_1 > 0$. Из равенства (1) следует, что $f(x_2) - f(x_1) > 0$, или $f(x_1) < f(x_2)$. Следовательно, по определению возрастающей функции — $y = f(x)$ возрастающая функция.

Если для любого x из промежутка X выполняется условие $f'(x) < 0$, тогда $f'(a) < 0$. По предположению $x_2 - x_1 > 0$, поэтому из равенства (1) следует, что $f(x_2) - f(x_1) < 0$, или $f(x_1) > f(x_2)$. Следовательно, по определению убывающей функции — $y = f(x)$ убывающая функция.

Таким образом, с помощью производной для любой дифференцируемой функции можно найти промежутки возрастания и убывания.

АЛГОРИТМ Для нахождения промежутков возрастания и убывания функции $y = f(x)$ используется следующий алгоритм:

1) найти область определения функции;

2) найти производную функции $y = f(x)$;

3) решить неравенство $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$;

4) используя утверждение теоремы, найти промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$.

Примечание:

1) если функция $y = f(x)$ непрерывна на концах промежутка, то эти точки входят в данный промежуток;

2) для решения неравенств $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ удобно пользоваться обобщением метода интервалов (теоремой Дарбу): точки, в которых производная равна 0 или не существует, разбивают область определения функции $y = f(x)$ на промежутки, в каждом из которых $f'(x)$ сохраняет постоянный знак (этот факт доказывается в курсах математического анализа). Знак можно найти, вычислив значение производной функции $y = f(x)$ в какой-нибудь точке промежутка.

Рассмотрим примеры на нахождение промежутков возрастания и убывания функции с помощью производной.

ПРИМЕР **1.** Найдем промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 4x^2 - 24x$.

Решение. Для нахождения промежутков возрастания и убывания функции используем алгоритм:

1) областью определения функции является множество всех действительных чисел;

2) найдем производную функции $f'(x) = (4x^2 - 24x)' = 8x - 24$;

3) решим неравенство $f'(x) > 0$, т. е. $8x - 24 > 0$, или $x > 3$;

4) при $x > 3$ получим $f'(x) > 0$, тогда по теореме функция на промежутке $[3; +\infty)$ возрастает; при $x < 3$ получим $f'(x) < 0$, тогда по теореме функция на промежутке $(-\infty; 3]$ убывает.

Ответ: функция на промежутке $[3; +\infty)$ возрастает; на промежутке $(-\infty; 3]$ убывает.

ПРИМЕР **2.** Найдем промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = -2x^3 + 6x + 5$.

Решение. Для нахождения промежутков возрастания и убывания функции используем алгоритм:

1) областью определения функции является множество всех действительных чисел;

2) найдем производную функции $f'(x) = (-2x^3 + 6x + 5)' = -6x^2 + 6$;

3) решим неравенство $f'(x) > 0$, т. е. $-6x^2 + 6 > 0$. Полученное неравенство решим методом интервалов. Тогда $6x^2 - 6 = 0$, отсюда $x = \pm 1$. Разобьем числовую прямую на три интервала и найдем знак производной на каждом из интервалов;

4) тогда по теореме функция на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ убывает; на промежутке $[-1; 1]$ возрастает.

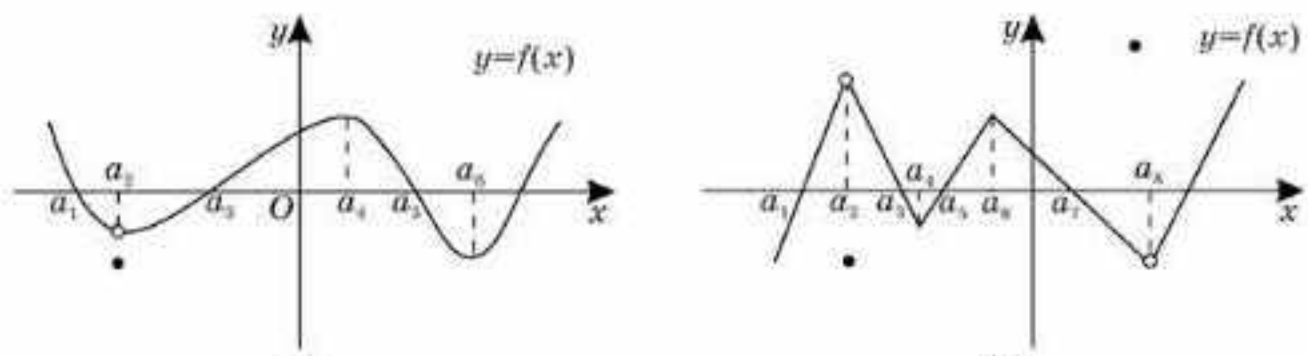
Ответ: функция на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ убывает; на промежутке $[-1; 1]$ возрастает.

1. По какому признаку можно установить, является функция возрастающей или убывающей?
2. Для каких функций всегда можно найти промежутки их возрастания и убывания?

Упражнения

А

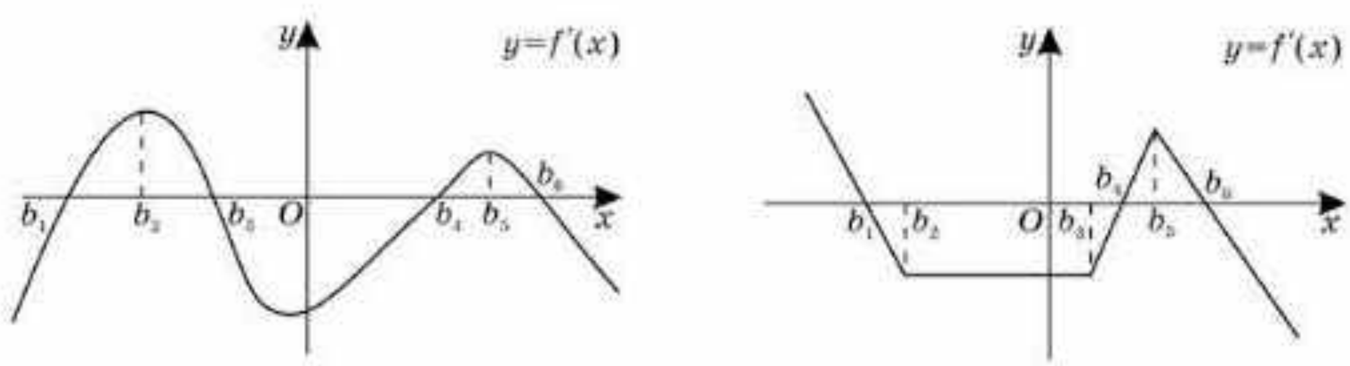
47.1. На рисунке 47.1 изображен график функции $y = f(x)$. По графику найдите промежутки, в которых производная функции:
1) положительная; 2) отрицательная.



а) б)

Рис. 47.1

47.2. На рисунке 47.2 изображен график функции $y = f'(x)$. С помощью графика найдите промежутки:
1) возрастания; 2) убывания; 3) знакопостоянства.



а) б)

Рис. 47.2

Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$ **(47.3 — 47.5)**:

47.3. 1) $f(x) = 7x + 1$; 2) $f(x) = 3 + 8x$;
3) $f(x) = -2x - 13$; 4) $f(x) = 10 - 4x$.

47.4. 1) $f(x) = x^2 - 3x$; 2) $f(x) = 5x + x^2$;
3) $f(x) = 8 - x^3$; 4) $f(x) = x^3 + 1$.

47.5. 1) $f(x) = x^2 - 4$; 2) $f(x) = -1 + x^2$;
3) $f(x) = -27 + x^3$; 4) $f(x) = -x^3 + 1$.

47.6. Докажите, что в области определения является возрастающей функция:
1) $f(x) = 14 + 5x$; 2) $f(x) = 4 + x^5$;
3) $f(x) = -\frac{3}{x}$; 4) $f(x) = -\frac{6}{x} + 9$.

47.7. Докажите, что в области определения является убывающей функция:
1) $f(x) = -2x + 8$; 2) $f(x) = 4 - x^3$;
3) $f(x) = \frac{10}{x}$; 4) $f(x) = \frac{5}{x} - 11$.

47.8. Найдите промежутки возрастания функции $y = f(x)$:
1) $f(x) = x^2 - 0,49$; 2) $f(x) = -0,64 + x^2$;
3) $f(x) = -0,027 + x^3$.

47.9. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$:
1) $f(x) = x^2 + 0,5x$; 2) $f(x) = 0,4x - x^2$;
3) $f(x) = -0,64x + x^3$.

B

47.10. Изобразите эскиз графика производной функции $y = f(x)$, если известно, что функция $f(x)$:
1) возрастает на интервале $(-\infty; -4]$ и убывает на интервале $[-4; +\infty)$;
2) убывает на интервале $(-\infty; -0,5]$ и возрастает на интервале $[-0,5; +\infty)$.

47.11. Изобразите эскиз графика производной функции $y = f(x)$, если известно, что функция $f(x)$:
1) возрастает на интервалах $(-\infty; 2]$ и $[5,5; +\infty)$ и убывает на интервале $[2; 5,5]$;
2) убывает на интервалах $(-\infty; -3]$ и $[6; +\infty)$ и возрастает на интервале $[-3; 6]$.

47.12. Докажите, что в области определения является возрастающей функция:
1) $f(x) = 5x + \cos x$; 2) $f(x) = x + \sin x$; 3) $f(x) = 2x + \cos x$.

47.13. Докажите, что в области определения является убывающей функция:
1) $f(x) = -3x + \cos x$; 2) $f(x) = \sin x - 4x$; 3) $f(x) = -3x + \cos 2x$.

Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$ **(47.14—47.17)**:

47.14. 1) $f(x) = x^2 - 8x + 12$; 2) $f(x) = -x^2 - 8x + 9$;
3) $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$; 4) $f(x) = -2x^2 + 7x - 5$.

47.15. 1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 8x^2 - 10$; 2) $f(x) = x^3 + 3x - 20$;

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2{,}5x^2 + 7x + 1$; 4) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 13$.

47.16. 1) $f(x) = \frac{5}{x-9} - 1$; 2) $f(x) = 2 - \frac{3}{x+4}$;

3) $f(x) = 3 - \frac{2}{x-2}$.

47.17. 1) $f(x) = -\frac{2+x}{x+3} + 4x$; 2) $f(x) = 6x - \frac{1-x}{2x+7}$;

3) $f(x) = 2x - \frac{x+3}{x-2}$.

C

47.18. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:
1) $y = x^4 - 3x^2 - 4$; 2) $y = x^4 - 6x^2 + 8$;
3) $y = 125x^5 - x$; 4) $y = -0{,}2x^5 + x$.

Исследуйте на монотонность функции **(47.19–47.20)**:

47.19. 1) $y = \sqrt{2+3x}$; 2) $y = \sqrt{4x-1}$;

3) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$; 4) $y = \frac{1}{-2x^2 + 5x - 3}$.

47.20. 1) $y = x - \sin 2x$; 2) $y = 2x + \sin x$;
3) $y = x - \cos 2x$; 4) $y = 3x - \cos x$.

ПОВТОРИТЕ

47.21. Упростите выражение:

1) $\sqrt{1200} - 20\sqrt{2{,}43} + 4{,}5\sqrt{0{,}48}$; 2) $\sqrt{\frac{20}{81}} - \frac{2}{9}\sqrt{\frac{45}{49}} - \frac{11}{20}\sqrt{\frac{80}{121}}$.

47.22. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x^3(2+x)} + \frac{8}{x+2}$; 2) $\frac{7}{\sqrt{36x - x^3}} - \sqrt{x^2 - 16}$?

47.23. Решите неравенство $f'(x) < 0$:

1) $f(x) = 12x - x^3$; 2) $f(x) = \sqrt{3}\,x - 2\cos\frac{x}{2}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения, график функции, нули функции, правила и формулы нахождения производной, признаки возрастания и убывания функции.

§48. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ И ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА

Вы ознакомитесь с понятиями: *критические точки и точки экстремума функции;* условием существования экстремума функции;
научитесь находить критические точки и точки экстремума функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Точка минимума, точка максимума, критическая точка

Определение. *Точка x_0 из области определения функции $y = f(x)$ называется* ***точкой минимума (максимума)*** *этой функции, если найдется такая δ — окрестность* $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$.

Определение. *Точки максимума и минимума функции называются* ***точками экстремума****, а значения функции в этих точках — ее* ***экстремумами*** .

Имеет место необходимое условие экстремума.

Теорема (Ферма). *Если x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$, то $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.*

Доказательство. Возможны четыре случая:

1) $f'(x_0) > 0$; 2) $f'(x_0) < 0$; 3) $f'(x_0) = 0$; 4) $f'(x_0)$ не существует.

Докажем, что первый и второй случаи невозможны.

Пусть $f'(x_0) > 0$. Тогда $f(x) < f(x_0)$ слева от x_0 и $f(x) > f(x_0)$ справа от x_0. Это противоречит определению экстремума. Невозможность второго случая доказывается аналогично.

Определение. *Точки x_0, в которых производная $f(x_0)$ равна нулю или не существует, называются* ***критическими точками.***

Определение. ***Стационарной точкой*** *называется такая точка x_0, в которой производная равна нулю:* $f'(x_0) = 0$.

Примечание.

1) Сама функция в критической точке определена.

2) Экстремумы функции следует искать среди ее критических точек. Теорема Ферма формулирует лишь необходимое условие экстремума.

ПРИМЕР

1. Производная функции $f(x) = x^3$ обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке функция не имеет (рис. 48.1).

Достаточные условия существования экстремума в точке.

Признак максимума функции

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции (рис. 48.2).

Признак минимума функции

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции (рис. 48.3).

Первое достаточное условие. Пусть x_o — критическая точка. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_o меняет знак плюс на минус, то в точке x_o функция имеет максимум, в противном случае — минимум. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в точке x_0 экстремума нет.

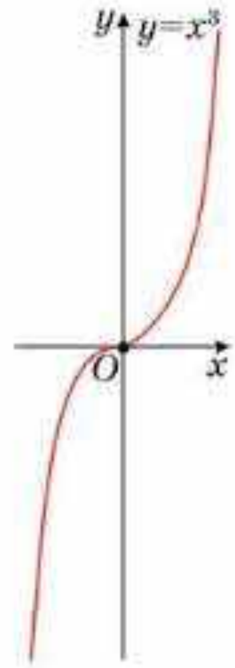


Рис. 48.1

$f'(x)$

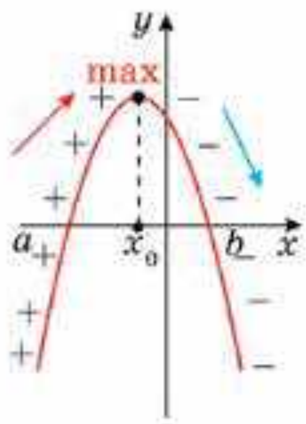


Рис. 48.2

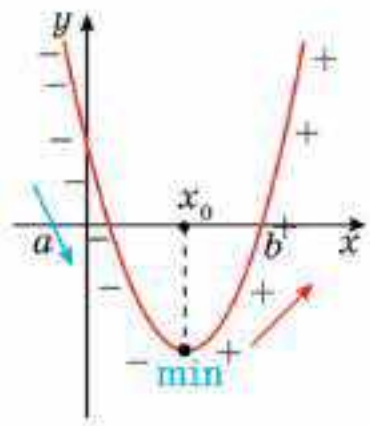


Рис. 48.3

Второе достаточное условие. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в окрестности точки x_0 и вторую производную $f''(x_0)$ в самой точке x_o. Если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, $(f''(x_0) < 0)$, то точка x_o является точкой минимума (максимума) функции $y = f(x)$. Если же $f''(x_0) = 0$, то нужно пользоваться первым достаточным условием.

Замечание. Точки из области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками первой производной.*

ПРИМЕР

2. Найдем экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$.

Решение. Так как $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x - 2)(x - 3)$, то критические точки функции $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

Поскольку при переходе через точку $x_1 = 2$ производная меняет знак плюс на минус, то в этой точке функция имеет максимум (рис. 48.4). При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет знак минус на плюс, поэтому в точке $x_2 = 3$ у функции минимум.

Вычислив значения функции в точках $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, найдем экстремумы функции: $f_{max}(2) = 14$ и $f_{min}(3) = 13$.

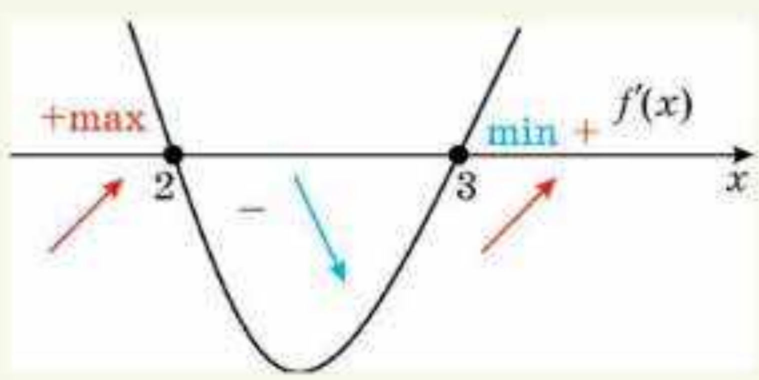


Рис. 48.4

Ответ: $f_{max}(2) = 14$ и $f_{min}(3) = 13$.

АЛГОРИТМ Алгоритм нахождения экстремумов функции с помощью второй производной:

1) найти производную $f'(x)$;
2) найти критические точки данной функции, в которых $f'(x) = 0$;
3) найти вторую производную $f''(x)$;
4) исследовать знак второй производной в каждой критической точке. Если $f'(x_0) < 0$, то в точке x_0 — максимум, если $f'(x_0) > 0$, то в точке x_0 — минимум. Если $f''(x_0) = 0$, то экстремум функции надо искать с помощью первой производной.
5) Вычислить значения функции в точках экстремума.

ПРИМЕР **3.** Исследуем функцию $y = -x^2 + 2x + 9$ на экстремумы.

Решение. В соответствии с алгоритмом найдем: 1) $y' = -2x + 2$; 2) $-2x + 2 = 0$, или $x = 1$ — критическая точка; 3) $y'' = -2$; 4) поскольку $f'(x_0) < 0$, то в точке $x = 1$ — максимум; 5) $y(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 9 = 10$.

Ответ: $y_{max}(1) = 10$.

1. Верно ли утверждение: любая стационарная точка является критической точкой?
2. В любой ли критической точке имеется экстремум?

Упражнения

А

48.1. На рисунке 48.5 изображен график функции $y = f(x)$. По графику найдите промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функции.

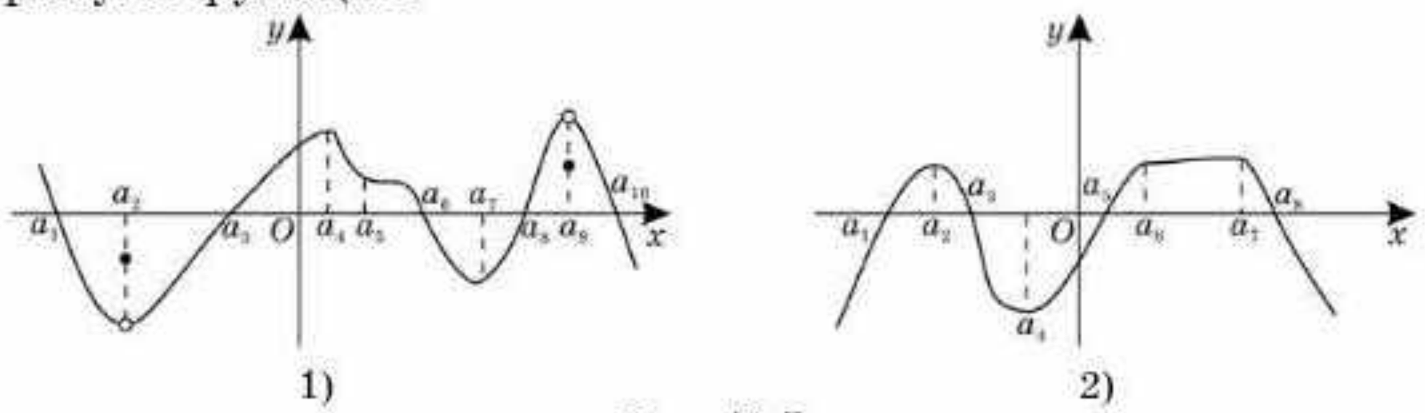


Рис. 48.5

48.2. Укажите критические точки функции $y = f(x)$ и установите, какие из них являются точками минимума, какие — точками максимума (рис. 48.6).

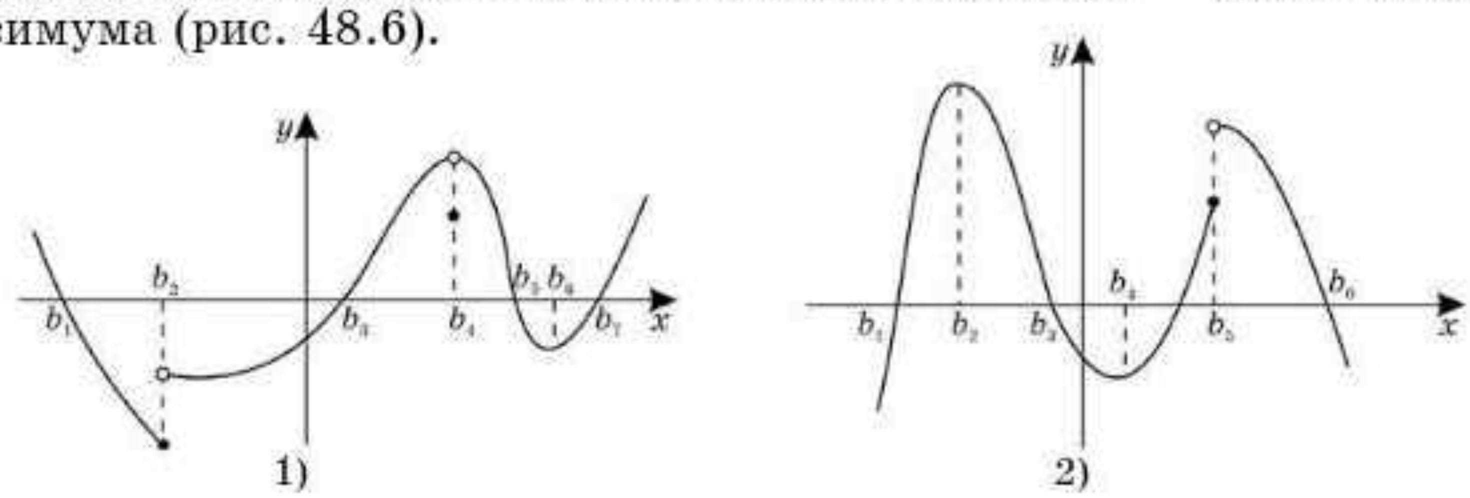


Рис. 48.6

Найдите точки экстремума функции $y = f(x)$ (**48.3—48.5**):

48.3. 1) $f(x) = x + 4$; 2) $f(x) = -x + 9$;
3) $f(x) = -5x + 7$; 4) $f(x) = 4x - 11$.

48.4. 1) $f(x) = x^2 - 8x + 15$; 2) $f(x) = -x^2 - 3x + 10$;
3) $f(x) = x^2 + 3x - 18$; 4) $f(x) = -x^2 + 12x - 20$.

48.5. 1) $f(x) = x^3 - 27$; 2) $f(x) = -x^3 - 8$;
3) $f(x) = x^3 + 3x^2$; 4) $f(x) = -x^3 + 12x$.

48.6. Найдите экстремумы функции $y = f(x)$:
1) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$; 2) $f(x) = -3x^2 + 9x - 4$;
3) $f(x) = 8 + 8x - 6x^2$; 4) $f(x) = 17 + 18x + 9x^2$.

48.7. Найдите критические точки функции $y = f(x)$. Выясните, какие из этих точек являются: 1) точками минимума; 2) точками максимума:
1) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$; 2) $f(x) = -x^4 + 0{,}5x^2 + 1$;
3) $f(x) = -2x^4 + x^2 - 1$.

48.8. Найдите критические точки функции $y = f(x)$. Выясните, какие из этих точек являются: 1) точками минимума; 2) точками максимума:
1) $f(x) = 5x - x^5$; 2) $f(x) = 0{,}5x^6 + 3x^3$;
3) $f(x) = -x^4 + 2x + 1$.

48.9. Докажите, что не имеет точек экстремума функция:
1) $y = 9 - 13x$; 2) $y = -17 + x^3$;
3) $y = 4 + \frac{8}{x}$; 4) $y = -\frac{11}{x} + 21$.

B

Найдите точки экстремума функции $y = f(x)$ (**48.10—48.13**):

48.10. 1) $f(x) = x^2 - 8x + 12$; 2) $f(x) = -x^2 - 8x + 9$;
3) $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$; 4) $f(x) = -2x^2 + 7x - 5$.

48.11. 1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 0{,}25$; 2) $f(x) = x^3 + 0{,}12x$;
3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$; 4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 11$.

48.12. 1) $f(x) = 0{,}25x^2 - 9x$; 2) $f(x) = -1{,}25x^2 + 13x$;
3) $f(x) = x^3 - 16x + 2$; 4) $f(x) = -x^3 + 9x + 2$.

48.13. 1) $f(x) = 45x - \frac{1}{3}x^3$; 2) $f(x) = -24x + x^3$;
3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^4$; 4) $f(x) = x^3 - 15x^4$.

Найдите экстремумы функции $y = f(x)$ (**48.14—48.15**):

48.14. 1) $f(x) = \frac{2}{x} + x^2$; 2) $f(x) = -\frac{3}{x} - 3x^2$;

3) $f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{x^2}{2}$.

48.15. 1) $f(x) = 5x - \frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = -4x + \frac{1}{x^2}$.

Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума функции $y = f(x)$ (**48.16—48.17**):

48.16. 1) $f(x) = \frac{5}{x} - \frac{x}{5}$; 2) $f(x) = \frac{6}{x} + \frac{x}{6}$.

48.17. 1) $f(x) = \frac{x}{x+7} + 3$; 2) $f(x) = \frac{x}{x-8} - 6$.

C

48.18. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума функции:

1) $y = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 20$; 2) $y = -x^4 - 24x^2 - 5$;

3) $y = -2x^4 - 16x^2 + 1$.

48.19. Найдите точки экстремума функции:

1) $y = \frac{\sqrt{2+x}}{3-x^2}$; 2) $y = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-8}$; 3) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$.

48.20. Найдите экстремумы функции:

1) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x - 2}$; 2) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; 3) $y = \frac{x^2+2}{x^2+x-2}$.

ПОВТОРИТЕ

48.21. Найдите производную функции:

1) $y = \frac{8x+3}{2-5x}$; 2) $y = \sin^8(1-8x)$; 3) $y = \sqrt{\frac{3x}{6+x}}$.

48.22. Постройте график функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = -x^3 + 1{,}5$; 2) $f(x) = -x^2 + 8$.

48.23. Решите неравенство $f'(x) \geqslant 0$:

1) $f(x) = 2\cos 9x + 9x$; 2) $f(x) = -x^3 + 12x$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения, график функции, нули функции, производная, правила нахождения производной, дифференцируемость функции, признаки возрастания и убывания функции, критические точки, экстремумы функции.

§ 49. ВОГНУТОСТЬ И ВЫПУКЛОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Вы ознакомитесь с понятиями: *вогнутость и выпуклость* графика функции, *точки перегиба*; научитесь их находить.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, вогнутость, выпуклость, точки перегиба

Определение. *Дифференцируемая функция называется* ***выпуклой вниз*** *на интервале X, если ее график расположен не ниже касательной к нему в любой точке интервала X.*

Определение. *Дифференцируемая функция называется* ***выпуклой вверх*** *на интервале X, если ее график расположен не выше касательной к нему в любой точке интервала X.*

Выпуклую вверх функцию часто называют ***выпуклой*** (рис. 49.1.), *выпуклую вниз —* ***вогнутой*** (рис. 49.2).

Теорема (о выпуклости графика). *Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ дифференцируема, а внутри этого отрезка дважды дифференцируема и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$). Тогда график функции $y = f(x)$ обращен на этом отрезке выпуклостью вниз (вверх).*

ПРИМЕР 1. Исследуем на выпуклость график функции $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$.

Решение. Найдем $y'' = 6x - 12$. Видим, что $y'' > 0$ при $x > 2$ и $y'' < 0$ при $x < 2$. Значит, на промежутке $(-\infty; 2)$ график обращен выпуклостью вверх, на промежутке $(2; +\infty)$ — выпуклостью вниз. А что же происходит в точке с абсциссой $x = 2$?

Определение. *Точка M графика функции называется* ***точкой перегиба****, если в достаточно малой окрестности точки M кривая расположена по обе стороны от касательной, проведенной к графику функции в этой точке.*

Точка C — точка перегиба. Она разделяет у непрерывной функции области выпуклости вверх и вниз (рис. 49.2).

Теорема. *Если в точке x_0 вторая производная непрерывна и отлична от нуля, то точка $M(x_0, f(x_0))$ не является точкой перегиба.*

Доказательство. Если $f''(x_0) > 0$, то, в силу непрерывности f'', существует окрестность точки x_0, в которой $f''(x) > 0$. Это значит, что график обращен выпуклостью вниз. Аналогично, если $f''(x) < 0$ — то

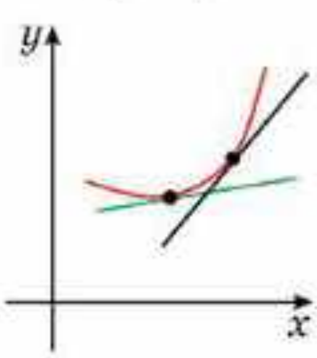


Рис. 49.1.1

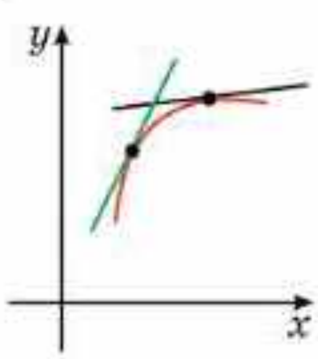


Рис. 49.1.2

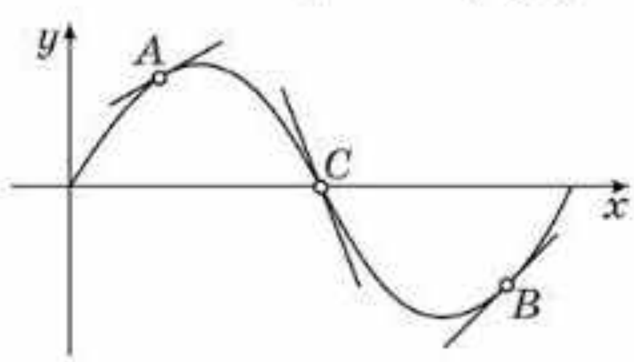


Рис. 49.2

выпуклостью вверх. И в том, и в другом случае кривая в окрестности точки M расположена по одну сторону от касательной.

Следствие. *Для того, чтобы точка x_0 была точкой перегиба, необходимо, чтобы вторая производная в этой точке либо равнялась нулю, либо имела разрыв* (I *рода — скачок*), *либо не существовала.*

Учитывая следствие, а также определение, получим достаточное условие перегиба.

Теорема (достаточное условие перегиба). *Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, кроме того, может быть самой x_0 и дифференцируема в этой точке. Если при переходе через x_0 вторая производная меняет знак, то x_0 — точка перегиба.*

АЛГОРИТМ

Алгоритм нахождения точек перегиба графика функции:

1) найти вторую производную y'';

2) найти точки, в которых $y'' = 0$ или имеет разрыв, или не существует;

3) исследовать знак второй производной y'' в числовых промежутках, на которых найденные точки делят область определения функции. Если при этом эта точка разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то эта точка является абсциссой точки перегиба функции;

4) вычислить значения функции в точках перегиба.

ПРИМЕР

2. Рассмотрим график функции $y = x^3$ (рис. 49.3). Эта функция является вогнутой при $x > 0$ и выпуклой при $x < 0$. В самом деле, $y'' = 6x$, но $6x > 0$ при $x > 0$ и $6x < 0$ при $x < 0$, следовательно, $y'' > 0$ при $x > 0$ и $y'' < 0$ при $x < 0$. Отсюда следует, что функция $y = x^3$ является вогнутой при $x > 0$ и выпуклой при $x < 0$. Тогда $x = 0$ является точкой перегиба графика функции $y = x^3$.

Ответ: $x = 0$ — точка перегиба.

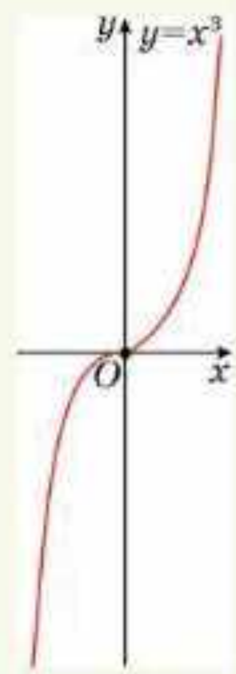


Рис. 49.3

1. Любая ли критическая точка является точкой перегиба?
2. Имеет ли функция точку перегиба, если ее вторая производная не равна нулю?

Упражнения

A

Постройте схематический график функции $y = f(x)$ и запишите промежутки выпуклости вверх и вниз графиков функций **(49.1—49.2):**

49.1. 1) $y = \sin 0{,}5x$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = x^3$; 4) $y = x^2 + 4x$.

49.2. 1) $y = 0{,}1x^3 - 1$; 2) $y = 0{,}5x^3 + 2$;

3) $y = 1 - \sqrt{x-2}$; 4) $y = \sqrt{x+1} - 2$.

49.3. Дан график функции (рис. 49.4). Запишите промежутки выпуклости и вогнутости графика функции.

49.4. Для функции $y = x^3 - 4x$ найдите промежутки выпуклости вверх, вниз и координаты точки перегиба ее графика.

49.5. Найдите промежутки выпуклости вверх и вниз графика функции $y = x^3 + 5x - 3$.

49.6. Найдите точки перегиба функции:

1) $y = (x - 2) \cdot (x + 1)^2$;

2) $y = (x - 1) \cdot (x + 2)^2$.

49.7. Дан схематический график функции (рис. 49.5).

По графику функции найдите промежутки его выпуклости вниз и координаты точек перегиба.

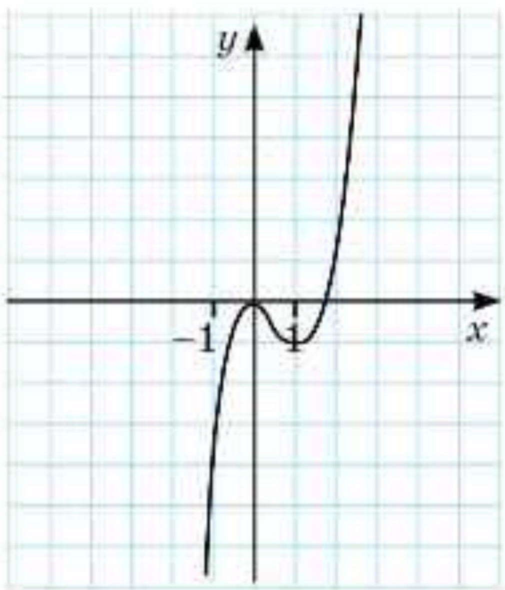


Рис. 49.4

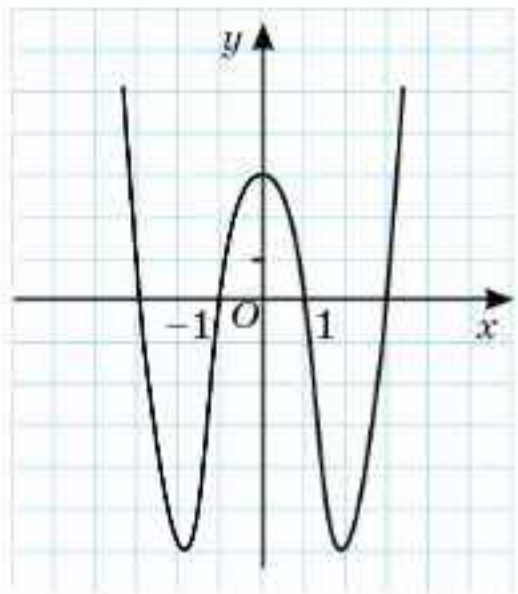


Рис. 49.5

49.8. Найдите точки перегиба графика функции:

1) $y = (x - 4)^5 + 4(x + 1)$;

2) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

B

49.9. Найдите промежутки вогнутости и выпуклости функции и точки перегиба графика функции:

1) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$; 2) $y = \dfrac{3x+2}{2-x}$; 3) $y = \dfrac{3x-2}{2+x}$.

49.10. Найдите промежутки вогнутости и выпуклости функции:

1) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$; 2) $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$; 3) $\dfrac{x^3+2}{9-x^2}$.

49.11. Постройте график функции и запишите ее промежутки выпуклости и точки перегиба:

1) $y = |\sin x|$; 2) $y = |\cos 0{,}5x|$; 3) $y = |tg 2x|$; 4) $y = |\mathrm{ctg}\, 0{,}5x|$.

C

49.12. Найдите координаты точек перегиба графика функции:

1) $y = \frac{2x}{x^2+1}$; 2) $y = x + \operatorname{arctg} x$; 3) $y = 2x - \operatorname{arctg} x$.

49.13. Найдите промежутки выпуклости вверх графика функции:

1) $y = x\sqrt{2-x}$; 2) $y = \sqrt{4+x}$.

49.14. Найдите экстремумы и координаты точек перегиба графика функции $y = 2x^2 - x^4$. Постройте схематический график функции.

ПОВТОРИТЕ

49.15. Найдите промежутки монотонности функции:

1) $y = 2 + 2x^2 - x^4$; 2) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$; 3) $y = \frac{x}{4} - \frac{4}{x}$.

49.16. Найдите точки максимума и минимума функции:

1) $y = 2 + 2x^2 - x^4$; 2) $y = -\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x}$; 3) $y = \frac{x}{4} - \frac{4}{x}$.

49.17. Найдите асимптоты графика функции:

1) $y = 2 + x^2 - 5x^4$; 2) $y = \frac{2x^3}{1-x^2}$; 3) $y = \frac{5}{x} - \frac{x}{5}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения, график функции, нули функции, производная, правила нахождения производной, признаки возрастания и убывания функции, критические точки, экстремумы функции и точки экстремума, вогнутость и выпуклость графика функции, точки перегиба графика функции, асимптоты графика функции.

§50. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Вы научитесь исследовать свойства функции с помощью производных и строить ее график.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, свойства функции, график функции

Рассмотрим на примере исследование функции с помощью производных и построение графика функции.

ПРИМЕР

Исследуем функцию $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ и построим ее график.

1) Область определения $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Четность и нечетность функции. В нашем случае $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$. Значит, функция является ни четной, ни нечетной, т. е. функция общего вида.

3) Периодичность. Функция $\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ — непериодическая.

4) Нули функции, промежутки знакопостоянства. $\frac{x^2-2x+2}{x-1}=0$. Дискриминант числителя отрицателен, поэтому при $x<1$ $f(x)<0$, при $x>1$ $f(x)>0$.

5) Точки разрыва и поведение функции вблизи точек разрыва.

Рассмотрим точку $x=1$ (она не входит в область определения).

$\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=+\infty$ Значит, 1 — точка разрыва.

6) Асимптоты. Воспользуемся формулами $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$. Получим $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+2}{x(x-1)}=1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+2}{x(x-1)}=1$, т. е. в обоих случаях $k=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1}-x\right)=-1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1}-x\right)=-1$, т. е. $b=-1$.

Значит, график данной функции имеет вертикальную асимптоту $x=1$ и одну наклонную асимптоту $y=x-1$ (как при $x\to+\infty$ так и при $x\to-\infty$).

7) Промежутки возрастания и убывания. Экстремумы.

$y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Тогда $y'=0$ при $x=0$, $x=2$. Составим таблицу 27.

Таблица 27

x	$(-\infty; 0)$	0	(0; 1)	1	(1; 2)	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	не сущ.	–	0	+
$f(x)$	возраст.	–2	убыв.	не опр.	убыв.	2	возраст.
	↗	max	↘	разрыв	↘	min	↗

8) Проведем исследование на выпуклость. $f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$. Поскольку $f''(x)\neq 0$ ни при каких x из D_f, значит точек перегиба нет. Имеем: при $x<1$ $f''(x)<0$ и при $x>1$ $f''(x)>0$, т. е. при $x<1$ функция выпукла вверх, при $x>1$ функция выпукла вниз. Составим таблицу 28.

Таблица 28

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1;+\infty)$
$f''(x)$	–	не сущ.	+
$f(x)$	вып. вверх	не опред.	вып. вниз
	⌒	разрыв	⌣

9) Найдем некоторые значения. Составим таблицу некоторых значений функции (табл. 29):

Таблица 29

x	–1	0	0,5	1,5	2	3
y	–2,5	–2	–2,5	2,5	2	2,5

10) По результатам исследования строим график (рис. 50.1).

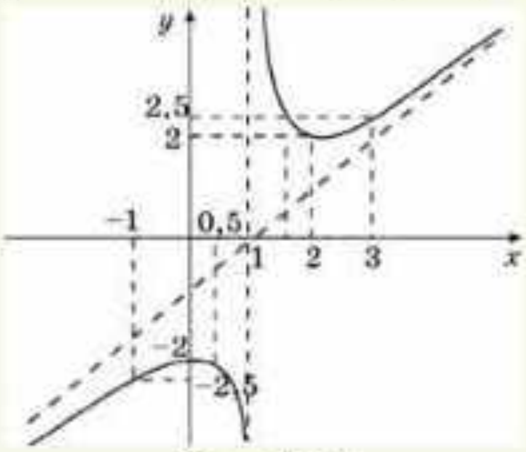


Рис. 50.1

1. Перечислите этапы исследования функции с помощью производных. Составьте алгоритм построения графика функции через исследование функции с помощью производных.
2. Для чего при исследовании функции нужен пункт 9?

Упражнения

A

50.1. Найдите область определения функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^3 - 9x + 40$; 2) $f(x) = \frac{x-8}{10-x}$.

50.2. Найдите область определения производной функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 0{,}09}$; 2) $f(x) = \frac{x}{16+x^2}$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2{,}25}$; 4) $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

50.3. Укажите множество значений функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^2 - 9x + 8$; 2) $f(x) = \frac{5}{x} - 4$;

3) $f(x) = \sqrt{6-x} + 4$; 4) $f(x) = 3 - 7\sin 3x$.

50.4. Найдите точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат:

1) $f(x) = 7x^2 + x$; 2) $f(x) = -x^4 + 64$;

3) $f(x) = -5x^3 - 20x$; 4) $f(x) = -3x^5 + 5x^3$.

50.5. Найдите точки экстремума функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = 5\sin 8x - 6$; 2) $f(x) = -3\cos 10x + 1$;

3) $f(x) = 2\cos 3x - 1$.

50.6. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = 4x^3 - 12x + 5$; 2) $f(x) = -\frac{9}{2-x}$;

3) $f(x) = 2x^3 - 12x - 1$.

Исследуйте функцию $y = f(x)$ и постройте ее графики (**50.7–50.10**):

50.7. 1) $f(x) = -8x + 1,5$; 2) $f(x) = 1,2x - 10$;
3) $f(x) = -6x^2 + x + 1$; 4) $f(x) = 3x^2 - 7x$.

50.8. 1) $f(x) = 48x - x^3$; 2) $f(x) = -x^3 - 27x$;
3) $f(x) = x^4 - 1$; 4) $f(x) = -x^4 + 1$.

50.9. 1) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$; 2) $f(x) = -x^3 - 6x$;
3) $f(x) = 2x^4 - 8x$; 4) $f(x) = -x^4 + 4$.

50.10. 1) $f(x) = 18x - x^3$; 2) $f(x) = -x^3 - 6x$;
3) $f(x) = x^4 - 16$; 4) $f(x) = -x^4 + 4x$.

B

Исследуйте функцию $y = f(x)$ и постройте ее графики (**50.11–50.14**):

50.11. 1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$; 2) $f(x) = -3x^3 + 2x^2$; 3) $f(x) = -x^3 + 4x^2$.

50.12. 1) $f(x) = \frac{10}{5 - x}$; 2) $f(x) = \frac{4}{3 + x}$; 3) $f(x) = \frac{2}{1 + 2x}$.

50.13. 1) $f(x) = \frac{x}{2x + 1}$; 2) $f(x) = \frac{x}{1 - 5x}$; 3) $f(x) = \frac{2x}{1 - 2x}$.

50.14. 1) $f(x) = 2 + \sqrt{4 + x}$; 2) $f(x) = -3 + \sqrt{2 - x}$; 3) $f(x) = \sqrt{3 + x} - 2$.

Постройте графики функции $y = f(x)$ (**50.15—50.17**):

50.15. 1) $y = \frac{1 + 2x}{x^2 + 2}$; 2) $y = \frac{2 - x}{x^2 + 5}$; 3) $y = \frac{3 + x}{x^2 + 3}$.

50.16. 1) $y = \frac{9 + x^2}{x^2 - 9}$; 2) $y = \frac{3 + x^2}{x^2 - 4}$; 3) $y = \frac{3 - 2x^2}{x^2 - 1}$.

50.17. 1) $y = \frac{x^3}{x + 1}$; 2) $y = \frac{x^3}{1 - x}$;
3) $y = \frac{2x^3}{x - 1}$; 4) $y = \frac{3x^3}{2 - x}$.

C

50.18. Исследуйте функцию и постройте ее график. Проверьте правильность построения графика, используя программу “Живая геометрия”:

1) $y = x^2 \cdot \sqrt{3 - x}$; 2) $y = x^2 \cdot \sqrt{2 + x}$;
3) $y = x^2 \cdot \sqrt{4 - x}$; 4) $y = x^2 \cdot \sqrt{3 + x}$.

50.19. Исследуйте на монотонность функцию:

1) $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}$; 2) $y = \sqrt{x - x^2}$; 3) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$; 4) $y = \sqrt{2x - x^2}$.

50.20. 1) Постройте график функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - 2x^2 + 3 = a$ не имеет корней?

2) Постройте график функции $f(x) = x^4 - x^2 + 1$. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - x^2 + 1 = a$ не имеет корней?

3) Постройте график функции $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$. При каких значениях параметра a уравнение $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ имеет три корня?

50.21. Исследуйте функцию и постройте ее график. Проверьте правильность построения графика, используя программу "Живая геометрия":

1) $y = x + \sin x$;
2) $y = \cos 2x - \sin x$;
3) $y = \sin^2 x + \cos x$;
4) $y = \sin 2x + \cos x$.

ПОВТОРИТЕ

50.22. Найдите значение функции:

1) $y = x^2 - 2$ при $x = 0; -3; 0{,}3$;
2) $y = \sin 0{,}5x$ при $x = 300; \pi; 4\pi$.

50.23. Решите уравнение:

1) $\sin^2 x - \cos x = 1$;
2) $\sin^2 x + 2\cos x = 0$.

50.24. Решите неравенство:

1) $-3x^2 - 2x + 8 \geqslant 0$;
2) $12x^2 + x - 1 < 0$.

50.25. Найдите наибольшее или наименьшее значение функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^2 - 8x + 14$;
2) $f(x) = 8x^2 - 5x - 3$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения, значения функции, график функции, нули функции, производная, правила нахождения производной, признаки возрастания и убывания функции, критические точки, экстремумы функции и точки экстремума.

§51. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Вы научитесь находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке;
решать прикладные задачи, связанные с нахождением наибольшего (наименьшего) значения функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Функция, наибольшее значение функции, наименьшее значение функции

Определение. ***Наибольшим значением функции*** *$y = f(x)$ на промежутке X называют такое значение $f(x_0)$, что для любого $x \in X$, $x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$.*

Определение. ***Наименьшим значением функции*** *$y = f(x)$ на промежутке X называют такое значение $f(x_0)$, что для любого $x \in X$, $x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.*

Функция часто принимает свое наибольшее (наименьшее) значение на промежутке X в одной из критических точек из этого промежутка. Также часто наибольшее и наименьшее значения функция может принимать в точках, в которых не существует первая производная этой функции, а сама функция определена.

Наибольшее и наименьшее значения функции обычно надо искать на некотором множестве X, которое является всей областью определения функции или частью области определения. Само множество X может быть отрезком $[a; b]$, интервалом $(a; b)$ или полуинтервалом $(a; b]$, $[a; b)$, открытым лучом $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$, лучом $(-\infty; a]$, $[a; +\infty)$, прямой $(-\infty; +\infty)$.

На отрезке $[a; b]$ функция $y = f(x)$ может достигать наименьшего или наибольшего значения либо в критических точках, либо на концах отрезка $[a; b]$.

Теорема (Вейерштрасса о непрерывной функции). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$, то среди ее значений на этом промежутке есть наибольшее и наименьшее.*

Доказательство теоремы рассматривается в вузе.

Справедливость теоремы рассмотрим на примерах.

ПРИМЕР

1. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Найдем точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения, а также сами эти значения.

Решение. Для наибольшего значения функции возможны два случая:

1) оно достигается на одном из концов отрезка $[a; b]$ (рис.51.1.1) или на обоих концах сразу (рис. 51.1.2);

2) оно достигается во внутренней точке c этого отрезка (рис. 51.1.3).

Во втором случае значение функции в точке c не меньше ее значений вблизи точки c, поэтому c — точка максимума (быть может, не строго) для $y = f(x)$. Тогда в точке c либо функция $y = f(x)$ не дифференцируема, либо ее производная равна нулю. Аналогично обстоит дело с наименьшим значением функции на отрезке $[a; b]$.

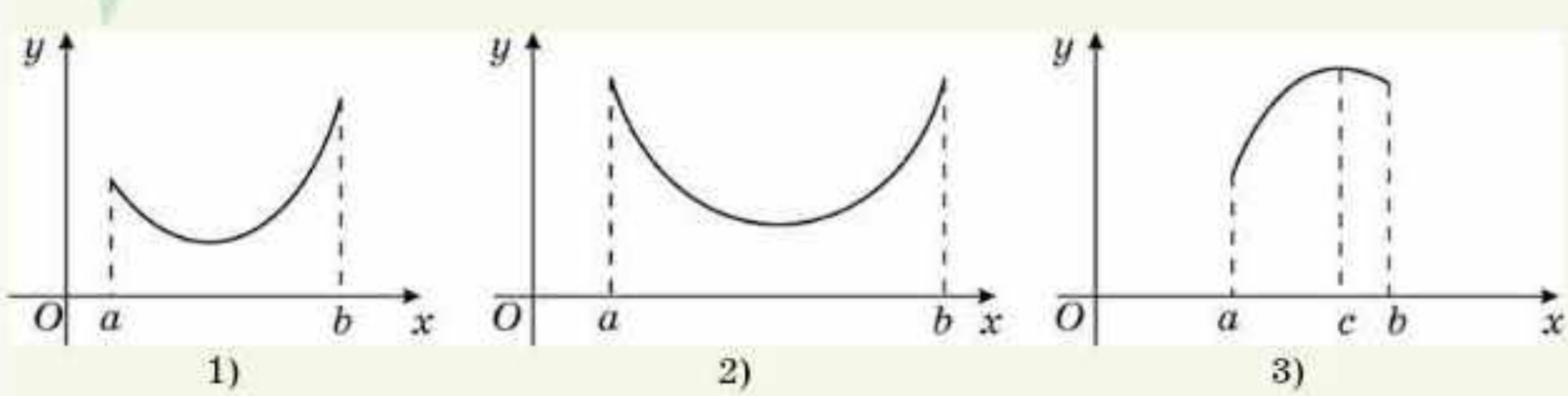


Рис. 51.1

Из решения этой задачи вытекает следующий алгоритм отыскания наименьших и наибольших значений функции на отрезке:

АЛГОРИТМ Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, надо:

1) найти производную функции и ее критические точки;

2) из полученных критических точек взять точки, принадлежащие отрезку $[a; b]$;

3) найти ее значения на концах этого отрезка (т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$);

4) найти ее значения в точках, принадлежащих отрезку $[a; b]$, где производная функции равна нулю;

5) найти ее значения в точках, принадлежащих отрезку $[a; b]$, где функция f не имеет производной;

6) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

ПРИМЕР **2.** Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 + 6x + 8$ на числовом промежутке $[-4; 0]$.

Решение. Найдем $f'(x) = 2x + 6$. Решим уравнение $2x + 6 = 0$, получим $x = -3$ — критическая точка. Вычислим $f(-3) = -1$ и $f(-4) = 0$, $f(0) = 8$, поэтому наименьшее значение равно -1, наибольшее значение равно 8.

Ответ: -1; 8.

ПРИМЕР **3.** Какова наибольшая площадь прямоугольного участка, который можно огородить проволокой длиной $2p$?

Решение. Обозначим через x длину стороны участка, тогда длина другой его стороны будет равна $p - x$. Площадь найдем по формуле $S = x(p - x) = px - x^2$.

$S' = p - 2x = 0$, следовательно, $x = \frac{p}{2}$. Переменная x может принимать значения от 0 до p. Имеем: $S(0) = S(p) = 0$, $S(\frac{p}{2}) = \frac{p^2}{4} > 0$. Значит, прямоугольник наибольшей площади и с заданным периметром $2p$ есть квадрат, длина стороны которого равна $\frac{p}{2}$, площадь равна $\frac{p^2}{4}$.

Ответ: $\frac{p^2}{4}$.

?

1. Всегда ли наименьшее значение функции совпадает с ее минимумом, а наибольшее — с максимумом? Приведите примеры.
2. Почему для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции надо находить производную функции и критические точки?

Упражнения

А

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на множестве (**51.1—51.5**):

51.1. 1) $f(x) = 7x - 14$, $[0; 4]$; 2) $f(x) = -0,2x + 0,4$, $[1; 3]$.

51.2. 1) $f(x) = \frac{6}{x}$, $[1; 6]$; 2) $f(x) = -\frac{5}{x}$, $[-5; -1]$.

51.3. 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $[0; 9]$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $[1; 4]$.

51.4. 1) $f(x) = 2\sin x$, $[-0,5\pi; \pi]$; 2) $f(x) = -2\cos x$, $[-\pi; 0,5\pi]$.

51.5. 1) $f(x) = 4x^2$, $[-1; 1]$; 2) $f(x) = -2x^3$, $[-1; 1]$.

51.6. 1) Число 25 разложите на два слагаемых так, чтобы значение их произведения было наибольшим.

2) Число 16 разложите на два слагаемых так, чтобы значение суммы их квадратов было наибольшим.

3) На какие два положительных слагаемых надо разложить число 147, чтобы значение произведения одного из них на квадратный корень из другого было наибольшим?

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на множестве (**51.7—51.9**):

51.7. 1) $f(x) = x^2 - 8x + 17$, $[-1; 2]$; 2) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $[1; 2]$.

51.8. 1) $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$, $[-2; 4]$; 2) $f(x) = -3x^2 - x + 5$, $[0; 3]$.

51.9. 1) $f(x) = x^3 + 8$, $[-3; -1]$; 2) $f(x) = -x^3 + 27$, $[-2; 2]$.

B

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на промежутках (**51.10—51.13**):

51.10. 1) $f(x) = x^3 - 12x + 1$, $[0; 1]$; 2) $f(x) = -x^3 + 6x - 5$, $[-1; 0]$.

51.11. 1) $f(x) = x^4 - 8x - 2$, $[-2; -1]$; 2) $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 3$, $[0; 4]$.

51.12. 1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $[1; 5]$; 2) $f(x) = x^2 - \frac{8}{x}$, $[0{,}5; 2]$.

51.13. 1) $f(x) = x + \sqrt{x}$, $[1; 4]$; 2) $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $[4; 9]$.

51.14. 1) Площадь прямоугольника составляет 25 см^2. Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

2) Поле прямоугольной формы имеет площадь 3600 м^2. Каковы должны быть размеры поля, чтобы на его ограждение ушло наименьшее количество материала?

3) Участок в форме параллелограмма с острым углом в 30° имеет площадь 8 м^2. Найдите наименьшее значение периметра участка.

C

51.15. 1) Докажите, что среди всех равнобедренных треугольников, имеющих периметр P, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

2) Участок прямоугольной формы площадью в 800 м^2 огорожен забором с трех сторон. Найдите наименьшую длину забора.

3) Периметр участка в форме прямоугольной трапеции с острым углом в 30° равен 24 м. Найдите наибольшую площадь участка.

4) Участок имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Площадь участка равна 12,5 м^2. При каком значении радиуса полукруга периметр участка будет наименьшим?

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на множестве (**51.16—51.18**):

51.16. 1) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $[1; 9]$; 2) $f(x) = \sqrt{x(7-x)}$, $[1; 3]$.

51.17. 1) $f(x) = 2 + \frac{6x}{x^2+4}$, $[0; 1]$; 2) $f(x) = -1 - \frac{x-1}{x^2+2}$, $[0; 1]$.

51.18. 1) $f(x) = |x^3 - 1| - 3x$, $[-1; 3]$; 2) $f(x) = x^2 - 4x + 5 + |1 - x|$, $[0; 4]$.

ПОВТОРИТЕ

51.19. Найдите производную функции:
1) $y = (3x - 10)^5 + 15x^2$; 2) $y = 2(5x^2 - 9x)^4 - 10x^6$.

51.20. Постройте график функции $y = f(x)$ и найдите промежутки возрастания и убывания функции:
1) $f(x) = -x^2 - 3x$; 2) $f(x) = x^3 + 3x$.

51.21. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:
1) $-10x + 40 > 0$; 2) $-x^2 + 8x > 0$;
3) $-x^2 + 5x + 2 > 0$.

51.22. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:
1) $(x + 2)^2(x - 3)(x - 5) < 0$; 2) $(x + 4)(x - 3)(x - 6)^2 \leqslant 0$;
3) $(x - 2)^2(x - 3)^2(x + 5) \leqslant 0$; 4) $(x - 1)^3(x + 2)(x - 6)^2 \geqslant 0$.

51.23. Брошены две игральные кости. Найдите вероятность того, что значение произведения выпавших очков равно: 1) 4; 2) 5.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Функция $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6ax + 5$ возрастает при любых x, если параметр a принадлежит множеству:
A) R; B) $(-\infty; -1]$ и $[0,5; +\infty)$; C) $[0,5; +\infty)$; D) $[-0,5; 1]$.

2. Длина промежутка убывания функции $y = 12 + x^5 - 5x^4 + 5x^3$ равна:
A) 1; B) 2; C) 3; D) 3,5.

3. Наименьшее значение функции $y = 2x + \frac{1}{x^3}$ на множестве $[0,5; 1]$ равно:
A) 1; B) 3; C) 6,5; D) 9,5.

4. Количество точек экстремума функции $y = (x - 2)^2(x - 4)^2$ равно:
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

5. Уравнение касательной к графику функции $y = x - \frac{2}{x}$, параллельной прямой $y = 3x + 1$, имеет вид:
A) $y = 3x + 2$ или $y = 3x + 4$; B) $y = 3 - 3x$;
C) $y = 3x - 4$; D) $y = 3 - 3x$, $y = 4 - 3x$.

6. Задан график производной функции $y = f'(x)$ (рис.51.2). Найдите точки минимума функции $y = f(x)$:

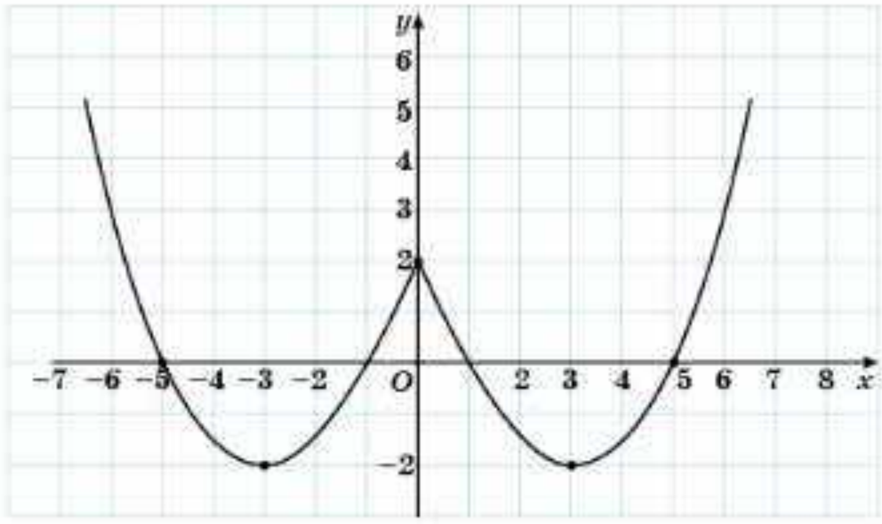


Рис. 51.2

A) $\{-3; 3\}$; B) $\{-5; 1\}$; C) $\{-1; 5\}$; D) $\{-5; -1; 1; 5\}$.

7. По графику производной функции $y = f'(x)$, заданному на рисунке 51.2, значение суммы длин промежутков убывания функции $f(x)$ равно:
A) 2; B) 4; C) 6; D) 8.

8. Площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$ в точке с абсцисой $x_0 = 1$, равна:
A) 4,5; B) 4; C) 3,5; D) 3.

9. Функция $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{4}$ возрастает на промежутке:
A) $\varnothing$; B) $(-\infty; -4]$ и $[4; \infty)$; C) $(-\infty; 0)$; D) $(4; +\infty)$.

10. Если производная функции равна $f'(x) = (x^2 - 4)\cdot(x + 5)^2\cdot(x - 3)^2$, то значение суммы длин промежутков убывания функции $f(x)$ равно:
A) 2; B) 2,5; C) 4; D) 8.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Вариационный ряд, вероятность, правила нахождения вероятностей, события, дискретная и непрерывная величины.

10 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§52. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Вы ознакомитесь с понятиями: *случайная величина, дискретная случайная величина, непрерывная случайная величина*;
научитесь различать дискретные и непрерывные случайные величины; составлять таблицу закона распределения некоторых дискретных случайных величин.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Случайная величина, дискретная случайная величина, непрерывная случайная величина

Понятие случайной величины является одним из важнейших понятий теории вероятностей.

ПРИМЕР

1. Рассмотрим опыт. Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления на игральных костях столько очков, чтобы значение суммы выпавших очков на двух игральных костях равнялось 6?

С рассматриваемым опытом связано событие A: значение суммы на двух игральных костях равно 6. Это событие характеризует качественную сторону опыта. Количественной характеристикой этого опыта является случайная величина X, поскольку неизвестно заранее, какое именно значение выпадет в результате опыта. Она может принимать отдельные значения, которые можно перечислить: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Если, например, на одной игральной кости выпало 1 очко, на другой — 2 или, наоборот, то запишем эти значения в виде пар: (1; 2) и (2; 1). Используя эти обозначения получим, что в данном опыте возможны значения:

(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6)
(2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6)
(3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6)
(4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (4; 6)
(5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (5; 6)
(6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)

Тогда возможны значения суммы очков на двух игральных костях: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и случайная величина X может принять одно из этих значений.

Определение. ***Случайная величина*** *— это величина, которая принимает в результате опыта одно из множества значений, причем появление того или иного значения этой величины до ее измерения нельзя точно предсказать.*

Случайные величины делятся на величины, распределенные дискретно и непрерывно.

Дискретная случайная величина может принимать лишь определенные значения.

ПРИМЕР 2. Подбрасываем монету 6 раз. Может оказаться, что все 6 раз герб не выпадет ни разу или только 1 раз, или 2 раза, или 3 раза и т.д., или 6 раз. Тогда число появлений герба: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 — случайная величина, обозначим ее X, и она принимает отдельные, изолированные друг от друга значения, их можно перенумеровать.

Определение. *Случайные величины, принимающие только отдельные друг от друга значения, называются* ***дискретными (прерывными) случайными величинами.***

Слово “дискретный” происходит от латинского *discretus*, что означает “прерывистый”, состоящий из отдельных частей.

ПРИМЕР 3. Запись показаний спидометра или измеренной температуры в конкретные моменты времени — дискретные случайные величины.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему случайная величина X из рассмотренного выше опыта является дискретной случайной величиной?

Случайные дискретные величины принимают каждое свое значение с определенной вероятностью.

Убедитесь, что в рассмотренном выше опыте вероятность появления каждого из значений случайной величины, соответственно, равна $p_1 = \frac{1}{36}$, $p_2 = \frac{1}{18}$, $p_3 = \frac{1}{12}$, $p_4 = \frac{1}{9}$, $p_5 = \frac{5}{36}$, $p_6 = \frac{1}{6}$, $p_7 = \frac{5}{36}$, $p_8 = \frac{1}{9}$, $p_9 = \frac{1}{12}$, $p_{10} = \frac{1}{18}$, $p_{11} = \frac{1}{36}$.

Случайная величина X принимает значения x_1, x_2, x_3, ..., x_n *с вероятностями* p_1, p_2, ..., p_n (при этом $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$).

Определение. *Случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый интервал, называются* ***непрерывными случайными величинами.***

ПРИМЕР 4. Измерение скорости движения или температуры воздуха в течение некоторого интервала времени — непрерывная случайная величина.

Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Случайные непрерывные величины характеризуются точностью вероятности — имеет смысл говорить о вероятности попадания случайной величины в числовой интервал, а не о вероятности того, что она примет какое-то конкретное значение.

Закон распределения дискретной случайной величины

Вы ознакомитесь с понятием *распределение случайной величины;*
научитесь составлять таблицу закона распределения некоторых дискретных случайных величин.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Случайная величина, дискретная случайная величина, непрерывная случайная величина

Определение. *Перечисление возможных значений случайной величины и их вероятностей называется* ***распределением случайной величины.***

Если для случайной величины X известны все значения $x, x_2, ..., x_n$, которые она может принимать, и все вероятности $p, p_2, ..., p_n$, с которыми эти значения принимаются, то говорят, что *задан закон распределения дискретной случайной величины X, или просто распределение величины X.*

Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

Определение. *Таблица, где перечислены возможные (различные) значения $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины X с соответствующими им вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$, называется* ***рядом (законом) распределения дискретной случайной величины X.***

Таблица 30

Значения случайной величины	x_1	x_2	...	x_n
Вероятности	p_1	p_2	...	p_n

В верхней строке таблицы в порядке возрастания перечислены все возможные значения случайной величины X: $x_1, x_2, ..., x_n$, в нижней — их вероятности. При этом для любой дискретной случайной величины $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Символически записывают: $\sum\limits_{i=2}^{n} P(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Поскольку эта единица распределена в соответствии со значениями случайной величины, отсюда и термин "распределение".

Вероятность случайного события:

x_1 равна p_1, записывают символически: $p_1 = P(x_1)$,

x_2 равна p_2, записывают символически: $p_2 = P(x_2)$,

.... ,

x_n равна p_n, записывают символически: $p_n = P(x_n)$ ....

ПРИМЕР 5. Закон распределения случайной величины X:

Таблица 31

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Если случайная величина X принимает значения x_1, x_2, x_3, ..., x_n с вероятностями p_1, p_2, ... , p_n, то это можно изобразить графически: по оси абсцисс отложить значения случайной величины, по оси ординат — соответствующие их вероятности. Соединение полученных точек образует ломаную линию, которую называют *многоугольником, или полигоном распределения вероятностей* (рис. 52.1).

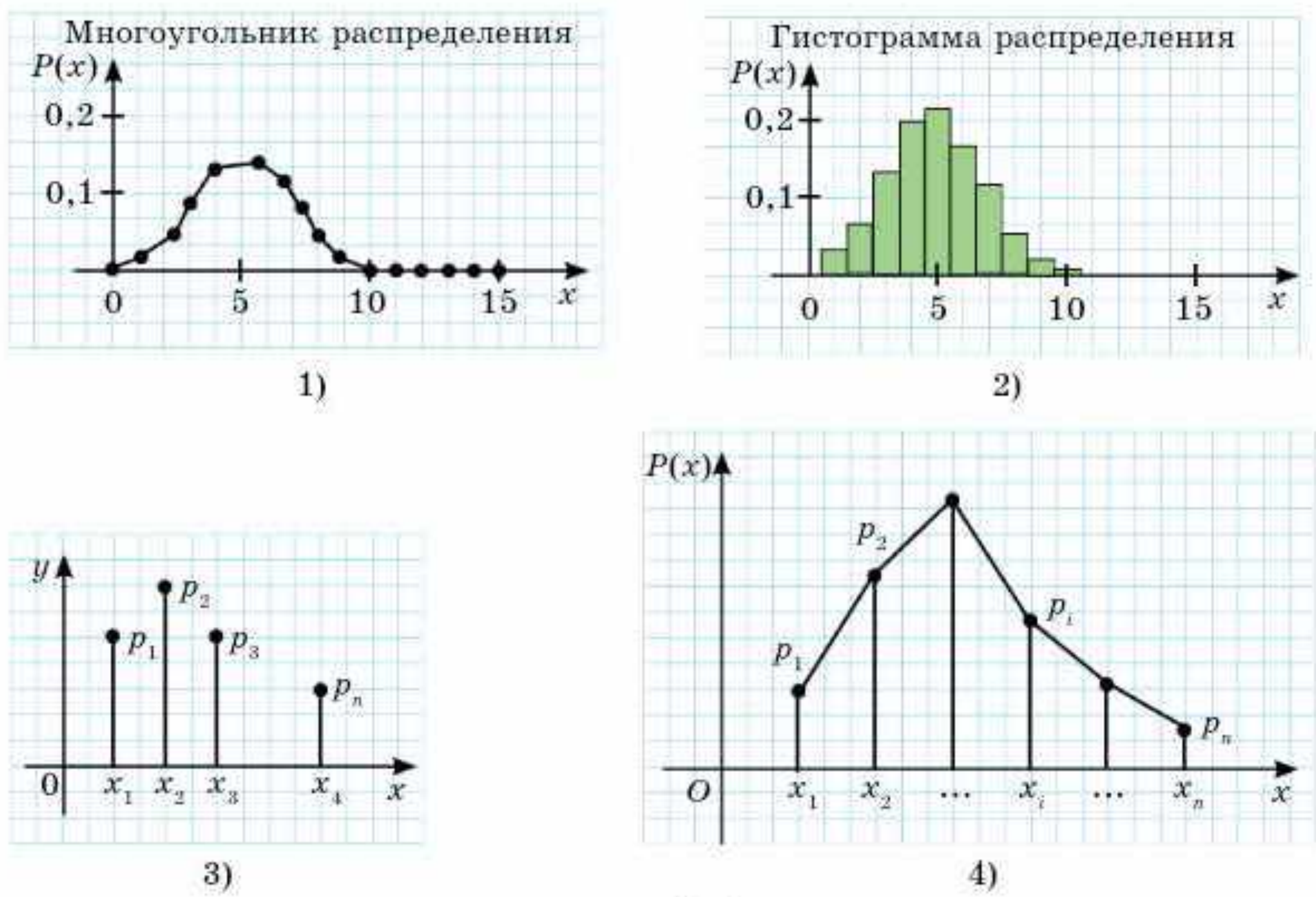


Рис. 52.1

Определение. *Ломаная линия, проходящая через точки $(x_i; p_i)$, абсциссы которых являются значениями случайной величины: x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ординаты — их вероятностями: p_1, p_2, p_3, ..., p_n, называется* ***многоугольником распределения****, а соответствующая гистограмма —* ***гистограммой распределения****.*

ПРИМЕР

6. Многоугольник (полигон) распределения вероятностей появления очков на игральных костях при бросании двух игральных костей изображен на рисунке 52.2.

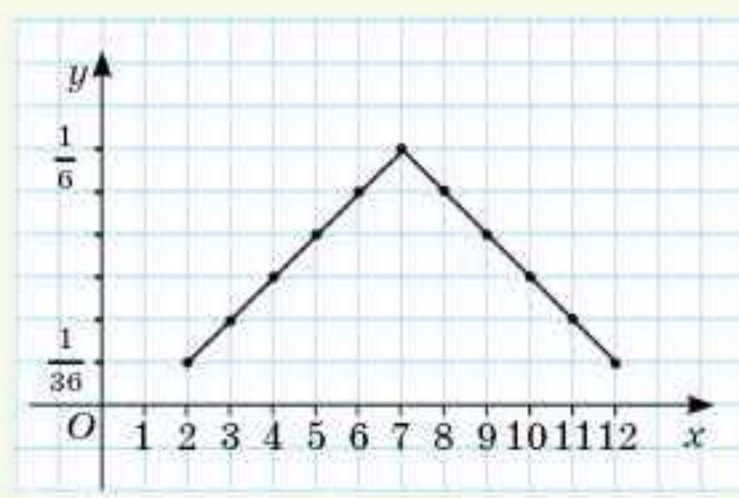


Рис. 52.2

Распределение дискретной случайной величины X дает полное вероятное описание случайной величины. По нему до опыта можно узнать о том, какие возможные значения случайной величины будут появляться чаще, какие — реже.

Рассмотрим распределение дискретных случайных величин в виде формулы, т. е. аналитически. В общем виде формула выглядит так: $P_i = f(x_i)$.

Используя формулу $P_i = \begin{cases} \dfrac{i-1}{36}, & 2 \leqslant i \leqslant 7, \\ \dfrac{13-i}{36}, & 8 \leqslant i \leqslant 12, \end{cases}$ рассчитайте вероятности. Сравните полученные данные с данными таблицы распределения дискретной случайной величины X в рассмотренном выше опыте.

1. Являются ли случайными величины:
   а) число вызовов, поступивших на станцию скорой помощи за сутки;
   б) выпадение 5 очков на игральной кости при ее однократном бросании?
2. В каких случаях измерение скорости движения и температуры воздуха, роста и массы ребенка будет дискретной случайной величиной, в каких случаях — непрерывной?
3. Как можно задать соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями?
4. Что можно узнать по распределению дискретной случайной величины X?
5. Что собой представляет многоугольник распределения дискретной случайной величины X?
6. Между чем закон распределения дискретной случайной величины устанавливает связь?
7. Что такое *ряд распределения дискретной случайной величины* X?

Упражнения

А

52.1. 1) Являются ли случайными величины:
а) число телефонных звонков в справочное бюро автовокзала за сутки;
б) выпадение 3 и 5 очков на игральной кости при ее двукратном бросании?
2) Являются ли непрерывными величины:
а) температура воздуха в городе N в течение суток;
б) скорость движения поезда на перегоне в 50 км;
в) скорость движения поезда в момент времени t_0?

52.2. Заполните таблицу 32, задающую закон распределения случайной величины X.

Таблица 32

X	3	21	30	50
P	0,25	?	0,25	0,25

52.3. Заполните таблицу 33, задающую закон распределения случайной величины X, если доли неизвестных вероятностей одинаковы.

Таблица 33

X	3	7	12	15	18	21
P	0,1	0,05	?	?	0,05	0,1

52.4. Монета подбрасывается 5 раз. Составьте таблицу распределения дискретной случайной X — числа выпадений герба и постройте гистограмму распределения.

52.5. В урне находятся 4 белых и 3 черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления белого шара. Постройте ряд и многоугольник распределения дискретной случайной величины X — числа извлечения шаров.

52.6. Дана арифметическая прогрессия из четырех членов, причем значения средних членов равны 10 и 14. Составьте закон распределения случайной величины, если вероятность средних членов в 4 раза больше вероятностей крайних членов.

B

52.7. Постройте ряд распределения числа попаданий в корзину при игре в баскетбол при двух штрафных бросках, если вероятность попадания при одном броске равна 0,7.

52.8. Стрелок производит три независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле составляет 0,9. Составьте закон распределения числа попаданий.

52.9. Два стрелка целятся по мишеням. Вероятность попадания их в мишень равны 0,8 и 0,9. Стрелки по очереди производят по одному выстрелу. Случайная величина X — это число попаданий в цель. Запишите закон распределения этой случайной величины.

C

52.10. Вероятность того, что студент найдет в библиотеке нужную ему книгу, равна 0,4. Составьте ряд распределения числа библиотек, которые студент может посетить, если ему доступны четыре библиотеки.

52.11. Студент должен сдать три экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена равна 0,8, второго — 0,7, третьего — 0,7. Составьте ряд распределения случайной величины X — числа экзаменов, сданных студентом.

52.12. В партии из 20 изделий имеются 4 изделия с дефектами. Для проверки их качества случайно выбирают 3 изделия. Составьте ряд распределения числа дефектных изделий, содержащихся в этой выборке.

52.13. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

Таблица 34

X	2,0	2,4	2,8	3,2	3,4
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,2

Постройте многоугольник распределения величины X.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ

Симеон Пуассон (1781—1840)

52.14. Понятие случайной величины в научный обиход ввел С. Пуассон — знаменитый французский физик и математик.

Строго формализованное определение случайной величины дал в конце 20-х годов прошлого века А. Н. Колмогоров — советский математик, один из крупнейших математиков XX в.

Колмогоров Андрей Николаевич (1903—1987)

ПОВТОРИТЕ

52.15. Найдите производную функции:

1) $y = (5x - 1)^5 + 5x^2 + \operatorname{tg}2x$;

2) $y = 2(3x^2 - x)^4 - \cos2x - 7x^6 - 5$.

52.16. Дан график производной функции (рис. 52.3).

Запишите точки максимума и минимума функции.

52.17. Найдите промежутки монотонности функции:

1) $y = 5 - 2x^2 + x^4$; 2) $y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$;

3) $y = -\frac{x}{3} + \frac{3}{x}$.

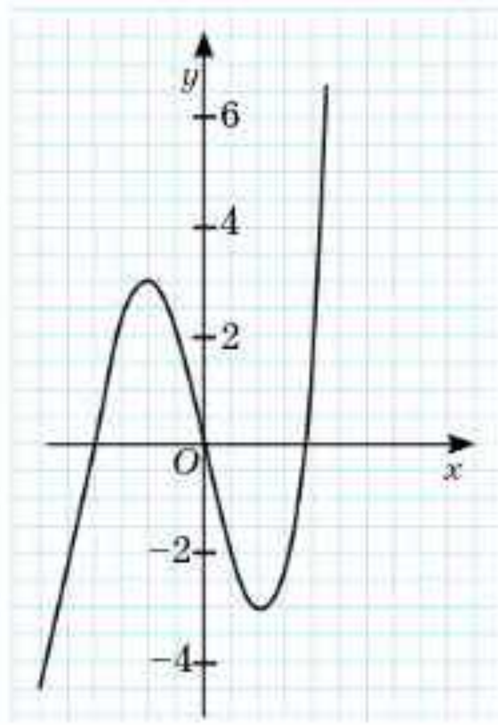


Рис. 52.3

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Дискретная и непрерывная случайные величины, ряд распределения дискретной случайной величины, закон распределения случайной величины, вероятность события, квадратный корень из числа.

§ 53. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Вы ознакомитесь с понятиями: *математическое ожидание дискретной случайной величины, дисперсия и среднее квадратическое (стандартное) отклонение дискретной случайной величины*; со свойствами математического ожидания;
научитесь вычислять математическое ожидание дискретной случайной величины, дисперсию и среднее квадратическое (стандартное) отклонение дискретной случайной величины; решать задачи с использованием числовых характеристик дискретных случайных величин.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое (стандартное) отклонение дискретной случайной величины

Одной из важнейших числовых характеристик случайной величины является математическое ожидание.

Обозначение: $M(X)$.

Определение. *Для случайной дискретной величины X, заданной значениями $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ и соответствующими этим значениям вероятностями $p_1, p_2, p_3, p_4, ..., p_n$ математическим ожиданием $M(X)$ называется **значение суммы произведений значений случайной величины** X на соответствующие этим значениям вероятности, т. е.* $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n$.

Кратко эту формулу можно записать так: $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Вычислите математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X, принимающей значения $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$, $x_6 = 7$, $x_7 = 8$, $x_8 = 9$, $x_9 = 10$, $x_{10} = 11$, $x_{11} = 12$ с вероятностями $p_1 = \frac{1}{36}$, $p_2 = \frac{1}{18}$, $p_3 = \frac{1}{12}$, $p_4 = \frac{1}{9}$, $p_5 = \frac{5}{36}$, $p_6 = \frac{1}{6}$, $p_7 = \frac{5}{36}$, $p_8 = \frac{1}{9}$, $p_9 = \frac{1}{12}$, $p_{10} = \frac{1}{18}$, $p_{11} = \frac{1}{36}$.

Математическое ожидание указывает некоторое “среднее число”, около которого группируются все значения случайной величины.

Вычислите среднее арифметическое значение случайной величины X, принимающей значения $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$, $x_6 = 7$, $x_7 = 8$, $x_8 = 9$, $x_9 = 10$, $x_{10} = 11$, $x_{11} = 12$, и сравните с ее математическим ожиданием $M(X)$.

Оказывается, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины. И оно тем точнее, чем больше число испытаний.

В этом заключается вероятностный смысл математического ожидания.

Свойства математического ожидания

Свойство 1. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной величине*

$$M(C) = C.$$

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания*

$$M(CX) = CM(X).$$

Свойство 3. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий*

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Свойство 4. *Математическое ожидание суммы случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ равно сумме их математических ожиданий*

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_k) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_k).$$

Свойство 5. *Математическое ожидание разности случайных величин X и Y равно разности их ожиданий*

$$M(X-Y) = M(X) - M(Y).$$

Свойство 6. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий*

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Свойство 7. *Математическое ожидание произведения независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ равно произведению математических ожиданий*

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_k) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_k).$$

Другой, не менее важной числовой характеристикой случайной величины, является *дисперсия*.

Обозначение: $D(X)$.

Определение. *Разность между случайной величиной X и ее математическим ожиданием $X - M(X)$ называется* ***отклонением случайной величины.***

Для расчета отклонения случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$ можно воспользоваться формулой:

ПРИМЕР 1. Найдем отклонение случайной величины X, принимающей значения $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$, $x_6 = 7$, $x_7 = 8$, $x_8 = 9$, $x_9 = 10$, $x_{10} = 11$, $x_{11} = 12$ от ее математического ожидания $M(X) = 7$ по формуле:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(x)) = (x_1 - M(x)) + (x_2 - M(x)) + \ldots + (x_{11} - M(x)).$$

$$\sum_{i=1}^{11}(x_i - M(x)) = (x_1 - M(x)) + (x_2 - M(x)) + \ldots + (x_{11} - M(x)) \cdot$$

Определение. ***Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины X*** *называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т. е.*

$$D(X) = M((X - M(X))^2).$$

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:* $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Для нахождения дисперсии дискретной случайной величины используют формулу: $D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i\right)^2$.

ПРИМЕР

2. Найдем дисперсию $D(X)$ случайной величины X, принимающей значения $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$, $x_6 = 7$, $x_7 = 8$, $x_8 = 9$, $x_9 = 10$, $x_{10} = 11$, $x_{11} = 12$ с вероятностями $p_1 = \frac{1}{36}$, $p_2 = \frac{1}{18}$, $p_3 = \frac{1}{12}$, $p_4 = \frac{1}{9}$, $p_5 = \frac{5}{36}$, $p_6 = \frac{1}{6}$, $p_7 = \frac{5}{36}$, $p_8 = \frac{1}{9}$, $p_9 = \frac{1}{12}$, $p_{10} = \frac{1}{18}$, $p_{11} = \frac{1}{36}$ и математическим ожиданием $M(X) = 7$.

Решение. По формуле: $D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2$ получим:

$D(X) = 4 \cdot \frac{1}{36} + 9 \cdot \frac{1}{18} + 16 \cdot \frac{1}{12} + 25 \cdot \frac{1}{9} + 36 \cdot \frac{5}{36} + 49 \cdot \frac{1}{6} + 64 \cdot \frac{5}{36} + 81 \cdot \frac{1}{9} +$
$+ 100 \cdot \frac{1}{12} + 121 \cdot \frac{1}{18} + 144 \cdot \frac{1}{36} - 49 = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 2\frac{7}{9} + 5 + 8\frac{1}{6} + 8\frac{8}{9} + 9 +$
$+ 8\frac{1}{3} + 6\frac{13}{18} + 4 - 49 = 5\frac{5}{6}$.

Ответ: $5\frac{5}{6}$.

Дисперсия характеризует меру рассеяния (разбросанности) значений случайной величины относительно ее математического ожидания. Если все значения случайной величины тесно сконцентрированы около ее математического ожидания и большие отклонения от математического ожидания маловероятны, то такая случайная величина имеет малую дисперсию. Если значения случайной величины рассеяны и велика вероятность больших отклонений от математического ожидания, то такая случайная величина имеет большую дисперсию.

Еще одной числовой характеристикой случайной величины является *мода*.

Определение. ***Модой дискретной случайной величины*** *называется значение дискретной случайной величины, вероятность которого наибольшая.*

ОБЪЯСНИТЕ

Почему значение $x_6 = 7$ из рассмотренного выше опыта является модой дискретной случайной величины X?

?

1. Перечислите важные числовые характеристики дискретных случайных величин.
2. Какие данные нужны для вычисления математического ожидания дискретной случайной величины X?
3. Что называется *отклонением дискретной случайной величины*?
4. Чем является мода дискретной случайной величины X?

Упражнения

А

53.1. Найдите моду и математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения (табл. 35):

Таблица 35

X	1	2	4
P	0,1	0,3	0,6

53.2. Дискретная случайная величина X задана значениями: 2; 4; 7; 8; 9. Закон распределения случайной величины задан таблицей 36.

Таблица 36

X	2	4	7	8	9
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найдите математическое ожидание и моду.

53.3. Найдите дисперсию случайной величины X, заданной рядом распределения (табл. 37).

Таблица 37

X	1	2	4
P	0,1	0,3	0,6

53.4. Известны математические ожидания независимых случайных величин X и Y: $M(X) = 5$, $M(Y) = 9$. Найдите математическое ожидание случайной величины:

1) $Z = 3X + Y$; 2) $Z = 2X - Y + 5$; 3) $Z = XY$.

53.5. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения вероятностей (табл. 38, 39):

Таблица 38

X	1	3
P	0,7	0,3

Таблица 39

Y	2	4
P	0,6	0,4

Найдите математическое ожидание случайной величины:

1) $Z = X + Y$; 2) $Z = 2X + 3Y$; 3) $Z = X \cdot Y$.

В

53.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию, если закон распределения случайной величины задан таблицей 40.

Таблица 40

X	3	4	6	7	8
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

53.7. Найдите математическое ожидание и дисперсию, используя закон распределения случайной величины, заданный таблицей 41.

Таблица 41

X	2	5	7	10
P	0,2	0,4	0,2	0,2

53.8. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины $2X$ (табл. 42).

Таблица 42

X	4	5	6
P	0,2	0,3	0,5

53.9. Вычислите $M(X+Y)$, $D(X+Y)$, если независимые случайные величины X и Y распределены по следующему закону (табл. 43, 44):

Таблица 43

X	6	12	14	20
P	0,25	0,3	0,2	0,25

Таблица 44

Y	3	8	12	16
P	0,2	0,3	0,2	0,3

53.10. Заданы законы распределения точного попадания двух стрелков при одном выстреле (табл. 45, 46):

Таблица 45

X	8	8	10
P	0,3	0,2	0,5

Таблица 46

Y	8	9	10
P	0,5	0,2	0,3

Какой стрелок точнее попадает в цель?

53.11. Найдите величины $M(X)$, $D(X)$, $M(2X + 5)$, если закон распределения случайной величины задан таблицей 47.

Таблица 47

X	2	3	4	5
P	0,3	0,1	0,5	0,1

C

53.12. $X(-1;\ 0;\ 1)$ и $M(X) = 0{,}1$; $M(X^2) = 0{,}9$. Найдите вероятности, соответствующие значениям случайной величины, и составьте закон распределения.

53.13. Дан ряд возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Известны $M(X) = 2{,}3$, $M(X^2) = 5{,}9$. Найдите вероятности: p_1, p_2, p_3, соответствующие значениям x_1, x_2, x_3.

53.14. В партии из 10 деталей содержится 3 нестандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины X — числа нестандартных деталей среди двух отобранных.

53.15. Найдите дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события A в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,2.

53.16. Дискретная случайная величина X имеет только три возможных значения: $x_1=1$, x_2 и x_3, причем $x_1 < x_2 < x_3$. Вероятность того, что X примет значения x_1 и x_2, соответственно равна 0,3 и 0,2. Найдите закон распределения величины X, зная ее математическое ожидание $M(X) = 2{,}2$ и дисперсию $D(X) = 0{,}76$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ

Блез Паскаль
(1623—1662)

53.17. Впервые понятие математического ожидания в теории вероятностей появилось из переписки Б. Паскаля — французского математика, механика, физика, литератора и философа и П. Ферма — французского математика, по профессии юриста.

Пьер де Ферма
(1601—1665)

ПОВТОРИТЕ

53.18. Найдите значение углового коэффициента касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $y = x^2 - 3x$, $x_0 = 2$; 2) $y = \sqrt{3-x}$, $x_0 = 2$;

3) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$, $x_0 = 3$.

53.19. Найдите значение $y = f''(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = \cos 3x$, $x_0 = \pi$; 2) $f(x) = \sin 4x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = \sin^2 3x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

53.20. Постройте график функции:

1) $f(x) = 2|\cos x|$; 2) $f(x) = 2\cos x + |\cos x|$; 3) $f(x) = 2 - |\cos x|$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Дискретная и непрерывная случайные величины, ряд распределения дискретной случайной величины, закон распределения случайной величины, вероятность события, перестановки, сочетания, бином Ньютона.

§54. ВИДЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Вы ознакомитесь с понятиями: *биномиальное распределение, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение дискретных случайных величин*;
научитесь распознавать виды распределения дискретных случайных величин: биномиальное распределение, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Биномиальное распределение, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение дискретных случайных величин

В зависимости от того, по каким формулам вычисляются вероятности дискретных случайных величин, закон их распределения имеет свое название. Из них чаще других встречаются биномиальный, геометрический, гипергеометрический законы распределения дискретной случайной величины.

Определение. ***Биномиальным законом распределения дискретной случайной величины*** *называется распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли.*

Рассмотрим опыт, с которым связано событие A. Пусть вероятность того, что при каждом из n независимых опытов (испытаний) событие A появится, равна p, а не появится — $q = 1 - p$. Тогда закон распределения этой случайной величины X по формуле Бернулли будет иметь вид: $P_n(k) = C_n^k\ p^k q^{n-k}$, где $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Таблица распределения случайной величины X имеет вид (табл. 48):

Таблица 48

X	0	1	...	k	...	n
P	q^n	npq^{n-1}	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

ПРИМЕР **1.** Подбрасываем монету 6 раз. Вероятность появления герба равна 0,5. Случайная величина X — число появлений герба. Построим ее ряд распределения.

Решение. Может оказаться, что все 6 раз герб не выпадет ни разу или только 1 раз, или 2 раза, или 3 раза и т. д., или 6 раз. Тогда число появлений герба: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 — случайная величина, обозначим ее X, и она принимает отдельные, изолированные друг от друга значения: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$; $x_6 = 5$; $x_7 = 6$. Найдем соответствующие вероятности, используя формулу Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Получим:

$C_6^0 0{,}5^0 0{,}5^6 = 0{,}5^6 = 0{,}015\,625;$

$C_6^1 0{,}5^1 0{,}5^5 = 6 \cdot 0{,}5^6 = 0{,}09\,375;$

$C_6^2 0{,}5^2 0{,}5^4 = 15 \cdot 0{,}5^6 = 0{,}234\,375;$

$C_6^3\ 0{,}5^3 0{,}5^3 = 20 \cdot 0{,}5^6 = 0{,}3125;$

$C_6^4\ 0{,}5^4 0{,}5^2 = 15 \cdot 0{,}5^6 = 0{,}234\,375;$

$C_6^5\ 0{,}5^5 0{,}5^1 = 6 \cdot 0{,}5^6 = 0{,}09\,375;$

$C_6^6\ 0{,}5^6 0{,}5^1 = 0{,}5^6 = 0{,}015\,625.$

Таблица 49

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,015 625	0,09 375	0,234 375	0,3125	0,234 375	0,09 375	0,015 625

Геометрическое распределение

Определение. ***Геометрическим законом распределения дискретной случайной величины*** *называется распределение вероятностей, определяемое формулой $P(X = k) = q^{k-1}p$, где в каждом независимом опыте (испытании) событие A появится с вероятностью p, и с вероятностью q — не появится. Опыт (испытание) заканчивается, когда событие A появится в k-ом опыте (испытании).*

Поскольку событие A появится в k-ом опыте (испытании), то в предшествующих $k - 1$ опытах (испытаниях) оно не появится. По теореме умножения вероятностей независимых событий получим $P(X = k) = q^{k-1}p$.

Убедитесь, что подставляя в выражение $q^{k-1}p$ вместо k числа 1, 2, ..., получим геометрическую прогрессию: p, pq, pq^2, pq^3, ...
Назовите первый член и знаменатель этой прогрессии.
Почему эта прогрессия является бесконечно убывающей?

В связи с тем, что используя формулу расчета вероятности $P(X = k) = q^{k-1}p$ при $k = 1, 2, ...$, получается геометрическая прогрессия. Соответствующее распределение случайной величины назвали *геометрическим распределением*.

ПРИМЕР

2. Подбрасываем монету 6 раз. Вероятность появления герба равна 0,5. Случайная величина X — число появлений герба. Рассмотрим событие A — появление герба при k-ом опыте (испытании). Построим ее ряд распределения.

Решение. Может оказаться, что все 6 раз герб не выпадет ни разу или только 1 раз, или 2 раза, или 3 раза и т. д., или 6 раз. Тогда число появлений герба: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 — случайная величина, обозначим ее X, и она принимает отдельные, изолированные друг от друга значения: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$; $x_6 = 5$; $x_7 = 6$. Найдем вероятность появления герба при k-ом опыте (испытании). Используя формулу $P = q^{k-1}p$, получим ряд распределений (табл. 50):

Таблица 50

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03 125	0,015 625	0,0 078 125

Определение. ***Гипергеометрическим законом распределения дискретной случайной величины*** *называется распределение вероятностей, определяемое формулой* $P(m) = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, *где N — общее число элементов некоторой совокупности; M — число элементов этой совокупности, обладающих некоторым свойством; n — число элементов, выбранных наугад из N элементов; m — число элементов, обладающих некоторым свойством среди выбранных n элементов.*

Поскольку число элементов (m), обладающих некоторым свойством среди выбранных n элементов, является случайной величиной при заданных значениях N, M и n, то значения случайной величины и соответствующие им вероятности, полученные по формуле $P(m) = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, образуют распределение случайной величины — числа выбранных элементов m в выборке n.

ПРИМЕР

3. В ящике 6 синих шаров и 4 красных. Вытаскиваем 5 шаров. Рассмотрим событие A — появление синего шара. Число появлений синего шара — случайная величина X, которая принимает значения:

$x_1 = 1$ (из 5 вынутых шаров достали 1 синий шар);
$x_2 = 2$ (из 5 вынутых шаров достали 2 синих шара);
$x_3 = 3$ (из 5 вынутых шаров достали 3 синих шара);
$x_4 = 4$ (из 5 вынутых шаров достали 4 синих шара);
$x_5 = 5$ (из 5 вынутых шаров достали 5 синих шаров). Построим ее ряд распределения.

Решение. $N = 10$, $M = 6$ и $n = 5$. Используя формулу

$$P(m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$ получим:

$$P(x_1)=\frac{C_6^1C_4^4}{C_{10}^5}=\frac{\frac{6!}{5!}\cdot 1}{\frac{10!}{5!5!}}=\frac{6!5!5!}{5!10!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=\frac{1}{42}.$$

$$P(x_2)=\frac{C_6^2C_4^3}{C_{10}^5}=\frac{\frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{4!}{3!}}{\frac{10!}{5!5!}}=\frac{6!4!5!5!}{2!4!3!10!}=\frac{4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=\frac{5}{21}.$$

$$P(x_3)=\frac{C_6^3C_4^2}{C_{10}^5}=\frac{\frac{6!}{3!3!}\cdot\frac{4!}{2!2!}}{\frac{10!}{5!5!}}=\frac{6!4!5!5!}{3!3!2!2!10!}=\frac{4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=\frac{10}{21}.$$

$$P(x_4)=\frac{C_6^4C_4^1}{C_{10}^5}=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^5}=\frac{5}{21}.$$

$$P(x_5)=\frac{C_6^5C_4^0}{C_{10}^5}=\frac{C_6^1C_4^4}{C_{10}^5}=\frac{1}{42}.$$

Таблица 51

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

Закон больших чисел

Вы ознакомитесь с формулировкой закона больших чисел.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Закон больших чисел

Очевидно, что результат каждого отдельного опыта является случайной величиной, заранее неизвестной, так как исход опыта зависит от многих случайных причин, которые заранее нельзя учесть. Вместе с тем, средний результат при неоднократном повторении опытов становится закономерным, теряя случайный характер. Это следует из нескольких теорем, обобщенное название которых носит название *закона больших чисел*. В этих теоремах показывается приближение средних характеристик при соблюдении определенных условий к некоторым постоянным значениям. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли.

Теорема Чебышева. *При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию.*

Теорема Бернулли. *Если в каждом из n независимых опытов вероятность появления события A постоянна и равна p, то при достаточно большом числе испытаний вероятность того, что модуль отклонения* *относительной частоты появлений A в n опытах от p будет сколь угодно малым, как угодно близка к* 1.

Суть закона больших чисел состоит в том, что конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате множества таких явлений, случайные отклонения от среднего, неизбежные в каждом отдельном случае, в массе таких случаев почти всегда взаимно погашаются и выравниваются.

1. Перечислите виды распределения дискретных случайных величин.
2. В каких случаях используют биномиальное распределение дискретной случайной величины X?
3. В каких случаях используют геометрическое распределение дискретной случайной величины X?
4. В каких случаях используют гипергеометрическое распределение дискретной случайной величины X?
5. В чем заключается суть закона больших чисел?

Упражнения

A

54.1. 1) Производится серия из 6 независимых испытаний. Событие X имеет вероятность $p = 0{,}6$. Найдите вероятность появления события X при этих испытаниях четыре раза.

2) Производится серия из 8 независимых испытаний. Событие X имеет вероятность $p = 0{,}7$. Найдите вероятность появления события X при этих испытаниях пять раз.

54.2. Найдите вероятность того, что при десяти бросаниях игральной кости 4 очка выпадут ровно два раза.

B

54.3. Монета подбрасывается четыре раза. Вероятность появления герба равна 0,5. Случайная величина X — число появлений герба. Постройте ее ряд распределения.

54.4. Студент колледжа сдает 6 экзаменов. Вероятность сдачи каждого экзамена равна 0,5. Случайная величина X — число сдавших экзаменов студентом. Постройте ряд распределения величины X.

54.5. В ящике 5 желтых шаров и 3 красных. Вытаскиваем 4 шара. Рассмотрим событие A — появление желтого шара. Составьте ряд распределения случайной величины A.

C

54.6. В классе 21 учащийся, из них 5 девочек. Для посещения музея наудачу выбирают трех учащихся. Составьте ряд распределения дискретной случайной величины X — числа девочек из отобранных учащихся. Найдите математическое ожидание величины X.

54.7. 1) Найдите вероятность того, что при 8 бросках игральной кости, 2 очка выпадут не более трех раз.
2) Найдите вероятность того, что при 10 бросках игральной кости, 4 очка выпадут не более двух раз.

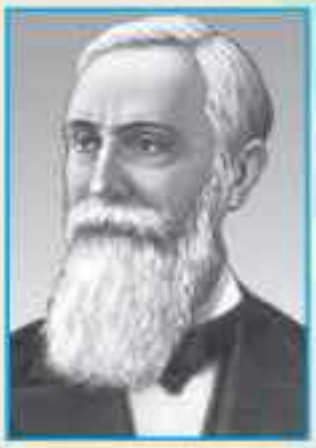
54.8. Вероятность появления события A в испытании равна 0,25. Испытания повторяли независимым образом десять раз. Найдите вероятность того, что событие A появится не более двух раз.

54.9. В приборе стоят 6 одинаковых предохранителей. Для каждого из них вероятность испортиться после 1000 часов работы равна 0,4. Прибор требует ремонта, если испортилось не менее двух предохранителей. Найдите вероятность того, что прибор потребует ремонта после 1000 часов работы, если предохранители портятся независимо друг от друга.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ

Якоб Бернулли (1655—1705)

54.10. Якоб Бернулли — один из основателей теории вероятностей. Доказал частный случай закона больших чисел — теорему Бернулли.
Пафнутий Львович Чебышев — величайший русский математик XIX века, основоположник петербургской математической школы, академик Петербургской академии наук (с 1859 г.) и еще 24 академий мира.



Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894)

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Заполните таблицу 52, поставив (+) или (−) в соответствующей строке.

Таблица 52

п/п	Величина	Случайная	Непрерывная
1	Температура тела при его нагревании		
2	Количество посетителей кинотеатра в течение дня		
3	Выпадение цифры 5 при трехкратном бросании игральной кости		
4	Количество пассажиров, вышедших из маршрутного такси на остановке N		
5	Скорость движения моторной лодки по течению реки		

2. Заполните таблицу 53, задающую закон распределения случайной величины X.

Таблица 53

X	20	25	30	35	40
P	0,15	0,25	0,25	A	0,15

Значение A равно:

A) 0,25; B) 0,2; C) 0,15; D) 0,1.

3. В корзине находятся 5 синих шаров и 3 красных. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления синего шара. Найдите вероятность появления синего шара при третьем вынимании шара из корзины:

A) $\frac{5}{64}$; B) $\frac{5}{56}$; C) $\frac{2}{37}$; D) $\frac{3}{35}$.

4. Стрелок производит три независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле составляет 0,6. Составьте закон распределения числа попаданий. Найдите наибольшее значение вероятности попаданий:

A) 0,216; B) 0,26; C) 0,3; D) 0,31.

5. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения (табл. 54):

Таблица 54

X	2	3	4
P	0,2	0,4	0,4

Найдите математическое ожидание величины X:

A) 3,0; B) 3,1; C) 2,8; D) 3,2.

6. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения (табл. 55):

Таблица 55

X	2	3	4
P	0,4	0,4	0,2

Найдите дисперсию величины X:

A) 0,56; B) 0,64; C) 0,66; D) 0,58.

7. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения вероятностей (табл. 56, 57):

Таблица 56

X	2	3
P	0,6	0,4

Таблица 57

Y	2	4
P	0,6	0,4

Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 3X + 4Y$:

A) 18,2; B) 18,4; C) 19,4; D) 20,4.

8. Найдите значение величины $M(2X + 3)$, если закон распределения случайной величины X задан таблицей 58:

Таблица 58

X	3	4	5	6	7
P	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

A) 12,4; B) 10,4; C) 12,2; D) 12,6.

9. Производится серия из 5 независимых испытаний. Событие X имеет вероятность $p = 0{,}8$. Найдите вероятность появления события X при этих испытаниях ровно три раза:

A) ≈0,352; B) ≈0,296; C) ≈0,306; D) ≈0,307.

10. Вероятность появления события A в испытании равна 0,4. Испытания повторяли независимым образом десять раз. Вероятность того, что событие A по явится не более четырех раз, вычисляется по формуле:

A) $p = \sum\limits_{n=0}^{4} C_{10}^{n} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-n}$; B) $p = \sum\limits_{n=0}^{4} C_{10}^{n} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{10-n}$;

C) $p = \sum\limits_{n=0}^{4} C_{10}^{n} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{9-n}$; D) $p = \sum\limits_{n=0}^{3} C_{10}^{n} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10-n}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА ЗА 10 КЛАСС

Вычисления

1. Найдите значение выражения:

1) $\arccos(-1) - \arccos 0 - \operatorname{arctg} 1$;

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arcctg} 1$;

3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin 1$;

4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2} - \arccos 0$.

2. Найдите значение выражения:

1) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

3. Найдите значение выражения:

1) $\arcsin\left(\cos\frac{50\pi}{14}\right)$; 2) $\arccos\left(\sin\frac{27\pi}{7}\right)$; 3) $\arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{3}\right)$;

4) $\arcsin(\sin 6)$; 5) $\arcsin(\cos 8)$; 6) $\arccos(\cos 10)$.

4. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = 3 + (2x - 1)^2 + 4\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = 3\sqrt{2x} - \frac{5}{x} + 2x - 1$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = (3x + 4)^2 + \frac{4}{x+1}$, $x_0 = -2$;

5) $f(x) = \sin(3x - 2\pi) + \pi$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

6) $f(x) = \cos(2x - \pi) + \pi$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5. Найдите значение углового коэффициента касательной к графику $y = f(x)$ функции в точке с абсциссой x_0:

1) $y = \frac{2x+1}{x-1}$; 2) $y = \frac{x}{x+1} + \sqrt{3-x}$, $x_0 = 2$;

3) $y = \frac{2x-1}{x+1} + \frac{9}{x}$, $x_0 = 3$.

6. Найдите значение $f''(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = \sin 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 2) $f(x) = \cos 4x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = \sin^2 3x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$:
1) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ на промежутке $[0; 3]$;
2) $y = 3x^5 - 5x^3$ на промежутке $[2; 3]$;
3) $y = \sqrt{x} - x$ на промежутке $[0;4]$;
4) $y = \frac{1}{x} + x$ на промежутке $[0,5; 4]$.

Предел и производная функции

8. Докажите:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 3} = \frac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x - 3x^3}{x^3 - 3x + 1} = -3$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2 - x - 6}{2 - x^2} = -1$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2 - 3x^3 + 4x + 11}{x^3 - x + 3} = -3$.

Найдите пределы функций (**9—10**):

9. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos 4x}{4x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos 6x}{\sin^2 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1 - x} - 1}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4 - x} - 2}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3 - x} - \sqrt{3}}{2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5 - x} - 2}{x - 1}$.

10. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(-2x)}{\operatorname{tg} 2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos 2x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2 - x - 6}{3 - x}$; 6) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 8}$; 8) $\lim\limits_{x\to -6}\frac{x^2 + 5x - 6}{2x + 12}$.

11. Найдите производную функции $f(x)$:
1) $f(x) = \sin^2 2x + \cos^2 2x - \sqrt{2x}$; 2) $f(x) = \sin^3 2x + \cos 3x - \frac{2}{x}$;
3) $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{ctg} 3x + \sqrt{\pi}$; 4) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x + \arccos x + \sqrt{x}$.

12. Найдите значение второй производной функции $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$ при $x = 2$.

13. Найдите производную функции:
1) $f(x) = \frac{2x - 1}{3x + 2} + 3x - 2$; 2) $f(x) = x\sin 2x + \sqrt{2 - 3x}$.

14. Найдите точки, в которых $f'(x) = 0$:
1) $f(x) = 3x^2 - x^3$; 2) $f(x) = 2x^2 - x^4$;
3) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x - 2$; 4) $f(x) = \sin^2 2x + 2x - 1$.

Уравнения и неравенства

15. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $f'(x) < 0$, если:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$;
2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x$;
3) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x$;
4) $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

16. 1) Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{x-3}{2} \leqslant \frac{\left(\sqrt{x-5}\right)^2}{x-6}$.

2) Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{6-x}{\sqrt{x^2-8x+7}}$.

3) Решите неравенство $(x^2 + 2x - 8) \cdot \sqrt{x^2 + x - 2} \leqslant 0$.

17. Решите неравенство $f'(x) \geqslant 0$, если:

1) $f(x) = \frac{1}{3}\cos 3x + \sin x$;
2) $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}\,x$;
3) $f(x) = 3\cos^2 x + 2\sin^2 x + x$;
4) $f(x) = \sin^2 3x - \frac{1}{12}\cos 6x + x$;
5) $f(x) = \arccos 3x + 2x + 3$;
6) $f(x) = \operatorname{arcctg} 2x + 2x - 1$.

18. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

1) $f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$;
2) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$;
3) $f(x) = 2x - \operatorname{tg} x$;
4) $f(x) = x + \operatorname{ctg} x$.

19. 1) Найдите все значения A, при каждом из которых уравнение $5\sin x + 2\cos x = A$ имеет решение.

2) Найдите все значения A, при каждом из которых уравнение $3\sin 2x - 4\cos 2x = A$ имеет решение.

20. Решите уравнение:

1) $\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2} = \frac{1}{4}$;
2) $\cos 10x + \sin 10x = \sqrt{15}\sin 15x$;
3) $\cos^2 x - \cos^2 2x + \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$;
4) $5\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x \cdot \sin x + 6\cos^2 x - 5 = 0$;
5) $(x-1)^2(x^2-2x) - 12 = 0$;
6) $(x-3)^2(x^2-6x) + 12 = 0$;
7) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+3) - 3 = 0$;
8) $(x^2+3x-4)(x^2+3x-2) + 1 = 0$;
9) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$;
10) $\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - \left(x - \frac{2}{x}\right) - 16 = 0$.

Функция и ее график

21. Найдите асимптоты графика функции:

1) $y = \frac{x+3}{x-1}$; 2) $y = \frac{4-2x}{x+3}$; 3) $y = \frac{x^2+4}{x-2}$; 4) $y = \frac{x^2-4x}{x+2}$.

22. Найдите координаты точки перегиба графика функции:

1) $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 1}$; 2) $y = \dfrac{3x^2}{x - 1}$; 3) $y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$; 4) $y = 1 - 3x + 2x^3$.

23. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$:

1) $f(x) = x^2 + 12x - 100$; 2) $f(x) = 5x^2 - 3x - 1$;
3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$; 4) $f(x) = x^3 - 3x$.
5) $f(x) = \dfrac{2x}{x + 1}$; 6) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 9}$;
7) $f(x) = \dfrac{x}{25 - x^2}$; 8) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$.

24. Докажите, что функция:

1) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ возрастает при $x > 1$;
2) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ убывает при $x < 0$ и при $0 < x < 1$.

25. Найдите критические точки функции:

1) $f(x) = 4 - 2x^2 + 7x^4$; 2) $f(x) = 4x - \dfrac{x^3}{3}$;
3) $f(x) = 9 + 8x^2 - x^4$; 4) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$.

Какие из них являются точками максимума, какие — точками минимума?

26. Составьте уравнение касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 0$:

1) $y = 2x - \sqrt{x + 1}$; 2) $y = \sqrt{3x + 1}$;
3) $y = 1 + \dfrac{1}{x + 2}$; 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$.

27. Найдите критические точки функции:

1) $f(x) = x - 2\sin x$; 2) $f(x) = x + \cos 2x$.

28. Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = \sqrt{3x + 1}$, параллельной прямой $y = \dfrac{3}{4}x$;
2) $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$, параллельной прямой $y = -x + 5$.

29. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке:

1) $f(x) = \dfrac{x}{8} + \dfrac{2}{x}$, $x \in [1; 6]$; 2) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x$, $x \in [0; 3]$;
3) $f(x) = x^3 - 12x$, $x \in [-1; 3]$; 4) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 - 1}$, $x \in [-4; -2]$.

30. Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 1). По графику функции найдите:

1) точки, в которых $f'(x) = 0$;
2) промежутки, в которых $f'(x) > 0$;
3) промежутки, в которых $f'(x) < 0$;

4) число точек перегиба графика функции;
5) точки экстремума функции.

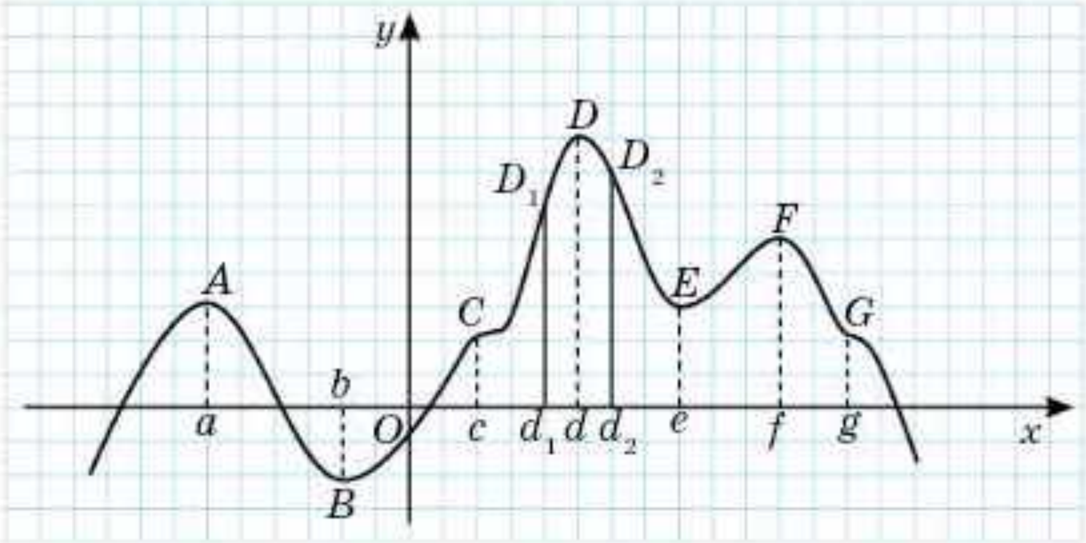


Рис. 1

31. Для функции, график которой дан на рисунке 2, запишите:
1) точки минимума функции; 2) точки максимума; 3) экстремумы функции.

32. Исследуйте функцию и постройте ее график:
1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;
3) $y = x + \frac{2}{x}$; 4) $y = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$.

33. Дан график производной функции $f'(x)$ (рис. 3).
Найдите точки максимума и точки минимума функции.

34. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s = 12t^2 - \frac{3}{2}t$, где $s(t)$ — длина пути в метрах, t — время в секундах. В какой момент времени из промежутка [4;10] скорость движения точки будет наибольшей и чему равна величина этой скорости?

35. Проволоку длиной 80 см требуется согнуть в прямоугольник так, чтобы площадь этого прямоугольника была максимальной. Найдите длины сторон этого прямоугольника.

36. 1) Найдите наибольшую площадь трапеции, три стороны которой равны a.

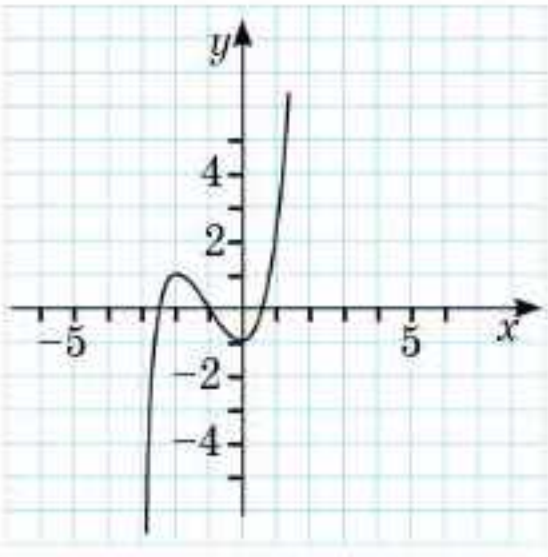


Рис. 2

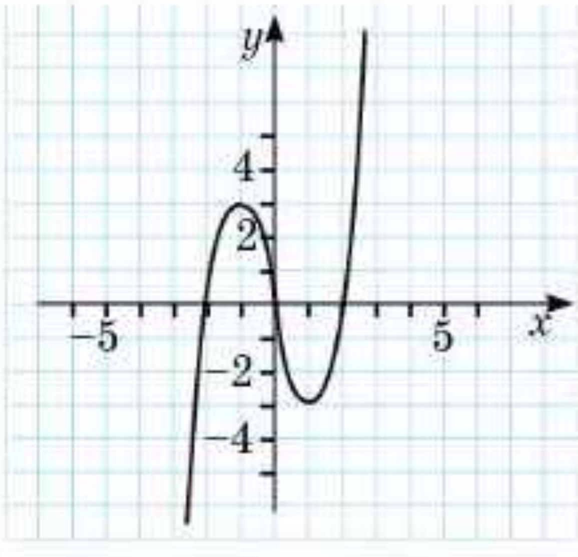


Рис. 3

2) Найдите координаты точки M параболы $y = x^2$, ближайшей к точке $A(-1; 2)$.

37. Печатный текст на странице книги занимает площадь в 363 см². Ширина полей этой страницы сверху и снизу составляет по 2 см, ширина боковых полей — по 1,5 см. Каковы должны быть размеры книжной страницы, чтобы площадь ее была наименьшей?

38. Периметр земельного участка в форме прямоугольной трапеции с острым углом в 30° равен 24 м. Найдите наибольшую площадь этого участка.

39. В равнобедренный прямоугольный треугольник с длиной катета в $2\sqrt{2}$ см вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две его вершины лежат на гипотенузе, две другие — на катетах треугольника. Найдите длины сторон прямоугольника.

40. 1) Число 16 представьте в виде произведения двух положительных чисел, значение суммы квадратов которых будет наименьшим.
2) Число 32 представлено в виде произведения двух положительных множителей. Найдите значения этих множителей, чтобы значение суммы одного из них на квадратный корень из другого было наименьшим.

***41.** К графику функции $y = 6x - x^2$ проведены две касательные. Одна касательная в точке графика функции с абсциссой $x_0 = -2$, другая — в точке максимума данной функции. Найдите площадь треугольника, образованного двумя этими касательными и осью ординат.

Практико-ориентированные задания

42. Первый оператор на компьютере набирает рукопись за 9 ч, второй оператор — за 6 ч. После того как первый оператор работал 3 ч, ему поручили другую работу. Оставшуюся часть рукописи набрал второй оператор.
1) За сколько часов второй оператор набрал оставшуюся часть работы?
2) За какое время выполнена вся работа?

3) Если половину рукописи наберет один оператор, вторую половину — другой оператор, то за какое время выполнится вся работа?

4) Если оба оператора одновременно набирают рукопись, то за какое время будет выполнена вся работа?

5) За выполненную работу операторам оплатили 9 000 тг. Какую сумму получит каждый оператор при совместной работе?

43. Семья из трех человек решила отдохнуть в г. Алматы. Можно ехать на поезде, можно — на своей автомашине. Билет на поезд на одного человека составляет 3460 тенге. Автомобиль расходует 11 л бензина на 100 км пути, длина пути по шоссе равна 600 км, цена бензина — 116 тг/л.

1) Сколько тенге надо заплатить за наиболее дешевую поездку в г. Алматы и обратно за трех человек?

2) Семья решила поехать в г. Алматы на поезде. На сколько дороже обойдется семье поездка в этом случае?

44. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок: либо 20% на звонки абонентам других компаний по Республике Казахстан, либо 25% на звонки зарубежных операторов, либо 15% на услуги мобильного интернета.

Клиент рассмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 3000 тг на звонки абонентам других компаний по Республике Казахстан, 2500 тг на звонки зарубежных операторов и 2000 тг на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же.

1) Какую из скидок выгоднее выбрать клиенту?

2) Сколько тенге составит эта скидка?

3) Если за месяц на звонки по Республике Казахстан будет потрачено 3500 тг, выгоднее ли взять скидку 20% на звонки абонентов других компаний по Республике Казахстан и на сколько?

45. Строительный подрядчик планирует закупить 20 т облицовочного кирпича у одного из трех поставщиков. Масса одного кирпича составляет 5 кг. Цены и условия доставки приведены в таблице 59.

Таблица 59

Поставщик	Цена кирпича	Стоимость доставки	Дополнительные условия
A	254 тг/шт.	190 000 тг	Нет
B	260 тг/шт.	150 000 тг	Если стоимость заказа выше 1 500 000 тг, то доставка со скидкой 40%
C	270 тг/шт.	140 000 тг	При заказе свыше 1500 000 тг доставка со скидкой 70%

1) Во сколько тенге обойдется наиболее дешевый вариант покупки?

2) Если подрядчик решил приобрести 30 т облицовочного кирпича, то к какому поставщику ему следует обратиться, чтобы иметь меньшие затраты?

46. В сосуд формы прямоугольного параллелепипеда налили 1700 см^3 воды. Уровень воды в сосуде при этом достиг высоты 10 см. Когда в жидкость полностью погрузили деталь, тогда уровень воды в сосуде поднялся на 5 см.

1) Чему равен объем этой детали?

2) Если уровень воды в этом сосуде равен 15 см, то каков объем воды в сосуде?

3) Если объем детали, опущенной в этот сосуд, равен 1700 см^3, то на сколько сантиметров поднимется уровень воды в этом сосуде?

47. Младшему школьнику в сутки нужно потреблять примерно 2 л жидкости. Во время физических нагрузок потребность организма в жидкости повышается в два раза.

1) Сколько жидкости должен употреблять в сутки школьник, занимающийся спортом? (Источником жидкости являются не только напитки, но и другие блюда. Дети, которые занимаются спортом, нуждаются в дополнительном количестве жидкости, поскольку во время тренировки значительная часть воды выводится с потом, т. е. расходуется в процессе терморегуляции).

2) На перерывах младший школьник в день, посещая столовую, употребляет кашу, 1 стакан чая или 1 стакан яблочного сока с булочкой. Стоимость каши — 150 тг, булочки — 55 тг, сладкого чая — 35 тг, яблочного сока — 180 тг. Проезд в городском транспорте составляет 40 тг. Какую сумму должны дать родители школьнику на один день учебы в школе?

3) Школа работает по пятидневке. Какую сумму должны дать родители школьнику на неделю, если он три дня покупает чай, два дня — яблочный сок?

48. Суточная потребность организма ребенка в кальции составляет 1100 мг. (Кальций участвует в образовании костей и зубов, необходим для нормальной деятельности нервной, эндокринной и мышечной систем. Наиболее богаты кальцием молочные продукты). Для изготовления 1 кг сыра требуется 10 л молока. 90 г сыра обеспечивает организм человека дневной нормой кальция, а молока для этого нужно 3 литра.

1) Сколько кальция нужно ребенку в неделю, в месяц?

2) Сколько нужно молока для изготовления 5 кг сыра? 10 кг?

3) Сколько сыра надо ребенку на месяц, если он употребляет сыр четыре раза в неделю?

49. В гимназии общественно-гуманитарного направления все учащиеся в классе изучают иностранные языки: немецкий, французский и английский. Из них английский изучают все дети, немецкий — 22 учащихся, французский — 13, немецкий и французский одновременно — 9 человек. Найдите число учащихся в классе.

50. В коробке находятся 27 карандашей красного, синего и зеленого цветов. Красных карандашей в 14 раз больше, чем синих. Сколько карандашей зеленого цвета находится в коробке?

Задания повышенной сложности

51. При каких натуральных n дробь $\dfrac{2n^2-3n+2}{2n-1}$ есть целое число?

52. Найдите значение суммы $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+50\cdot 2^{49}$.

***53.** Докажите, что если $a(a+b+c)<0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два действительных корня.

54. Учитель написал на листке бумаги число 20. 35 учащихся передают листок друг другу и каждый из них прибавляет к числу или отнимает от него единицу — как желает. Может ли в результате получиться число 10?

***55.** Решите уравнение $\sin^{20}x\cdot\cos^{24}x=0{,}0001$.

***56.** На олимпиаде 10 учащихся решили 35 задач. Известно, что среди них есть решившие ровно одну, ровно две и ровно три задачи. Докажите, что среди учащихся есть один, решивший не менее пяти задач.

***57.** Решите уравнение $\mathrm{tg}^2\pi(x+y)+\mathrm{ctg}^2\pi(x+y)=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}}+1$.

58. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\ldots+\dfrac{n}{(n+1)!}$.

***59.** Докажите, что $21+21^2+21^3+21^4+\ldots+21^{2007}+21^{2008}$ делится нацело на 11.

60. Докажите, что при любом x имеет место неравенство $x^8+x^6-4x^4+$ $+x^2+1\geqslant 0$.

61. Докажите неравенство $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$, где a, b, c — положительные числа.

62. Докажите неравенство $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)<n^n$.

63. Докажите, что если $a+b+c\leqslant 3$ $(a\geqslant 0, b\geqslant 0, c\geqslant 0)$, то $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+$ $+\dfrac{c}{c+1}\leqslant\dfrac{3}{2}$.

64. Найдите множество значений функции $y=\sin^2x-\sin x$.

65. Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{16}{x^2-6x+17}$.

***66.** Найдите функцию $f(x)$, если для всех $x \neq 0$, $x \neq 1$ выполняется $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$.

67. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 5\left(\frac{x}{3} + \frac{4}{x}\right)$; 2) $\frac{x^2-6x-9}{x} = \frac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$;

3) $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$; 4) $x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 7$.

68. Решите уравнение $2\cos^4 x - 3\sin^2 x = a$, если один из его корней равен $\frac{\pi}{6}$.

***69.** 1) При каких значениях параметра a неравенство $(a+2)\sin x - 3 > 0$ выполняется при всех значениях x?

2) При каких значениях параметра a неравенство $(a-1)\cos x - 2 < 0$ выполняется при всех значениях x?

***70.** Решите неравенство:

1) $\arccos\frac{2-x}{x} < \frac{2\pi}{3}$; 2) $\arcsin\frac{2-x}{x} \geqslant \frac{\pi}{6}$.

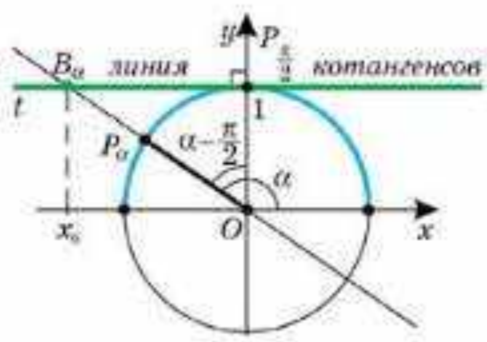
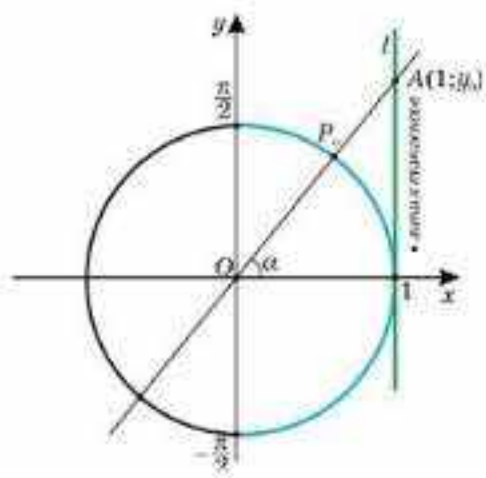
Глоссарий

Арккосинус	Функция, которая является обратной к функции $y = \cos x$, называется *арккосинусом* и обозначается $y = \arccos x$.
Арксинус	Функция, которая является обратной к функции $y = \sin x$, называется *арксинусом* и обозначается $y = \arcsin x$.
Арккотангенс	Функция, которая является обратной к функции $y = \mathrm{ctg}\, x$, называется *арккотангенсом* и обозначается $y = \mathrm{arcctg}\, x$.
Арктангенс	Функция, которая является обратной к функции $y = \mathrm{tg}\, x$, называется *арктангенсом* и обозначается $y = \mathrm{arctg}\, x$.
Арккосинус числа a	*Арккосинусом числа* a, где $\|a\| \leq 1$, называется такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.
Арккотангенс числа a	*Арккотангенсом числа* a называется такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.
Арксинус числа a	*Арксинусом числа* a, где $\|a\| \leq 1$, называется такое число из числового отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.
Арктангенс числа a	*Арктангенсом числа* a называется такое число из числового интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.
Аркфункция	Функции, которые являются обратными к тригонометрическим функциям, называют *обратными тригонометрическими функциями*, или *круговыми функциями*, или *аркфункциями*.
Асимптота	Прямая a называется *асимптотой кривой (графика функции)*, если точка M, смещаясь вдоль графика этой функции, удаляется в бесконечность, а расстояние от нее до прямой a стремится к нулю.
Бесконечно малая функция	Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$ $(x \to \infty)$, если $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} f(x) = \infty$.
Биномиальные коэффициенты	Коэффициенты C_n^k в формуле бинома Ньютона называются *биномиальными коэффициентами*.
Биномиальный закон распределения дискретной случайной величины	*Биномиальным законом распределения дискретной случайной величины* называется распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли.
Взаимно-обратные функции	Если $y = \varphi(x)$ — функция, обратная функции $y = f(x)$, то говорят, что функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ *взаимно-обратные*.
Выпуклая вверх функция	Дифференцируемая функция называется *выпуклой вверх* на интервале X, если ее график расположен не выше касательной к нему в любой точке интервала X.
Выпуклая вниз функция	Дифференцируемая функция называется *выпуклой вниз* на интервале X, если ее график расположен не ниже касательной к нему в любой точке интервала X.
Выпуклая функция	Выпуклую вверх функцию часто называют *выпуклой*.

Продолжение

Вогнутая функция	Выпуклую вниз функцию часто называют *вогнутой*.
Вторая производная	*Второй производной функции $y = f(x)$* называется производная от производной $f'(x)$ и обозначают $f''(x)$.
Гармонические колебания	Движения, которые описываются законами, $f(t) = A\cos(\varpi t + \varphi)$ или $f(t) = A\sin(\varpi t + \varphi)$, называются *гармоническими колебаниями*. A называют *амплитудой колебаний*, ϖ — *частотой колебаний*, φ — *начальной фазой колебаний*. Период функций $f(t) = A\cos(\varpi t + \varphi)$ и $f(t) = A\sin(\varpi t + \varphi)$, равный $\frac{2\pi}{\varpi}$, называют *периодом гармонического колебания*.
Геометрический закон распределения дискретной случайной величины	*Геометрическим законом распределения дискретной случайной величины* называется распределение вероятностей, определяемое формулой $P(X = k) = q^{k-1}p$, где в каждом независимом опыте (испытании) событие A появится с вероятностью p, а с вероятностью q — не появится. Опыт (испытание) заканчивается, когда событие A появится в k-ом опыте (испытании).
Гипергеометрический закон распределения дискретной случайной величины	*Гипергеометрическим законом распределения дискретной случайной величины* называется распределение вероятностей, определяемое формулой $P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, где N — общее число элементов некоторой совокупности; M — число элементов этой совокупности, обладающих некоторым свойством; n — число элементов, выбранных наугад из N элементов; m — число элементов, обладающих некоторым свойством среди выбранных n элементов.
Гистограмма распределения	Ломаная линия, проходящая через точки $(x_i;\ p_i)$, абсциссы которых являются значениями случайной величины: x_1, x_2, x_3, ..., x_n, а ординаты — их вероятностями: p_1, p_2, ... , p_n, называется *многоугольником распределения*, а соответствующая гистограмма — *гистограммой распределения*.
Дискретная (прерывная) случайная величина	Случайные величины, принимающие только отдельные друг от друга значения, называются *дискретными* (*прерывными*) *случайными величинами*.
Дисперсия	*Дисперсией $D(x)$ дискретной случайной величины X* называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т. е. $D(X) = M((X-M(X))^2)$.
Дифференцирование	Процесс вычисления производной называется *дифференцированием*.
Дифференцируемая функция в точке	Функцию, имеющую конечную производную в данной точке, называют *дифференцируемой в этой точке*.
Дифференцируемая функция на множестве	Если функция имеет конечную производную в каждой точке множества, то говорят, что она дифференцируема на множестве.

Продолжение

Дробно-линейная функция	*Дробно-линейной функцией* называется функция вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad = bc$.
Комбинаторика	Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называется *комбинаторикой.*
Комбинаторные задачи	Задачи, в которых из элементов некоторого конечного множества по некоторым правилам составляются различные комбинации этих элементов и подсчитывается их число, называются *комбинаторными задачами.*
Корень многочлена	Число x_0 называется *корнем многочлена* $P(x)$, если при $x = x_0$ значение многочлена $P(x)$ равно 0.
Кортеж длины	*Кортежами длины k* называются упорядоченные наборы из k элементов.
Критические точки	Точки x_0, в которых производная $f'(x_0)$ равна нулю или не существует, называются *критическими точками.*
Левый предел функции	Если число A_1 есть предел функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к числу a так, что x принимает только значения, меньшие числа a, то число A_1 называется *левым пределом функции* $y = f(x)$ в точке a.
Линия котангенсов	Прямую t называют *линией котангенсов.* 
Линия тангенсов	Прямую l называют *линией тангенсов.* 
Максимум функции	Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции.*
Математическое ожидание	Для случайной дискретной величины X, заданной значениями $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ и соответствующими этим значениям вероятностями $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_n$ математическим ожиданием $M(X)$, называется *значение суммы произведений значений случайной величины* X на соответствующие этим значениям вероятности, т. е. $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$.

Продолжение

Минимум функции	Значение функции в точке минимума называется *минимумом функции.*
Многочлен	*Многочленом* называется сумма одночленов.
Многочлен стандартного вида	*Многочленом стандартного вида* называют многочлен, состоящий из одночленов стандартного вида, который не имеет подобных членов.
Многочлен степени n	*Многочленом степени n от переменного x* называется алгебраическое выражение вида: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, где n — целое неотрицательное число, $a_n, \ldots, a_1, a_0$ — любые числа, причем $a_n \neq 0$. Любое число называют *многочленом нулевой степени.*
Мода	*Модой дискретной случайной величины* называется значение дискретной случайной величины, вероятность которой наибольшая.
Наибольшее значение функции	*Наибольшим значением функции* $y = f(x)$ на промежутке X называют такое значение $f(x_0)$, что для любого $x \in X$, $x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$.
Наименьшее значение функции	*Наименьшим значением функции* $y = f(x)$ на промежутке X называют такое значение $f(x_0)$, что для любого $x \in X$, $x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.
Непрерывная случайная величина	Случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый интервал, называются *непрерывными случайными величинами.*
Непрерывность функции в точке	Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. В противном случае говорят, что функция $y = f(x)$ имеет разрыв в точке $x = x_0$.
Непрерывность функции	Если функция непрерывна во всех точках промежутка, то она называется *непрерывной на этом промежутке.*
Обратная функция	Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D, а E — множество ее значений. Обратная функция по отношению к функции $y = f(x)$ — это функция $x = g(y)$, которая определена на множестве E и каждому $y \in E$ ставит в соответствие такое значение $x \in D$, что $f(x) = y$.
Однородное тригонометрическое уравнение	Уравнение, у которого значение суммы показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ у всех членов в его левой части одинакова, а правая часть равна 0, называется *однородным тригонометрическим уравнением* относительно $\sin x$ и $\cos x$.
Однородный многочлен	*Однородным многочленом* называется многочлен, у всех членов которого значение суммы показателей степеней входящих в него переменных (неизвестных) одинакова.
Окрестность точки	*Окрестностью точки* называется любой интервал, содержащий эту точку.

Продолжение

Отклонение случайной величины	Разность между случайной величиной X и ее математическим ожиданием $X - M(X)$ называется *отклонением случайной величины*.
Перестановками из n элементов без повторений	Упорядоченные множества, содержащие все n элементов множества $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, называются *перестановками из n элементов без повторений*.
Правило произведения	Если элемент $x \in X$ можно выбрать m способами, а элемент $y \in Y$ можно выбрать k способами, то пару "x и y" можно выбрать $m \cdot k$ способами.
Правило суммы	Если множества X и Y не имеют общих элементов и множество X содержит a элементов, а множество Y содержит b элементов, то объединение множеств X и Y содержит $(a + b)$ элементов. Если множества X и Y имеют c общих элементов и множество X содержит a элементов, а множество Y содержит b элементов, то объединение множеств X и Y содержит $(a + b)$ — c элементов. Другая формулировка правила суммы: Если элемент $a \in A$ можно выбрать m способами, а элемент $b \in B$ можно выбрать n способами, причем множества A и B не имеют общих элементов, то выбрать один элемент "a или b" можно $m + n$ способами.
Предел функции	*Пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к числу a, называется такое число A, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого $x \neq a$, удовлетворяющего неравенство $0 < \lvert x - a \rvert < \delta$, выполняется неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$.
Приращение аргумента	*Приращением аргумента для функции* $y = f(x)$ называется значение разности двух значений аргумента из области определения этой функции.
Приращение функции	*Приращением функции* $y = f(x)$ называется значение разности соответствующих двух значений функции из ее области (множества) значений.
Производная функции в точке x_0	*Производной функции* в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если таковой предел существует: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
Произведение событий	*Произведением событий* A и B называется событие, состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих одновременно событиям A и B. Обозначается: AB.
Размещения без повторений	*Размещениями без повторений* из n элементов по k называются упорядоченные множества из k элементов, выбранных из множества, содержащего n элементов.
Размещения с повторениями	*Размещениями с повторениями* из n элементов по k называются кортежи длины k, составленные из элементов множества X, содержащего n элементов.

Продолжение

Раскрытие неопределенностей	Вычисление пределов функций, представляющих собой неопределенности вида $\infty-\infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to a$ или $x \to \infty$ называется *раскрытием неопределенностей.*
Распределение случайной величины	Перечисление возможных значений случайной величины и их вероятностей называется *распределением случайной величины.*
Растяжение вдоль оси Oy в a раз	Если координаты точек $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ и $A_1(x_0; ay_0)$, B_1 $(x_1; ay_1)$, C_1 $(x_2; ay_2)$ связаны таким соотношением, то говорят, что точки $A(x_0; y_0)$, B $(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ переходят в точки $A_1(x_0; ay_0)$, B_1 $(x_1; ay_1)$, C_1 $(x_2; ay_2)$, где $a > 1$ в результате растяжения вдоль оси Oy в a раз.
Растяжение вдоль оси Ox	Если координаты точек $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, С $(x_2; y_2)$ и $A_1(ax_0; y_0)$, $B_1(ax_1;\ y_1)$, $C_1(ax_2;\ y_2)$ связаны таким соотношением, то говорят, что точки $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, C $(x_2; y_2)$ переходят в точки $A_1(ax_0; y_0)$, $B_1(ax_1; y_1)$, $C_1(ax_2; y_2)$, где $a >1$ в результате растяжения вдоль оси Ox в a раз. Если координаты точек $A_0(x_0;\ y_0)$ и $A_1(x_1;\ y_1)$ связаны соотношением $y_1 = y_0$; $x_1 = ax_0$, где $0 < a < 1$, то говорят, что точка $A_1(x_1; y_1)$ переходит в точку $A_0(x_0; y_0)$ в результате растяжения вдоль оси Ох в $\frac{1}{a}$ раз, где $0 < a < 1$.
Ряд распределения	Таблица, где перечислены возможные (различные) значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины X с соответствующими им вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, называется *рядом распределения дискретной случайной величины* X.
Сжатие вдоль оси Ox	Если координаты точек $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ и $A_1(ax_0; y_0)$, $B_1(ax_1;\ y_1)$, $C_1(ax_2;\ y_2)$ связаны таким соотношением, то говорят, что точки $A_1(ax_0;\ y_0)$, $B_1(ax_1;\ y_1)$, $C_1(ax_2;\ y_1)$ переходят в точки $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ в результате сжатия вдоль оси Ox в a раз, где $a > 1$. Если координаты точек $A_0(x_0;\ y_0)$ и $A_1(x_1;\ y_1)$ связаны соотношением $y_1 = y_0$; $x_1 = ax_0$, где $0 < a < 1$, то говорят, что точка $A_0(x_0; y_0)$ переходит в точку $A_1(x_1; y_1)$ в результате сжатия вдоль оси Ox в $\frac{1}{a}$ раз.
Сжатие вдоль оси Oy в $\frac{1}{a}$ раз	Если координаты точек $A(x_0;\ y_0)$, $B(x_1;\ y_1)$, $C(x_2;\ y_2)$ и A_1 $(x_0; ay_0)$, B_1 $(x_1; ay_1)$, C_1 $(x_2; ay_2)$ связаны соотношением, то говорят, что точки A $(x_0; y_0)$, B $(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ переходят в точки A_1 $(x_0; ay_0)$, B_1 $(x_1; ay_1)$, C_1 $(x_2; ay_2)$, где $0 < a < 1$ в результате сжатия вдоль оси Oy в $\frac{1}{a}$ раз.
Симметрический многочлен	Многочлен от x и y называется *симметрическим*, если при замене x на y, а y на x он становится тождественно равным данному многочлену.
Симметрический многочлен (возвратный)	Многочлен n-ой степени с одной переменной, в котором коэффициенты равноудаленных от концов членов равны, называется *симметрическим многочленом* (иногда такие многочлены называют *возвратными*).

Продолжение

Симметрическое уравнение	Уравнение n-ой степени с одной переменной, в котором коэффициенты равноудаленных от концов членов равны, называется *симметрическим уравнением.*
Синусоида	График функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ называется *синусоидой.*
Сложная функция	*Сложной функцией* (или *композицией*, или *суперпозицией функций*) от x называется функция $y = f(g(x))$, где в функции $y = f(x)$ вместо аргумента x используется другая функция $\varphi = g(x)$.
Случайная величина	*Случайная величина* — это величина, которая принимает в результате опыта одно из множества значений, причем появление того или иного значения этой величины до ее измерения нельзя точно предсказать.
Сочетания без повторений	*Сочетанием без повторений из n* элементов по k называется подмножество, содержащее k элементов множества, состоящего из n элементов.
Сочетания с повторениями	*Сочетанием с повторением* из n элементов различных типов по k называются их неупорядоченные наборы из k элементов, отличающиеся друг от друга только количеством элементов хотя бы одного типа.
Стационарная точка	*Стационарной точкой* называется такая точка x_0, в которой производная равна нулю: $f'(x_0) = 0$.
Степень многочлена	*Степенью многочлена стандартного вида* называется наибольшая степень из степеней входящих в него одночленов.
Степень одночлена	*Степенью одночлена* называется значение суммы показателей степеней входящих в него переменных (неизвестных).
Сумма событий	*Суммой событий* A и B называется событие, состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих одному из событий A или B. Обозначается: $A + B$.
Тангенсоида	График функции $y = \mathrm{tg}x$ называется *тангенсоидой.*
Точка максимума функции	Точка a называется *точкой максимума функции* $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки $x=a$, что для всех x, $x \neq a$ из этой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) < f(a)$.
Точка минимума	Точка a называется *точкой минимума функции* $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки $x=a$, что для всех x, $x \neq a$ из этой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) > f(a)$.
Точка перегиба	Точка M графика функции называется *точкой перегиба*, если в достаточно малой окрестности точки M кривая расположена по обе стороны от касательной, проведенной к графику функции в этой точке.
Точки разрыва	Пусть функция $y = f(x)$ имеет разрыв в точке с абсциссой x_0. Тогда: — если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ бесконечен, то говорят, что x_0 есть *точка разрыва* II *рода*;

Продолжение

	— если оба эти предела конечны и различны, то x_0 называется *точкой разрыва* I *рода* (*скачок*).
Точка устранимого разрыва	Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$, либо $f(x_0) \neq b$, либо $f(x_0)$ не существует, то x_0 называется *точкой устранимого разрыва.*
Точки экстремума функции	Точки максимума и минимума называются *точками экстремума функции.*
Тригонометрическое неравенство	*Тригонометрическим неравенством* называется неравенство, содержащее неизвестное (переменную) только под знаком тригонометрической функции.
Тригонометрическое уравнение	*Тригонометрическим уравнением* называется уравнение, содержащее неизвестное (переменную) только под знаком тригонометрических функций.
Условная вероятность	*Условная вероятность* — вероятность одного события при условии, что другое событие уже произошло. *Условной вероятностью A при условии B* (аналогично B при условии A) называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию AB, к числу элементарных событий, благоприятствующих событию B (аналогично событию A).
Формулы бинома Ньютона	Формулы (1) и (2) называются *формулами бинома Ньютона.* $(x + a)^n = x^n + n \cdot a \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^k x^{n-k} + \ldots + a^n$ (1) $(x + a)^n = C_n^0 \cdot a^0 \cdot x^n + C_n^1 \cdot a^1 \cdot x^{n-1} + C_n^2 \cdot a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot x^1 + C_n^n \cdot a^n \cdot x^0.$ (2)
Числовая функция	*Числовой функцией с областью определения D* называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу единственное число y, зависящее от x.
Члены многочлена	*Членами многочлена* называются все одночлены, входящие в многочлен.
Экстремумы	Значения функции в точках максимума и минимума функции называются ее *экстремумами.*

ОТВЕТЫ

Глава 6. МНОГОЧЛЕНЫ

30.1. 1) $x^3 - 3x^2 - x + 3$; 2) $x^3 - x^2 - 9x + 9$; 3) $x^3 - x^2 - 4x + 4$; 4) $x^3 - 2x^2 - 2x + 5$. **30.4.** 1) $-x^3 + 3x^2 + x + 1$; 2) $x^3 + 2x^2 - 18x + 27$; 3) $3x^3 + 10x^2 + 4x - 2$; 4) $2x^3 - 3x^2 - 2x - 3$. **30.5.** 1) Неверно; 2) неверно; 3) неверно; 4) верно. **30.8.** 1) $3x + 3y$; 2) $3x^2 + 5xy + 3y^2$; 3) $x^3 + 3yx^2 + 7xy^2 + 7x^2y + 3xy^2 + y^3$; 4) $x^5 - 3x^4y - 3xy^4 + y^5$. **30.9.** 1) $x^4 - 3xy^3 - 3x^3y + y^4$; 2) $yx^7 - 5x^8 - 5y^8 + xy^7$; 3) $5y^2x^7 - 6x^9 - 6y^9 + 5x^2y^7$. **30.10.** 1) $a = 3$, $p = 1$ или $a = -3$, $p = -1$; 2) $a = 5$, $p = 1$ или $a = -2,5$, $p = -2$. **30.11.** 1) $\frac{x}{2y}$; 2) $\frac{10bc^2}{3a}$. **30.12.** 1) 0,5; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) 1; 4) 6. **30.13.** 1) $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in Z$; 2) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n\right\}$, $n \in Z$; 3) $(\pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in Z$. **30.14.** 1) $(-\infty;\ -4] \cup \{-2\} \cup [3;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -6] \cup [1,5;\ 2]$; 3) $(-\infty;\ 1] \cup [1,5;\ 3)$. **31.2.** 1) $p = \pm\sqrt{5}$; 2) $p \neq \pm 2$; 3) $p = \pm 2$; 4) $p = 1,5$. **31.3.** 1) $a = 2$, $b = -4$; 2) $a = 3$, $b = -7$; 3) $a = -1$, $b = -3$; 4) $a = -5$, $b = -0,5$. **31.4.** 1) частное $x + 1$, остаток $x - 4$; 2) частное $2x + 4$, остаток $21x + 19$; 3) частное $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2\ x + 3$, остаток 8. **31.5.** 1) неверно; 2) верно; 3) неверно; 4) верно. **31.8.** 1) $a = 3$; 2) $a = -2$; 3) $a = -2$; 4) $a = 1$. **31.9.** 1) $K = 1$, $P = -17$, $M = 15$; 2) $K = -1$, $P = -3$, $M = 1$; 3) $K = 0$, $P = 0$, $M = 2$. **31.11.** 1) $a = -3$, $c = 2$; 2) $a = -5$, $c = 2$, или $a = -1$, $c = 1$. **31.12.** 1) $\varnothing$; 2) $\{-4\}$; 3) $\{-1\}$; 4) $\{-4;\ -3;\ 1;\ 2\}$. **31.14.** 1) $A(2;\ 0)$, $B(-4;\ 0)$, $C(0;\ 8)$; 2) убывает при $x \in (-\infty;\ -4]$ и $x \in (-1;\ 2]$, возрастает при $x \in [-4;\ -1]$ и $x \in [2;\ +\infty)$; 3) $x = -1$; 4) $p = 9$. **31.15.** 1) 25 км/ч; 2) 14 км/ч и 2 км/ч. **32.1.** 1) 3; 2) -2; 3) 0; 4) 2. **32.2.** 1) $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$; 2) $x^4 - 10x^2 + 9$; 3) $x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x$; 4) $x^4 - 6x^3 + x^2 + 24x - 20$. **32.3.** 1) 11; 2) 101; 3) 15; 4) 9. **32.5.** 3) *Указание*. Представим выражение в виде $6^{2n} - 2^{2n} = 36^n - 4^n = (36 - 4)(36^{n-1} + 36^{n-2} \cdot 4 + \ldots + 4^{n-1})$. Тогда очевидно, что множитель $(36 - 4) = 32$ делится на 32, значит, и все выражение делится на 32. **32.6.** 3) *Указание*. Представим выражение в виде $5^n + 13 \cdot 11^{2n} - 4 = 5^n + 1 + 13 \cdot 11^{2n} - 5 = (5^n + 1) + (13 \cdot 11^{2n} + 13) - 18$, разлагая первое и второе слагаемые на множители по формуле $x^{2n+1} + a^{2n+1}$, делаем вывод, что каждое слагаемое делится на 6. **32.7.** 3) Частное $2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 8$, остаток (-14). **32.8.** 1) $\frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$; 2) $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 3) $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$; 4) -1; 0,5; 2; 5) -1; $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; 6) -1. **32.9.** 1) $a = 2$; 2) $a = 2,5$; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) $a = 2\frac{1}{8}$. **32.10.** 0. **32.11.** 1) $(x + 1)(x - 2)(x - 3)$; 2) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 6)$; 3) $(x + 2)(x - 1) \cdot (x^2 - 3x - 1)$; 4) $(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x + 3)$. **32.12.** -32. **32.13.** 1) $R(x) = x + 2$; 2) $R(x) =$

$= -2x - 1$; 3) $R(x) = -\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3}$. **32.14.** 1) $R(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 2\frac{2}{3}$; 2) $R(x) = 4\frac{2}{3}x^2 - x - \frac{2}{3}$. **32.15.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-2; 2)$. **32.16.** 1) +; 2) –; 3) –; 4) +. **33.1.** 1) ±1; ±3; 2) ±1; ±2; ±4; 3) ±1; ±5; 4) ±1; ±2; ±3; ±6. **33.2.** 1) ±1; ±3; ±6; 2) ±1; ±2; ±4; 3) ±1; ±2; ±5; ±10; 4) ±1; ±2; ±3; ±6. **33.3.** 1) $(x-1)(x+1)(x-2)$; 2) $(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$; 3) $(x-2)\times$ $\times(x+2)(x-3)$; **33.4.** 1) $a = 1$; $p = -4$; 2) $a = 2$; $p = -1$; 3) $a = -1$; $p = -4$; 4) $a = 4$; $p = 3$. **33.5.** 1) –1 и 4; 2) 0 и 1; 3) –1 и 2,5; 4) 2 и 3. **33.6.** 1) $a = 1$; 2) $a = -1$; 3) $a = -2$; 4) $a = 4$. **33.7.** 1) $\{-2; 1; 3\}$; 2) $\{11; -2; -6\}$; 3) $\{-0,5; 1; 2\}$; 4) $\{-4; -2; 2\}$. **33.8.** 1) $P(x) =$ $= (x+1)(x-3)(x-2)^2$; 2) $P(x) = (x-1)^2(x-3)^2(x+2)^3$; 3) $P(x) = (x-2)(x+1)^2(x-4)^2\times$ $\times(x-1)^3$; 4) $P(x) = x(x-2)^2(x-5)^2(x-7)^2(x+3)^3$. **33.9.** 1) –17; 2) 31. *Решение*. Запишем разложение $P(x) = (x^2 - x - 6)\,K(x) + 4x - 3$, или $P(x) = (x+2)\,(x-3)\,K(x) + 4x - 3$. Подставим в это равенство значения $x = 3$ и $x = -2$, получим: $P(3) = (3+2)\,(3-3)K(3) +$ $+ 4\cdot3 - 3 = 9$, $P(-2) = (-2+2)(-2-3)\,K(-2) + 4(-2) - 3 = -11$. Тогда $P(3) - 2P(-2) =$ $= 9 - 2\cdot(-11) = 31$. **33.10.** 1) $\{2\frac{1}{8}; -1; 1; 1\frac{1}{4}\}$; *Указание*: найти, при каких значениях p квадратный трехчлен $x^2 + 2px + 1$ является полным квадратом и имеет корни, равные 4 и –2; 2) $\{-2\frac{1}{4}; 1\frac{4}{9}\}$; 0; 4}; 3) $\{-0,125; 1; 15\}$; 4) $\{0; 4; -2\frac{4}{3}; 6\frac{1}{4}\}$. **33.11.** *Указание*: разделите $P(x)$ на $K(x)$, остаток равен 0. **33.12.** 1) 7; 2) 23; 3) 6; 4) 18. **33.13.** 1) $A(-2; 0)$, $B(4; 0)$, $C(0; 8)$; 2) убывает при $x \in (-\infty; -2]$ и $x \in [1; 4]$, возрастает при $x \in [-2; 1]$; и $x \in [4; +\infty)$; 3) $x = 1$; 4) $p \in (0; 9)$. **33.14.** 1) $\{2; 3\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\{4; 5\}$; 4) $\varnothing$. **34.1.** 1) –3; 3; 2) –3; –2; 2; 3; 3) $-\sqrt{5}$; –2; 2; $\sqrt{5}$; 4) $-\sqrt{7}; -\sqrt{6}; \sqrt{6}; \sqrt{7}$. **34.2.** 1) $\{-0,5; 0,5; 2\}$; 2) $\{-3; 2; 3\}$; 3) $\{-1; 2 \pm \sqrt{3}\}$; 4) $\{-1; 1\}$. **34.4.** $m = -5$, $n = 30$, $x_3 = -2,5$. **34.5.** 1) $\{-3; 1\}$; 2) $\{2 \pm \sqrt{6}\}$; 3) $\{-3; 0\}$; 4) $\{-2; -1\}$. **34.6.** 1) $\{-2; 1\}$; 2) $\{-1; 4\}$; 3) $\{2; 3; \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}\}$; 4) $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. **34.7.** 1) $\{-1; 2\}$; 2) $\{1; 2\}$; 3) $\{-1; 3\}$. **34.8.** 1) $\{-7; -1; -4 \pm 2\sqrt{2}\}$; 2) $\{-3; 2\}$; 4) $\{-6; 1\}$.

34.9. 1) $\{2; \frac{1}{2}\}$; *Указание*: произвести замену $y = x + \frac{1}{x}$, тогда $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$; 2) $\{-2; \frac{1}{2};$ $-3; -\frac{1}{3}\}$. 3) $\left\{-2 \pm \sqrt{5}; \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$; 4) $\{-2; -1; 2 \pm \sqrt{2}\}$. **34.10.** 1) $\left\{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. *Указание*: разделите обе части уравнения на $x^2 \neq 0$ и после группировки произведите замену $y = x + \frac{1}{x}$, тогда $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$; 2) $\left\{2 \pm \sqrt{3}; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$; 3) $\left\{-2 \pm \sqrt{5}; \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$; 4) $\left\{-3,5; 1; \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}\right\}$. **34.11.** 1) $\left\{-1 \pm \sqrt{3}; \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$; 2) $\{1; 2\}$; 3) $\{-2; -1; 2 \pm \sqrt{2}\}$; 4) $\left\{1; 2; \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$. **34.12.** 1) $\left\{\frac{8}{5}; \frac{13}{12}\right\}$; 2) $\left\{\frac{9}{8}; \frac{16}{13}\right\}$; 3) $\left\{-\frac{5}{3}; -\frac{5}{4}; \frac{5}{2}; 5\right\}$. *Указание*: разделите уравнение на $x^4 \neq 0$; 4) $\left\{0; \frac{8}{5}; \frac{13}{12}\right\}$. *Указание*: разделите уравнение на $(x-2)^4 \neq 0$. **34.14.** 1) $x^2 + 7x + 10 = 0$; 2) $x^2 + 5x -$ $- 14 = 0$; 3) $7x^2 + 37x + 48 = 0$; 4) $x^2 + 2,6x + 43,2 = 0$. **34.15.** 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\operatorname{arctg}3 +$ $+ \pi n$, $n \in Z$; 2) $\operatorname{arctg}5 + \pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 4) πn; $-\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **35.1.** 1) 1 и 2; 2) –1 и 2,5; 3) –1 и 4; 4) 1 и 1,25.

35.2. 1) $x^3 - x^2 - 2x$; 2) $x^3 - x^2 - 4x + 4$; 3) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; 4) $x^3 - x^2 - 10x - 8$. **35.4.** 1) $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 6$, корни $\{-1, 1, 2\}$; 2) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$, корни $\left\{-1, \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}\right\}$. **35.5.** $2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$. **35.6.** $-5x^3 - 20x^2 - 7\frac{1}{2}x - 10$. **35.7.** *Указание*: пусть $x = a$, тогда $a^3 - (a + b + c)a^2 + (ab + ac + bc)a - abc = 0$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим тождество: $abc - abc = 0$, т.е. $0 = 0$. Значит, $x = a$ корень уравнения. Аналогично b и c. **35.8.** 1)$\{-3; -1; 2\}$. *Указание*. Так как $a = 1$, то по теореме Виета можем записать систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -5, \\ x_1x_2x_3 = 6. \end{cases}$

Решая систему уравнений, получим $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$; 2) $\{-3; 1; 5\}$. **35.9.** $a = 7$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$ или $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$. **35.10.** $a = 2$, $b = 3$. **35.11.** $a = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, или $a = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. *Решение*. Пусть x_1, x_2 и x_3 корни уравнения.

Тогда по теореме Виета можем составить систему уравнений: $\begin{cases} x_3 = x_1 + x_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2a - 3, \\ x_1x_2x_3 = -2. \end{cases}$

Из первого и второго уравнений находим $x_3 = a$. Подставим найденное значение в третье уравнение, получим $x_1x_2 + x_3^2 = 2a - 3$, или $x_1x_2 = -a^2 + 2a - 3$. Подставим найденное значение x_1x_2 в четвертое уравнение нашей системы, т. е. $x_3(-a^2 + 2a - 3) = -2$, или $a(-a^2 + 2a - 3) = -2$. Получим уравнение $-a^3 + 2a^2 - 3a + 2 = 0$, или $a^3 - 2a^2 + 3a - 2 = 0$. Сгруппируем члены уравнения $(a^3 - a) - (2a^2 - 4a + 2) = 0$, т. е. $a(a^2 - 1) - 2(a - 1)^2 = 0$, или $(a - 1)(a^2 - a + 2) = 0$. Отсюда $a = 1$, следовательно, $x_3 = 1$, тогда $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1x_2 = -2. \end{cases}$ Находим $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, или $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. **33.13.** 1) $A(-1; 0)$, $C(0; \sqrt{2} - 1)$; 2) убывает при $x \in [-2; -1]$, возрастает при $x \in [-1; +\infty)$; 3) $p \in (0; 1]$. **35.14.** 1) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$; 3) $[1; 4]$; 4) $[-6; -2] \cup [1{,}2; 6]$. **35.15.** 1) $[-3; -2)$; 2) $[-2; 3)$; 3) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; 4) $[-4; -2\frac{2}{3}] \cup [1; 4]$.

Глава 7. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

36.1. 1) 2; 2) 2; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 0; 5) 0. **36.3.** 1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 5; 5) 11; 6) 3. **36.4.** 1) 2; 2) 0,56; 3) 3; 4) 0; 5) 8; 6) 2,02. **36.6.** 1)3; 2) −2; 3) 3; 4) 1. **36.7.** 1) −2; 2) 1; 3) −5; 4) −1. **36.9.** 1) −1; 2) 1; 3) $-2\frac{1}{5}$; 4) −5. **36.10.** 1) 9; 2) 4; 3) −2; 4) −6. **36.11.** 1) 2; 2) −2; 3) 6; 4) 1. **36.12.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) −2; 3) −1; 4) −3. **36.13.** 1) $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{x + 2}$; 2) $f(x) = \frac{2x^2 + 12x + 16}{x + 2}$; 3) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$; 4) $f(x) = \frac{x\sqrt{-x} + 2\sqrt{-x}}{x + 2}$. **36.14.** 1) $f(x) = \frac{3 - x}{x + 5}$; 2) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2}$; 3) $f(x) = \frac{2 - 4x^2}{x^2 + 2}$; 4) $f(x) = \frac{x\sqrt{3} - 1}{x + 2}$. **36.15.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$. **36.16.** 1) −1; 2) 1; 3) 0; 4) 0. **36.17.** 1) 4; 2) 6; 3) $-\frac{1}{8}$; 4) −2; 5) 4; 6) 4. **36.19.** 1) 0,25; 2) 7; 3) 1. **36.20.** 1) $-\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha$. **36.21.** 1) $-\frac{4\pi}{3}$; 2) 3π; 3) $-\frac{9\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$. **37.1.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 2; 3) 0,8;

4) 2,5. **37.3.** 1) -2; 2) 4; 3) $-3,5$; 4) $-1,4$. **37.4.** 1) 0,5; 2) 2; 3) 0,8; 4) 2,5. **37.5.** 1) 1; 2) 1; 3) 0,4; 4) 2. **37.6.** 1) 5; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $\frac{13}{6}$; 4) 2; 5) не существует; 6) 2. **37.7.** 1) 1; 2) -1; 3) 1; 4) 2; 5) 8; 6) 6. **37.8.** 1) 2; 2) $-0,7$; 3) 1; 4) $-\frac{5}{3}$. **37.9.** 1) 16; 2) 4; 3) 2; 4) 1. **37.10.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **37.11.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 1,5; 3) $-0,8$; 4) 0,5. **37.12.** 1) 7; 2) -9; 3) -3; 4) -7; 5) 8; 6) 16. **37.13.** 1) -2; 2) 0,25; 3) 3; 4) -2; 5) $-0,5$; 6) 2. **37.14.** 1) 1; 2) -1; 3) 1; 4) -1. **37.15.** 1) $\frac{7}{\pi}$; 2) 0,25; 3) -1; 4) -3; 5) 0,25; 6) 5; 7) 0; 8) 1. **37.17.** 1) 5; 2) -6; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 6; б) 1) 0; 2) 0; 3) -5; 4) 3; 5) -6; 6) 0. **37.19.** 1) $\frac{1}{2}(\sin 5\alpha - \sin\alpha)$; 2) $\frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 2\alpha)$; 3) $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)$; 4) $\frac{1}{2}(\cos 6\alpha - \cos 10\alpha)$. **37.20.** 1) 1; 2) 1; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $4\cos 2\beta$; 5) $-\operatorname{ctg} 3\alpha$; 6) $\operatorname{tg}\alpha$. **38.1.** Разрыв имеют функции 6) и 7) в точке $x_0 = 0$. **38.2.** 1) Непрерывна; 2) разрыв I рода; 3) разрыв I рода. **38.3.** 1) Непрерывна; 2) разрыв I рода; 3) разрыв I рода. **38.5.** 1) Непрерывна; 2) разрыв I рода; 3) разрыв I рода. **38.6.** 1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{при } x \leqslant 4, \\ 1 - x^2 & \text{при } x > 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 - x^2 & \text{при } x > 0; \end{cases}$ 3) $f(x) = \frac{2}{(x+1)(x-2)}$. **38.7.** 1) Непрерывна; 2) непрерывна; 3) непрерывна. **38.8.** 1) Разрыв I рода при $x = n$, $n \in Z$; 2) разрыв I рода при $x = n$, $n \in Z$; 3) разрыв I рода в точке $x_0 = 0$. **38.9.** 1) Непрерывна; 2) непрерывна; 3) разрыв I рода в точке $x_0 = 2$. **38.10.** 1) В точке $x = 3$ непрерывна, в точке $x = 0$ разрыв I рода; 2) в точке $x = 3$ непрерывна, в точке $x = 1$ разрыв I рода; 4) в точках $x = -1$ и $x = 2$ непрерывна; 6) в точке $x = 3$ и в точке $x = -1$ разрыв I рода. **38.11.** 1) 2; 2) 0; 3) -9; 4) 0,25. **38.12.** 1) $T = \pi$; $E(f) = [-3; 3]$; 2) $T = \frac{\pi}{2}$; $E(f) = [-2; 2]$; 3) $T = 2\pi$; $E(f) = R$; 4) $T=1$; $E(f) = [0; 2)$. **38.13.** 1) 2; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 2; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $-\frac{1}{4}$; 7) 1; 8) 2. **39.1.** 1) Вертикальная $x = -2$, горизонтальная $y = 1$; 2) вертикальная $x = 2$, горизонтальная $y = 1$; 3) вертикальная $x = 2$, горизонтальная $y = 2$; 4) вертикальная $x = 5$, горизонтальная $y = 3$; 6) вертикальная $x = -1,5$, горизонтальная $y = -0,5$. **39.2.** 1) $y = 3$; $x = 4$; 2) $y = 0$; $x = \pm 2$; 3) $y = 1$; $x = \pm 2$. **39.3.** 1) $x = 1$; 2) $x = -1$; 3) $x = 2$. **39.4.** 1) $x = 2$, $y = 1$; 2) $x = -1$, $y = 2$. **39.5.** 1) $x = 0$, $y = 0,5x$; 2) $x = 1$, $y = x + 1$. **39.6.** 1) $x = 0$, $y = x$; 2) $y = -x$. **39.7.** 1) $x = 0$, $y = x$; 2) $x = \pm 1$, $y = x$; 3) $x = \pm 2$, $y = -x$. **39.8.** 1) $y = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$; 2) $y = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{3\pi}{2}$; 3) $y = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{3\pi}{2}$. **39.9.** 1) $x = 0$, $y = 0,5x$; 2) $x = 0$, $y = 0,5\,x$; 3) $x = 0$, $y = \frac{x}{2}$; 4) $x = 0$, $y = -\frac{x}{3}$. **39.10.** 1) $y = 1$, $x = 1$; 2) $y = 2$, $x = -1$; 3) $y = 3$, $x = -2$; 4) $y = 4$, $x = 1$. **39.11.** 1) $y = 0$, $x = \pm 1$; 2) $y = 0$, $x = \pm 1$; 3) $y = 0$, $x = \pm 2$; 4) $x = \pm 2$, $y = 0$. **39.12.** 1) $y = 2x$; $x = \pm 2$; 2) $x = -3$; 3) $y = 1$; $x = \pm 3$; 4) $y = x - 1$; $x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$. **39.13.** 1) $y = -x$ при $x \to -\infty$; $y = x$ при $x \to +\infty$; 2) $y = -x + 1$ при $x \to -\infty$; $y = x - 1$ при $x \to +\infty$; 3) асимптот нет; 4) асимптот нет. **39.14.** 1) $y = 0$; 2) $y = 0$; 3) $y = 0$; 4) $y = 0$. **39.16.** 1) Четная; 2) четная; 3) общего вида.

Глава 8. ПРОИЗВОДНАЯ

40.1. 1) $6x + 3\Delta x$; 2) $2x - 2 + \Delta x$; 3) $\frac{-1}{x(x+\Delta x)}$; 4) $\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)} - \sqrt{3x}}{\Delta x}$; 5) $\frac{-2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$; 6) $\frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg}x}{\Delta x}$. **40.3.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) -4. **40.5.** 1) -4; 2) -3; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $-1,5$. **40.8.** 1) Производная в точке $x_0 = 1$ не существует; 2) производная в точке $x_0 = 1$ не существует. **40.9.** 1) 12 ед. длины; 2) 6 ед. длины. **40.11.** Пары прямых 4) и 5), 3) и 6) — параллельны; пары прямых 1) и 3), 1) и 6) — ортогональны. **40.12.** 1) 900; 2) 144; 3) $1\frac{1}{14}$. **40.13.** 1) $\left[\pi k - 2,5;\ \frac{\pi}{2} - 2,5 + \pi k\right]$, $k \in Z$; 2) $\forall x \in R$. **41.1.** 1) 3; 2) $3x^2 - \sqrt{3}$; 3) $2x + 3$; 4) $3x^2 - \sqrt{7}$; 5) $-20x^{-5} + 2$; 6) $2x^4 - 2\sqrt{3}x$. **41.2.** 1) $3(2x - 1)$; 2) $5x^4 - 3\sqrt{3}x^2$; 3) $3x^2 - 10x + 3$; 4) $-\frac{2}{x^2} - \sqrt{7}$; 5) $\frac{5}{(x+3)^2} - 5$; 6) $\frac{x^2 - 8x + 8}{(x-4)^2} - 3$. **41.3.** 1) 5; 2) $-7,97$; 3) $-16,48$; 4) $9\frac{1}{3}$. **41.4.** 1) -3; 2) -15; 3) $\frac{140 + \sqrt{5}}{8}$; 4) $-2,2$. **41.5.** 1) $\{3 \pm \sqrt{7}\}$; 3) $\{-10;\ 0\}$; 4) $\varnothing$. **41.6.** 1) $[-0,6;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -4] \cup [0;\ +\infty)$; 4) $\left[\frac{-1-\sqrt{33}}{8}; 0\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{33}}{8}; +\infty\right)$. **41.7.** 1) $x^4 + 2x^3 - 2\sqrt{3}x + 5$; 2) $\frac{1}{8}x^4 - x^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - 7$; 5) $\frac{5}{3}x^{-3} + \frac{3}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + x - \pi$. **41.8.** 1) $-1,5$; 2) $2,75$; 3) $-3\sqrt{2} + 0,5$. **41.9.** 1) $-12x^{-5} + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $-5x^{-6} + \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$; 3) $-10x^{-11} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}$. **41.10.** 1) $\frac{1 - 5x^2}{2\sqrt{x}}$; 2) $\frac{5x^2 - 6x}{2\sqrt{x}}$; 3) $2,5x \cdot \sqrt{x} - 2x$. **41.11.** 1) $\frac{x - 1}{2\sqrt{x}\cdot(x+1)^2}$; 3) $\frac{27 - 6x}{2\sqrt{x}\cdot(2x+9)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **41.13.** 1) 2; 2) -2; 3) не существует. **41.14.** 1) $-2,5$; 2) $0,75$; 3) $-0,125$. **41.17.** 1) $-\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\pi n$, $\frac{\operatorname{arctg}2}{2} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi n}{4}$, $-\frac{\operatorname{arctg}1,5}{4} + \frac{1}{4}\pi n$, $n \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **42.2.** 1) $v_{\text{мгнов.}} = 16$ м/с; $v_{\text{средн.}} = 18,5$ м/с; 2) 1 с. **42.3.** 1) $\operatorname{tg}\alpha = -5$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 2,8$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 11$; 4) $\operatorname{tg}\alpha = 6\frac{1}{9}$. **42.4.** 1) $df = 3x^2 \cdot dx$; 2) $df = (8x - 1)\cdot dx$; 3) $df = \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} - 2\right)\cdot dx$. **42.5.** 1) $-5,15$; $22,3$. **42.6.** 1) $0,99$; 2) $0,998$; 3) $2,015$; 4) $11\frac{1}{22}$; 5) $14\frac{29}{30}$. **42.8.** $f'(2) = -\frac{1}{45}$. *Геометрическое истолкование*: угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) =$ в точке с абсциссой $x = 2$ равен $-\frac{1}{45}$. *Физическое истолкование*: если точка движется по прямой по закону $f(x) = \frac{25x^2 - 5}{16x^2 - 4}$, где x — время в секундах, а $f(x)$ — путь в метрах, то найденное значение производной $f'(2) = -\frac{1}{45}$ скорость в момент времени $t = 2$с, а знак минус у скорости показывает, что с увеличением времени расстояние движущейся точки от начала отсчета пути будет уменьшаться. **42.12.** $A(0;\ 1)$. **42.13.** 2,5. **42.14.** 1) $A(-1;\ -5)$; $B(1;\ -1)$; 2) да, $M(1;\ 1)$. **42.15.** 5 м/с; $v(4) = 4$ м/с, $v(8) = 6$ м/с. **42.16.** 4,125 м/с.

43.1. 1) $y = -2x - 6$; 2) $y = 0{,}8x - 4{,}8$; 4) $y = 6\frac{1}{9}x - 9\frac{2}{3}$. **43.2.** 1) 2; 2) – 4; 3) 2; 4) 0,5. **43.3.** 1) $y = -4x + 8$; $y = 4x - 8$; 4) $y = -2x+6$, $y = 2x - 2$. **43.4.** 1) $y = 1$; 2) $y = -3$; 3) $y = 4x+2$; 4) $y = 3x-2$. **43.5.** 1) $M(-3; -2)$ и $A(3; -2)$; 2) $B(0; 2)$; 3) $K(-1; 0)$ и $P(5; 0)$. **43.6.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{3}{16}$. **43.7.** 1) $y = -8x - 5$; 2) $y = 0{,}25x - 6$; 3) $y = x + 2$; 4) $y = 1{,}5x + 0{,}5$. **43.9.** 1) $y = 5x-16$; $y = -5x-1$; 2) $y = x + 4$; $y = -x+9$; **43.10.** 1) $A(1; 1)$; 2) $B\left(\frac{3}{8}; \frac{9}{64}\right)$; 3) $C\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\right)$; 4) $M(-0{,}5; 0{,}25)$. **43.11.** 1) $y = 4x - 8\frac{1}{3}$; $y = 4x + 2\frac{1}{3}$; 2) $y = x - 3\frac{2}{3}$; $y = x - 2\frac{1}{3}$. **43.12.** 1) $y = x + 3$ и $y = x - 1$; 2) $y = 4x+5$ и $y = 4x - 3$. **43.14.** $y = 2x-1$, $y = 2x-2$. **43.15.** $y = -x-1$, $y = -x + 7$. **43.16.** $y=4x-7$; **43.17.** $y = -x$. **43.18.** 1) $y=4x-13$; $y=-4x+3$; 2) $y=4x-9$; $y=4x-1$. **43.19.** M (2;0). **43.20.** 0,5. **43.21.** $y = 2x+1$. **43.22.** Да, является. **43.23.** 1) $y = -7x + 8$, $y = -11x + 12$; 2) $y = -9x + 9$, $y = -5x + 9$. **43.24.** 1) 2; 2) 0,5; 3) 1,5; 4) 2. **43.25.** 1) $y' = 4x^3 - 9x^2$; 2) $4\sqrt{2}x^3 - 4\sqrt{2}x$. **43.26.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$. **43.27.** 1) $(-\infty; -1) \cup [4; +\infty)$; 2) $(-5; 0] \cup (6; 7]$; **44.1.** 1) $2 + \cos x$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin x$; 3) $\cos x - \sin x$; 4) $3x^2 - -3\cos x$. **44.2.** 1) $\frac{1 - 2\sqrt{3}}{2}$; 2) $2+2\sqrt{2}$; 3) $\frac{3\pi + \sqrt{2}}{2}$; 4) $-2-\sqrt{3} - \frac{9}{2\pi^2}$. **44.3.** 1) $-2\sin x + \frac{3}{\cos^2 x}$; 2) $\cos x - \frac{1}{\sin^2 x}$; 3) $-\sin x - \frac{5}{\cos^2 x} - 3x^{-4}$; 4) $\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x} - 3x^{-4}$; **44.4.** 1) $-12 + \sqrt{3}$; 2) $7 + \sqrt{2}$; 3) $3\pi - 4 - \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2}$. **44.5.** 1) $(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in Z$; 2) $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$; 3) $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$;. **44.6.** 1) $[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n]$, $n \in Z$; 2) $\varnothing$; 3) $(\pi n; n + \pi n)$; $n \in Z$; 4) $(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n]$, $n \in Z$. **44.7.** 1) $f(x) = \sin x + x$; 2) $f(x) = 2\sin x - \cos x$; 3) $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$; 4) $f(x) = 2\cos x - \operatorname{ctg} x$. **44.8.** 1) $f'(x) = 2\cos 2x$; 2) $f'(x) = 4\cos\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$; 3) $f'(x) = -\sin x$, $x \neq \pi n$, $n \in Z$; 5) $f'(x) = 2\cos x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **44.9.** 1) –0,5; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{3\pi + \sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{4}{\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi^2}$. **44.10.** 1) 1; 2) $1 - \frac{\pi^2}{4}$; 3) –1. **44.11.** 1) $\left\{\frac{7 - \sqrt{97}}{2}\right\}$; 3) $\left\{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right\}$; 4) $\{-\sqrt{5}; 2\}$; 5) $\varnothing$; 6) $\{1 \pm \sqrt{10}\}$; 7) $\{1 \pm 2\sqrt{5}\}$. **44.12.** 1) 1; 2) $\frac{3}{8}$; 3) 0; 4) 0; 5) 1,5; 6) 6. **44.13.** 1) Разрыв I рода в точке $x_0 = 0$; 2) функция непрерывна; 3) разрыв I рода в точке $x_0 = 0$. **45.1.** 1) $3\cos 3x$; 2) $2\sin(1-2x)$; 3) $\frac{5}{\cos^2 5x}$; 4) $\frac{-1}{\sin^2(x - 2)}$;

6) $\frac{3}{\sin^2(5-3x)}$. **45.2.** 1) $6(3x-1)$; 2) $-6(1-2x)^2$; 3) $9(2-3x)^{-4}$; 4) $8(1+2x)^{-5}$; 5) $5+6(1-3x)^{-3}$; 6) $2x-10(1+5x)^{-3}$. **45.3.** 1) $\frac{1}{\sqrt{2x-5}}$; 2) $\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}}$; 5) $\frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+1}}$; 6) $\frac{5-6x}{2\sqrt{2-3x^2+5x}}$. **45.4.** 1) $60x\,(5x^2+7)^5$; 2) $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\frac{10}{(1-2x)^2}$; 4) $\frac{-16}{(2x+3)^5}$.

45.5. 1) $f(g(x))=\sqrt{3x-2}-1$; $f(f(x))=x-2$; $g(g(x))=\sqrt{3\sqrt{3x-2}-2}$; 2) $f(g(x))=3-\frac{2}{(x-2)^3}$; $f(f(x))=3-2(3--2x^3)^3$; $g(g(x))=\frac{x-2}{5-2x}$. **45.7.** 1) -1215; 2) 0; 4) 207. **45.8.** 1) $(-\infty;\ -3,5)\cup(0,5;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -3,5]\cup[0,5;\ +\infty)$; 3) $(-3,5;\ -1)\cup(-1;\ 0,5)$; 4) $[-3,5;\ -1)\cup(-1;\ 0,5]$.

45.9. 1) $(-\infty;\ 0,8)\cup(-0,8;\ 3)\cup(6\frac{9}{35};\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 3)\cup[6\frac{9}{35};\ +\infty)$; 3) $(3;\ 6\frac{9}{35})$; 4) $(3;\ 6\frac{9}{35}]\cup\{-0,8\}$. **45.10.** 1) $3\sin6x$; 2) $-4\sin4x\cdot\cos^2 2x$; 3) $\frac{5\operatorname{tg}^{-6}x}{\cos^2 x}$; 4) $\frac{-3\operatorname{ctg}^{-4}(1-x)}{\sin^2(1-x)}$; 5) $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$; 6) $\frac{-5}{\sqrt{1-25x^2}}$; 7) $\frac{3}{1+9x^2}$; 8) $2x+\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. **45.11.** 1) -2; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 0; 4) 0; 5) $\frac{-12\sqrt{7}}{7}$; 6) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$. **45.12.** 2) $\varnothing$; 5) $\varnothing$; 6) R. **45.13.** 2) $y'=\frac{-4}{1+16x^2}+2$; 4) $y'=6\sin^2 3x\cdot\sin6x+4$. **45.14.** 1) $\frac{4\pi+3}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{4\pi+3}{3}$; 4) $\frac{\pi-4}{4}$. **45.15.** 1) $a\in R$, $b=1$; 2) $a=-1$, $b=1$. **45.16.** 1) $a\in R$, $b=1$; 2) $a=3$, $b=1$. **45.17.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 5) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 6) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **45.18.** 1) $-\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi$, $n\in Z$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 3) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 5) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 6) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. **46.1.** 1) $f'(x)=4x^3+6x^2-3$, $f''(x)=12x^2+12x$.

46.2. 1) -12; 2) 36; 3) $-\frac{1}{32}$; 4) $-\frac{1}{27}$. **46.3.** 1) 30 м/с; 2) 25 м/с^2. **46.4.** 1) $-\frac{1}{32}$; 4) -2. **46.5.** 1) $f''(x)=-\sin x$; 2) $f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 3) $f''(x)=-4\sin2x$; 6) $f''(x)=-2\cos2x$. **46.6.** 1) $f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$; 2) $f''(x)=-\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x^3}}$; 3) $f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{-x^3}}$; 4) $f''(x)=\frac{3}{4\sqrt{x}}$; 5) $f''(x)=\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$; 6) $f''(x)=2+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$. **46.7.** 1) $f''(x)=2\cos x-x\sin x$; 2) $f''(x)=4\cos2x-4x\sin2x$; 3) $f''(x)=4\cos x-(2x-1)\sin x$;

4) $f''(x) = -2\sin x - x\cos x$; 5) $f''(x) = -6\sin 3x - 9x\cos 3x$; 6) $f''(x) = 6 + 2\sin(x^2+1) + 4x^2\cos(x^2+1)$.

46.8. 1) $f''(x) = 8\cos 4x$; 3) $f''(x) = 2\sin x + 4x\cos x - (x^2-1)\sin x$; 6) $f''(x) = -6x\sin(x^2+1) - 4x^3\cos(x^2+1)$.

46.9. $a(t) = -9\cos 3t$ м/с². **46.11.** 1) $f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$; 2) $f''(x) = \dfrac{2}{(1+x^2)^2}$. **46.12.** $-0{,}026$ м/с².

46.13. 1) 3 м/с, 8 м/с²; 2) 0,05 м/с $-$ 0,01 м/с². **46.14.** $v(0) = 9$ м/с, $a(0) = -4$ м/с², $h_{max} = 10{,}125$ м.

46.15. 1) $f''(x) = 1{,}5 - 1{,}5x$; 2) $f''(x) = \dfrac{2}{3}\cos 3x - x \cdot \sin 3x$. **46.17.** 1) $f''(2) = 14$;

2) $f''(2) = 14$. **46.19.** 1) -3; 2) 6; 3) 1; 4) 2. **46.20.** 1) $g(f(x)) = 2x^2\sin^2 x$; 3) $f(g(x)) =$

$= 2x^2\sin(2x^2)$. **46.21.** 1) $(-1; 1)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (\frac{2}{3}; \infty)$; 3) $(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n)$, $n \in Z$;
4) $(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n)$, $n \in Z$. **46.22.** 1) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; 2) $[-2; 2]$; 3) $[-5; 5]$.

Глава 9. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

47.4. 1) $(-\infty; 1{,}5]$ — убывает; $[1{,}5; +\infty)$ — возрастает; 3) $(-\infty; +\infty)$ — убывает. **47.5.** 2) $(-\infty; 0]$ — убывает; $[0; +\infty)$ — возрастает; 3) $(-\infty; +\infty)$ — возрастает. **47.8.** 1) $(-\infty; 0]$ — убывает; $[0; +\infty)$ — возрастает. **47.9.** 2) $(-\infty; 0{,}2]$ — возрастает; $[0{,}2; +\infty)$ — убывает. **47.14.** 2) $(-\infty; -4]$ — возрастает; $[-4; +\infty)$ — убывает; 4) $(-\infty; 1{,}75]$ — возрастает; $[1{,}75; +\infty)$ — убывает. **47.15.** 1) $(-\infty; 0]$ и $[16; +\infty)$ — возрастает; $[0; 16]$ — убывает;

3) $(-\infty; +\infty)$ — возрастает. **47.16.** 1) $(-\infty; 9)$ и $(9; +\infty)$ — убывает; 2) $(-\infty; -4)$ и $(-4; +\infty)$ — возрастает. **47.17** 2) $(-\infty; -3{,}5)$ и $(-3{,}5; +\infty)$ — возрастает. **47.18.** 1) $[-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0]$ и $[\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty)$ — возрастает; $(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}]$ и $[0; \sqrt{\frac{3}{2}}]$ — убывает. **47.19.** 1) $[-\frac{2}{3}; +\infty)$ — возрастает. **47.20.** 2) $(-\infty; +\infty)$ — возрастает; 3) $[-\frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{7\pi}{12} + +\pi k]$, $k \in Z$ — возрастает. **47.23.** 1) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 2) $\varnothing$. **48.4.** 1) $x_{min} = 2$;

4) $x_{max} = 6$. **48.7.** 2) $x_{max} = -0{,}5$; $x_{min} = 0$; $x_{max} = 0{,}5$. **48.8.** 1) $x_{max} = 1$; $x_{min} = -1$. **48.11.** 2) не имеет; 4) $x_{max} = 0$; $x_{min} = 2$. **48.12.** 3) $x_{max} = -\dfrac{4}{\sqrt{3}}$; $x_{min} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **48.13.** 4) $x_{max} = \dfrac{1}{20}$.

48.16. 2) $x_{min} = 6$; $x_{max} = -6$; $(-\infty; -6]$ и $[6; +\infty)$ — возрастает; $[-6; 0]$ и $[0; 6]$ — убывает.

48.18. 1) $x_{min} = -2$; $x_{max} = 0$; $x_{min} = 2$; $(-\infty; -2]$ и $[0; 2]$ — убывает; $[-2; 0)$ и $[2; +\infty)$ — возрастает. **48.19.** 2) $x_{max} = \dfrac{8 - 2\sqrt{10}}{3}$. **48.20.** 1) $x_{max} = 0{,}5$; $y(0{,}5) = \dfrac{5}{9}$. **48.21.** 2) $-32\sin^6(1-8x)\sin(2-16x)$. **48.23.** 1) $\left[-\dfrac{7\pi}{54} + \dfrac{2\pi n}{9}; \dfrac{\pi}{54} + \dfrac{2\pi n}{9}\right]$, $n \in Z$; 2) $[-2; 2]$. **49.4.** Выпуклость вверх на множестве $(-\infty; 0)$, выпуклость вниз — $(0; \infty)$. Точка перегиба $M(0; 0)$. **49.6.** $M(0; -2)$. **49.7.** Выпуклость вниз на множествах $(-\infty; -1)$ и $(1; -\infty)$. Точки перегиба $M(-1; -2)$ и $K(1; -2)$. **49.8.** 1) $M(4; 20)$; 2) точек перегиба нет. **49.9.** 1) Выпуклость вверх $(-\infty; 1)$, вогнутость вниз $(1; +\infty)$. Точек перегиба нет. **49.10.** 1) Выпуклость вверх $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$, выпуклость вниз $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$. **49.12.** $M(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $N(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $K(0; 0)$; 2) $M(0, 0)$. **49.13.** 1) $(-\infty; 2)$. **49.14.** $y_{max}(-1) = 1$, $y_{max}(1)=1$, $y_{min}(0) = 0$; точки перегиба — $M(-\sqrt{\frac{1}{3}}; \frac{5}{9})$, $K(\sqrt{\frac{1}{3}}; \frac{5}{9})$. **49.15.** 1) Возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$, убывает на $[1; \infty)$ и $[-1; 0]$. **49.16.** 2) $x_{min} = -1$; $x_{max} = 1$; 3) точек max и min нет. **49.17.** 1) Асимптот нет; 2) $x = -1$, $x = 1$, $y = -2x$; 3) $y = -\frac{1}{5}x$. **50.1.** 1) R; 2) $(-\infty; 10) \cup (10; +\infty)$. **50.2.** 1) $(-\infty; -0{,}3) \cup (0{,}3; +\infty)$; 2) R. **50.3.** 1) $[-12{,}25; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$; 3) $[4; +\infty)$; 4) $[-4; 10]$. **50.4.** 2) $\pm 2\sqrt{2}$; 4) 0; $\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. **50.20.** 1) $a \in (-\infty; 2)$; 2) $a \in (-\infty; 0{,}75)$; 3) $a=8$. **50.23.** 1) $\{\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi + 2\pi n,\ n \in Z\}$. **50.24.** 2) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$. **50.25.** 1) $f_{наим.} = -2$, наибольшего значения нет. **51.1.** 1) −14; 14. **51.3.** 1) 0; 3. **51.5.** 1) 0; 4; 2) −2; 2. **51.6.** 1) 12,5 и 12,5; 2) 8 и 8; 3) 98 и 49. **51.7.** 2) −1; 0. **51.9.** 1) −19; 7. **51.10.** 2) −12; −5. **51.11.** 1) 7; 30. **51.12.** 1) 4; 5,8. **51.13.** 2) 3,5; $\frac{26}{3}$. **51.14.** 1) 5 см; 5 см; 3) 16 м. **51.15.** 2) 80 м; 3) 24 $м^2$; 4) $\frac{5}{\sqrt{4+\pi}}$. **51.16.** 1) 2; $\frac{10}{3}$. **51.17.** 1) 2; 3,2. **51.21.** 1) 3; 2) 7. **51.22.** 1) 4; 2) −4. **51.23.** 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{18}$.

Глава 10. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

52.2. 0,25. **52.3.** 0,35 и 0,35.

52.4.

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

52.5.

X	1	2	3	4
P	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

Указание. $P(1)=\frac{4}{7}$ (1-й шар белый), $P(2)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{7}$ (1-й шар черный, 2-й — белый), $P(3)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{35}$ (1-й шар черный, 2-й — черный, 3-й — белый), $P(4)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}=\frac{1}{35}$ (4-й шар — белый).

52.6.

Y	6	10	14	18
P	0,1	0,4	0,4	0,1

52.7

Y	0	1	2
P	0,3*0,3=0,09	0,3*0,7+0,7*0,3=0,42	0,7*0,7=0,49

52.8

Число попаданий	0	1	2	3
P	0,001	0,027	0,243	0,729

52.9

Число попаданий	0	1	2
P	0,02	0,26	0,72

$$P(x)=\begin{cases}0{,}02, \text{если } x=0,\\ 0{,}26, \text{если } x=1,\\ 0{,}72, \text{если } x=2.\end{cases}$$

52.10

Число библиотек	1	2	3	4
P	0,4	0,6·0,4=0,24	0,6·0,6·0,4=0,144	(0,6)3=0,216

52.11

Y	0	1	2	3
P	0,2*0,3· 0,3 = 0,018	0,8·0,3·0,3+0,2·0,7·0,3+ + 0,2· 0,3·0,7=0,156	0,434	0,8·0,7·0,7=0,392

52.12

Y	0	1	2	3
P	$\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\approx 0{,}491$	0,421	0,084	$\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{2}{18}=\frac{1}{285}$

52.15. 1) $25(5x-1)^4+10x+\dfrac{2}{\cos^2 2x}$; 2) $8(3x^2-x)^3(6x-1)+2\sin 2x-42x^5$. **52.17.** 1) возрастает — $[-1;\ 0]$ и $[1;\ +\infty)$, убывает — $(-\infty;\ -1]$ и $[0,\ 1]$; 2) возрастает — $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$; 3) убывает — $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. **53.1.** 4 и $M(X)=3{,}1$. **53.2.** 7,5 и $M(X)=6{,}4$. **53.3.** 1,29. **53.4.** 1) 24; 2) 6; 3) 45. **53.5.** 1) 4,4; 2)11,6; 3) 4,48. **53.6.** $M(X)=5{,}7$; $D(X)=2{,}21$. **53.7.** $M(X)=5{,}7$; $D(X)=2{,}21$. **53.8.** $M(2X)=10{,}6$; $D(2X)=2{,}44$. **53.9.** $M(X+Y)=23{,}1$, $D(X+Y)=24{,}99+$

$+ 22,56 = 47,55$. **53.10.** $D(X) = 1$; $D(Y) = -1,24$. Стрелок X точнее попадает в цель. **53.11.** $M(X) = 3,4$; $D(X) = 1,04$; $M(2X+5) = 11,8$.

53.12.

X	-1	0	1
P	0,4	0,1	0,5

53.13. $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,5$. **53.14.** $M(X) = 0,6$. **53.15.** $D(X) = 3$.
53.16.

X	1	2	3
P	0,3	0,2	0,5

53.18. 1) $k = 1$; 2) $k = -0,5$; 3) $k = \frac{3}{16}$. **53.19.** 1) $k = 9$; 2) $k = 0$; 3) $k = -18$.

54.1. 1) $P = C_6^4 \cdot 0,6^4 \cdot 0,4^2 \approx 0,311$; 2) $P = C_8^5 \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^3 \approx 0,254$.

54.2. $P = C_{10}^2 \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot (\frac{5}{6})^8 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 5^8}{1 \cdot 2 \cdot 6^{10}} \approx 0,2907$.

54.3.

X	0	1	2	3	4
P	$C_4^0 \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^4 = \frac{1}{16}$	$C_4^1 \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^3 = 4 \cdot 0,5^4 = 0,25$	$C_4^2 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^2 = \frac{3}{8}$	$C_4^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^1 = 4 \cdot 0,5^4 = 0,25$	$C_4^4 \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^0 = \frac{1}{16}$

54.4.

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03 125	0,015 625	0,0 078 125

Решение. Рассмотрим событие A — сдачи k-ого экзамена (испытании). Может оказаться, что все 6 экзаменов не сданы ни разу или только 1 раз, или 2 раза, или 3 раза и т.д., или 6 раз. Тогда число сдачи экзамена: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 — случайная величина, обозначим ее X, она принимает отдельные, изолированные друг от друга значения: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$; $x_6 = 5$; $x_7 = 6$. Найдем вероятность сдачи экзамена при k-ом испытании. Используя формулу $P(X = k) = q^{k-1}p$, получим:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03 125	0,015 625	0,0 078 125

54.5.

X	1	2	3	4
P	$\frac{5}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{5}{70}$

Решение. Число появлений желтого шара — случайная величина X, которая принимает значения: 1, 2, 3, 4. В нашем случае $N = 8$, $M = 5$ и $n = 4$, а величина m принимает значения: 1, 2, 3, 4. Воспользуемся формулой $P(X=m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

$$P(X{=}x_1{=}1)=\frac{C_5^1C_3^3}{C_8^4}=\frac{\frac{5!}{4!}\cdot 1}{\frac{8!}{4!\cdot 4!}}=\frac{1\cdot 5}{5\cdot 7\cdot 2}=\frac{5}{70}.$$

$$P(X{=}x_2{=}2)=\frac{C_5^2C_3^2}{C_8^4}=\frac{\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot 2!}}{\frac{8!}{4!\cdot 4!}}=\frac{2\cdot 5\cdot 3}{2\cdot 7\cdot 5}=\frac{30}{70}.$$

$$P(X{=}x_3{=}3)=\frac{C_5^3C_3^1}{C_8^4}=\frac{\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot 2!}}{\frac{8!}{4!\cdot 4!}}=\frac{2\cdot 5\cdot 3}{2\cdot 7\cdot 5}=\frac{30}{70}.$$

$$P(X{=}x_4{=}4)=\frac{C_5^4C_3^0}{C_8^4}=\frac{5\cdot 1}{2\cdot 7\cdot 5}=\frac{5}{70}.$$

Тогда ряд распределения примет вид:

X	1	2	3	4
P	$\frac{5}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{5}{70}$

54.6. $M(X)=0{,}7142$. *Решение.* Число выбора девочек — случайная величина X, которая принимает значения: 0, 1, 2, 3. В нашем случае $N=21$, $M=16$ и $n=3$, а величина m принимает значения: 0, 1, 2, 3. Воспользуемся формулой $P(X{=}m)=\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

$P(X=x_1=0)=\dfrac{C_{16}^3C_5^0}{C_{21}^3}=\approx 0{,}4211$. $P(X=x_1=1)=\dfrac{C_{16}^3C_5^0}{C_{21}^3}=\approx 0{,}4511$.

$P(X=x_1=2)=\dfrac{C_{16}^0C_5^3}{C_{21}^3}=\approx 0{,}1203$. $P(X=x_1=3)=\dfrac{C_{16}^2C_5^1}{C_{21}^3}=\approx 0{,}0075$.

Тогда ряд распределения примет вид:

X	0	1	2	3
P	0,4211	0,4511	0,1203	0,0075

Найдем математическое ожидание:
$M(X)=0\cdot 0{,}4211+1\cdot 0{,}4511+2\cdot 0{,}1203+3\cdot 0{,}0075=0{,}7142$.

54.7. 1) $p=\sum\limits_{n=0}^{3} C_8^n\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{8-n}$; 2) $p=\sum\limits_{n=0}^{2} C_{10}^n\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10-n}$.

54.8. $p=\sum\limits_{n=0}^{2} C_{10}^n\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10-n}$. **54.9.** $p=1-\sum\limits_{n=0}^{1} C_6^n\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{6-n}\approx 1-0{,}233=$ $=0{,}767$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА ЗА 10 КЛАСС

1. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{13\pi}{12}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$. **2.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) -1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$. **3.** 1) $-\frac{5\pi}{14}$; 2) $\frac{9\pi}{14}$; 3) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $6-2\pi$; 5) $\frac{5\pi}{2}-8$; 6) $4\pi-10$. **4.** 1) $f'(1)=2$; 2) $f'(1)=6$; 3) $f'(1)=\frac{3\sqrt{2}}{2}+7$; 4) $f'(-2)=-16$; 5) -3; 6) 2. **5.** 1) -3; 2) $-\frac{11}{18}$; 3) $-\frac{13}{16}$. **6.** 1) 9; 2) 16; 3) -18.

7. 2) $y_{\text{наиб.}}(3)=594$, $y_{\text{наим.}}(2)=56$; 3) $y_{\text{наиб.}}(0)=0$, $y_{\text{наим.}}(4)=-2$. **9.** 1) 1; 2) 2,5; 3) 2; 4) 4,5; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{1}{4}$; 7) $-\frac{1}{4\sqrt{3}}$; 8) $-\frac{1}{4}$. **10.** 1) 1,5; 2) -1; 3) 2; 4) 0,5; 5) -5; 6) $\frac{5}{6}$; 7) $\frac{5}{6}$; 8) $-3{,}5$.

11. 1) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}$; 2) $f'(x)=6\sin^2 2x\cdot\cos 2x-3\sin 3x+\frac{2}{x^2}$; 3) $f'(x)=2\operatorname{tg}2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}-\frac{3}{\sin^2 3x}$; 4) $f'(x)=\frac{2}{1+4x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **12.** $\frac{\sqrt{5}}{25}$. **13.** 1) $\frac{7}{(3x+2)^2}+3$; 2) $\sin 2x+2x\cos 2x-\frac{3}{2\sqrt{2-3x}}$. **14.** 1) 0; 2; 2) -1; 0; 1; 3) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$. **15.** 1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) -2. **16.** 1) 5; 2) 0; 3) $[-4; -2]\cup[1; 2]$. **17.** 2) $\varnothing$; 3) R; 5) $\varnothing$; 6) R. **18.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 3) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **19.** 1) $[-\sqrt{29}; \sqrt{29}]$; 2) $[-5; 5]$.

20. 1) $\{\pm\arccos\frac{1}{4}+(2n\mp 1)\pi, n\in Z\}$; 2) $\{\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}, \frac{3\pi}{100}+\frac{2\pi n}{25}, n\in Z\}$; 3) $\{\frac{\pi n}{5}, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z\}$; 4) $\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}, k\neq 3n+1, n\in Z\}$; 5) $\{-1; 3\}$; 6) $\varnothing$; 7) $\{0; 3\}$; 8) $\{\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}\}$; 9) $\{-1; \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}\}$; *Указание*: произвести замену $y=x+\frac{1}{x}$, тогда $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$; 10) $\{\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}; 2\pm\sqrt{2}\}$.

21. 1) $y=1$, $x=1$; 2) $y=-2$, $x=-3$; 3) $x=2$, $y=x+2$; 4) $x=-2$, $y=x-6$. **22.** 1) $M(0; 0)$; 2) точек перегиба нет; 4) $M(0; 1)$. **23.** 5) возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$, убывает — $\varnothing$; 6) возрастает — $\varnothing$, убывает на $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ и $(3; +\infty)$; 7) возрастает на $(-\infty; -5)$, $(-5; 5)$ и $(5; +\infty)$, убывает — $\varnothing$; 8) убывает — $(-\infty; -2)$ и $(-2; 0]$, возрастает — $[0; 2)$ и $(2; +\infty)$. **26.** 1) $y=1{,}5x+1$, $y=-\frac{2}{3}x+1$; 2) $y=1{,}5x+1$, $y=-\frac{2}{3}x+1$; 3) $y=-\frac{1}{4}x+1{,}5$, $y=4x+1{,}5$; 4) $y=-\frac{1}{2}x+1$, $y=2x+1$. **27.** 1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\pi n$, $n\in Z$. **28.** 1) $y=\frac{3}{4}x+1\frac{1}{4}$; 2) $y=-x+2$. **29.** 1) $1\frac{1}{12}$; 2,125; 2) 0; $1\frac{5}{6}$; 3) -16; 11; 4) $-\frac{2}{7}$; $-\frac{4}{31}$. **30.** 1) a, b, d, e, f; 4) 7; 5) min — b, e; max — a, d, f.

33. Точки min -2 и 2, max — 0. **34.** $t = 10$ с, $v = 238{,}5$ м/с. **35.** Квадрат со стороной $a = 20$ см. **36.** 1) $\frac{3\sqrt{3}}{4}\ a^2$; 2) $M\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$. **37.** 26 см, 19,5 см. **38.** 18 м^2. **39.** 2 см и 1 см. **40.** 1) 4 и 4; 2) 16 и 2. **41.** 1,25 кв.ед. **42. 1)** 4 ч; 2) 7 ч; 3) 7 ч 30 мин; 4) 3 ч 36 мин; 5) 3 600 тг, 5 400 тг. **43.** 1) 15 312 тг; 2) на 5448 тг. **44.** 1) 25% на звонки зарубежных операторов; 2) 625 тг; 3) на 700 тг. **45.** 1) 1 190 000 тг; 2) у поставщика В, 1 650 000 тг. **46.** 1) 850 см^3; 2) 2550 см^3; 3) на 10 см. **47.** 1) $\approx$ 4л; 2) 320 тг или 465 тг; 3) 1890 тг. **48.** 1) 7700 мг, 33 г; 2) 50 л, 100 л; 3) 360 г. **49.** $22+13-9 = 26$ чел. **50.** 12 карандашей. **51.** $n = 1$. **52.** $49\cdot 2^{50}+1$. **53.** 1-й *способ*. Так как $a(a+b+c) < 0$, то $\begin{cases} a > 0, \\ a+b+c < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0, \\ a+b+c > 0 \end{cases}$. Рассмотрим два случая. В первом случае, если $a > 0$, то парабола графика $f(x) = ax^2 + bx + c$ направлена вверх, тогда $f(1)=a+b+c<0$, т. е. существуют точки параболы, лежащие ниже оси OX. Значит, парабола пересекает ось OX в двух точках. Следовательно, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня. Во втором случае $a < 0$ рассуждаем аналогично.

2-й *способ*. Рассмотрим $a(a+b+c) < 0$, раскроем скобки, получим $a^2 + cb + ca < 0$. Умножим на -4 обе части неравенства и к обеим частям прибавим b^2, получим $-4a^2 - 4ba - 4ac + b^2 > b^2$, или $-4a^2 - 4ba - b^2 + b^2 - 4ac > 0$. Если $-(b+2a)^2 \leqslant 0$, то $b^2 - 4ac > 0$ и значит, наше уравнение имеет два корня. **54.** Нет. *Решение*. От сложения или вычитания 1 меняется характер четкости числа. Значит, если 35 раз менять характер четкости числа 20, то в результате получится нечетное число. Следовательно, число 10 получиться не может. **55.** $\varnothing$. *Указание*. Так как $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$, то имеет место равенство $\sin^{20}x \cdot \cos^{20}x \cdot \cos^4 x = 0{,}0001$, $\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{20} \cdot \cos^4 x = 0{,}0001$, или $\sin^{20}2x \cdot \cos^4 x = 2^{20}\cdot 0{,}0001$. **56.** *Решение*. Так как есть учащиеся, решившие ровно одну, ровно две и ровно три задачи, то остальные семь учащихся решили $35 - 1 - 2 - 3 = 35 - 6 = 29$ задач. Но так как $29 = 4\cdot 7 + 1$, то найдется учащийся, решивший пять задач. **57.** $(1; \pm\frac{1}{4} - 1 + k,\ k\in Z)$.

Решение. Оценим обе части уравнения. Очевидно, что $\mathrm{tg}^2\pi(x+y) + \mathrm{ctg}^2\pi(x+y) \geqslant 2$, равенство наступит при $\mathrm{tg}^2\pi(x+y) = 1$.

Оценим правую часть уравнения $\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}$. Очевидно, что $x \geqslant 0$, $x^2 + 1 \geqslant 2x$, тогда $0 \leqslant \frac{2x}{x^2+1} \leqslant 1$ и $1 \leqslant \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1 \leqslant 2$. Итак, значение выражения в левой части уравнения больше или равно 2; в правой — меньше или равно 2, т. е. решение уравнения возможно, если $\begin{cases} \mathrm{tg}^2\pi(x+y) = 1, \\ \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1 = 2, \end{cases}$ или $\begin{cases} \mathrm{tg}\,\pi(x+y) = \pm 1, \\ \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} = 1, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} \mathrm{tg}\pi(1+y) = \pm 1, \\ x = 1, \end{cases}$ значит, $\begin{cases} \pi(1+y) = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k\in Z \\ x = 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} y = \pm\frac{1}{4} - 1 + k,\ k \in Z, \\ x = 1. \end{cases}$ **58.** $1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

Решение. $\dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{k+1-1}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$, тогда наша сумма преобразуется.

$S = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4!} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!} +$
$+ \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$. **59.** *Решение.* Преобразуем числовое выражение, сгруппировав числа последовательно по парам. Получим $21 + 21^2 + 21^3 + 21^4 + \ldots + 21^{2007} + 21^{2008} = 21 \cdot (1 + 21) + 21^3 \cdot (1 + 21) + \ldots + 21^{2007} \cdot (1 + 21) = 22 \cdot (21 + 21^3 + 21^5 + 21^7 + \ldots + 21^{2007})$.

Так как 22 делится на 11, то и все числовое выражение делится на 11.

60. *Решение.* 1-й *способ.* Преобразуем правую часть неравенства: $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 = (x^8 - 2x^4 + 1) + (x^6 - 2x^4 + x^2) = (x^4 - 1)^2 + x^2(x^4 - 2x^2 + 1) = (x^4 - 1)^2 + x^2(x^2 - 1)^2 \geqslant 0$. Равенство верно, если $x = \pm 1$.

2-й *способ.* Воспользуемся неравенством, что среднее арифметическое четырех положительных чисел больше либо равно среднего геометрического этих чисел, т. е.

$x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 \geqslant 4 \cdot \sqrt[4]{x^8 \cdot x^6 \cdot x^2 \cdot 1} - 4x^4 = 4x^4 - 4x^4 = 0$. Равенство верно, если $x = \pm 1$.

61. *Решение.* Воспользуемся неравенством $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geqslant 9$. Это очевидно, так как $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geqslant 3\sqrt{abc} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{1}{c}} = 9$ (*). Преобразуем левую часть неравенства, используя неравенство: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} = \left(\dfrac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\dfrac{b}{a+c} + 1\right) + \left(\dfrac{c}{a+b} + 1\right) - 3 = \dfrac{a+b+c}{b+c} + \dfrac{a+b+c}{a+c} + \dfrac{a+b+c}{a+b} - 3 = (a+b+c)\left(\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{a+b}\right) - 3 = \dfrac{1}{2}((a+b)+(a+c)+(b+c))\left(\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{a+b}\right) - 3 \geqslant \dfrac{9}{2} - 3 = \dfrac{3}{2}$. Равенство верно при $a = b = c$. **62.** *Решение.* Воспользуемся неравенством Коши для двух положительных чисел и преобразуем левую часть неравенства:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \sqrt{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots (2n-1)^2} = \sqrt{1 \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{3 \cdot (2n-3)} \cdot \sqrt{5 \cdot (2n-5)} \cdot \ldots$$
$$\cdot \sqrt{(2n-1) \cdot 1} < \frac{1 + (2n-1)}{2} \cdot \frac{3 + (2n-3)}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-3) + 3}{2} \cdot \frac{(2n-1) + 1}{2} =$$

$= n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$. **63.** *Решение.* Применим неравенство $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $a + 1 \geqslant 2\sqrt{a}$.

$\dfrac{a}{a+1} + \dfrac{b}{b+1} + \dfrac{c}{c+1} \leqslant \dfrac{a}{2\sqrt{a}} + \dfrac{b}{2\sqrt{b}} + \dfrac{c}{2\sqrt{c}} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+1}{2} + \dfrac{b+1}{2} + \dfrac{c+1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}(a+b+c+3) \leqslant \dfrac{1}{4}(3+3) = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$. **64.** $\left[-\dfrac{1}{4}; 2\right]$. **65.** 2. **66.** $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{x-1}{x}\right)$. *Решение.* Рассмотрим последовательность $x_n = \varphi(x_{n-1}) = \dfrac{1}{1 - x_{n-1}}$. Если задан x_1, то $x_2 = \dfrac{1}{1 - x_1}$; $x_3 = \dfrac{1}{1 - x_2} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - x_1}} = \dfrac{x_1 - 1}{x_1}$; $x_4 = \dfrac{1}{1 - x_3} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{x_1 - 1}{x_1}} = x_1$;

значит, $x_4 = x_1$, т. е. последовательность периодическая, $T = 3$.

Записываем равенство при $x = x_1;\ x_2;\ x_3$. Тогда $\begin{cases} f(x_1) + f(x_2) = x_1, \\ f(x_2) + f(x_3) = x_2, \\ f(x_3) + f(x_1) = x_3. \end{cases}$

Умножим второе уравнение на (-1) и сложим все три уравнения. Получим

$2f(x_1) = x_1 - x_2 + x_3$, $f(x_1) = \frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{1}{1 - x_1} + \frac{x_1 - 1}{x_1}\right)$, или $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{1 - x} + \frac{x - 1}{x}\right)$.

67. 1) $\{2; 6\}$; 2) $\{-1; 9; \frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}\}$; 3) $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. *Указание*: выделим квадрат разности в левой части уравнения $\left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x+1} = 3$, или $\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x+1} = 3$. Далее вводим подстановку $C = \frac{x^2}{x+1}$; 4) $\{\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\}$. **68.** $\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \pm \frac{1}{2}(\pi - \arccos\frac{3}{8}) + \pi n, n \in Z\}$.

69. 1) $\varnothing$; 2) (1; 3). **70.** 1) [1; 4); 2) $[1; 1\frac{1}{3}]$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Кучер Татьяна Павловна
Корчевский Владимир Евгеньевич
Жумагулова Зауре Абдыкеновна

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Часть 2

Учебник для 10 класса естественно-математического направления
общеобразовательных школ

Редактор *С. Родионова*
Худож. редактор *А. Сланова*
Техн. редактор *И. Тарапунец*
Компьютерная верстка *Ж. Бекбосыновой*

Государственная лицензия № 0000001 выдана издательству
Министерством образования и науки Республики Казахстан
7 июля 2003 года

ИБ № 5999

Подписано в печать 19.06.19. Формат $70\cdot100^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Гарнитура "SchoolBook Kza". Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,19 + 0,32 форзац.
Усл. кр.-отт. 58,05. Уч.-изд. л. 8,5 + 0,54 форзац.
Тираж 50 000 экз. Заказ №

Издательство "Мектеп", 050009, г. Алматы, пр. Абая, 143
Факс: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz