Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

АЛГЕБРА и НАЧАЛА АНАЛИЗА

10

Часть 1

Учебник для 10 класса
естественно-математического направления
общеобразовательных школ

*Утверждено Министерством образования
и науки Республики Казахстан*

Алматы «Мектеп» 2019

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72
А45

Авторы:

А. Е. Абылкасымова, Т. П. Кучер,
В. Е. Корчевский, З. А. Жумагулова

Условные обозначения:

— проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

— задания для самостоятельного выполнения

— конец доказательства теоремы или свойства

— дополнительные сведения

— вопросы для самопроверки

А — упражнения, выполнение которых обязательно для каждого учащегося

B — упражнения среднего уровня сложности

C — упражнения повышенной трудности

ПОВТОРИТЕ — упражнения для повторения пройденного материала

Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 кл. естеств.-матем.
А45 направления общеобразоват. шк. Часть 1 /А. Е. Абылкасымова, Т. П. Кучер, В. Е. Корчевский, З. А. Жумагулова. — Алматы: Мектеп, 2019. — 240 с., илл.

ISBN 978—601—07—1183—9

$\text{А}\,\dfrac{4306020503\text{—}080}{404(05)\text{—}19}\,63(1)\text{—}19$

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72

© Абылкасымова А. Е., Кучер Т. П., Корчевский В. Е., Жумагулова З. А., 2019
© Издательство “Мектеп”, художественное оформление, 2019
Все права защищены
Имущественные права на издание принадлежат издательству “Мектеп”

ISBN 978—601—07—1183—9

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ВВЕДЕНИЕ

Данный учебник предназначен для изучения алгебры и начал анализа в 10 классе.

Вы ознакомитесь с тригонометрическими и обратными тригонометрическими функциями и их графиками, научитесь строить графики функций, используя преобразования графиков функций, и исследовать их по графику. Вы научитесь решать тригонометрические уравнения и их системы, тригонометрические неравенства, уравнения высших степеней и решать их, используя схему Горнера. Расширите знания по теории вероятности и элементам статистики.

Вы усвоите новые подходы к решению задач по математике с использованием аппарата математического анализа, овладеете аппаратом уравнений и неравенств для решения задач из различных разделов курса; математическими знаниями, необходимыми для изучения смежных дисциплин на современном уровне, их применением в повседневной жизни и в практической деятельности.

Учебник состоит из десяти глав и содержит упражнения для повторения курсов алгебры 7—9 классов в начале и 10 класса — в конце учебного года. Главы разделены на параграфы. В каждом параграфе имеются задания для самостоятельной работы, а в конце параграфа даются контрольные вопросы, для ответа на которые надо изучить основные понятия, теорию и разобрать решения приведенных примеров.

К каждому параграфу учебника предложены упражнения трех уровней сложности, которые обозначены буквами **А**, **В** и **С**. К первому уровню **А** относятся упражнения, выполнение которых обязательно для каждого учащегося. К уровню **В** относятся упражнения среднего уровня сложности. Упражнения третьего уровня сложности (**С**), в том числе и задания, отмеченные звездочкой (*), рекомендуются для дальнейшего, более глубокого изучения учащимся, которые имеют высокий уровень математической подготовки. После упражнений группы **А**, **В**, **С** имеются упражнения для повторения, выполнение которых помогут учащимся лучше усвоить материал. Для подготовки учащихся к усвоению материала следующего параграфа перечисляются опорные понятия для овладения новыми знаниями.

Для проверки правильности выполнения упражнений в конце учебника имеются ответы.

Учебник поможет Вам приобрести практические навыки и умения проводить рассуждения и приводить доказательства в дальнейшем изучении математики.

Авторы

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ 7—9 КЛАССОВ

1. Упростите выражение:

1) $\frac{14p^4}{5q^3}\cdot\frac{15q^2(p-5)^2}{21p^2}:\frac{3p^2}{2q^6}$;   2) $\frac{25a^2(b-1)}{3^2d}:\frac{5cd^3}{27ab}:\frac{a^3(b-1)}{c^3d}$;

3) $\frac{24x^5y^4}{13ab^2}:\frac{4xy^2}{13a^2b}:\frac{3x^2(y-2)}{a^2b}$;

4) $a^4\cdot\left(\frac{3a+b}{a}-3\right)^2+b^4\cdot\left(\frac{a-2b}{b}+2\right)^2-2(ab)^2$;

5) $3+\left(\frac{28c}{c^2-49}+\frac{c-7}{c+7}\right)\cdot\frac{c}{c+7}-\frac{c}{c-7}$;

6) $4{,}5+\frac{25x^2-4^{-1}}{5x+2^{-1}}-3x$;   7) $3{,}5+\frac{9x^2-4^{-1}}{3x-2^{-1}}-2(x-1)$;

8) $\frac{2a-2}{a-2}+1-\left(\frac{8a}{a^2-4}+\frac{a-2}{a+2}\right)\cdot\frac{a}{a+2}$.

2. Решите уравнение:

1) $x^2-3(x-2)+2x-12=0$;   2) $3x^2-2(x^2-2x)+2x-11=5$;

3) $5x^2-3(x^2+2x)+3x-13=4$;   4) $x^2-4|x|+2x-7=1$;

5) $2x^2-3|x+3|+5x-8=0$;   6) $4x^2+5|x-1|+4x+11=1$.

3. Найдите корни уравнения:

1) $1-\frac{x}{x+2}=\frac{x}{x-3}$;   2) $x^2+\frac{1-3x}{x+4}=16-\frac{3x-1}{x+4}$;

3) $\frac{36}{x^2-12x}-\frac{3}{x-12}=3$;   4) $\frac{5}{2x+3}+\frac{3-2x}{x+2}=10$;

5) $\frac{12}{x^2+2x}-\frac{3}{x^2+2x-2}=1$;   6) $\frac{16}{x^2+5x-6}-\frac{20}{x^2+5x+6}=1$.

4. Решите неравенство:

1) $(x-2)(x+3)(x-1)^2\geqslant 0$;   2) $(2x-3)(x+5)(3x-1)^3\leqslant 0$;

3) $|x-2|(x+4)(x-5)^2\leqslant 0$;   4) $\frac{2}{a+3}+\frac{1}{a+1}<\frac{3}{a+2}$;

5) $\frac{2}{a-2}-\frac{1}{a+2}>2$;   6) $\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x+3}\leqslant\frac{1}{x+1}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

5. Решите с помощью графика квадратичной функции и методом интервалов неравенство:

1) $x^2 - 3x - 18 \geqslant 0$; 2) $-5x^2 - 12x + 17 \leqslant 0$; 3) $6x^2 - 13x - 5 > 0$.

6. Найдите наибольшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству:

1) $(3-x)(x-8)^2 > 0$; 2) $(x-3)^2(x-11) \leqslant 0$; 3) $(2x-2,5)^2(3x-13)^3 < 0$;

4) $\dfrac{x^2-81}{x+5} < 0$; 5) $\dfrac{15x-x^2}{x-5,5} \geqslant 0$; 6) $\dfrac{11x-x^2}{x+6} > 0$.

7. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $\dfrac{x+3}{x-7} \leqslant 0$; 2) $\dfrac{12-3x}{x-2} \geqslant 0$; 3) $\dfrac{5-2x}{3x+13} > 0$;

4) $\dfrac{x^2-121}{x+1} \geqslant 0$; 5) $\dfrac{x^2-12x}{x-2,5} \geqslant 0$; 6) $\dfrac{8x-x^2}{x+6} \leqslant 0$.

8. Способом подстановки решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=7, \\ x^2-y=13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-y=4, \\ x^2+y=14; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=7, \\ x^2-2y=13; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x+0,5y=1,5, \\ x^2-y=-12; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-y^2=1, \\ x-y=3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy+7=0, \\ x-y+8=0. \end{cases}$

9. Способом алгебраического сложения решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=7, \\ 3x^2-y^2=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-1=y^2, \\ 3y^2=2x^2-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2-10=0, \\ xy-3=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy=\dfrac{1}{8}, \\ 2x^2+2y^2=\dfrac{5}{8}; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+2y^2+1=27, \\ 3x^2-y^2=1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ x^2-2xy+1=0. \end{cases}$

10. Графическим способом решите систему уравнений (ответ округлите до десятых):

1) $\begin{cases} xy=1, \\ y=2x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=-2, \\ y=2x^2-3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=2-x^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ xy=2. \end{cases}$

11. Найдите решения системы:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=-1, \\ x^3+y^3=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=25, \\ 2x^2-2xy-y^2=11. \end{cases}$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

12. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 + 1 = 0, \\ 3xy + 7y^2 = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 - 6 = 0, \\ 4 + 3xy - y^2 = 0. \end{cases}$

***13.** Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ |x| + y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| + |y| = 3, \\ |x| + y^2 = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| + |y| = 2, \\ xy - 1 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x| + |y| = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

14. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -x^2 + 2x + 15 > 0, \\ x^2 - 12x + 27 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 6x + 16 \leqslant 0, \\ x^2 + x + 20 > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -x^2 + x + 12 \geqslant 0, \\ x^2 - 3x - 10 < 0. \end{cases}$

15. Изобразите на координатной прямой множество точек, заданных системой неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 7x \geqslant 0, \\ x + 4 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - x^2 < 0, \\ 4 - 3x \leqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y^2 + x^2 \leqslant 4, \\ 2 - x \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 0{,}5x^2 \geqslant 0, \\ y^2 + x^2 \leqslant 16. \end{cases}$

***16.** Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, заданных системой неравенств:

1) $\begin{cases} |x| \geqslant 5, \\ y + 2x > 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + x^2 - 16 < 0, \\ y - |x| < 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ x^2 + y^2 - 9 \leqslant 0. \end{cases}$

17. Найдите значение суммы целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств:

1) $\begin{cases} |2x - 5| \leqslant 1, \\ x^2 + 2x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x - 4| \leqslant 2, \\ -x^2 + 5x > 0. \end{cases}$

18. 1) Поезд должен был пройти 220 км за определенное время, однако через два часа он был задержан на 10 минут. Чтобы прийти вовремя на станцию назначения, машинист увеличил скорость на 5 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

2) Путь длиной 240 км между пунктами A и B автомобиль прошел с постоянной скоростью. Возвращаясь обратно, он прошел половину пути с той же скоростью, затем увеличил скорость на 10 км/ч. В результате на обратный путь было затрачено на 24 мин меньше, чем на путь от A до B. С какой скоростью ехал автомобиль из пункта A в пункт B?

3) Поезд шел со скоростью 40 км/ч. Пассажир заметил, что встречный поезд прошел мимо него за 3 с. Найдите скорость встречного поезда, если его длина равна 75 м.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

19. 1) Из пунктов A и B, длина пути между которыми равна 50 км, одновременно вышли навстречу друг другу два туриста. Через 5 ч они встретились. После встречи турист, идущий из пункта A в пункт B, уменьшил скорость на 1 км/ч, второй — увеличил скорость на 1 км/ч. Первый турист прибыл в пункт B на 2 ч раньше, чем второй турист в пункт A. Найдите первоначальную скорость каждого туриста.

2) Двое рабочих могут выполнить задание за 12 часов. Если половину задания будет выполнять один рабочий, затем вторую половину — другой, то задание будет выполнено за 25 часов. За сколько часов выполнит задание каждый рабочий?

3) По окружности длиной в 60 м в одном направлении движутся две точки. Одна делает полный оборот на 5 с быстрее другой и при этом догоняет вторую точку через каждые 60 с. Найдите скорость каждой точки.

20. 1) Имеются два слитка сплавов меди и олова. Первый содержит 40% меди, второй — 68% олова. Найдите массы этих слитков, чтобы при их совместной переплавке получить 8 кг сплава, содержащего 35% меди.

2) Смесь массой 18 кг состоит из двух веществ. После того как из нее выделили 40% первого вещества и 25% второго вещества, в смеси обоих веществ стало одинаковое количество. Найдите первоначальное количество каждого вещества в этой смеси.

21. 1) Значение суммы квадратов цифр положительного двузначного числа равно 13. Если от этого числа вычесть 9, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

2) Некоторое положительное двузначное число на 9 больше значения суммы его цифр. Квадрат этого числа на 180 больше квадрата его цифры единиц. Найдите это число.

22. Постройте график и укажите множество значений функции:

1) $y = \begin{cases} x+3, \text{ если } x < -2, \\ x^2-3, \text{ если } x \geqslant -2; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 2x-2, \text{ если } x < -1, \\ x^2-1, \text{ если } x \geqslant -1; \end{cases}$

3) $y = 3\sqrt{x} - 2;$ 4) $y = 3 - \sqrt{x}\,;$

5) $y = x^2 + 2|x|;$ 6) $y = -x^2+4|x|;$

7) $y = 3x - x \cdot |x|;$ 8) $y = x \cdot |x| - 2x.$

23. Постройте график функции и найдите наибольшее или наименьшее значение функции (если они существуют):

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

1) $y = 2x^2 - 2x + 3$; 2) $y =-2x^2-4x+5$;

3) $y=4-\sqrt{x-2}$; 4) $y=-2+\sqrt{3-x}$.

24. Решите графически уравнение и запишите приближенные значения его корней:

1) $x^2 - 6x = \frac{1}{x+1}$; 2) $-3x^2 + 2x = \frac{x+1}{x-2}$.

***25.** Постройте график уравнения:

1) $\frac{y - x^2 + 3}{x+1} = 0$; 2) $\frac{y - x^2 + 4x}{x-2} = 0$; 3) $\frac{y^2 + x^2 - 25}{x^2 - 1} = 0$.

26. Напишите аналитическую формулу функции, если ее график получен из графика функции:

1) $y = 2x^2$ путем смещения вдоль: а) оси Ox на 3 единицы вправо; б) оси Oy на 2 единицы вниз; в) оси Ox на 4 единицы влево и вдоль оси Oy на 3 единицы вниз;

2) $y = \frac{1}{x}$ путем смещения вдоль: а) оси Ox на 3 единицы вправо; б) оси Oy на 2 единицы вниз; в) оси Ox на 4 единицы влево и вдоль оси Oy на 3 единицы вверх;

3) $y=3\sqrt{x}$ путем смещения вдоль: а) оси Ox на 3 единицы вправо; б) оси Oy на 2 единицы вниз; в) оси Ox на 4 единицы влево и вдоль оси Oy на 3 единицы вниз.

27. Запишите аналитическую формулу функции $y = f(x)$ по ее графику (рис. 1):

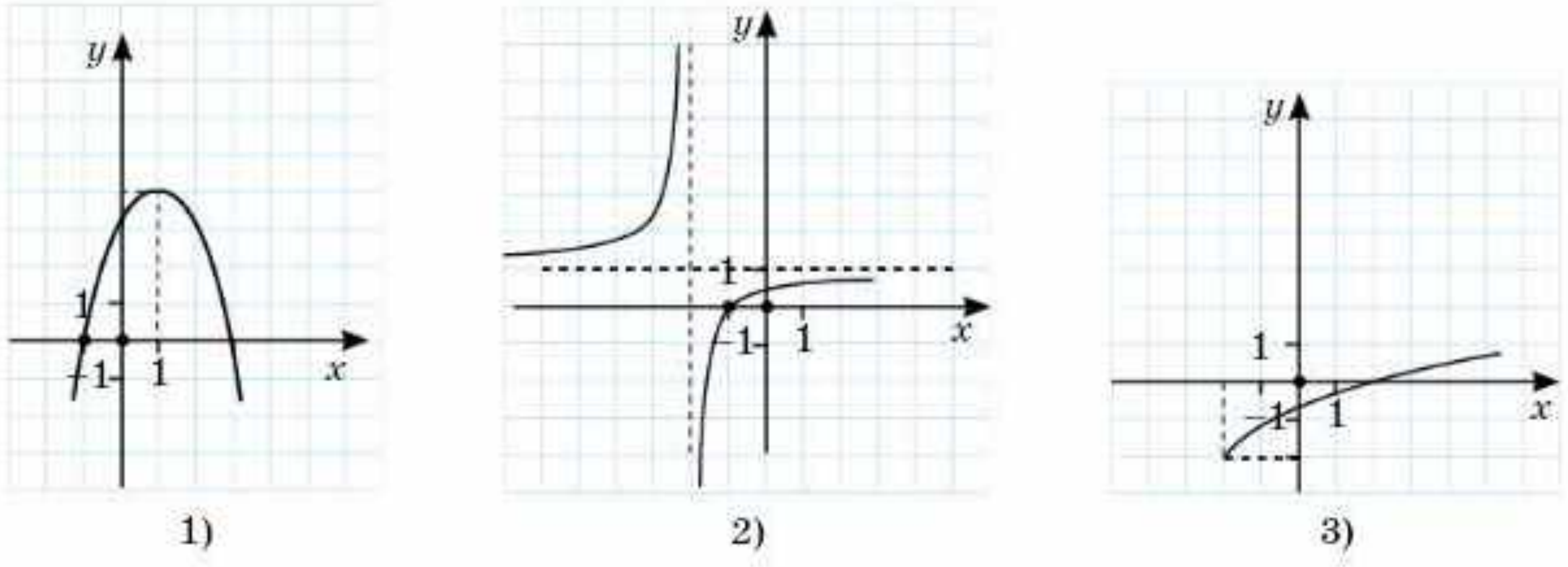


Рис. 1

28. Запишите аналитическую формулу функции $y = f(x)$ и укажите область определения, множество значений, промежутки возрастания и убывания функции по ее графику (рис. 2):

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

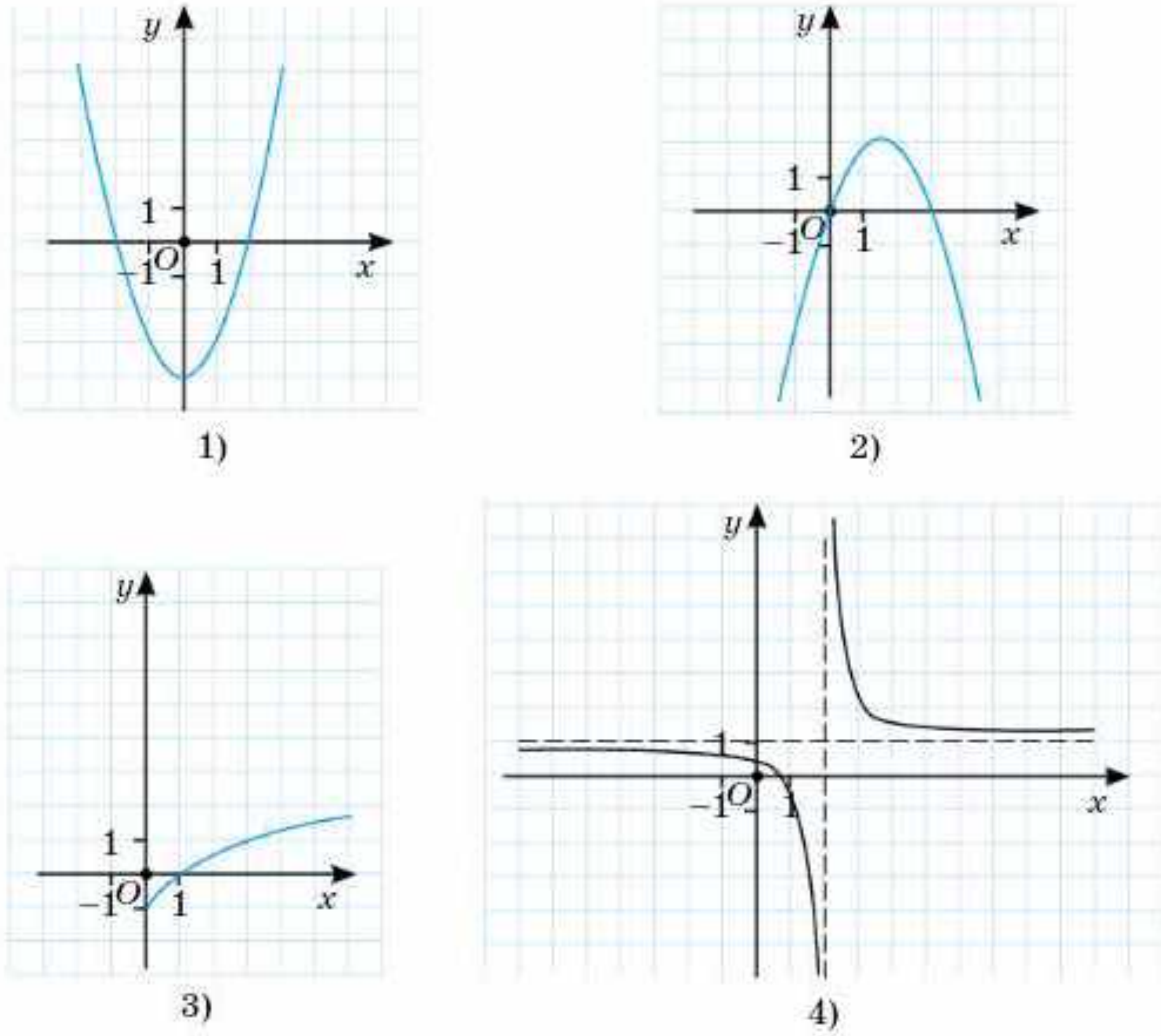


Рис. 2

29. На рисунке 3 изображен график квадратичной функции. Укажите:

1) нули и промежутки монотонности функции;

2) промежутки знакопостоянства функции;

3) множество значений функции.

Запишите уравнение оси симметрии.

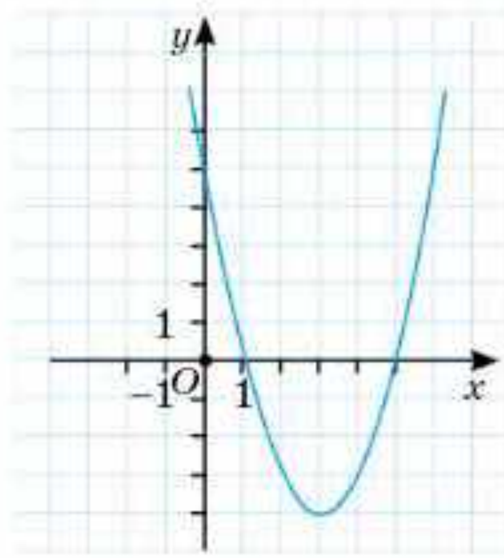


Рис. 3

30. На рисунке 4 изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. $D = b^2 - 4ac$. Найдите знаки чисел a, b, c и D:

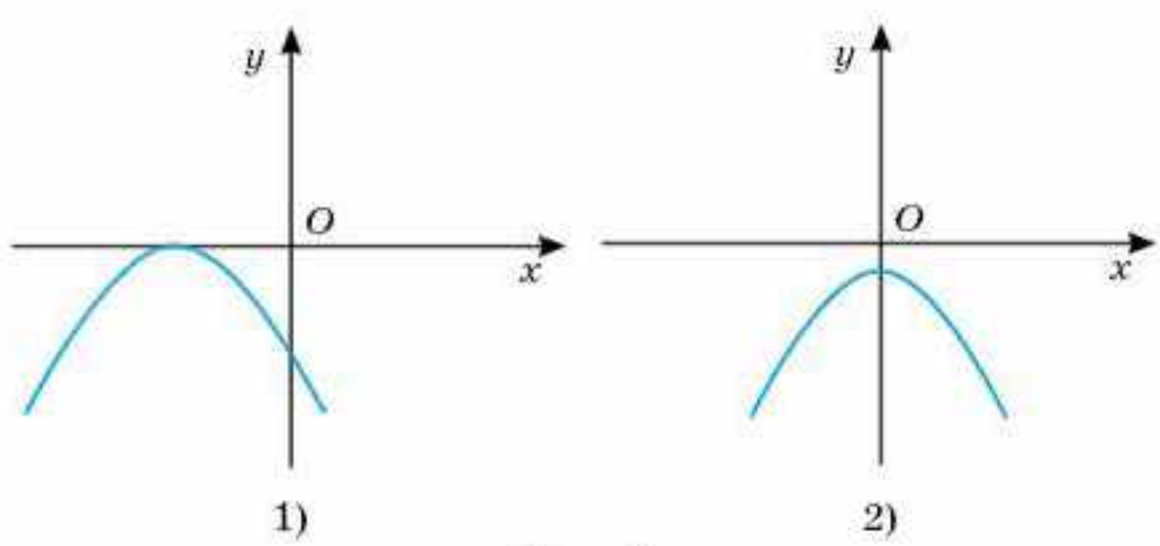
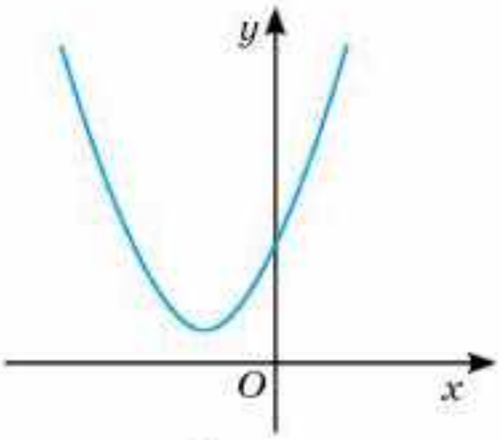


Рис. 4

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

31. На рисунке 5 изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. $D = b^2 - 4ac$. Найдите верные неравенства:



1)

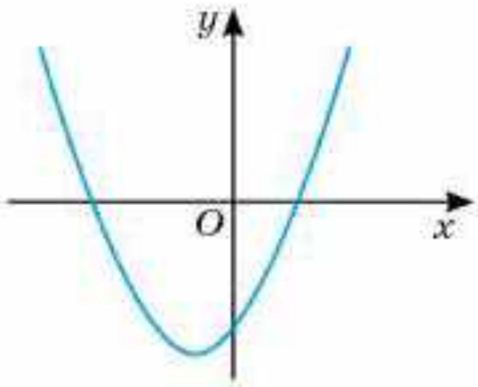
а) $ac > 0$;

б) $Dc > 0$;

в) $Db > 0$;

г) $bc > 0$;

д) $aD > 0$.



2)

а) $ab > 0$;

б) $Dc > 0$;

в) $Db > 0$;

г) $bc > 0$;

д) $aD > 0$.

Рис. 5

32. Вычислите d и a_n арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 9{,}5$; $a_2 = 11{,}5$; $n = 4$;
2) $a_1 = -21$; $a_2 = -16$; $n = 6$;
3) $a_1 = 23$; $a_2 = 19$; $n = 5$;
4) $a_1 = -2{,}9$; $a_2 = -4{,}9$; $n = 7$.

33. 1) Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если значение суммы первого и четвертого членов равно 23, а значение суммы третьего и шестого членов равно 31.

2) Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если значение суммы первого и третьего членов равно 49,2, а значение разности первого и третьего членов равно −15,6.

3) Найдите значение суммы первых пяти членов арифметической прогрессии, если $a_2 + a_4 = 3{,}4$.

34. Найдите n и S_m арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -35$; $a_n = -15$; $d = 5$ и $m = 6$;
2) $a_3 = -6{,}6$; $a_n = -7{,}3$; $d = 0{,}7$ и $m = 20$.

35. Найдите a_1, если:

1) $d = -20$; $S_4 = 300$;
2) $d = 20$; $S_6 = 60$;
3) $d = 25$; $S_7 = 224$.

36. Вычислите q, b_n и S_n геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 0{,}7$; $b_3 = 2{,}8$; $n = 6$;
2) $b_1 = 0{,}6$; $b_2 = 1{,}8$; $n = 5$;
3) $b_1 = -0{,}2$; $b_2 = 1{,}4$; $n = 4$;

37. Найдите b_1 и S_5 геометрической прогрессии, если:

1) $b_3 = \frac{9}{8}$; $q = -\frac{3}{4}$;
2) $b_5 = -16$; $q = \frac{2}{3}$;
3) $b_4 = 12{,}5$; $q = -\frac{5}{6}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

38. Найдите значение суммы членов бесконечной геометрической прогрессии: 1) $\sqrt{3}; -1; \frac{1}{\sqrt{3}}; \ldots$; 2) $\sqrt{2}+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)+\ldots$.

39. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую дробь:
1) 2,(31); 2) 0,(103); 3) 2,3(41); 4) 45,0(23).

40. Найдите значение числового выражения:
1) $\cos30^\circ - \sin60^\circ + \mathrm{ctg}45^\circ - \mathrm{tg}60^\circ$;
2) $\sin210^\circ - \cos240^\circ - \mathrm{ctg}30^\circ - \mathrm{tg}135^\circ$;
3) $\cos45^\circ - \mathrm{tg}45^\circ - \sin135^\circ - \mathrm{ctg}135^\circ$;
4) $\sin360^\circ - \cos30^\circ + \mathrm{tg}210^\circ - \mathrm{ctg}60^\circ$;
5) $-2\cos720^\circ + \mathrm{tg}30^\circ - \mathrm{ctg}210^\circ + \sin120^\circ$;
6) $\mathrm{tg}0^\circ - 2\mathrm{ctg}90^\circ - \sin0^\circ - 3\cos90^\circ$.

41. Вычислите:
1) $2\sin\frac{\pi}{6} - 4\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} - 4\mathrm{ctg}\frac{4\pi}{3}$;
2) $-3\cos\frac{\pi}{2} + 7\sin\frac{\pi}{2} - 3\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{4} - 5\mathrm{tg}0^\circ$;
3) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3} - 11\mathrm{ctg}\frac{9\pi}{4}$;
4) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} - 5\sin\frac{\pi}{3} + 6\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$.

42. Найдите:
1) $\cos\alpha$, $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}4$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
2) $\sin\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$, $\mathrm{tg}2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;
3) $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos2\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{8}$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

43. Найдите:
1) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{7}{9}$, и $0^0 < \alpha < 90^\circ$;
2) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, и $90^0 < \alpha < 180^\circ$.

44. Найдите $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin\beta = \frac{1}{8}$ и $\alpha, \beta \in$ I четверти.

45. Найдите $\cos(\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$, $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha = \frac{6}{7}$, $\sin\beta = \frac{7}{8}$ и $\alpha, \beta \in$ I четверти.

46. Вычислите:

1) $\dfrac{2\cos\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\mathrm{tg}60^\circ}{2\sin\frac{\pi}{6} + \cos60^\circ}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}\mathrm{ctg}30^\circ - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}}{3\mathrm{tg}45^\circ - 2\cos0^\circ}$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3) $\dfrac{\operatorname{tg}30^\circ + \cos\dfrac{\pi}{6}}{\sin\dfrac{\pi}{2} - 4\operatorname{ctg}45^\circ}$;

4) $\dfrac{\sqrt{2}\sin 45^\circ + \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}}{5\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} - 4\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}}$.

47. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(2\pi + \alpha)$;

2) $\dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha}$;

3) $\cos(2\pi - \alpha) \cdot \left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 \cdot \operatorname{tg}(2\pi + \alpha) \cdot \left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2$;

4) $\dfrac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

48. Докажите, что значение выражения равно 2 при любом допустимом α:

1) $2\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) - 2\sin(-\alpha) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(360^\circ - 2\alpha) \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right) -$
$- 2\cos\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$;

2) $2 \cdot \left(0{,}5 - 0{,}5\cos 4\alpha + \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}\right) - (1 - \sin^2 2\alpha) \cdot \dfrac{1}{\cos^2 2\alpha} +$
$+ \operatorname{ctg}3\alpha \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - 3\alpha)$.

49. Упростите выражение:

1) $2\operatorname{tg}9\alpha \cdot \operatorname{ctg}(\pi - 9\alpha) + \sin^2\dfrac{\alpha}{3} \cdot \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{3} + \sin^2\dfrac{\alpha}{3}$;

2) $2 + (0{,}5 + 0{,}5\cos 10\alpha) : (0{,}5 - 0{,}5\cos 10\alpha) \cdot \operatorname{tg}^2(\pi - 5\alpha)$;

3) $3 + \dfrac{\cos^2\alpha - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 - 8\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $\dfrac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - 1} - 1$.

50. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4\alpha\right) \cdot \sin(4\pi - 2\alpha) \cdot \cos(-2\alpha)}{\operatorname{ctg}(-4\alpha) \cdot \left(\cos^2 2\alpha - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right)} = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}4\alpha$;

2) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg}3\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) - 1 = 0$;

4) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\alpha$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

5) $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1$;

6) $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos\alpha + 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha} = -\operatorname{ctg} 3\alpha$;

7) $\dfrac{\sin 9\alpha + \sin 8\alpha - \sin 7\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

8) $\dfrac{2\cos\beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta}{\sin\beta \cdot \sin 2\beta + \cos 3\beta} = 4\cos 2\beta$.

Практико-ориентированные задания

51. Олжас живет от школы на расстоянии 1 км, Айгуль — на расстоянии 400 м. Длина шага Айгуль равна 60 см, Олжаса — 75 см. Олжас за 10 с делает 12 шагов, Айгуль — 10 шагов. Дайте ответы на следующие вопросы:

1) С какой скоростью идут в школу Айгуль и Олжас? (Скорость укажите в метрах в минуту).

2) На каком расстоянии друг от друга, возможно, живут Айгуль и Олжас?

3) Найдите возможную скорость сближения Айгуль и Олжаса.

4) Через какое время встретятся Айгуль и Олжас, если из дома они выходят одновременно? (Ответ округлите до целых и обоснуйте).

5) Сколько шагов должен делать Олжас за 10 с, если он желает прийти в школу раньше Айгуль и из дома они выходят одновременно? (Ответ округлите до целых и обоснуйте).

52. Путник прошел от пункта M до пункта N и вернулся обратно. На рисунке 6 изображен график его движения: по горизонтальной оси откладывается время движения, по вертикальной — длина пути от пункта M до положения путника.

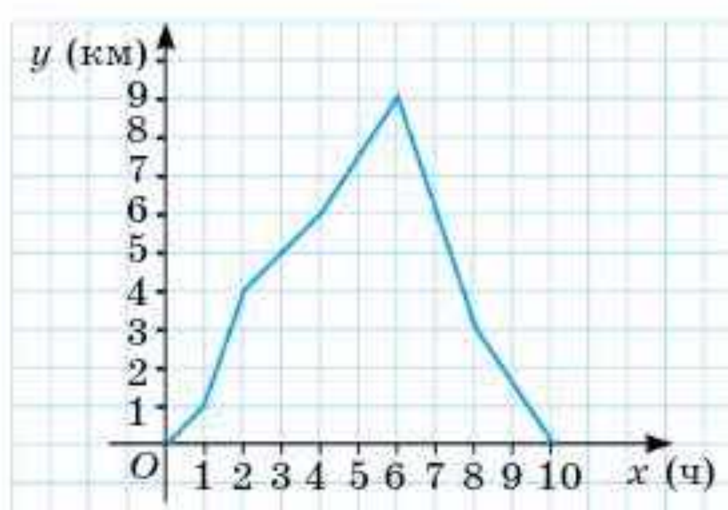


Рис. 6

Используя график движения путника, дайте ответы на вопросы:

1) Чему равна наибольшая скорость движения путника?

2) Сколько всего времени путник двигался с наибольшей скоростью своего движения в пути от пункта M к пункту N и обратно?

3) Чему равна средняя скорость движения путника от пункта M до пункта N?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

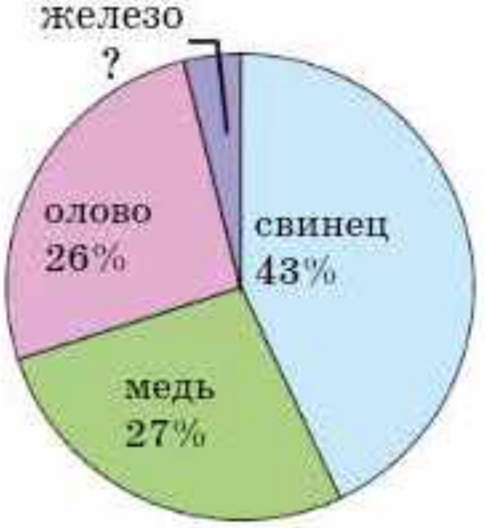


Рис. 7

53. Состав сплава массой 75 кг представлен на диаграмме (рис. 7).

1) Сколько килограммов меди и свинца находится в этом сплаве?

2) Сколько килограммов железа содержится в этом сплаве?

3) Сколько килограммов железа надо добавить к этому сплаву, чтобы его содержание в сплаве было 10%?

4) Если масса железа в сплаве составляет 10%, то каким тогда будет процентное содержание олова в сплаве?

54. Отец с сыном Маратом спускались по эскалатору метро. Марат заметил, что если они будут стоять на ступеньках движущегося эскалатора, то спустятся вниз за 56 с, а если будут идти по неподвижному эскалатору, то спустятся за 42 с.

1) Во сколько раз скорость движущегося эскалатора меньше скорости движения отца и сына, идущих по неподвижному эскалатору?

2) За сколько секунд отец и сын спустятся вниз, если они будут идти по движущемуся эскалатору со скоростью, с которой они шли по неподвижному эскалатору?

3) Какой должна быть скорость Марата, если он желает подняться вверх за 56 с, при этом эскалатор движется вниз?

Метро Алматы

55. В таблице 1 приведена выборка массы (в кг) учащихся.

Таблица 1

57	56	56	58	55
59	57	58	56	58
56	58	59	55	59
57	56	59	57	57
58	59	56	59	56

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

По данным таблицы:

1) составьте вариационный ряд;

2) составьте таблицу абсолютных частот и таблицу относительных частот;

3) найдите объем выборки и среднее арифметическое значение;

4) найдите дисперсию.

56. На полигоне частот (рис. 8) представлены данные о распределении студентов колледжа по возрастным группам.
Найдите относительную частоту (в %) возрастной категории студентов моложе 20 лет.

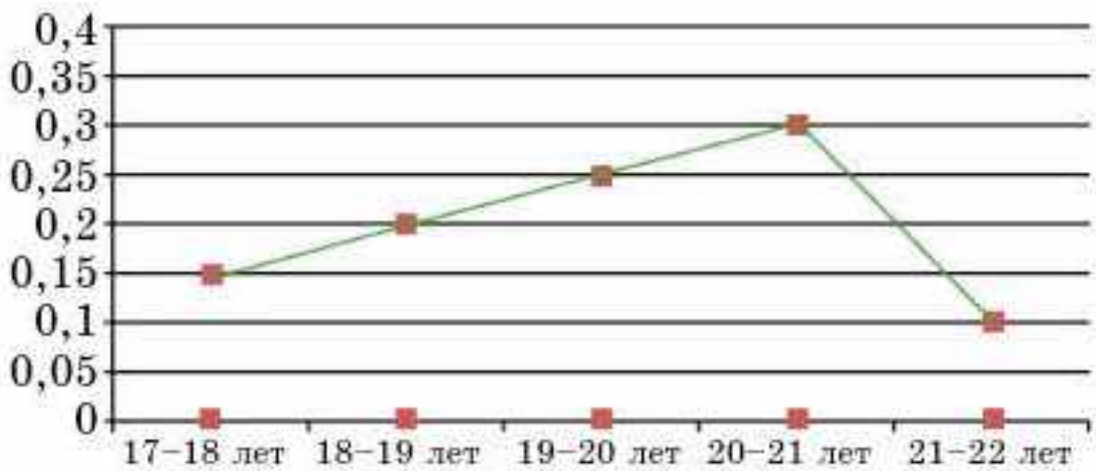


Рис. 8

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

1 ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

§1. ФУНКЦИЯ

Вы углубите свои знания о функциях.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Функция, аргумент, множество, область определения, множество значений

ВЫ ЗНАЕТЕ: *Функцией* называется такая зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

Все значения независимой переменной x образуют область определения функции. Ее обычно обозначают буквой D.

Все значения, которые принимает зависимая переменная y, образуют область значений функции. Ее обычно обозначают буквой E.

Числовая функция — это функция, области определения и значений которой являются числовыми множествами — как правило, множествами действительных чисел.

Определение. ***Числовой функцией с областью определения D*** *называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу единственное число y, зависящее от x.*

Функции принято обозначать латинскими или греческими буквами.

Рассмотрим произвольную функцию f. Так как ее значение зависит от некоторого числа x, то также можно записывать $f(x)$.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Если $y = f(x)$, то число x называется *аргументом функции*, число y — *значением функции в точке x*.

Область определения функции f обозначают: $D(f)$.

Если область определения функции $y = f(x)$ не указана, то за нее принимают область определения выражения $f(x)$.

ПРИМЕР **1.** Найдем область определения функции $y = \frac{1}{x+2} - \sqrt{2x - x^2 + 8}$.

Решение. Поскольку область определения функции не указана, то она совпадает с областью определения выражения: $\frac{1}{x+2} - \sqrt{2x - x^2 + 8}$. Область определения выражения состоит из всех допустимых значений переменной x, т. е. значений, при которых выражение имеет смысл. Как известно, дробь имеет смысл тогда и

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

только тогда, когда ее знаменатель не равен нулю, а арифметический квадратный корень — когда подкоренное выражение неотрицательно. Следовательно, чтобы найти область определения функции

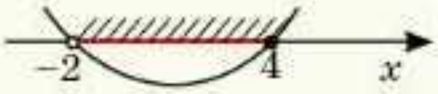


Рис. 1.1

$y = \frac{1}{x+2} - \sqrt{2x - x^2 + 8}$, надо решить систему: $\begin{cases} x + 2 \neq 0 \\ 2x - x^2 + 8 \geqslant 0. \end{cases}$ Получим $\begin{cases} x \neq -2, \\ (x+2)\cdot(x-4) \leqslant 0. \end{cases}$

Тогда $D(f) = (-2; 4]$ (рис. 1.1).

Ответ: $D(f) = (-2; 4]$.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Множество всех чисел y называется *множеством значений функции* $y = f(x)$.

Множество значений функции f обозначают: $E(f)$.

ПРИМЕР

2. Для функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant -1, \\ x + 3, \text{ если } -1 < x < 2, \\ 4x - x^2, \text{ если } 2 \leqslant x \leqslant 4: \end{cases}$

1) вычислим $f(-2)$, $f(1)$, $f(2)$;

2) найдем $D(f)$ и $E(f)$.

Решение. 1) Поскольку число -2 принадлежит числовому промежутку $[-4; -1]$, то для нахождения $f(-2)$ воспользуемся формулой $f(x) = -\frac{2}{x}$. Получим $f(-2) = 1$. Аналогично рассуждая получим $f(1) = 4$, $f(2) = 4$. В этом также можно убедиться, используя график (рис. 1.2).

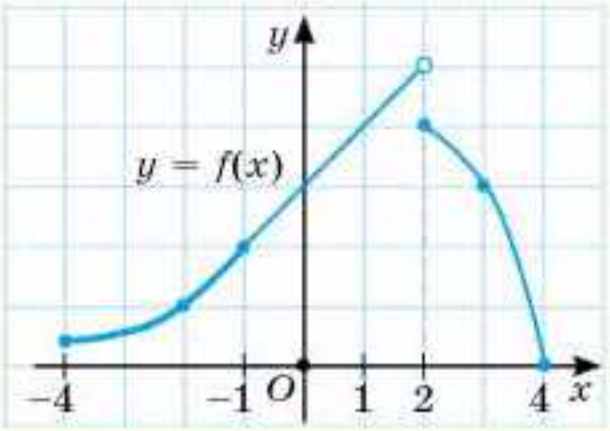


Рис. 1.2

ОБЪЯСНИТЕ

Как построили график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant -1, \\ x + 3, \text{ если } -1 < x < 2, \\ 4x - x^2, \text{ если } 2 \leqslant x \leqslant 4? \end{cases}$

Область определения $D(f)$ состоит из трех числовых промежутков: $[-4; -1]$, $(-1; 2)$ и $[2; 4]$. Объединив их, получим отрезок $[-4; 4]$. Значит, $D(f) = [-4; 4]$.

Множество значений $E(f)$ найдем, используя график функции $y = f(x)$ (рис. 1.2).

$E(f) = [0; 5)$.

Ответ: 1) $f(-2) = 1$, $f(1) = 4$, $f(2) = 4$; 2) $D(f) = [-4; 4]$, $E(f) = [0; 5)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

1. Какие числовые функции вам известны? Перечислите эти функции и укажите для каждой из них область определения и область значений.
2. Может ли область определения числовой функции состоять из нескольких чисел?
3. Может ли множеством значений числовой функции быть: 1) числовая прямая; 2) числовой луч? Если это возможно, то приведите примеры известных вам функций с такой областью значений.

Упражнения

A

Найдите области определения функций **(1.1—1.5)**:

1.1. 1) $y = 3x + 7$; 2) $y = 5x - 0,9$;
3) $y = 8 - 2x$; 4) $y = -1,4x + 13$.

1.2. 1) $y = 5x^2$; 2) $y = -7x^2$;
3) $y = x^2 - 9$; 4) $y = -x^2 + 4,2$.

1.3. 1) $y = x^2 + \frac{1}{x}$; 2) $y = x - \frac{3}{x+2}$;
3) $y = \frac{5}{x} + \frac{7}{x+2}$; 4) $y = \frac{x}{2x-3} + x^2$.

1.4. 1) $y = \frac{1}{x^2 + 2x}$; 2) $y = \frac{1}{7 - x^2}$;
3) $y = \frac{4}{5x^2 + 0,6}$; 4) $y = -\frac{8}{9x - 4,5}$.

1.5. 1) $y = \sqrt{x+11}$; 2) $y = \sqrt{x-23}$;
3) $y = \sqrt{19+x}$; 4) $y = \sqrt{10-x}$.

1.6. Напишите формулу функции $y = f(x)$, областью определения которой является множество:
1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0]$;
3) $[-2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -6) \cup (-6; +\infty)$.

Найдите множество значений функций **(1.7—1.10)**:

1.7. 1) $y = 7 - 1,4x$; 2) $y = -9 + 3x$;
3) $y = \frac{7}{1,2x - 6}$; 4) $y = -\frac{1}{4,8 - 4x}$.

1.8. 1) $y = x^2 - 9x$; 2) $y = 3x - 2x^2$;
3) $y = x^2 - 7x + 12$; 4) $y = 30 - 11x - x^2$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

1.9. 1) $y = 2 + \sqrt{x}$; 2) $y = -\sqrt{x}$;

3) $y = -\sqrt{x} + 10$; 4) $y = -2{,}3 - \sqrt{x}$.

1.10. 1) $y = |x| + 4$; 2) $y = |x| - 11$;

3) $y = 6 - |x|$; 4) $y = -|x| - 2$.

1.11. Найдите область определения и множество значений функции, используя ее график (рис. 1.3):

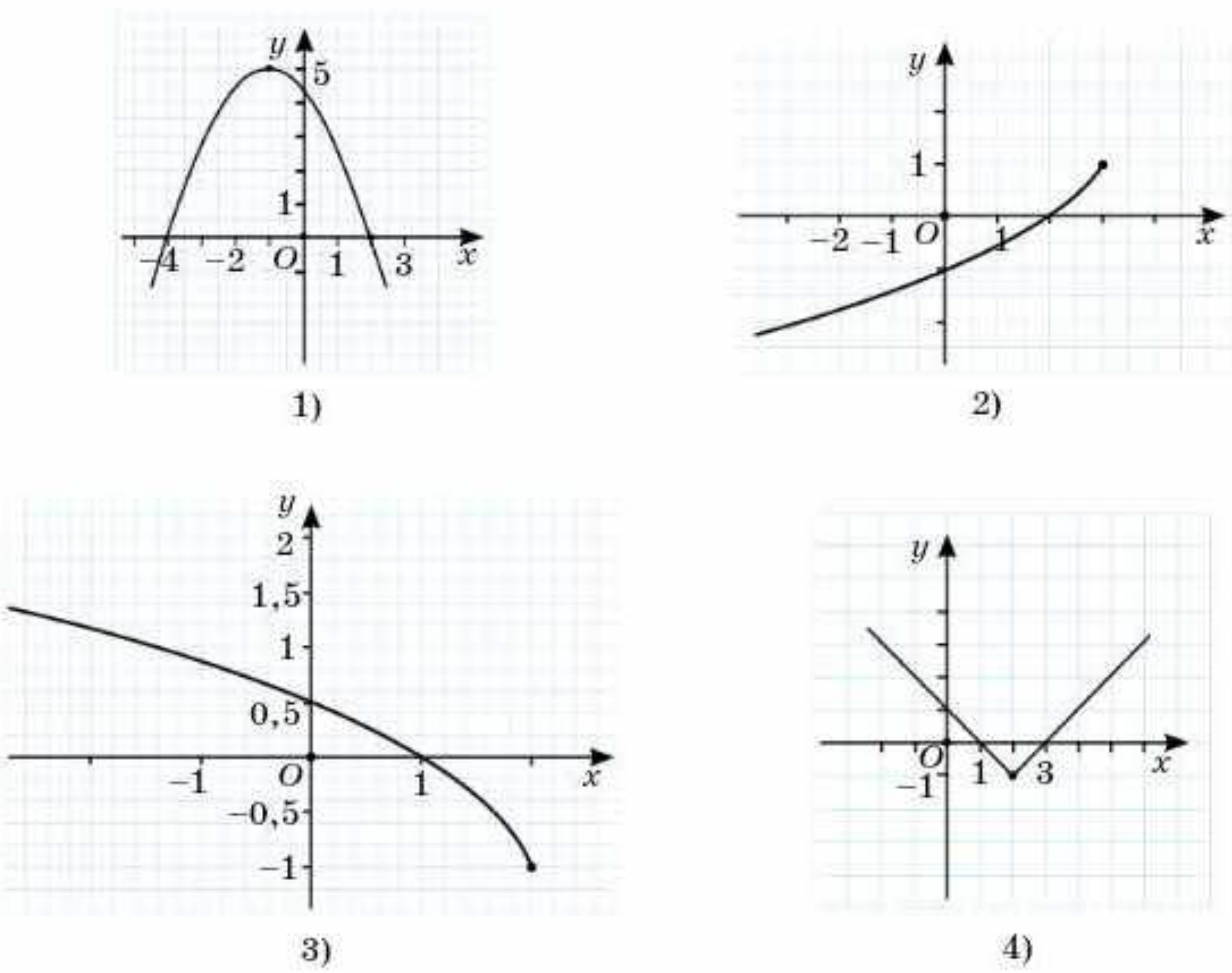


Рис. 1.3

Найдите области определения функций **(1.12—1.13)**:

1.12. 1) $y = \dfrac{15}{\sqrt{19 + x}}$; 2) $y = -\dfrac{21}{\sqrt{x - 17}}$;

3) $y = \dfrac{22}{\sqrt{9x - 12}}$; 4) $y = -\dfrac{x}{\sqrt{36 - 1{,}8x}}$.

1.13. 1) $C = \dfrac{\sqrt{x + 11}}{\sqrt{18 + x}}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{x - 1{,}3}}{\sqrt{1{,}2 + x}}$;

3) $y = \dfrac{\sqrt{25 - 2x}}{\sqrt{1{,}6 + 0{,}4x}}$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{4{,}2 - 0{,}7x}}{\sqrt{9x - 2{,}7}}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

B

Найдите области определения функций **(1.14—1.18)**:

1.14. 1) $y = \frac{3}{(x+4)(x-5)}$; 2) $y = \frac{5}{(3x+1)(7x-2)}$;

3) $y = \frac{10}{(6-5x)(9x-2)}$; 4) $y = \frac{8}{(11x+2)(10x+7)}$;

5) $y = \frac{x}{x^2+0,7x-0,3}$; 6) $y = \frac{3x}{x^2-0,3x-0,7}$;

7) $y = \frac{x-2}{1,56+2,5x+x^2}$; 8) $y = \frac{3-x}{-1+12x-27x^2}$.

1.15. 1) $y = \frac{2}{(x-4)(x^2-8x+12)}$; 2) $y = \frac{4}{(x+0,2)(x^2+0,4x+0,03)}$;

3) $y = \frac{1}{(3x-1)(20x^2-23x+6)}$; 4) $y = \frac{2}{(6x+1)(20x^2-7x-3)}$.

1.16. 1) $y = \frac{\sqrt{x-9}}{x^2-7x+10}$; 2) $y = \frac{\sqrt{11+x}}{x^2-3x-10}$;

3) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{6+6,2x+x^2}$; 4) $y = \frac{\sqrt{x+4}}{3-14x-5x^2}$.

1.17. 1) $y = \sqrt{\frac{5x+4}{7-8x}}$; 2) $y = \sqrt{\frac{9x-1}{16-6x}}$;

3) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-4}}$; 4) $y = \sqrt{\frac{9-x^2}{2-x}}$.

1.18. 1) $y = \frac{\sqrt{2x-13}}{\sqrt{x^2-12x+20}}$; 2) $y = \frac{\sqrt{4-8x}}{\sqrt{x^2-4,5x-9}}$;

3) $y = \frac{\sqrt{22-11x}}{\sqrt{-21+4x+x^2}}$; 4) $y = \frac{\sqrt{18+6x}}{\sqrt{40-3x-x^2}}$.

1.19. Найдите множество значений функции:

1) $y = |x+10| + 5$; 2) $y = 4 - |x-4|$;

3) $y = |x-1| + 2$; 4) $y = 3 - |x+3|$;

5) $y = |x+9| + x$; 6) $y = |x-9| + x$;

7) $y = |x-7| + 6x$; 8) $y = |x-4| + 3x$.

1.20. На рисунке 1.4 даны графики функций, областью определения которых является числовой отрезок $[a; b]$. Используя график, найдите множество значений функции:

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

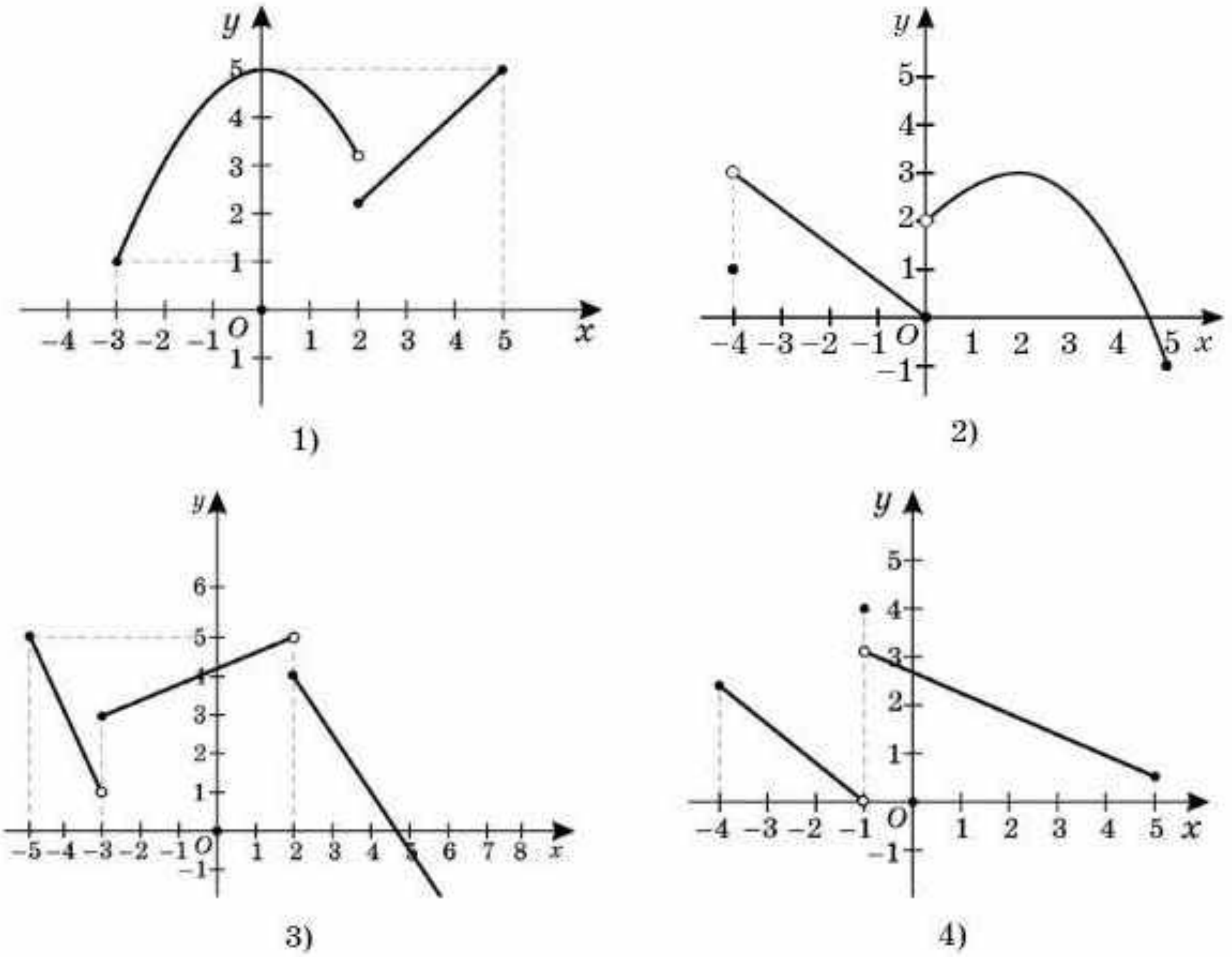


Рис. 1.4

C

1.21. Найдите множество значений функции:

1) $y = x^2 - 9|x| + x + 7$; 2) $y = x^2 + 11x - |x| + 16$.

1.22. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 4x + 12}}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{36 - x^2}{x^2 - 4x - 32}}$.

1.23. Для всех параметров a найдите множество значений функции:

1) $y = ax^2 - 7x$; 2) $y = 4x - ax^2$;

3) $y = |x + 15| + ax$; 4) $y = |x - 21| + ax$.

1.24. Найдите все значения параметра a, при которых областью определения функции $y = \sqrt{x-5} + \sqrt{ax+9}$ будет:

1) числовой луч;

2) числовой отрезок;

3) множество всех действительных чисел;

4) единственное число;

5) пустое множество.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ МАТЕМАТИКАХ

1.25. Общее понятие функции, как и остальные понятия математики, сложилось не сразу, а прошло долгий путь развития.

Математический термин "функция" впервые появился в 1692 г. у Лейбница

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 — 1716)

Первое общее определение функции встречается у Бернулли (1718)

Иоганн Бернулли (1667—1748)

Современное определение функции дал Дирихле (1837)

Дирихле Петер Густав Лежен (1805—1859)

ПОВТОРИТЕ

1.26. Докажите тождество:

$$\left(\frac{3b}{a^2-ab}+\frac{4a}{b^2-ab}\right)\cdot\left(\frac{ab}{\sqrt{3}b-2a}+\frac{b^2}{2a-\sqrt{3}b}\right):\frac{\sqrt{3}b+2a}{a}=1.$$

1.27. Числитель несократимой дроби на единицу меньше знаменателя. Если к данной дроби прибавить взаимно-обратную дробь, то значение их суммы будет равно $\frac{113}{56}$. Найдите данную дробь.

1.28. Найдите наименьшее и наибольшее целые числа, удовлетворяющие неравенству $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}\leqslant 0$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, аргумент, область определения функции, множество значений функции, график, таблица.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Вы углубите свои знания о способах задания функций.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, способ, аналитический способ, табличный способ, словесный способ, графический способ

ВЫ ЗНАЕТЕ: Задать функцию — значит показать, как для заданных значений аргумента найти соответствующие значения функции.

Способ задания функции с помощью формулы называется *аналитическим способом задания функции*.

Аналитический способ дает возможность по каждому численному значению аргумента x найти соответствующее ему численное значение функции y точно или с некоторой точностью.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему формулы $y^2 + x^2 = 9$ и $|y| = x$ не задают функцию?

Вспомните названия функций, заданных аналитическим способом: $y = kx + b$; $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$; $y = x^2$.

Если зависимость между x и y задана формулой, разрешенной относительно y, т. е. имеет вид $y = f(x)$, то говорят, что *функция от x задана в явном виде*.

Если же значения x и y связаны некоторым уравнением вида $F(x; y) = 0$, т. е. формула не разрешена относительно y, то говорят, что *функция $y = f(x)$ задана неявно*.

Функция может быть задана разными формулами на разных частях ее области определения. Например, $y = \begin{cases} 3x \text{ при } x \leqslant 0, \\ 1 \text{ при } x > 0. \end{cases}$

При аналитическом способе задания функция может быть задана параметрически, когда переменные x и y выражены через некоторый параметр t. Например, $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2. \end{cases}$

Аналитический способ является самым распространенным способом задания функций.

Основное преимущество аналитического способа задания функции — возможность вычисления значения функции при произвольном значении аргумента из области определения.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ВЫ ЗНАЕТЕ: Поскольку по таблице по заданному значению аргумента можно найти соответствующее значение функции, то функцию можно задать и *табличным способом.*

Табличный способ заключается в задании таблицы отдельных значений аргумента и соответствующих им значений функции. Такой способ задания функции применяется в том случае, когда область определения функции является конечным множеством.

Преимущество табличного способа задания функции состоит в том, что он дает возможность найти те или другие конкретные значения сразу, без дополнительных измерений или вычислений. Однако, в некоторых случаях, таблица определяет функцию не полностью, а лишь для некоторых значений аргумента и не дает наглядного представления характера изменения функции в зависимости от изменения аргумента.

ОБЪЯСНИТЕ

Какая из таблиц задает функцию, какая — нет?

Таблица 2

x	1	2	3
y	0,5	1	0,5

Таблица 3

x	–1	–2	–1
y	–1	2	1

Наиболее наглядным является *графический способ* задания функции.

ВЫ ЗНАЕТЕ: *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному равенству.

ОБЪЯСНИТЕ

1) Графики каких функций изображены на рисунке 2.1.?

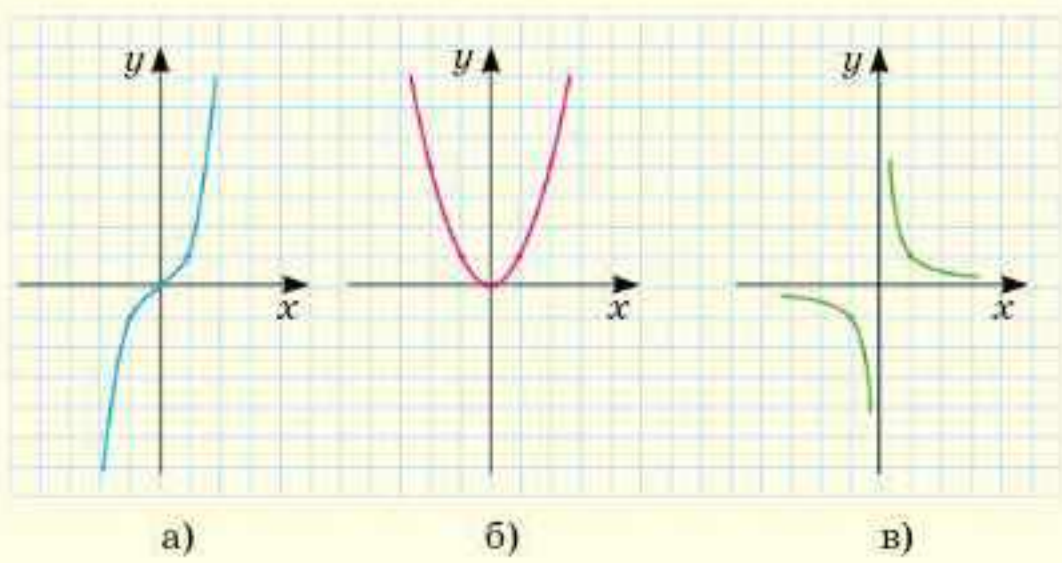


Рис. 2.1

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

2) Почему не задают функции графики (рис. 2.2)?

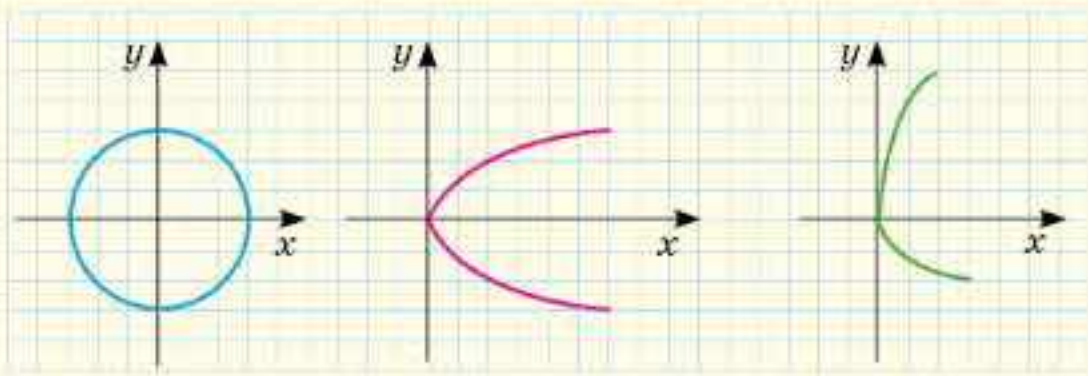


Рис. 2.2

Графический способ задания функции не всегда дает возможность точно найти значения функции, но он имеет большое преимущество перед другими способами — наглядность.

Графическим способом задания функции часто пользуются в технике и физике.

ОБЪЯСНИТЕ

Как по графику функции найти ее область определения?

При *словесном способе задания функции* функция задается с помощью словесной формулировки.

ПРИМЕР

1. Функция Дирихле — классический пример:
"Значение функции равно 1, если x — рациональное число; значение функции равно 0, если x — иррациональное число".

2. Из физики известно, что при равномерном движении длина пройденного пути прямо пропорциональна времени, прошедшему с момента начала пути. Эта фраза описывает длину пути как линейную функцию времени.

Преимущество словесного способа задания функции заключается в возможности задания тех функций, которые не удается выразить аналитически.

Назовите функцию, которая задана словесно: прямая линия пересекает оси координат в точках (0; 3) и (–1,5; 0). Задайте эту функцию графически.

1. В каких случаях удобно задать функцию табличным способом?
2. Задайте квадратичную функцию аналитически, графически, таблично и словесно.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Упражнения

А

2.1. Какие из графиков, изображенных на рисунке 2.3, являются графиками функций?

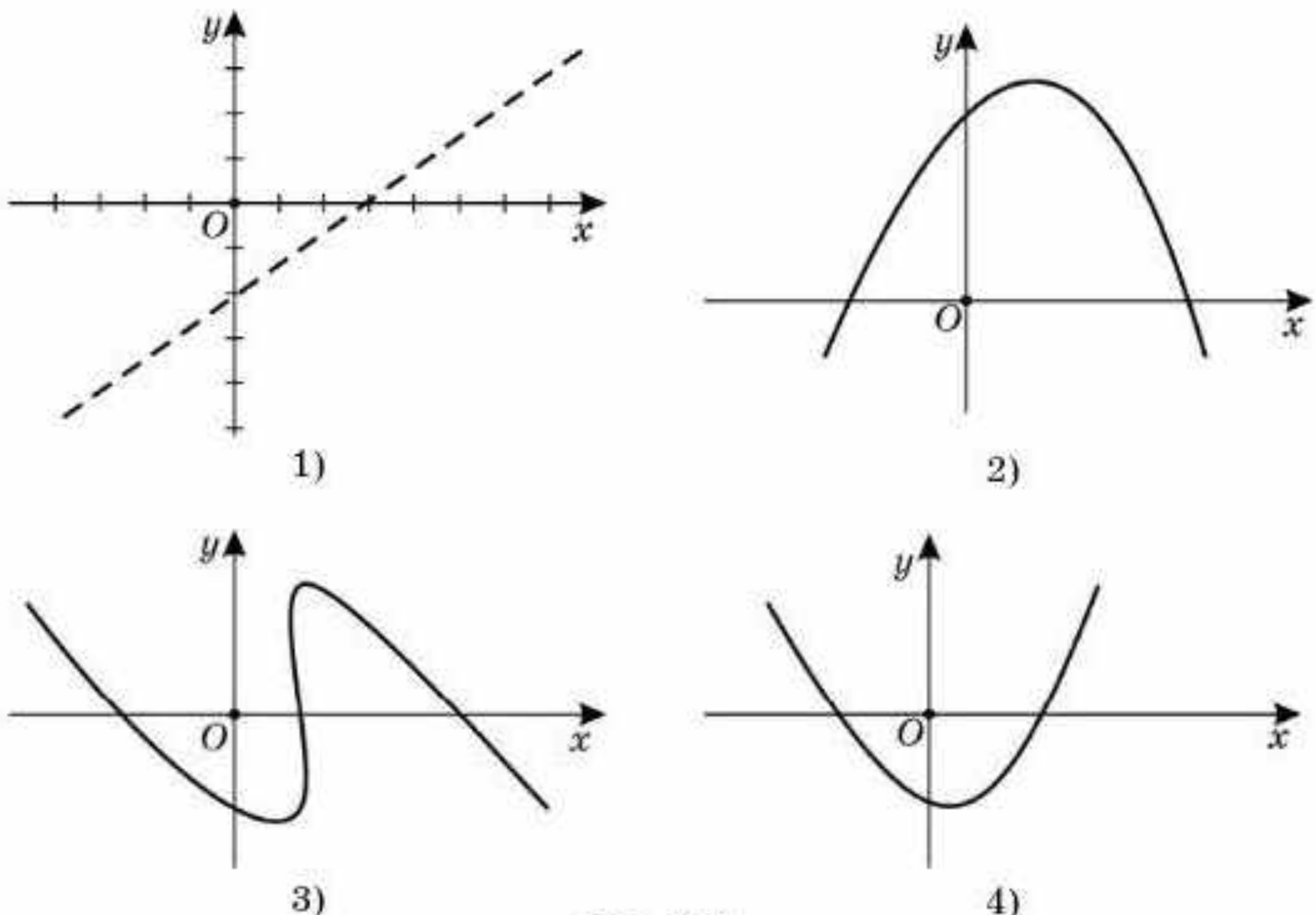


Рис. 2.3

2.2. Напишите формулу функции, график которой изображен на рисунке 2.4:

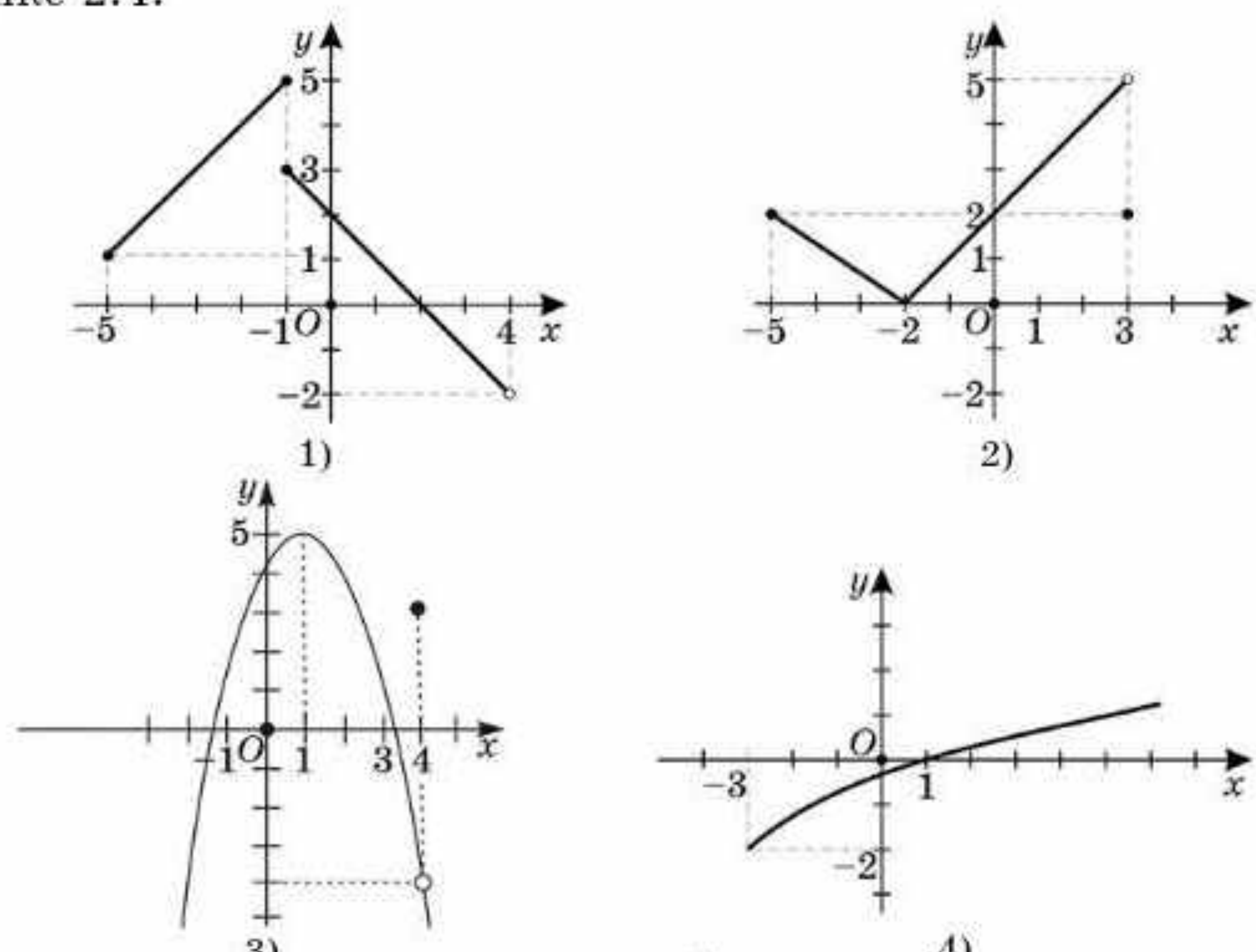


Рис. 2.4

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

2.3. Функция задана формулой $s = 3t^2 + 9t$. Найдите:
1) $s(1)$; $s(2)$; $s(3{,}5)$; $s(5)$; 2) t, если $s = 210$; $s = 120$.

2.4. Функция задана формулой $s = 1{,}5t^2 + 6t$. Найдите:
1) $s(0{,}4)$; $s(1{,}6)$; $s(4)$; $s(6)$; 2) t, если $s = 18$; $s = 72$.

2.5. Используя график функции, изображенный на рисунке 2.5, найдите:
1) область определения; 2) множество значений; 3) точку пересечения с осью ординат; 4) промежутки знакопостоянства.

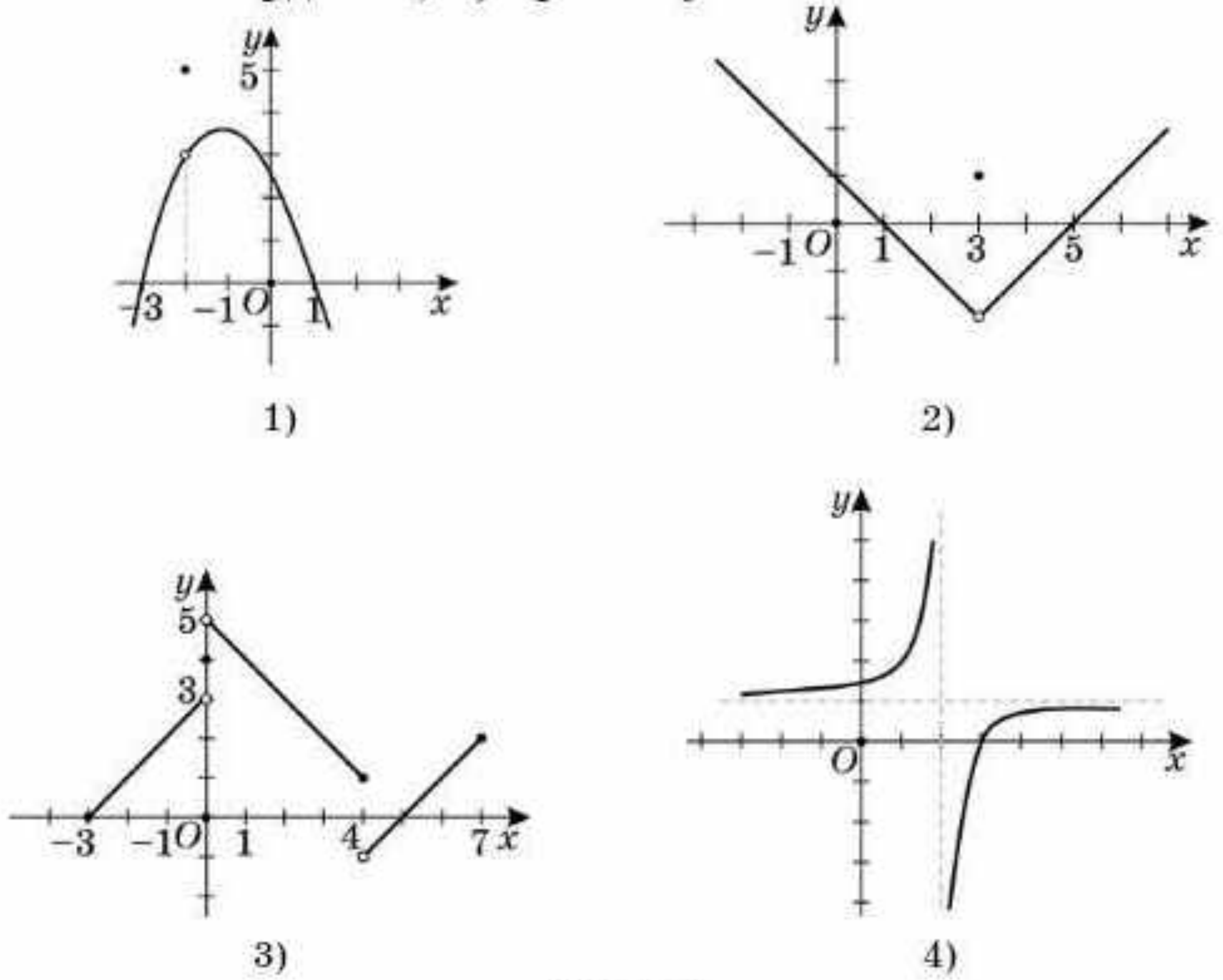


Рис. 2.5

2.6. Функция $y = f(x)$ определена на числовом отрезке $[a; b]$ и задана таблицей. Используя данные из таблиц 4—7, напишите формулу функции. Постройте ее график.

Таблица 4

1)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	−2	−1	0	1	2	3	4

Таблица 5

2)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2

Таблица 6

3)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2
y	9	2	−3	−6	−7	−6	−3

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Таблица 7

4)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	5	2	1	2	5	10

В

2.7. Пусть $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Задайте аналитически функцию: $y = f(-x)$, $y = f(x + 2)$, $y = f(1 - x)$. Для каждой функции найдите:
1) множество значений;
2) точку пересечения с осью ординат;
3) нули.

2.8. Пусть $f(x) = -x^2 + x + 2$. Задайте аналитически функцию: $y = f(x + 2)$, $y = f(x) - 3$, $y = 5 - f(x)$. Для каждой функции найдите:
1) множество значений;
2) точку пересечения с осью ординат;
3) нули.

2.9. Напишите формулу функции, график которой изображен на рисунке 2.6:

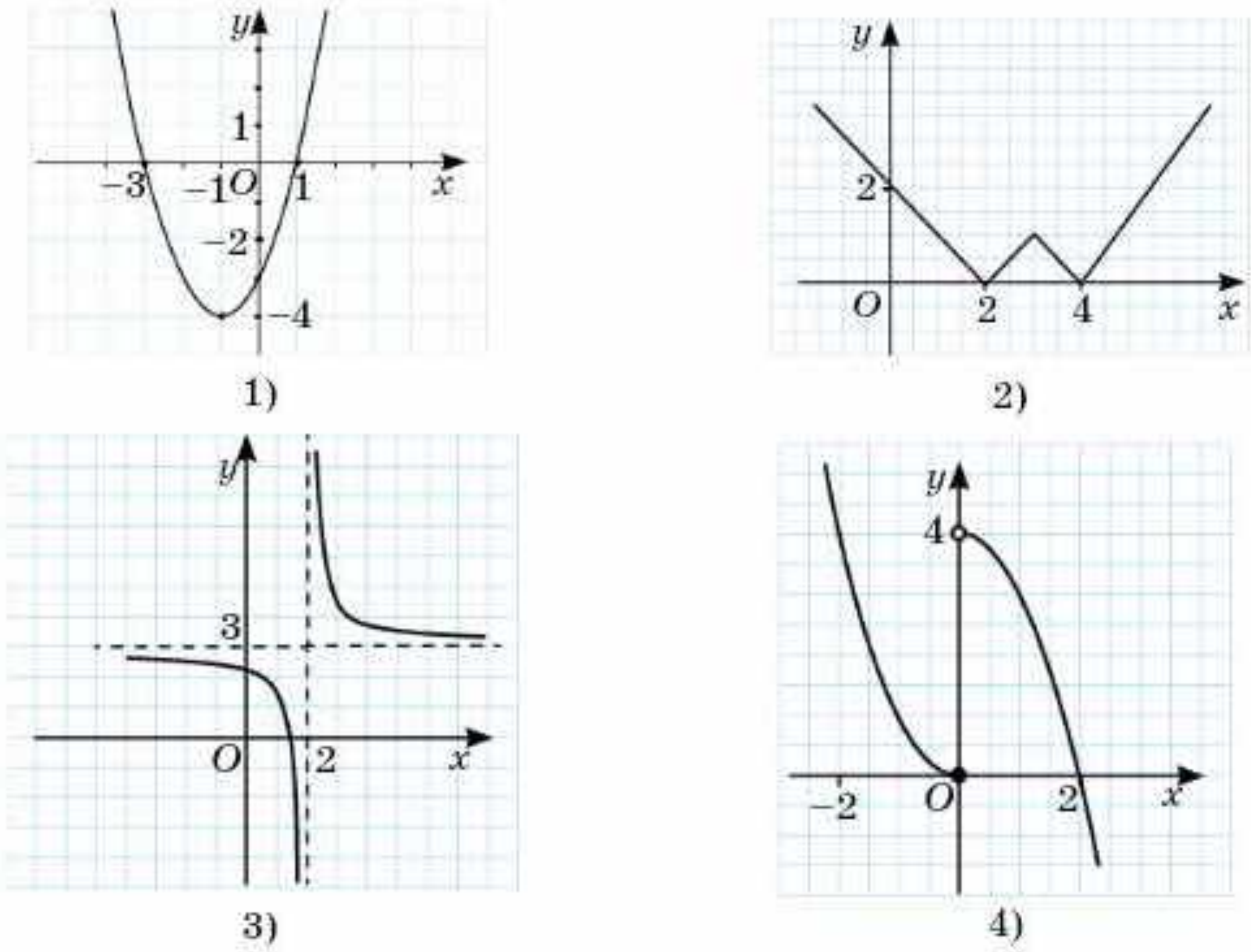


Рис. 2.6

Постройте графики функций **(2.10—2.11.)**:

2.10. 1) $y = \begin{cases} x + 6, \text{ если } x < -3, \\ -x, \text{ если } x \geqslant -3; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 2x, \text{ если } x > 4, \\ 2 + x, \text{ если } x \leqslant 4; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 3x - 1, \text{ если } x \leqslant 0, \\ -4x - 1, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} 12 - x, \text{ если } x > 3, \\ x^2, \text{ если } x \leqslant 3. \end{cases}$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

2.11. 1) $y = \begin{cases} x + 4, \text{ если } x < -1, \\ 3x^2, \text{ если } x \geqslant -1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 5x^2, \text{ если } x > 1, \\ 6 - x, \text{ если } x \leqslant 1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 3x - 1, \text{ если } x \leqslant 0, \\ -4x - 1, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, \text{ если } x > 4, \\ (0,25x)^2, \text{ если } x \leqslant 4. \end{cases}$

2.12. Задайте уравнением множество точек координатной плоскости, у которых значение:

1) суммы абсциссы и ординаты равно удвоенной абсциссе;
2) разности ординаты и абсциссы равно удвоенной ординате;
3) суммы абсциссы и утроенной ординаты равно утроенной абсциссе;
4) разности ординаты и абсциссы равно утроенной ординате.

2.13. Задайте множество точек координатной плоскости, у которых значение:

1) суммы абсциссы и удвоенной ординаты равно 8;
2) разности ординаты и удвоенной абсциссы равно 6;
3) суммы абсциссы и ординаты равно квадрату абсциссы;
4) разности ординаты и утроенной абсциссы равно удвоенному квадрату абсциссы.

C

2.14. Напишите формулу функции, график которой изображен на рисунке 2.7:

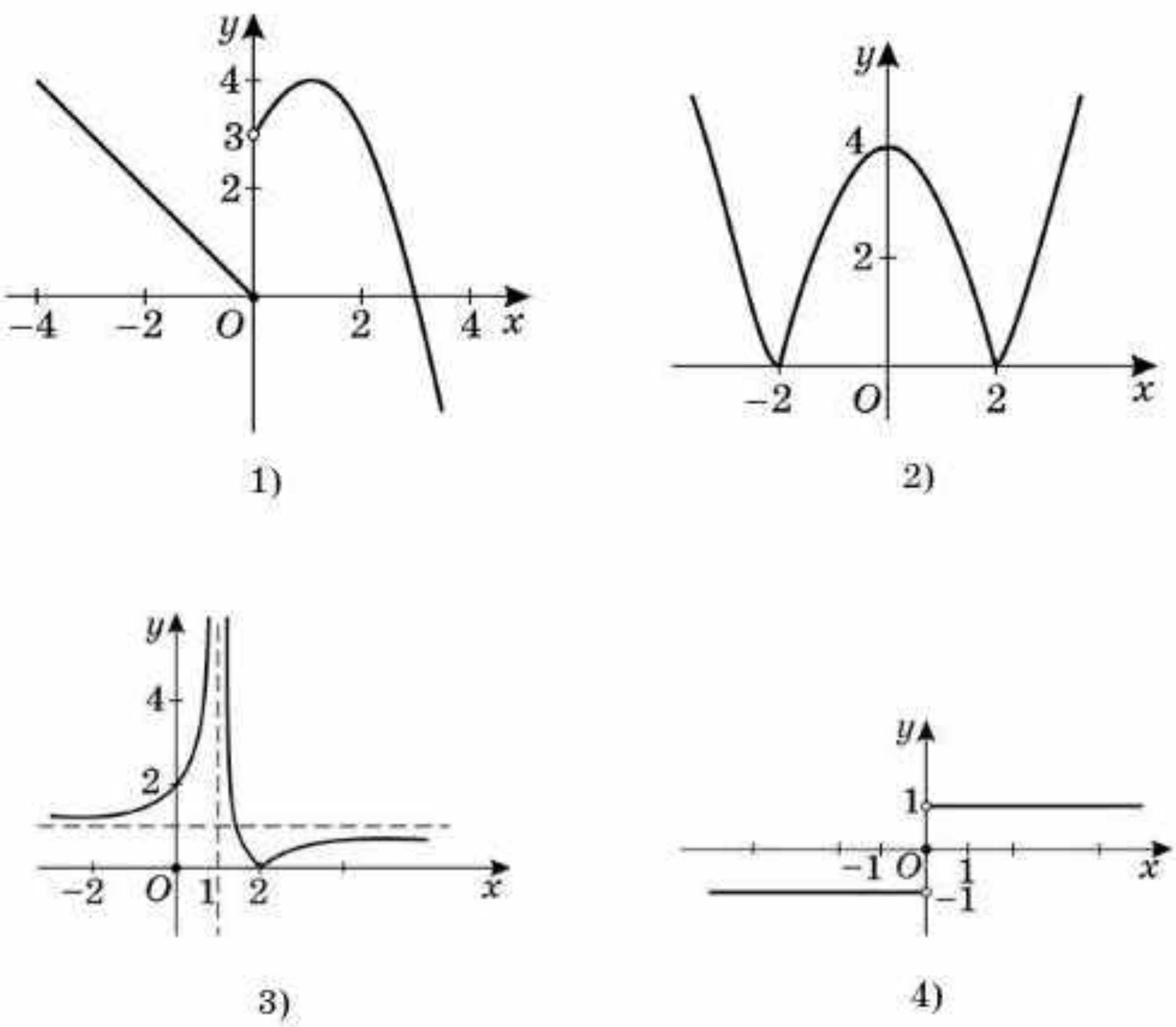


Рис. 2.7

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x, обозначают символом $[x]$.

Дробную часть числа x обозначают символом $\{x\}$:

$$\{x\} = x - [x].$$

2.15. Постройте график функции:

1) $y = [x + 5]$; 2) $y = [x - 7]$; 3) $y = 2 + [x + 4]$;
4) $y = \{x\} + 1$; 5) $y = 4 - \{x\}$; 6) $y = 6 + \{- x\}$;
7) $y = [2x] + 1$; 8) $y = \{2x\}$; 9) $y = \{0{,}5x\} + 1$.

2.16. Найдите значения функции Дирихле

$$d(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число} \end{cases}$$

при следующих значениях переменной x, если x равно 5; 7,5; − 44; 1,9(3); $\sqrt{10}$, $5\sqrt{5}$ $-\sqrt{3}$; $\dfrac{\sqrt{180}-\sqrt{20}}{\sqrt{125}}$.

2.17. Найдите значения функции

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \text{ если } x \text{ — рациональное число и выражается} \\ \text{несократимой дробью } \dfrac{m}{n}; \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число} \end{cases}$$

при следующих значениях x: 0,7; 0, (5); 0,(63); 0,2(3); $\dfrac{1}{\pi}$; $\dfrac{\sqrt{50}+\sqrt{2}}{\sqrt{200}}$.

ПОВТОРИТЕ

2.18. Упростите выражение $\left(\dfrac{x-3}{x^2-2x-8} - \dfrac{x-4}{x^2-x-6}\right) \cdot \left(\dfrac{12-x^2}{2x-7} + x\right)$.

2.19. Моторная лодка проехала по течению реки 24 км пути и против течения реки 32 км пути, затратив на весь путь 6 часов. Найдите скорость моторной лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

2.20. Постройте график функции: 1) $y = x^2 - x - 12$; 2) $y = -18 + 11x - x^2$. Используя построенный график, укажите: координаты вершины параболы; промежутки возрастания и убывания, нули, промежутки знакопостоянства функции.

2.21. Перечислите целые числа, удовлетворяющие неравенству $\dfrac{x^3+x^2-30x}{x^3-x^2-42x} \leqslant 0$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Линейная функция, квадратичная функция и их графики, координатная плоскость, координаты точки, обратная пропорциональность, виды преобразований фигур, симметричность относительно точки и прямой, параллельный перенос.

§3. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ВИДОВ $y = f(x + n)$ и $y = f(x) + n$, где $n \in R$

Вы научитесь выполнять преобразования графиков функций с помощью параллельного переноса.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

График, функция, параллельный перенос, ось абсцисс, ось ординат

ВЫ ЗНАЕТЕ: *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному равенству, т. е. множество точек координатной плоскости $A(x; f(x))$.

График функции $y = a(x + n)^2$ получается из графика функции $y = ax^2$ с помощью его смещения (сдвига, параллельного переноса) на $|n|$ единиц вдоль оси Ox влево, если n положительное число, и вправо, если n отрицательное число.

ОБЪЯСНИТЕ

Как построили графики функций $y = (x - 2)^2$ и $y = (x + 2)^2$, используя график функции $y = x^2$ (рис. 3.1)?

На рисунке 3.2 в системе координат xO_1y_1 изображен график функции $y = x^2$.

Ось ординат O_1y_1 перенесли влево на 2 единицы и она заняла положение Oy.

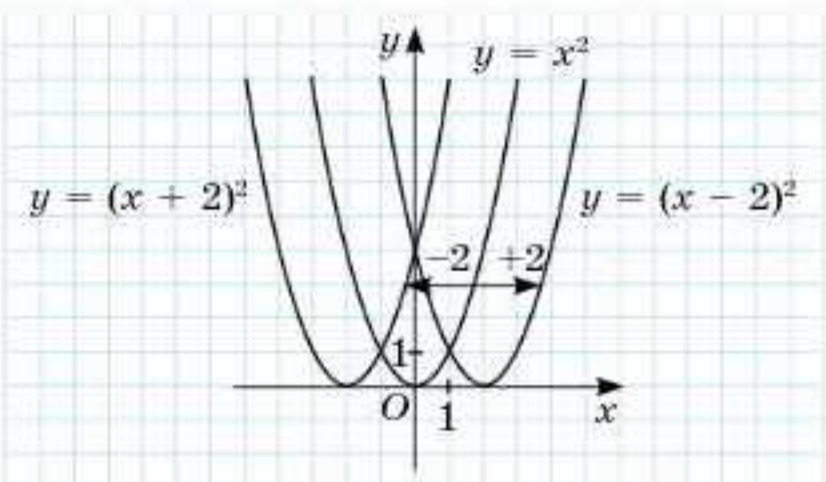


Рис. 3.1

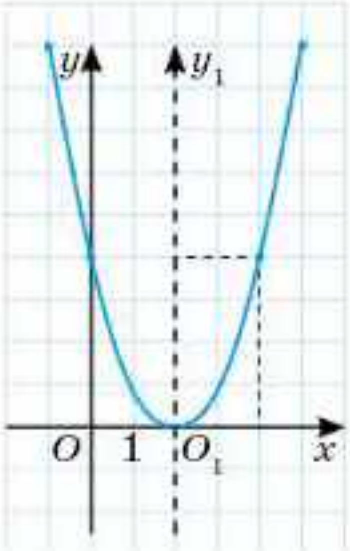


Рис. 3.2

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ОБЪЯСНИТЕ

Почему формула $y = (x - 2)^2$ является формулой функции, график которой изображен на рисунке 3.2 в системе координат xOy?

Как построить график функции $y = (x + 2)^2$, не сдвигая построенный график функции $y = x^2$?

В результате сдвига графика функции вправо (влево) вдоль оси Ox на $|n|$ единиц получается такой же график, как и при переносе оси Oy влево (вправо) на столько же единиц.

Приведем доказательство рассмотренных преобразований графиков функций.

Доказательство.

Рассмотрим произвольную точку $A_0\ (x_0; y_0)$ в системе координат xOy (рис. 3.3).

Переместим эту точку вдоль оси Ox вправо на n единиц ($n > 0$). Она займет положение точки $A_1(x_1; y_1)$. При этом $x_1 = x_0 + n$, $y_1 = y_0$.

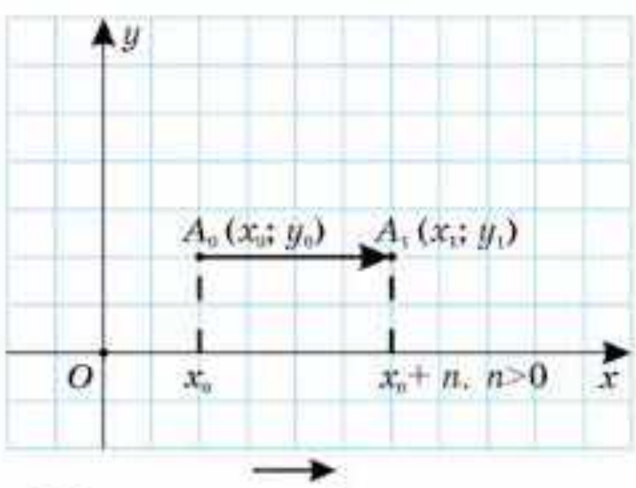
И, наоборот, если координаты двух точек $A_0(x_0; y_0)$ и $A_1(x_1; y_1)$ связаны соотношением $x_1 = x_0 + n$, где $n > 0$ и $y_1 = y$, то точку $A_1(x_1; y_1)$ можно получить из точки $A_0\ (x_0; y_0)$, переместив ее вдоль оси Ox вправо на n единиц.

Рассмотрим функции $y = f(x)$ и $y = f(x - n)$, где $n > 0$. Сравним графики этих функций в системе координат xOy. Для этого возьмем произвольную точку $A_0(x_0; y_0)$ графика функции $y = f(x)$. Это означает, что $y_0 = f(x_0)$ — верное числовое равенство.

Тогда верно и числовое равенство

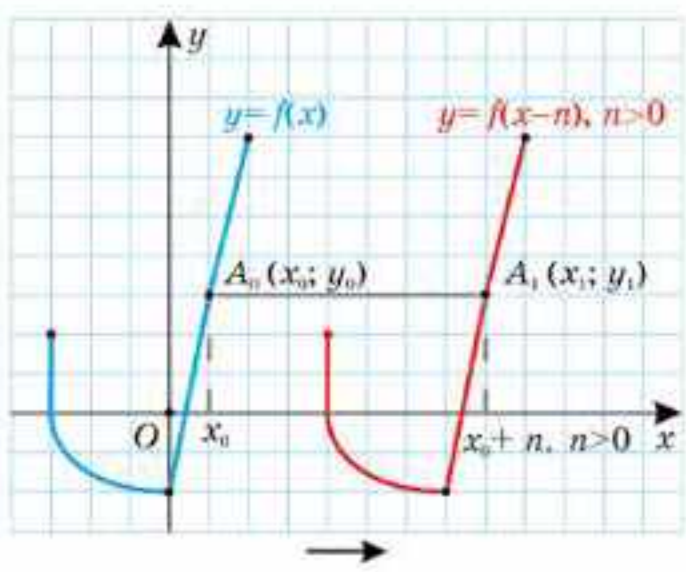
$$y_0 = f(x_0) = f((x_0 + n) - n). \qquad (1)$$

Введем замену $y_1 = y_0$; $x_1 = x_0 + n$. В результате равенство (1) примет вид: $y_1 = f(x_1) = f(x_1 - n)$. Это означает, что точка $A_1(x_1; y_1)$ принадлежит графику функции $y = f(x - n)$, где $n > 0$.



Перемещение (сдвиг, параллельный перенос) вправо

Рис. 3.3



Перемещение (сдвиг, параллельный перенос) вправо

Рис. 3.4

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

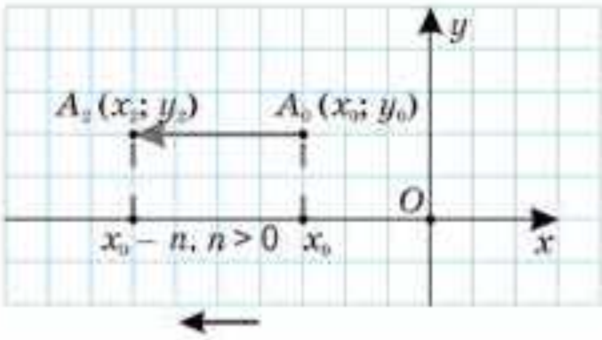
Поскольку координаты точек $A_0(x_0; y_0)$ и $A_1(x_1; y_1)$ связаны соотношением $x_1 = x_0 + n$, где $n > 0$ и $y_1 = y_0$, то точку $A_1(x_1; y_1)$ можно получить из точки $A_0(x_0; y_0)$, переместив ее вдоль оси Ox вправо на n единиц.

Учитывая, что точка $A_0(x_0; y_0)$ была выбрана произвольно, то все точки, т. е. график функции $y = f(x - n)$, где $n > 0$, можно получить, выполнив перемещение (сдвиг, параллельный перенос) вдоль оси Ox графика функции $y = f(x)$ вправо на n единиц, где $n > 0$ (рис. 3.4).

ОБЪЯСНИТЕ

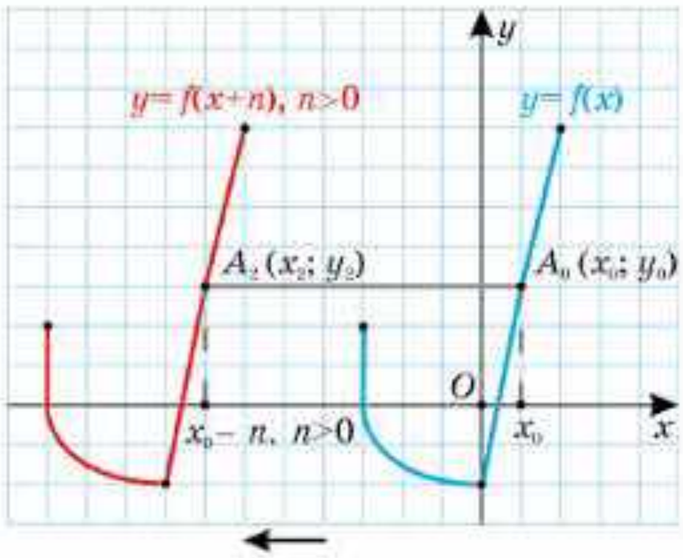
Какой формулой связаны координаты точек $A_0(x_0; y_0)$ и $A_2(x_2; y_2)$, если точка $A_2(x_2; y_2)$ получена из точки A_0 $(x_0; y_0)$ ее смещением (сдвигом, параллельным переносом) вдоль оси Ox влево на n единиц, где $n > 0$ (рис. 3.5)?

Докажите, что график функции $y = f(x + n)$, где $n > 0$, можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью его смещения (сдвига, параллельного переноса) вдоль оси Ox на n единиц влево (рис. 3.6).



Перемещение (сдвиг, параллельный перенос) влево

Рис. 3.5



Перемещение (сдвиг, параллельный перенос) влево

Рис. 3.6

Таким образом, получим правило:

Чтобы построить график функции $y = f(x + n)$, где $n \in R$, надо график функции $y = f(x)$ сместить (сдвинуть, параллельно перенести) на $|n|$ единиц вдоль оси Ox влево, если n положительное число, и вправо, если n отрицательное число.

ОБЪЯСНИТЕ

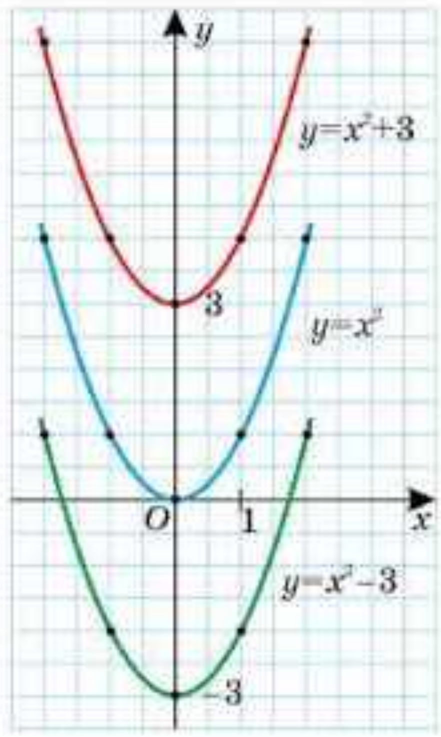
Как построили графики функций $y = x^2 - 3$ и $y = x^2 + 3$, используя график функции $y = x^2$ (рис. 3.7) ?

Рассмотрим произвольную точку B_0 $(x_0; y_0)$ в системе координат xOy (рис. 3.8).

Переместим эту точку вдоль оси Oy вверх на n единиц ($n > 0$). Она займет положение точки $B_1(x_1; y_1)$. При этом $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0 + n$.

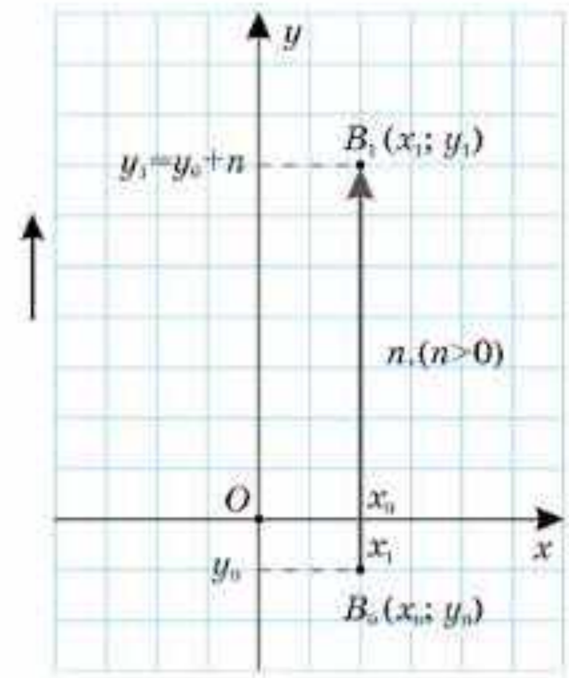
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ



Перемещение (сдвиг, параллельный перенос) вдоль оси Oy

Рис. 3.7



Перемещение (сдвиг, параллельный перенос) вверх вдоль оси Oy на n единиц, $n > 0$

Рис. 3.8

И, наоборот, если координаты двух точек $B_0(x_0; y_0)$ и $B_1(x_1; y_1)$ связаны соотношением $x_1 = x_0$ и $y_1 = y_0 + n$, где $n > 0$, то точку $B_1(x_1; y_1)$ можно получить из точки $B_0(x_0; y_0)$, переместив ее вдоль оси Oy вверх на n единиц.

Рассмотрим функции $y = f(x)$ и $y = f(x) + n$, где $n > 0$. Сравним графики этих функций в системе координат xOy. Для этого возьмем произвольную точку $B_0(x_0; y_0)$ графика функции $y = f(x)$. Это означает, что $y_0 = f(x_0)$ — верное числовое равенство. Тогда верно и числовое равенство

$$y_0 = f(x_0) = (f(x_0) + n) - n, \text{ или } y_0 + n = f(x_0) + n. \qquad (2)$$

Введем замену $y_0 + n = y_1$; $x_0 = x_1$. В результате равенство (2) примет вид: $y_1 = f(x_1) + n$. Это означает, что точка $B_1(x_1; y_1)$ принадлежит графику функции $y = f(x) + n$, где $n > 0$.

Поскольку координаты точек $B_0(x_0; y_0)$ и B_1 $(x_1; y_1)$ связаны соотношением $x_1 = x_0$ и $y_1 = y_0 + n$, где $n > 0$, то точку $B_1(x_1; y_1)$ можно получить из точки B_0 $(x_0; y_0)$, переместив ее вдоль оси Oy вверх на n единиц.

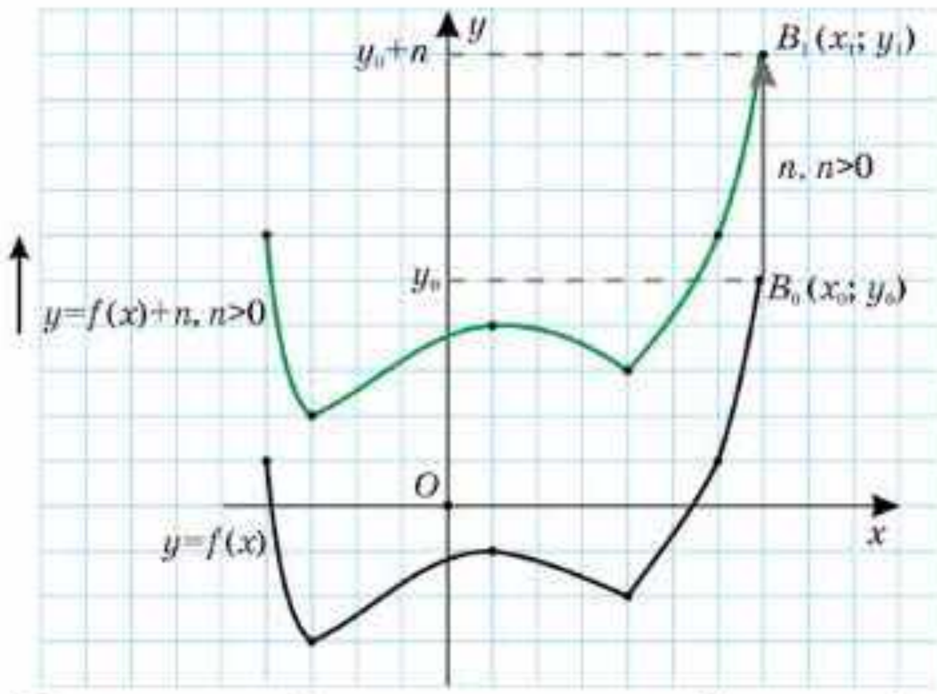
Учитывая, что точка B_0 $(x_0; y_0)$ была выбрана произвольно, то все точки, т. е. график функции $y = f(x) + n$, где $n > 0$, можно получить, выполнив перемещение (сдвиг, параллельный перенос) вдоль оси Oy графика функции $y = f(x)$ вверх на n единиц, где $n > 0$ (рис. 3.9).

ОБЪЯСНИТЕ

Какой формулой связаны координаты точек B_0 $(x_0; y_0)$ и B_2 $(x_2; y_2)$, если точка B_2 $(x_2; y_2)$ получена из точки B_0 $(x_0; y_0)$ ее смещением (сдвигом, параллельным переносом) вдоль оси Oy вниз на n единиц, где $n > 0$ (рис. 3.10)?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ



Перемещение (сдвиг, параллельный перенос) вверх вдоль оси Oy на n единиц, $n > 0$

Рис. 3.9

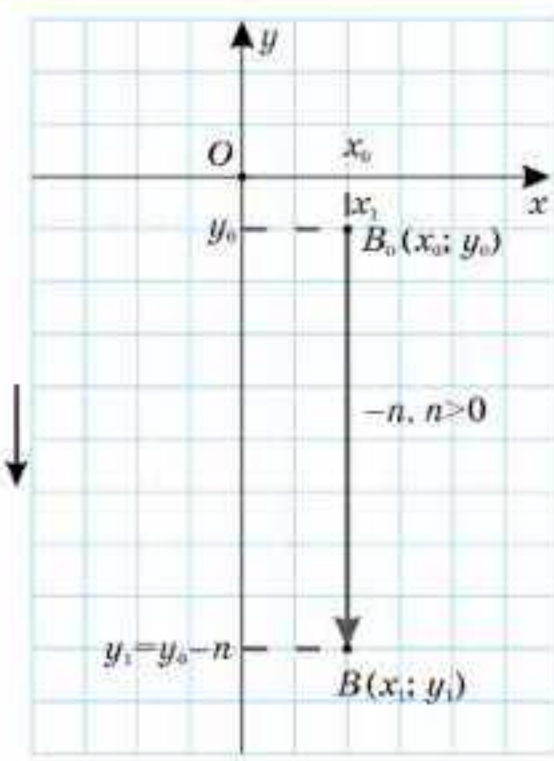
Докажите, что график функции $y = f(x) - n$, где $n > 0$, можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью его смещения (сдвига, параллельного переноса) вдоль оси Oy на n единиц вниз (рис. 3.11).

Таким образом, получим правило:

Чтобы построить график функции $y = f(x) + n$, где $n \in R$, надо график функции $y = f(x)$ сместить (сдвинуть, параллельно перенести) на $|n|$ единиц вдоль оси Oy вверх, если n положительное число, и вниз, если n отрицательное число.

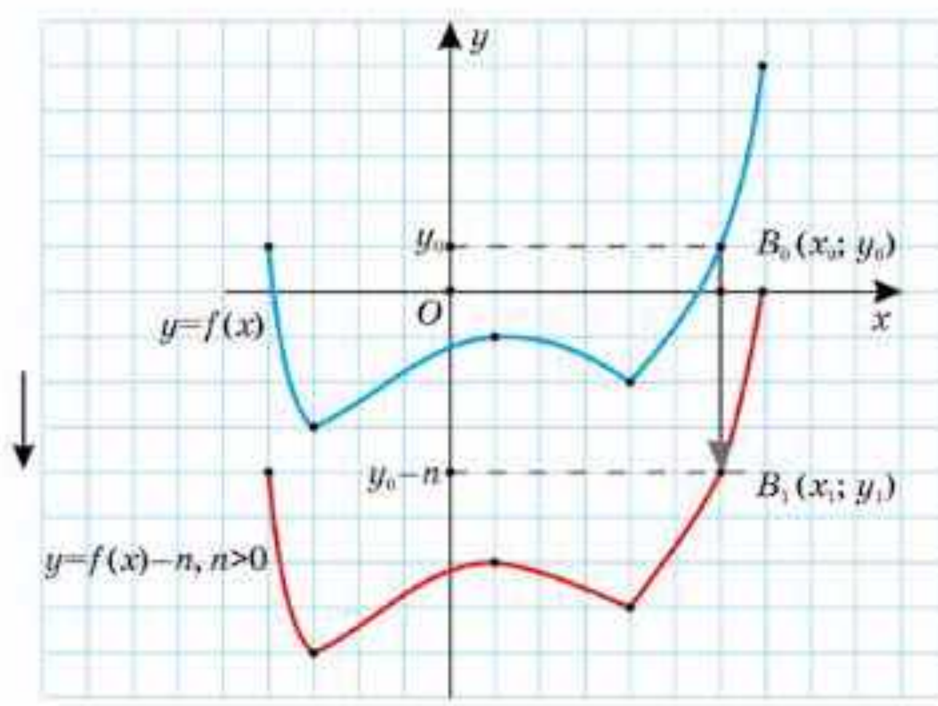
ПРИМЕР

Построим график функции $y = \sqrt{x+3} + 2$, используя график функции $y = \sqrt{x}$.



Перемещение (сдвиг, параллельный перенос) вдоль оси Oy вниз на n единиц, $n > 0$

Рис. 3.10



Перемещение (сдвиг, параллельный перенос) вдоль оси Oy вниз на n единиц, $n > 0$

Рис. 3.11

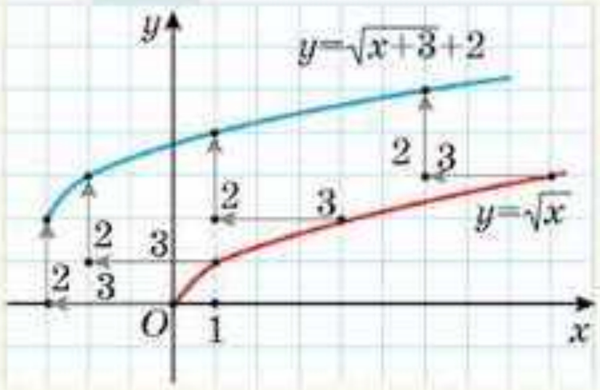
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

1) График функции $y=\sqrt{x}$ строим по точкам (табл. 8).

Таблица 8

x	0	1	4	9
$y=\sqrt{x}$	0	1	2	3



Перемещение (сдвиг, параллельный перенос) вдоль оси Ox влево на 3 единицы и вдоль оси Oy вверх на 2 единицы

Рис. 3.12

2) Соединим их плавной кривой линией, учитывая, что функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая и неограниченная (рис. 3.12).

3) Полученный график смещаем (сдвигаем, параллельно переносим) вдоль оси Ox на 3 единицы влево, затем вдоль оси Oy на 2 единицы вверх. Для этого смещаем сначала построенные с помощью таблицы точки, затем соединяем их плавной кривой линией.

Проведенные преобразования можно представить в виде схемы:

$$y=\sqrt{x}\overset{3}{\leftarrow}\overset{2}{\uparrow}$$

АЛГОРИТМ

Алгоритм построения графика функции $y=f(x+n)+m$:

1) построить график функции $y=f(x)$;

2) сместить (сдвинуть, параллельно перенести) график функции $y=f(x)$ вдоль оси Ox, если n положительное число, то на $|n|$ единиц влево, если n отрицательное число, то на $|n|$ единиц вправо. Получить график функции $y=f(x+n)$;

3) сместить (сдвинуть, параллельно перенести) график функции $y=f(x+n)$ на m единиц вдоль оси Oy, если m положительное число, то на $|m|$ единиц вверх, если m отрицательное число, то на $|m|$ единиц вниз. Получить график функции $y=f(x+n)+m$.

?

1. При каких значениях n и m график функции $y=f(x+n)+m$ получается из графика функции $y=f(x)$ его смещением: а) вниз и влево; б) вверх и вправо; в) вверх и влево; г) вниз и вправо? Приведите примеры.
2. Как, не перемещая (не сдвигая) график функции $y=f(x)$, построить график функции $y=f(x)+m$?
3. Как, не перемещая (не сдвигая) график функции $y=f(x)$, построить график функции $y=f(x+n)+m$?

Упражнения

А

3.1. Найдите координаты точки A_1, если точка A_1 получена путем перемещения точки $A(2;\ 3)$:

1) вправо на 4 единицы; 2) влево на 2 единицы;
3) влево на 1,2 единицы; 4) вправо на 3,7 единицы.

3.2. Найдите координаты точки A_2, если точка A_2 получена путем перемещения точки $A(-2;\ 4)$:

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

1) вправо на 3 единицы; 2) влево на 3 единицы;
3) влево на 2,3 единицы; 4) вправо на 4,5 единицы.

3.3. Найдите координаты точки B_1, если точка B_1 получена путем перемещения точки $B(1; -4)$:
1) вверх на 3 единицы; 2) вниз на 2 единицы;
3) вниз на 3,2 единицы; 4) вверх на 5,4 единицы.

3.4. Найдите координаты точки B_2, если точка B_2 получена путем перемещения точки $B(-2; -1)$:
1) вниз на 3 единицы; 2) вверх на 3 единицы;
3) вверх на 4,3 единицы; 4) вниз на 7,5 единицы.

3.5. Постройте график функции $y = x$. Используя график функции $y = x$, постройте в одной координатной плоскости графики функций, полученные при перемещении графика $y = x$ на:
1) 2 единицы вправо; 2) 3 единицы влево;
3) 2 единицы вверх; 4) 3 единицы вниз.

3.6. Используя график функции $y = x^2$, постройте в одной координатной плоскости графики функций:
1) $y = x^2 - 2$; 2) $y = x^2 + 2$; 3) $y = (x - 3)^2$; 4) $y = (x + 3)^2$.

3.7. Используя график функции $y = x^3$, постройте в одной координатной плоскости графики функций:
1) $y = x^3 - 3$; 2) $y = x^3 + 3$; 3) $y = (x - 4)^3$; 4) $y = (x + 4)^3$.

3.8. Используя график функции $y = \frac{1}{x}$, постройте в одной координатной плоскости графики функций:
1) $y = \frac{1}{x} - 2$; 2) $y = \frac{1}{x} + 2$; 3) $y = \frac{1}{x+2}$; 4) $y = \frac{1}{x-3}$.

3.9. Используя график функции $y = \sqrt{x}$, постройте в одной координатной плоскости графики функций:
1) $y = \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{x-3}$; 3) $y = \sqrt{x} + 3$; 4) $y = \sqrt{x} - 3$.

B

3.10. Какая линия является графиком функции:
1) $y = x^2 - 3{,}5x$; 2) $y = -x^2 + 5x$; 3) $y = \frac{1}{x+5}$; 4) $y = \frac{1}{4-x}$?
Постройте графики этих функций, используя перемещения (сдвиги, параллельные переносы) соответствующих графиков влево или вправо.

3.11. Постройте график квадратичной функции, выделив квадрат двучлена:
1) $y = x^2 - 3x + 1$; 2) $y = -x^2 + 4x + 2$;
3) $y = -2x^2 + 6x - 1$; 4) $y = 4x^2 - 8x + 1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3.12. Постройте график функции выделив целую часть:

1) $y = \frac{2x-3}{x}$; 2) $y = \frac{x-3}{x+1}$; 3) $y = \frac{3x-2}{x-1}$; 4) $y = \frac{-2x+3}{x+2}$.

3.13. Используя график функции $y = \sqrt{x}$, постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x-2}$; 2) $y = \sqrt{x+3}$; 3) $y = \sqrt{x-1{,}2}$; 4) $y = \sqrt{x+2{,}5}$.

C

3.14. Найдите число точек пересечения графиков функций, построив их на одной координатной плоскости:

1) $y = x^2 + 2x - 3$ и $y = \frac{2x-5}{x-3}$; 2) $y = -x^2 + 4x - 2$ и $y = \frac{-2x+3}{x-3}$.

3.15. Постройте на одной координатной плоскости графики функций и укажите число точек пересечения этих графиков:

1) $y = x^2 + 3x - 2$ и $y = \sqrt{x+2}$; 2) $y = x^2 - 4x + 2$ и $y = \sqrt{x-3}$.

3) $y = x^2 + 2x - 3$ и $y = |x-2|$; 4) $y = |x+4|$ и $y = \frac{-2x+3}{x-3}$.

3.16. Используя преобразования графика функции $y = \sqrt{x}$, постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x-3} - 3$; 2) $y = \sqrt{x+1} - 1{,}5$;
3) $y = \sqrt{x+1{,}5} + 1$; 4) $y = \sqrt{x-2} + 2$.

ПОВТОРИТЕ

3.17. Постройте график функции:

1) $y = x^2 - 3|x|$; 2) $y = x^2 + 4|x|$;
3) $y = 2x^2 + 5|x+3|$; 4) $y = 2x^2 - 4|x-1|$.

3.18. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$; 2) $y = \sqrt{\frac{-2x+3}{x-2}}$;

3) $y = \sqrt{\frac{3x-4}{2-x}}$.

3.19. Графическим способом решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = 2x^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3x - y = 0, \\ y = 5 - x^2. \end{cases}$

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Линейная функция, квадратичная функция и их графики, координатная плоскость, координаты точки, модуль, обратная пропорциональность, виды преобразований фигур, симметричность относительно точки и прямой.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ВИДОВ $y = af(x)$, $y = |f(x)|$, где $a \in R$

Вы научитесь:
выполнять сжатие и растяжение графиков функций вдоль оси Oy;
строить графики функций, в аналитической записи которых функция находится под знаком модуля.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Сжатие графика, растяжение графика, модуль, ось ординат

Рассмотрим случаи построения графика функции $y = af(x)$ при $a > 1$, $0 < a < 1$, $a = -1$.

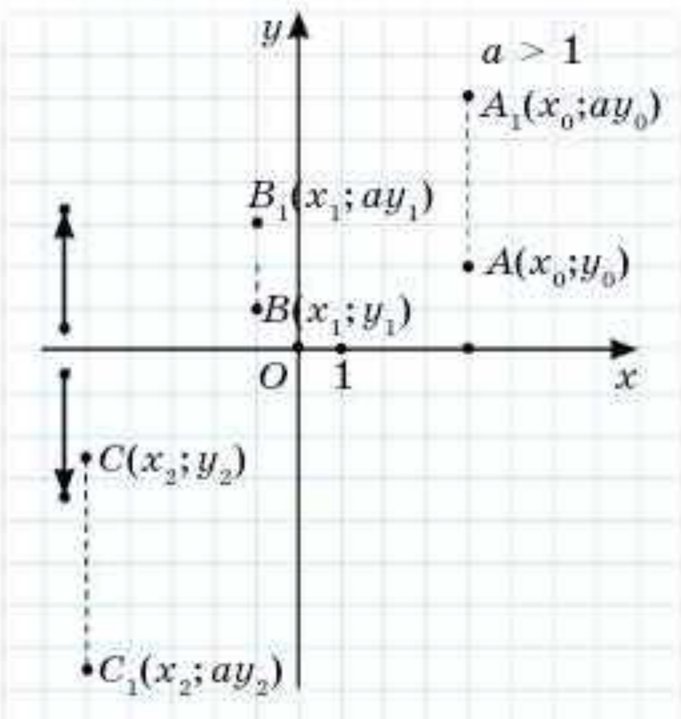
На рисунке 4.1 изображены точки $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ и, соответственно им, точки $A_1(x_0; ay_0)$, $B_1(x_1; ay_1)$, $C_1(x_2; ay_2)$, абсциссы соответствующих точек равны, ординаты — увеличены в a раз, причем $a > 1$.

ПРИМЕР

1. На рисунке 4.2 изображены точки $A(4; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(-5; -2{,}5)$ и, соответственно им, точки $A_1(4; 6)$, $B_1(-1; 3)$, $C_1(-5; -7{,}5)$, абсциссы соответствующих точек равны, ординаты — умножены на 3.

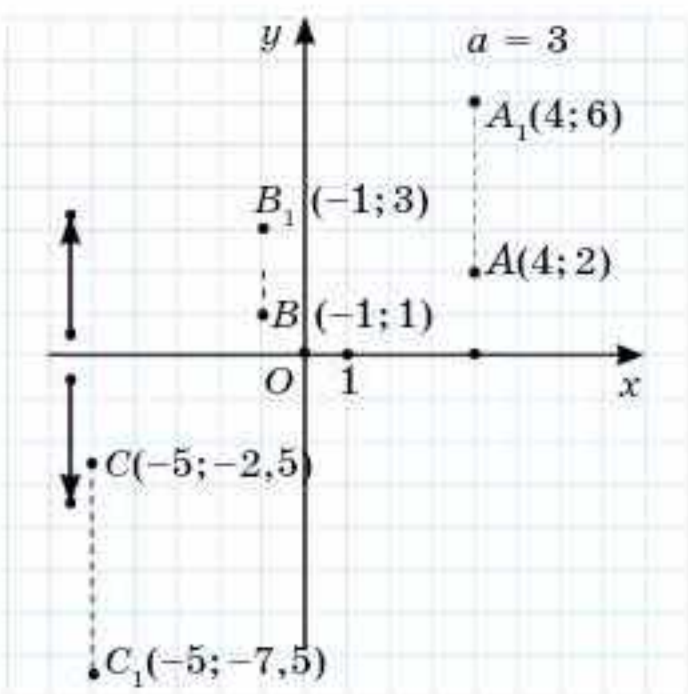
В этом случае говорят, что точки $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ переходят в точки $A_1(x_0; ay_0)$, $B_1(x_1; ay_1)$, $C_1(x_2; ay_2)$, где $a > 1$ в результате растяжения вдоль оси Oy в a раз.

Рассмотрим функции $y = f(x)$ и $y = af(x)$. Пусть имеется построенный график функции $y = f(x)$ (рис. 4.3.1). Требуется построить график функции $y = af(x)$, где $a > 1$. Легко заметить, что при одних и тех же значениях аргумента значения функции $y = af(x)$ получаются в результате умножения на a соответствующих значений функции $y = f(x)$ (рис.4.3.2).



Растяжение вдоль оси Oy в a раз, где $a > 1$

Рис. 4.1



Растяжение вдоль оси Oy в 3 раза

Рис. 4.2

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

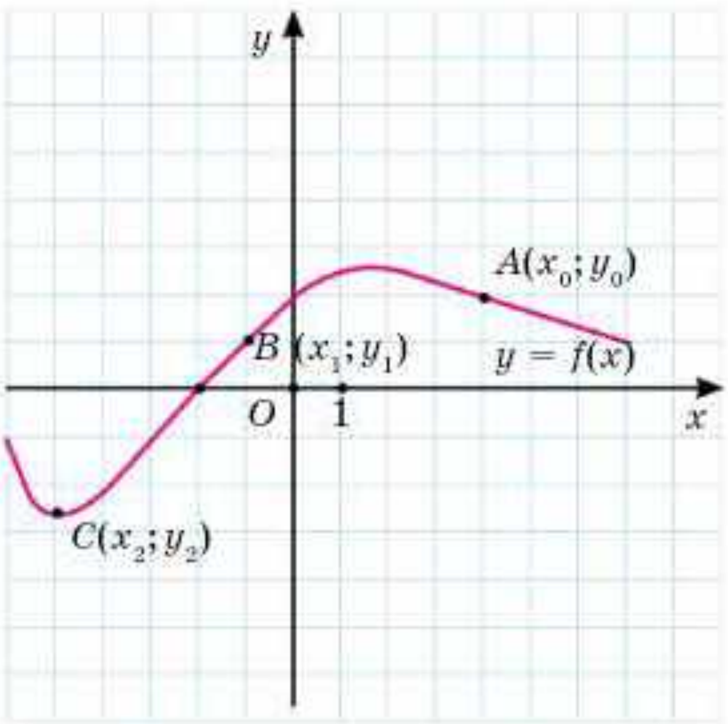
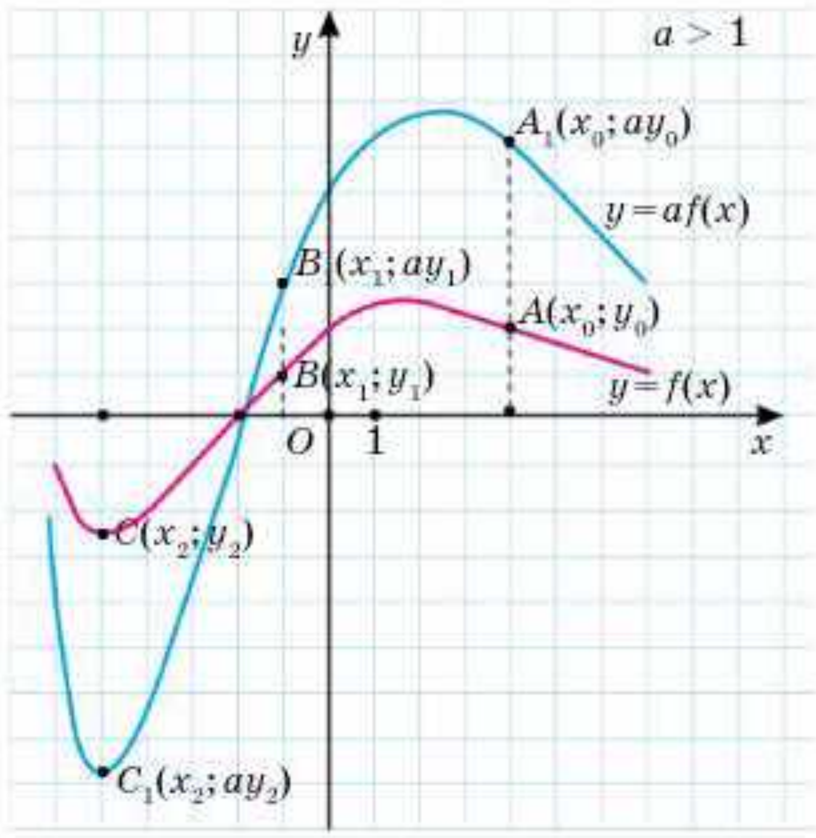


Рис. 4.3.1



Растяжение вдоль оси Oy в a раз, где $a > 1$

Рис. 4.3.2

Другими словами, если произвольная точка $A\ (x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то графику функции $y = af(x)$ принадлежит точка $A_1(x_0;\ ay_0)$. Это означает, что график функции $y = af(x)$, где $a > 1$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью его *растяжения вдоль оси* Oy в a раз (рис. 4.3.3).

ПРИМЕР

2. На рисунке 4.4 показано, как изобразить график функции $y = 3f(x)$, полученный в результате растяжения графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в 3 раза.

Рассмотрим построение графика функции $y = af(x)$, если $0 < a < 1$.

На рисунке 4.5 изображены точки $E(x_0;\ y_0)$, $L(x_1;\ y_1)$, $S(x_2;\ y_2)$ и, соответственно им, точки $E_1(x_0;\ ay_0)$, $L_1(x_1;\ ay_1)$, $S_1(x_2;\ ay_2)$, абсциссы соответствующих точек равны, ординаты — умножены на a, причем $0 < a < 1$.

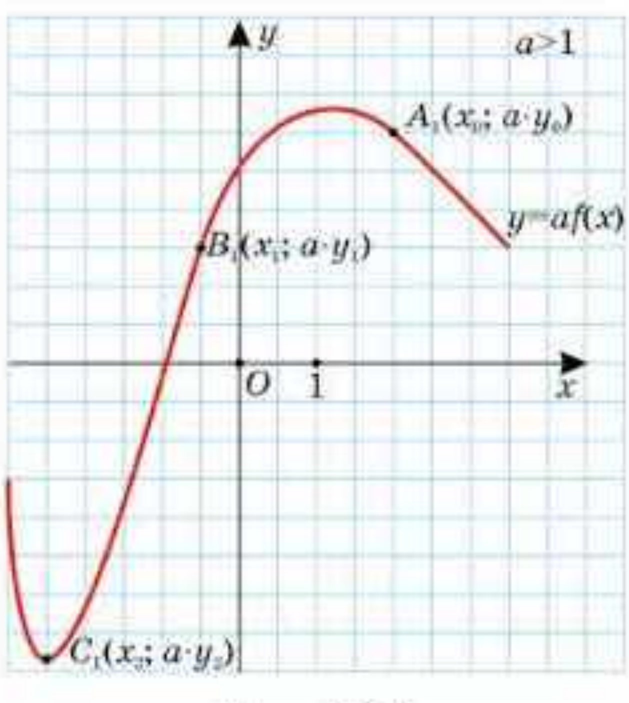
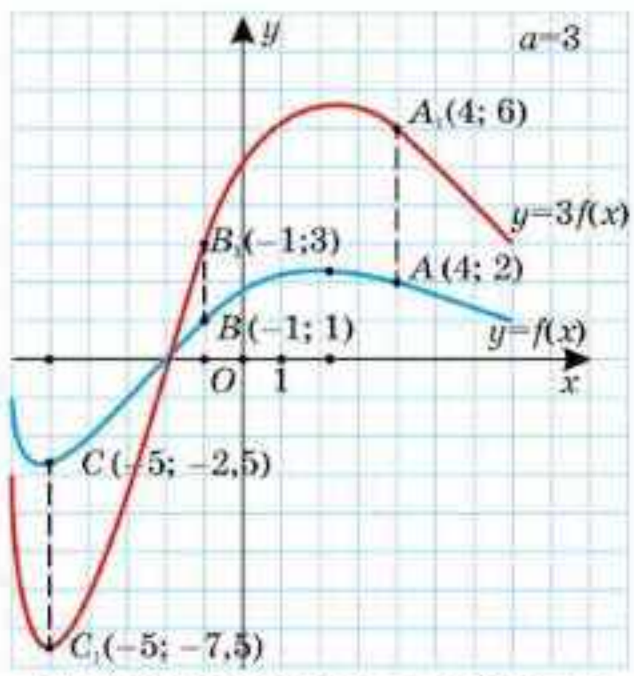


Рис. 4.3.3

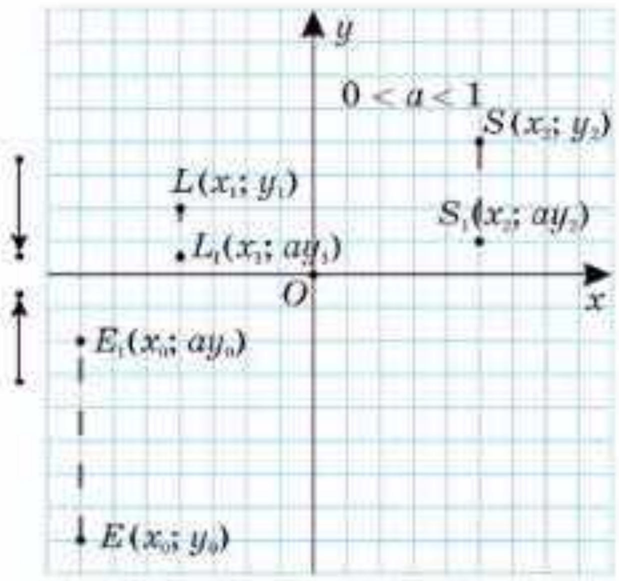


Растяжение вдоль оси 3 раза

Рис. 4.4

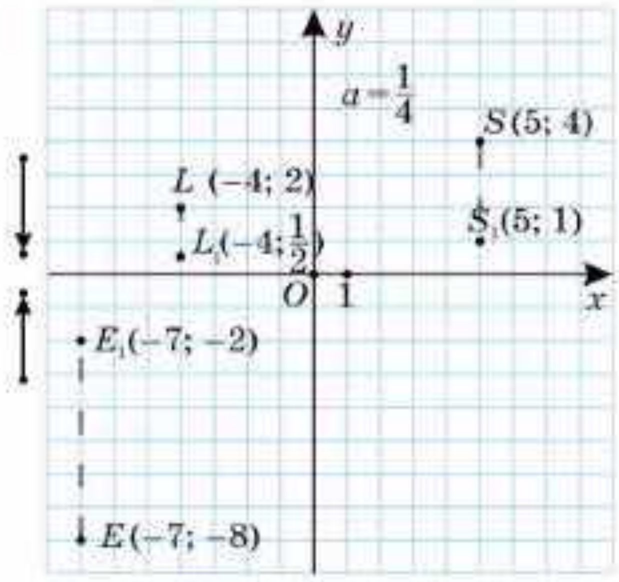
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ



Сжатие вдоль оси в $\frac{1}{a}$ раз, где $0<a<1$

Рис. 4.5



Сжатие вдоль оси Oy в 4 раза

Рис. 4.6

ПРИМЕР

3. На рисунке 4.6 изображены точки $E(-7; -8)$, $L(-4; 2)$, $S(5; 4)$ и, соответственно им, точки $E_1(-7; -2)$, $L_1(-4; \frac{1}{2})$, $S_1(5; 1)$, абсциссы соответствующих точек равны, а ординаты — умножены на $\frac{1}{4}$.

В этом случае говорят, что точки $E(x_0; y_0)$, $L(x_1; y_1)$, $S(x_2; y_2)$ переходят в точки $E_1(x_0; ay_0)$, $L_1(x_1; ay_1)$, $S_1(x_2; ay_2)$, где $0 < a < 1$ в результате сжатия вдоль оси Oy в $\frac{1}{a}$ раз.

Рассмотрим функции $y = f(x)$ и $y = af(x)$. Пусть имеется построенный график функции $y = f(x)$ (рис. 4.7.1). Требуется построить график функции $y = af(x)$, где $0 < a < 1$. Легко заметить, что при одних и тех же значениях аргумента значения функции $y = af(x)$ получаются в результате умножения на a (где $0 < a < 1$) соответствующих значений функции $y = f(x)$ (рис. 4.7.2).

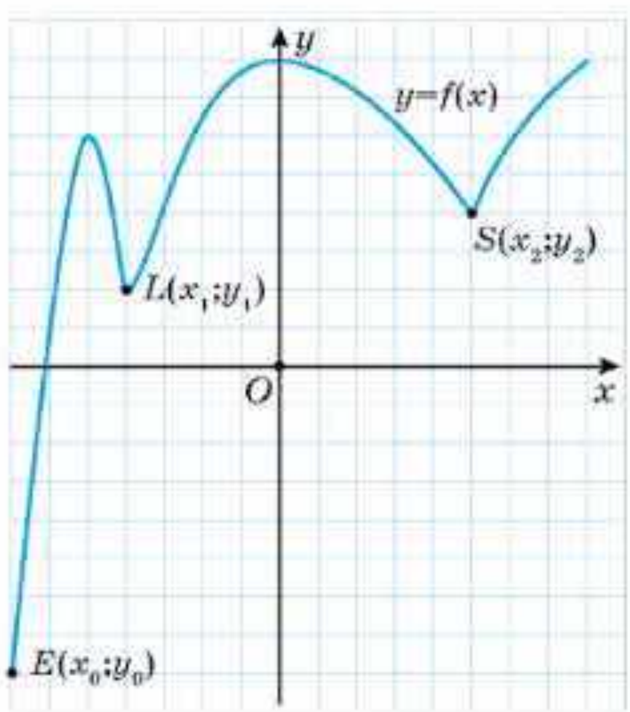
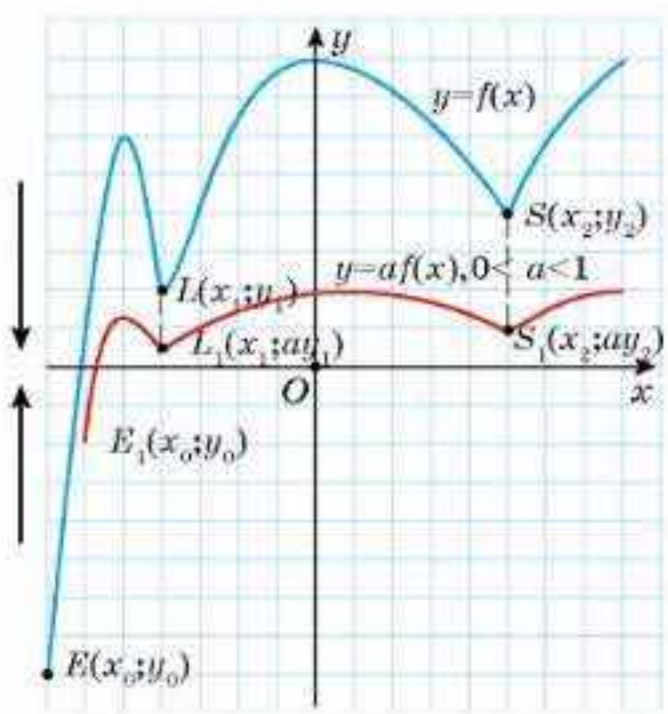


Рис. 4.7.1



Сжатие вдоль оси Oy в $\frac{1}{a}$ раз, где $0 < a < 1$

Рис. 4.7.2

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

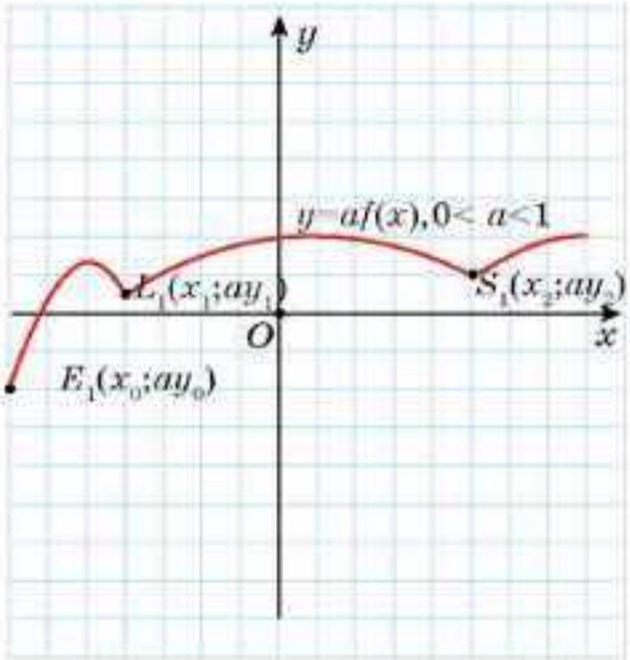
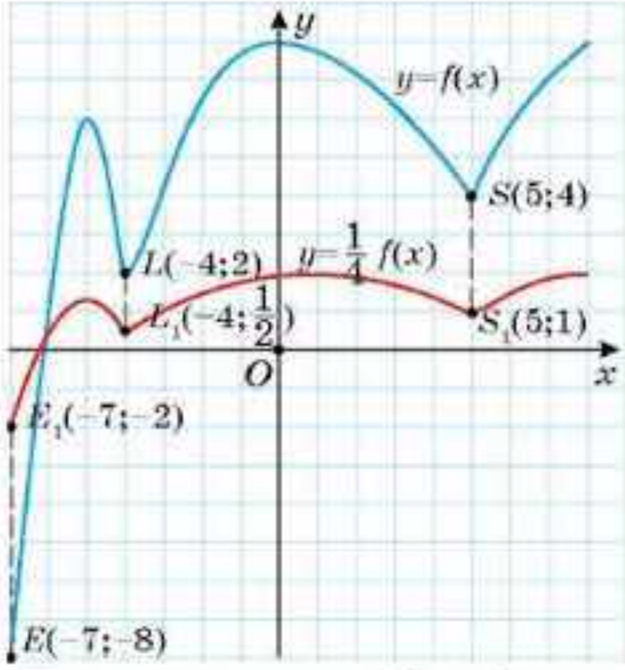


Рис. 4.7.3



Сжатие вдоль оси Oy в 4 раза

Рис. 4.8

Другими словами, если произвольная точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то графику функции $y = af(x)$ принадлежит точка $A_1(x_0; ay_0)$, где $0 < a < 1$. Это означает, что график функции $y = af(x)$, где $0 < a < 1$, получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью его сжатия вдоль оси Oy в $\frac{1}{a}$ раз (рис. 4.7.3).

ПРИМЕР

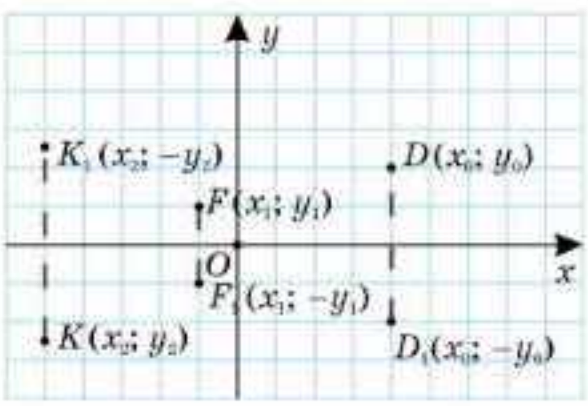
4. На рисунке 4.8 показано, как изобразить график функции $y = \frac{1}{4} f(x)$, полученный в результате сжатия графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в 4 раза.

Рассмотрим построение графика функции $y = af(x)$, если $a = -1$, т. е. графика функции $y = -f(x)$.

На рисунке 4.9 изображены точки $D(x_0; y_0)$, $F(x_1; y_1)$, $K(x_2; y_2)$ и, соответственно им, точки $D_1(x_0; -y_0)$, $F_1(x_1; -y_1)$, $K_1(x_2; -y_2)$, абсциссы соответствующих точек равны, ординаты — умножены на -1.

ПРИМЕР

5. На рисунке 4.10 изображены точки $D(4; 2)$, $F(-1; 1)$, $K(-5; -2,5)$ и, соответственно им, точки $D_1(4; -2)$, $F_1(-1; -1)$, $K_1(-5; 2,5)$, абсциссы соответствующих точек равны, ординаты — умножены на -1.



Симметрия относительно оси Ox

Рис. 4.9

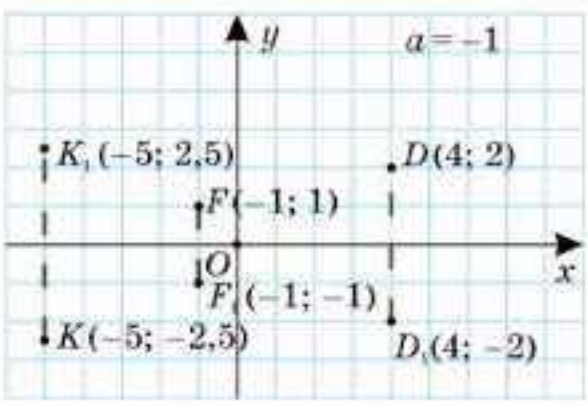


Рис. 4.10

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

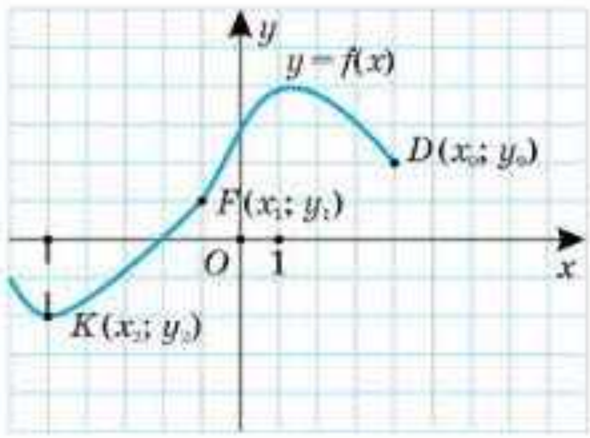
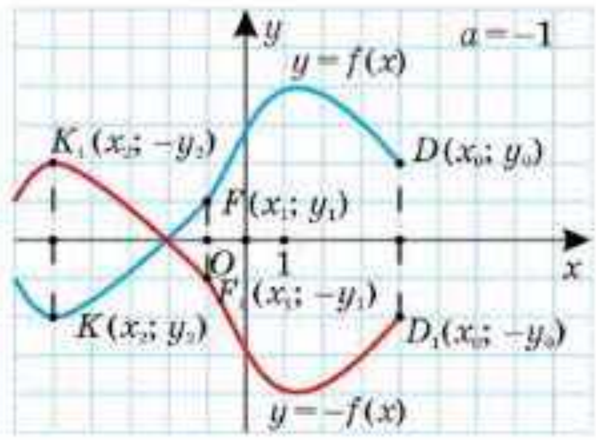


Рис. 4.11.1



Симметрия относительно оси Ox

Рис. 4.11.2

Точки $D_1(x_0;\ -y_0)$, $F_1(x_1;\ -y_1)$, $K_1(x_2;\ -y_2)$ симметричны относительно оси Ox, соответственно, точкам $D(x_0;\ y_0)$, $F(x_1;\ y_1)$, $K(x_2;\ y_2)$. Значит, если абсциссы точек равны, а их ординаты противоположные числа, то точки симметричны относительно оси Ox.

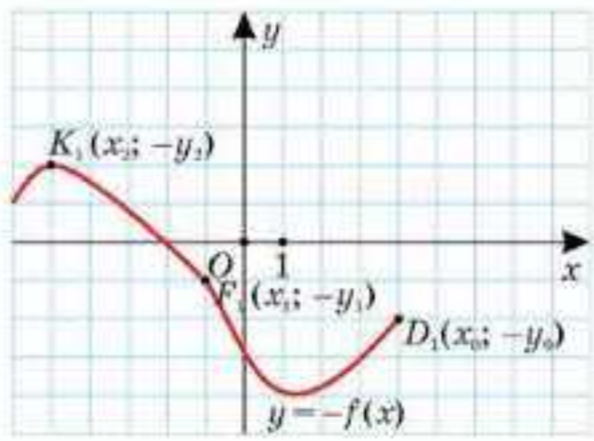


Рис. 4.11.3

Рассмотрим функции $y = f(x)$ и $y = -f(x)$. Пусть имеется построенный график функции $y = f(x)$ (рис. 4.11.1). Требуется построить график функции $y = -f(x)$. Легко заметить, что при одних и тех же значениях аргумента значения функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ являются противоположными числами (рис. 4.11.2).

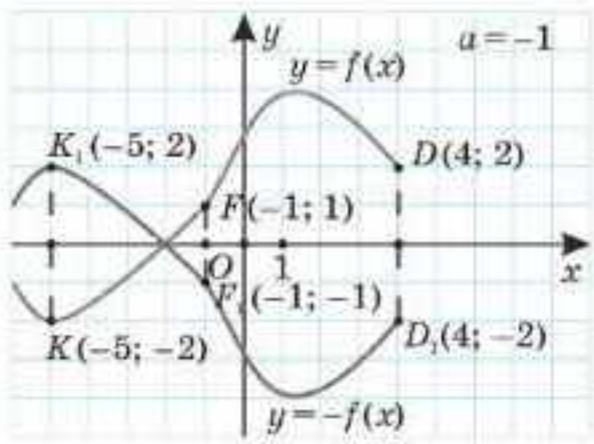


Рис. 4.12

Другими словами, если произвольная точка $A(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то графику функции $y = -f(x)$ принадлежит точка, симметричная точке $A(x_0;\ y_0)$ относительно оси Ox. Это означает, что график функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси Ox (рис. 4.11.3).

ПРИМЕР

6. На рисунке 4.12 показано, как изобразить график функции $y = -f(x)$, симметричный графику функции $y = f(x)$ относительно оси Ox.

АЛГОРИТМ

Алгоритм построения графика функции $y = af(x)$, используя график функции $y = f(x)$.

Строим график функции $y = f(x)$.

Если $|a| < 1$, то сжимаем график функции $y = f(x)$ в $\left|\frac{1}{a}\right|$ раз вдоль оси Oy; если $|a| > 1$, то растягиваем график функции $y = f(x)$ в $|a|$ раз вдоль оси Oy.

Если $a < 0$, то отражаем полученный график симметрично относительно оси Ox.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

На рисунках 4.13.—4.16 показано, как изобразить график функции $y = |f(x)|$.

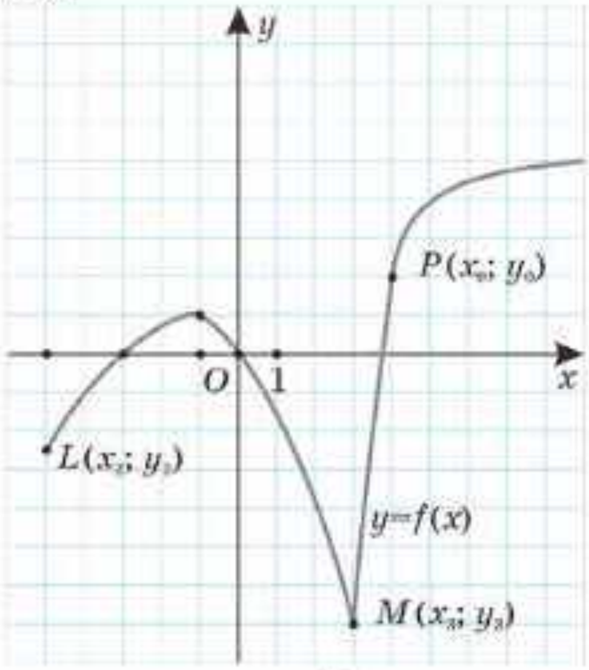


Рис. 4.13

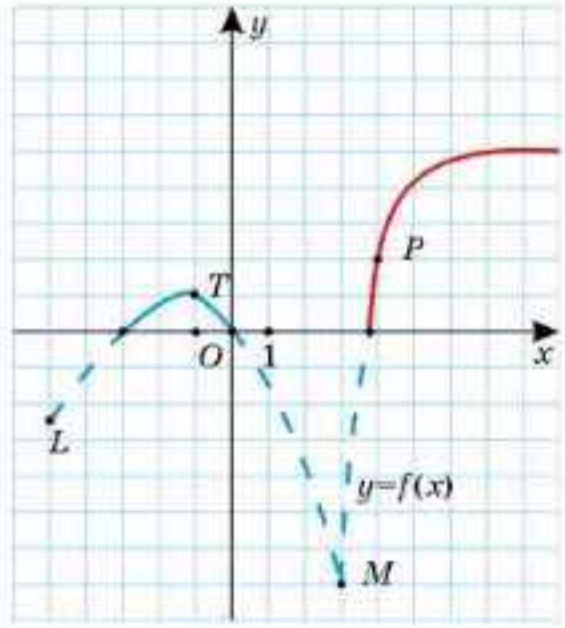


Рис. 4.14

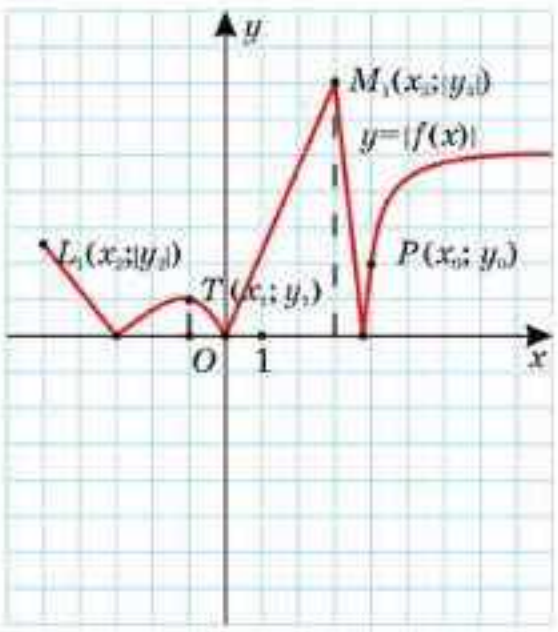
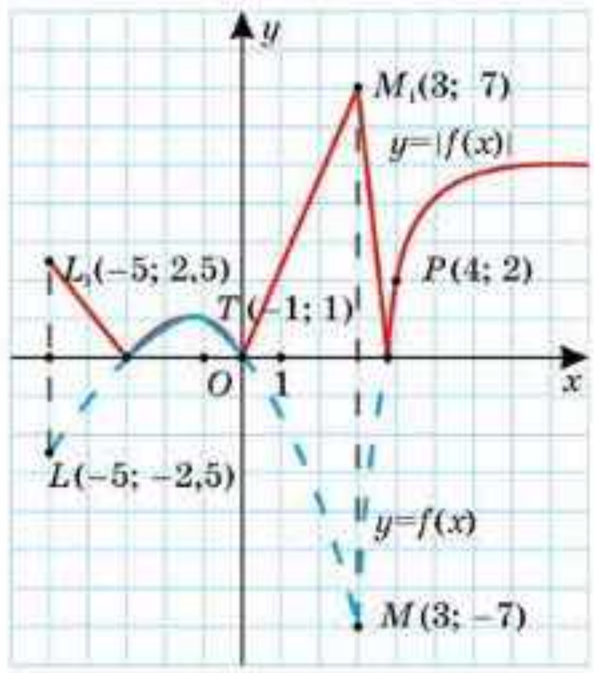


Рис. 4.15



Симметрия относительно оси Ox части графика, лежащей ниже оси Ox

Рис. 4.16

1. При каких значениях a график функции $y = af(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$: а) его растяжением вдоль оси Oy; б) его сжатием вдоль оси Oy; в) с помощью симметрии относительно оси Ox? Приведите примеры.
2. Как, используя график функции $y = f(x)$, построить график функции: а) $y = -2\ f(x)$; б) $y = -\ 0{,}5\ f(x)$?
3. Как связаны координаты точек графиков функций $y = f(x)$ и $y = af(x)$, если: а) $a > 1$; б) $0 < a < 1$; в) $a = -\ 1$? Приведите примеры.

Упражнения

А

4.1. На координатной плоскости постройте точки:

1) $A(2;\ 3)$ и $A_1(2;\ 6)$; 2) $B(1;\ -2)$ и $B_1(1;\ -6)$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3) $P(-2; -1{,}5)$ и $P_1(-2; -3)$; 4) $C(-3; 2{,}4)$ и $C_1(-3; 7{,}2)$;
5) $K(2; -1{,}4)$ и $K_1(2; -4{,}2)$; 6) $M(4; -3)$ и $M_1(4; -6)$.
Укажите коэффициент растяжения вдоль оси Oy при перемещении точек A, B, P, C, K и M, соответственно, в точки A_1, B_1, P_1, C_1, K_1 и M_1.

4.2. На координатной плоскости постройте точки:
1) $A(-1; 3)$ и $A_1(-1; 1)$; 2) $B(1; 4)$ и $B_1(1; 2)$;
3) $P(-2; 4{,}5)$ и $P_1(-2; 3)$; 4) $C(2; -2{,}4)$ и $C_1(2; -0{,}8)$;
5) $K(-3; -4{,}4)$ и $K_1(-3; -1{,}1)$; 6) $M(4; 9)$ и $M_1(4; 1{,}5)$.
Укажите коэффициент сжатия вдоль оси Oy при перемещении точек A, B, P, C, K и M, соответственно, в точки A_1, B_1, P_1, C_1, K_1 и M_1.

4.3. На одной координатной плоскости постройте графики функций:
1) $y = x$; $y = 2x$ и $y = 0{,}5x$; 2) $y = x^2$; $y = 3x^2$ и $y = 0{,}5x^2$;
3) $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{3}{x}$ и $y = \frac{0{,}5}{x^2}$.

4.4. Постройте на одной координатной плоскости графики функций:
1) $y = x^2$; $y = -1{,}5x^2$; $y = x^2 - 2$; $y = (x - 2)^2$; $y = -2x^2 + 3$;
2) $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{x-2}$; $y = \sqrt{x+3}$; $y = 2\sqrt{x}$; $y = -3\sqrt{x}$.
Какие преобразования были выполнены с графиками функций: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$?

B

4.5. Используя преобразования, постройте график функции:
1) $y = 2x^2 - 3$; 2) $y = 0{,}5x^2 + 2$;
3) $y = 2(x-2)^2$; 4) $y = -2x^2 - 1{,}5$.

4.6. Используя преобразования, постройте график функции:
1) $y = 2\sqrt{x} - 3$; 2) $y = \sqrt{x+1} - 2$;
3) $y = -\sqrt{x+3} + 2$; 4) $y = 2\sqrt{4-x}$.

4.7. На одной координатной плоскости постройте графики функций:
1) $y = \frac{1}{x^2}$ и $y = \frac{2}{x^2}$; 2) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ и $y = \frac{1}{(x+3)^2}$.

4.8. Какие преобразования надо выполнить для построения графика функции: 1) $y = 2 + \frac{3}{x-2}$; 2) $y = 3 - \frac{1}{x+1}$;
3) $y = \frac{3x-1}{x}$?
Постройте эти графики.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

C

4.9. На одной координатной плоскости постройте графики функций и укажите число общих точек этих графиков:

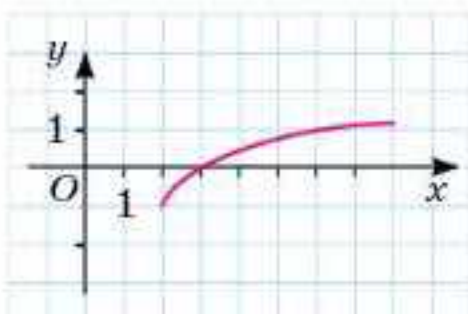
1) $y = \dfrac{3x+2}{x-1}$ и $y = \dfrac{1}{x^2}$; 2) $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$ и $y = \sqrt{x+3}$.

4.10. Найдите графическим способом число корней уравнения:

1) $x^2 + 3x = \dfrac{1}{x}$; 2) $x^2 - 4x = \dfrac{1}{x^2}$;

3) $\sqrt{x+3} = \dfrac{1}{x+1}$; 4) $\sqrt{2-x} = \dfrac{2}{x+2}$.

4.11. Используя преобразования над функцией $y = \sqrt{x}$, на координатной плоскости построен график функции (рис. 4.17).



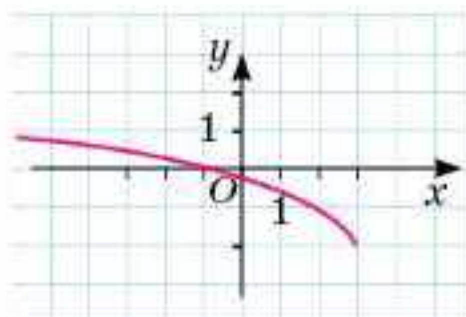


Рис. 4.17

Запишите аналитическую формулу этой функции.

Постройте графики функций (**4.12— 4.13**):

4.12. 1) $y = \left|\dfrac{2}{|x-1|}\right|$; 2) $y = \left|\dfrac{1}{|1-x|}\right|$; 3) $y = \left|\dfrac{-3}{|x+2|}\right|$.

4.13. 1) $y = |\sqrt{x+3} - 2|$; 2) $y = |1 - \sqrt{x-2}|$; 3) $y = |2 - \sqrt{1-x}|$.

ПОВТОРИТЕ

4.14. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-9}}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{2-3x}{x^2-1}}$;

3) $y = \dfrac{1}{x-2} + \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-9}}$; 4) $y = \dfrac{1}{x^2-4} + \sqrt{\dfrac{x^2-16}{x+3}}$.

4.15. Докажите тождество:

1) $\cos^2(180^\circ - x) + \cos^2(270^\circ + x) - \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}(180^\circ + x) = 0$;

2) $\dfrac{\cos^2(\pi+\alpha)}{1-\sin\alpha} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

4.16. Найдите корни уравнения:

1) $|x+3| = |2-x|$; 2) $|x-4| - |x-2| = -2$;

3) $|x-3| + 2|x+1| = 4$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Линейная функция, квадратичная функция и их графики, координатная плоскость, координаты точки, модуль, обратная пропорциональность, виды преобразований фигур, симметричность относительно точки и прямой.

§5. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ВИДОВ $y = f(ax)$, $y = f(|x|)$, ГДЕ $a \in R$

Вы научитесь:
выполнять сжатие и растяжение графиков функций вдоль оси Ox;
строить графики функций, в аналитической записи которых функция находится под знаком модуля.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Сжатие графика, растяжение графика, модуль, ось абсцисс

Рассмотрим случаи построения графика функции $y = f(ax)$ при $a > 1$, $0 < a < 1$, $a = -1$.

На рисунке 5.1 изображены точки $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ и, соответственно им, точки $A_1(ax_0; y_0)$, $B_1(ax_1; y_1)$, $C_1(ax_2; y_2)$, ординаты соответствующих точек равны, абсциссы — умножены на a, причем $a > 1$.

ПРИМЕР

1. На рисунке 5.2 изображены точки $A(2; 6)$, $B(-1{,}5; 3)$, $C(-3; -2)$ и, соответственно им, точки $A_1(6; 6)$, $B_1(-4{,}5; 3)$, $C_1(-9; -2)$, у которых ординаты соответствующих точек равны, абсциссы — умножены на 3.

В этом случае говорят, что точки $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ переходят в точки $A_1(ax_0; y_0)$, $B_1(ax_1; y_1)$, $C_1(ax_2; y_2)$, где $a > 1$ в результате растяжения вдоль оси Ox в a раз и, наоборот, точки $A_1(ax_0; y_0)$, $B_1(ax_1; y_1)$, $C_1(ax_2; y_2)$, переходят в точки $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ в результате сжатия вдоль оси Ox в a раз, где $a > 1$.

Рис. 5.1

Рис. 5.2

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Определение. *Если координаты точек* $A_0(x_0; y_0)$ и $A_1(x_1; y_1)$ *связаны соотношением* $y_1 = y_0$; $x_1 = ax_0$, где $a > 1$, *то говорят, что точка* $A(x_0; y_0)$ *переходит в точку* $A_1(x_1; y_1)$ *в результате растяжения вдоль оси* Ox *в* a *раз и, наоборот, точка* $A_1(x_1; y_1)$ *переходит в точку* $A(x_0; y_0)$ *в результате сжатия вдоль оси* Ox *в* a *раз, где* $a > 1$.

Рассмотрим функции $y = f(x)$ и $y = f(ax)$. Пусть имеется построенный график функции $y = f(x)$ (рис. 5.3.1). Требуется построить график функции $y = f(ax)$, где $a > 1$.

Рассмотрим функции $y = f(x)$ и $y = f(ax)$, где $a > 1$. Сравним графики этих функций в системе координат xOy (рис.5.3.2). Для этого возьмем произвольную точку $A_0(x_0; y_0)$ графика функции $y = f(ax)$, где $a > 1$. Это означает, что $y_0 = f(ax_0)$ — верное числовое равенство. Обозначим его (1).

Введем замену $y_1 = y_0$; $x_1 = ax_0$. В результате равенство (1) примет вид: $y_1 = f(x_1)$. Это означает, что точка $A_1(x_1; y_1)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$.

Поскольку координаты точек $A_0(x_0; y_0)$ и $A_1(x_1; y_1)$ связаны соотношением $y_1 = y_0$; $x_1 = ax_0$, то точка $A_1(x_1; y_1)$ переходит в точку $A_0(x_0; y_0)$ в результате сжатия вдоль оси Ox в a раз, где $a > 1$ (рис. 5.3.3).

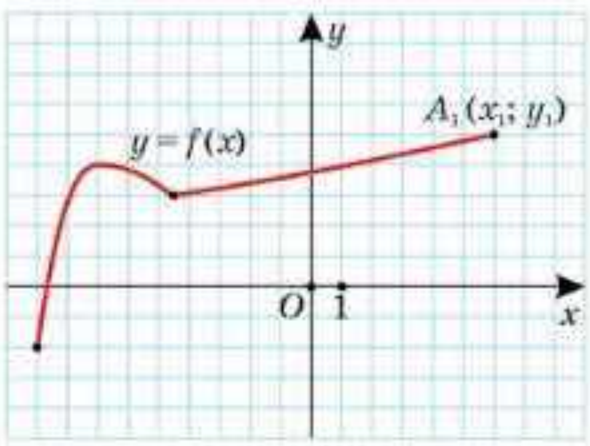
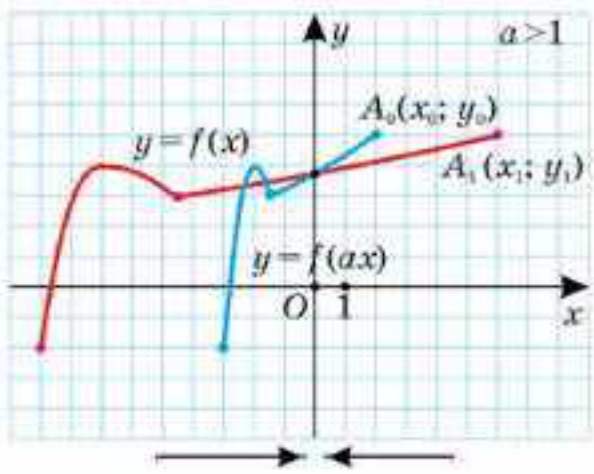


Рис. 5.3.1



Сжатие вдоль оси в a раз , где $a > 1$

Рис. 5.3.2

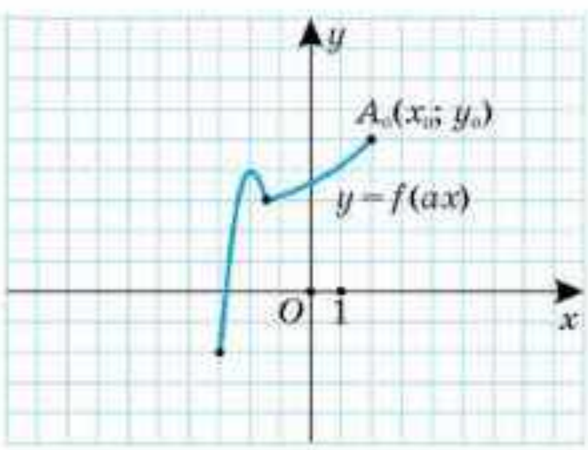


Рис. 5.3.3

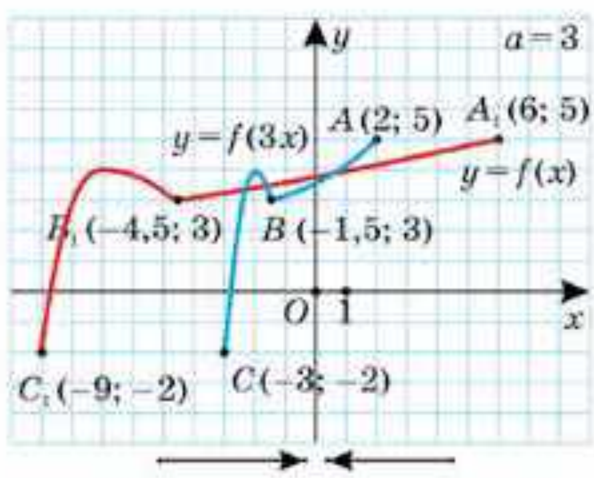


Рис. 5.4

ПРИМЕР

2. На рисунке 5.4 показано, как изобразить график функции $y = f(3x)$, полученный в результате сжатия графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в 3 раза.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

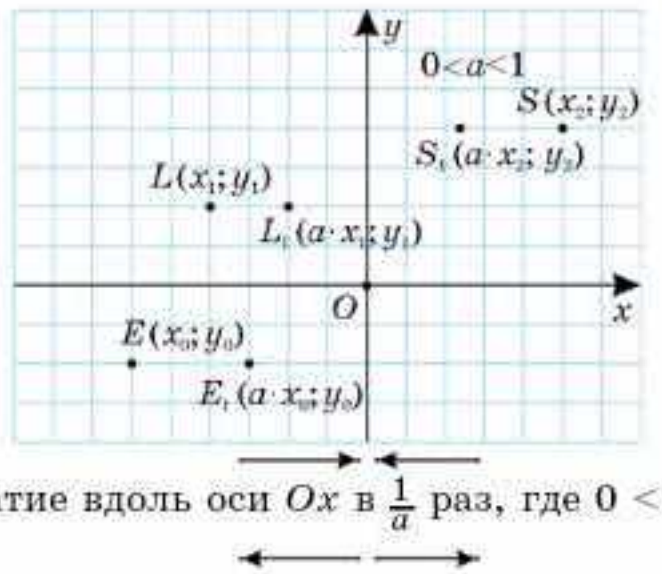
Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Рассмотрим построение графика функции $y = f(ax)$, если $0 < a < 1$.

На рисунке 5.5 изображены точки $E(x_0;\ y_0)$, $L(x_1;\ y_1)$, $S(x_2;\ y_2)$ и, соответственно им, точки $E_1(ax_0;\ y_0)$, $L_1(ax_1;\ y_1)$, $S_1(ax_2;\ y_2)$, ординаты соответствующих точек равны, абсциссы — умножены на a, причем $0 < a < 1$.

ПРИМЕР

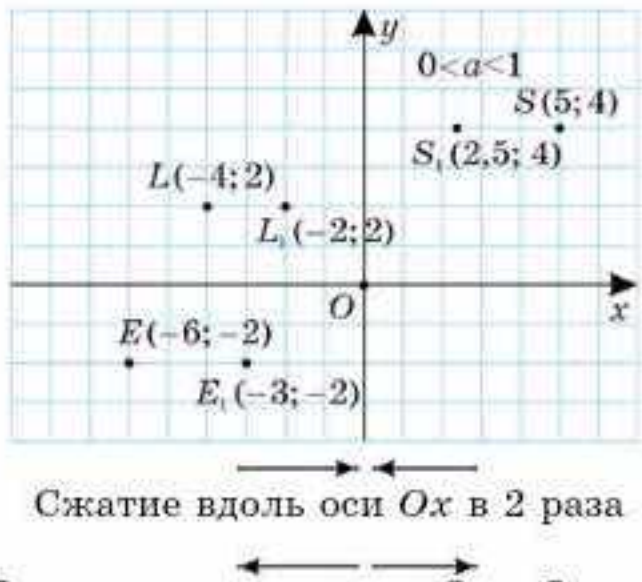
3. На рисунке 5.6 изображены точки $E(-6;\ -2)$, $L(-4;\ 2)$, $S(5;\ 4)$ и, соответственно им, точки $E_1(-3;\ -2)$, $L_1(-2;\ 2)$, $S_1(2{,}5;\ 4)$, ординаты соответствующих точек равны, абсциссы — умножены на $\frac{1}{2}$.



Сжатие вдоль оси Ox в $\frac{1}{a}$ раз, где $0 < a < 1$

Растяжение вдоль оси Ox в $\frac{1}{a}$ раз, где $0 < a < 1$

Рис. 5.5



Сжатие вдоль оси Ox в 2 раза

Растяжение вдоль оси Ox в 2 раза

Рис. 5.6

В этом случае говорят, что точки $E_1(ax_0;\ y_0)$, $L_1(ax_1;\ y_1)$, $S_1(ax_2;\ y_2)$, где $0 < a < 1$ переходят в точки $A(x_0;\ y_0)$, $B(x_1;\ y_1)$, $C(x_2;\ y_2)$ в результате растяжения вдоль оси Ox в $\frac{1}{a}$ раз, и, наоборот, точки $A(x_0;\ y_0)$, $B(x_1;\ y_1)$, $C(x_2;\ y_2)$ переходят в точки $E_1(ax_0;\ y_0)$, $L_1(ax_1;\ y_1)$, $S_1(ax_2;\ y_2)$ в результате сжатия вдоль оси Ox в $\frac{1}{a}$ раз.

Определение. *Если координаты точек $A(x_0;\ y_0)$ и $A_1(x_1;\ y_1)$ связаны соотношением $y_1 = y_0$; $x_1 = ax_0$,* где $0 < a < 1$, *то говорят, что точка $A(x_0;\ y_0)$ переходит в точку $A_1(x_1;\ y_1)$ в результате сжатия вдоль оси Ox в $\frac{1}{a}$ раз и, наоборот, точка $A_1(x_1;\ y_1)$ переходит в точку $A(x_0;\ y_0)$ в результате растяжения вдоль оси Ox в $\frac{1}{a}$ раз, где $0 < a < 1$.*

Рассмотрим функции $y = f(x)$ и $y = f(ax)$. Пусть имеется построенный график функции $y = f(x)$ (рис. 5.7.1.). Требуется построить график функции $y = f(ax)$, где $0 < a < 1$.

Сравним графики этих функций в системе координат xOy. Для этого возьмем произвольную точку $A(x_0;\ y_0)$ графика функции $y = f(ax)$, где $0 < a < 1$ (рис. 5.7.2.). Это означает, что $y_0 = f(ax_0)$ — верное числовое равенство. Обозначим его (1).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

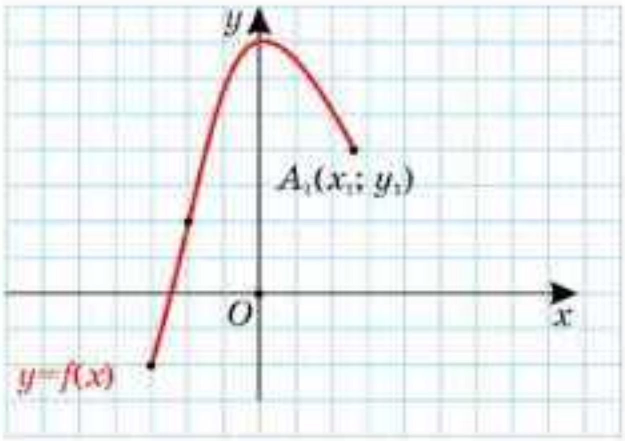
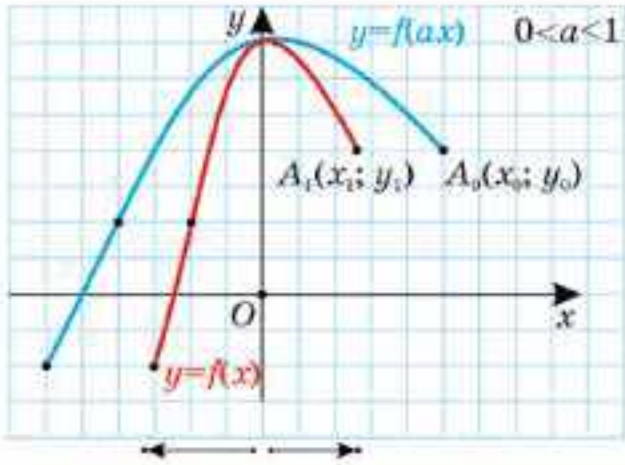


Рис. 5.7.1



Сжатие оси Ox в $\frac{1}{a}$ раз, где $0 < a < 1$

Рис. 5.7.2

Введем замену $y_1 = y_0$; $x_1 = ax_0$. В результате равенство (1) примет вид: $y_1 = f(x_1)$. Это означает, что точка $A_1(x_1; y_1)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$.

Поскольку координаты точек $A_0(x_0; y_0)$ и A_1 $(x_1; y_1)$ связаны соотношением $y_1 = y_0$; $x_1 = ax_0$, то точка $A_1(x_1; y_1)$ переходит в точку $A_0(x_0; y_0)$ в результате растяжения вдоль оси Ox в $\frac{1}{a}$ раз, где $0 < a < 1$ (рис. 5.7.3).

ПРИМЕР

4. На рисунке 5.8 показано, как изобразить график функции $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$, полученный в результате растяжения графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в 2 раза.

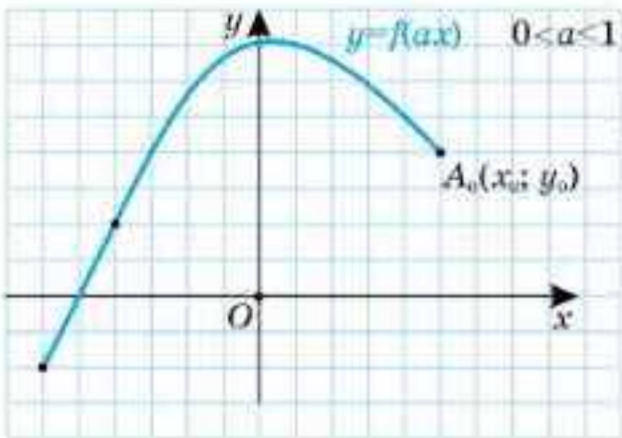
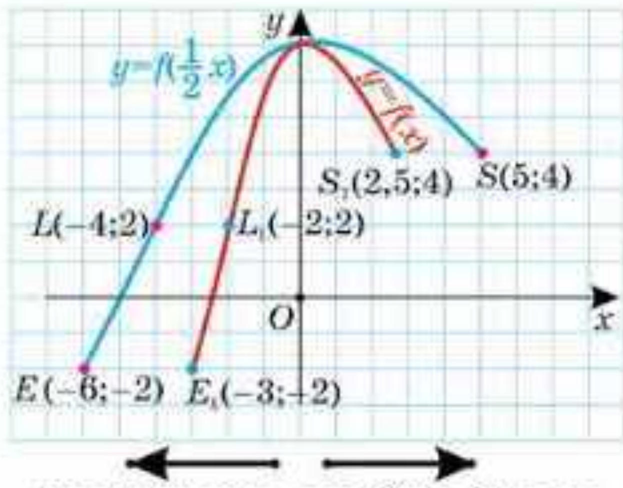


Рис. 5.7.3



Растяжение оси Ox в 2 раза

Рис. 5.8

Рассмотрим построение графика функции $y = f(ax)$, если $a = -1$, т. е. графика функции $y = f(-x)$.

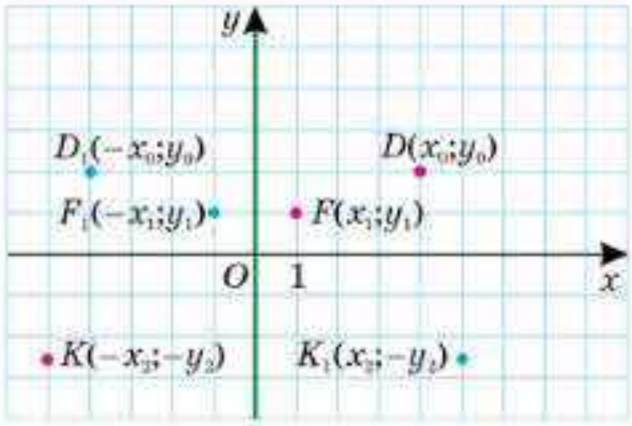
На рисунке 5.9 изображены точки D $(x_0; y_0)$, $F(x_1; y_1)$, K $(-x_2; -y_2)$ и, соответственно им, точки $D_1(-x_0; y_0)$, $F_1(-x_1; y_1)$, $K_1(x_2; -y_2)$, абсциссы соответствующих точек равны, ординаты — умножены на -1.

ПРИМЕР

5. На рисунке 5.10 изображены точки $D(4;\ 2)$, $F(-1;\ 1)$, $K(-5;\ -2{,}5)$ и, соответственно им, точки $D_1(-4;\ 2)$, $F_1(1;\ 1)$, $K_1(5;\ -2{,}5)$, ординаты соответствующих точек равны, абсциссы — умножены на -1.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ



Симметрия относительно оси Oy

Рис. 5.9

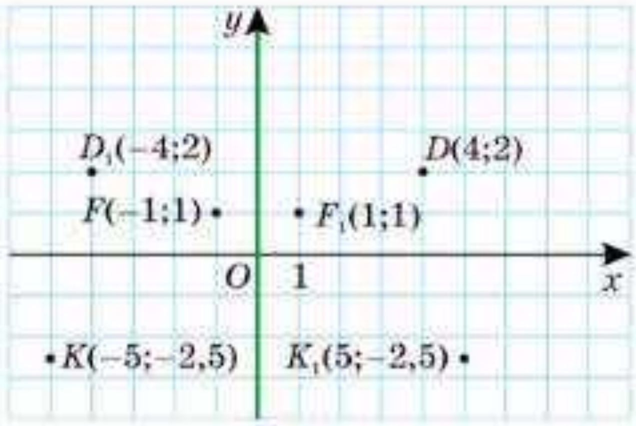


Рис. 5.10

Точки $D_1(-x_0;\ y_0)$, $F_1(-x_1;\ y_1)$, $K_1(x_2;\ -y_2)$ симметричны относительно оси Oy, соответственно, точкам $D(x_0;\ y_0)$, $F(x_1;\ y_1)$, $K(-x_2;\ -y_2)$. Значит, если ординаты точек равны, а их абсциссы противоположные числа, то точки симметричны относительно оси Oy.

Рассмотрим функции $y = f(x)$ и $y = f(-x)$. Пусть имеется построенный график функции $y = f(x)$ (рис. 5.11.1). Требуется построить график функции $y = f(-x)$. Легко заметить, что при одних и тех же значениях функции значения аргумента являются противоположными числами (рис.5.11.2).

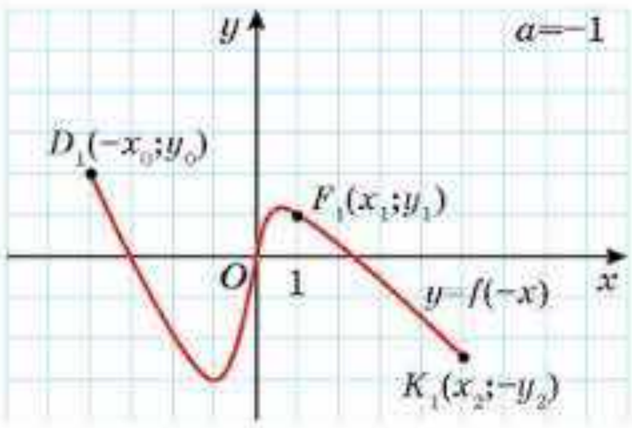
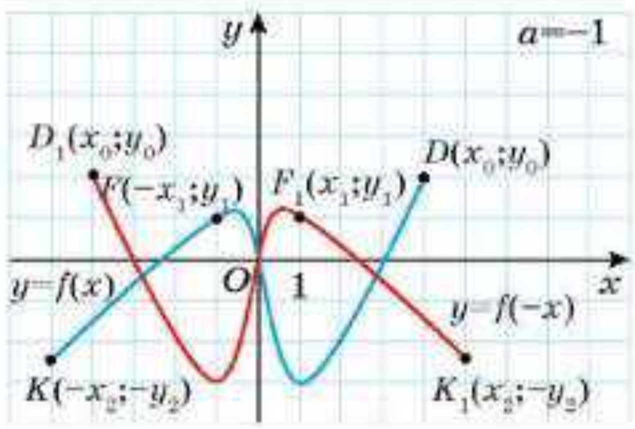


Рис. 5.11.1



Симметрия относительно оси Oy

Рис. 5.11.2

Другими словами, если произвольная точка $A(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то графику функции $y = f(-x)$ принадлежит точка, симметричная относительно оси Oy. Это означает, что график функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси Oy (рис. 5.11.3).

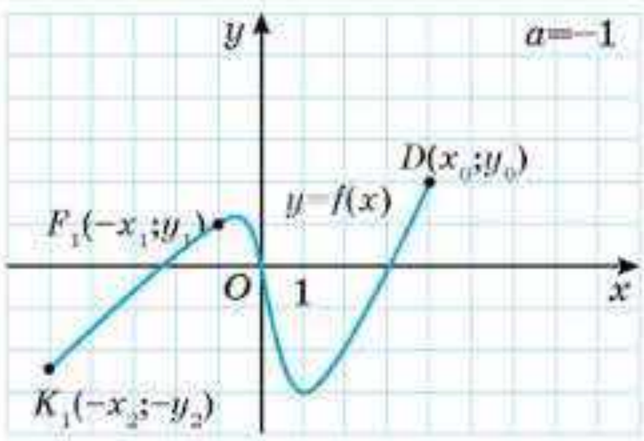
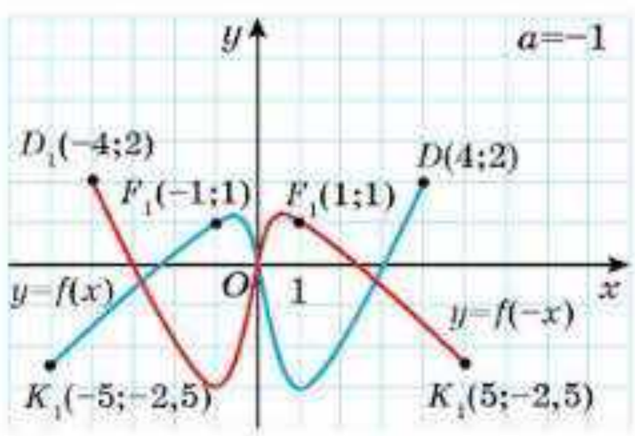


Рис. 5.11.3



Симметрия относительно оси Oy

Рис. 5.12

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПРИМЕР **6.** На рисунке 5.12 показано, как изобразить график функции $y = f(-x)$, симметричный графику функции $y = f(x)$ относительно оси Oy.

АЛГОРИТМ Алгоритм построения графика функции $y = f(-x)$, используя график функции $y = f(x)$:

1) строим график функции $y = f(x)$;
2) отражаем его симметрично относительно оси Oy.

АЛГОРИТМ Алгоритм построения графика функции $y = f(ax)$, где $a \in R$, используя график функции $y = f(x)$:

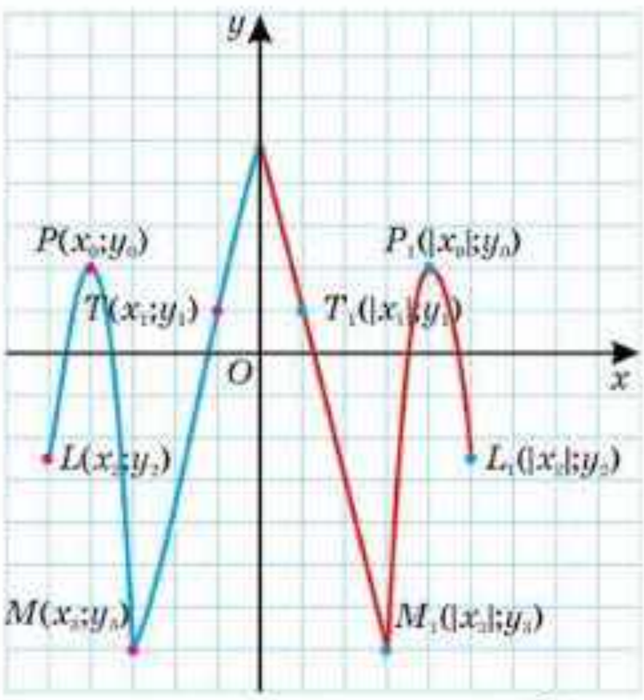
1) Строим график функции $y = f(x)$;
2) если $|a| > 1$, то растягиваем его вдоль оси Ox в $|a|$ раз;
3) если $|a| < 1$, то сжимаем его вдоль оси Ox в $\frac{1}{a}$ раз. Получим график функции $y = f(|a|\ x)$;
4) если $a < 0$, то отражаем график функции $y = f(|a|x)$ симметрично относительно оси Oy.

Рассмотрим функцию $y = f(|x|)$.

На рисунке 5.13 изображены точки $P(x_0;\ y_0)$, $T(x_1;\ y_1)$, $L(x_2;\ y_2)$, $M(x_3;\ y_3)$ и, соответственно им, точки $P(|x_0|;\ y_0)$, $T(|x_1|;\ y_1)$, $L_1(|x_2|;\ y_2)$, $M_1(|x_3|;\ y_3)$, у которых ординаты равны, а абсциссы равны модулям абсцисс соответствующих точек.

ПРИМЕР **7.** На рисунке 5.14 изображены точки $P(-4;\ 2)$, $T(-1;\ 1)$, $L(-5;\ -2{,}5)$, $M(-3;\ -7)$ и, соответственно им, точки $P_1(4;\ 2)$, $T_1(1;\ 1)$, $L_1(5;\ -2{,}5)$, $M_1(3;\ -7)$, у которых ординаты соответствующих точек равны, а абсциссы равны модулям абсцисс соответствующих точек.

Как видим, точки с одинаковыми соответствующими ординатами и отрицательными абсциссами и точки, абсциссы которых являются модулями этих отрицательных абсцисс, располагаются симметрично относительно оси Oy.



Симметрия относительно оси Oy части графика, лежащей левее оси Ox

Рис. 5.13

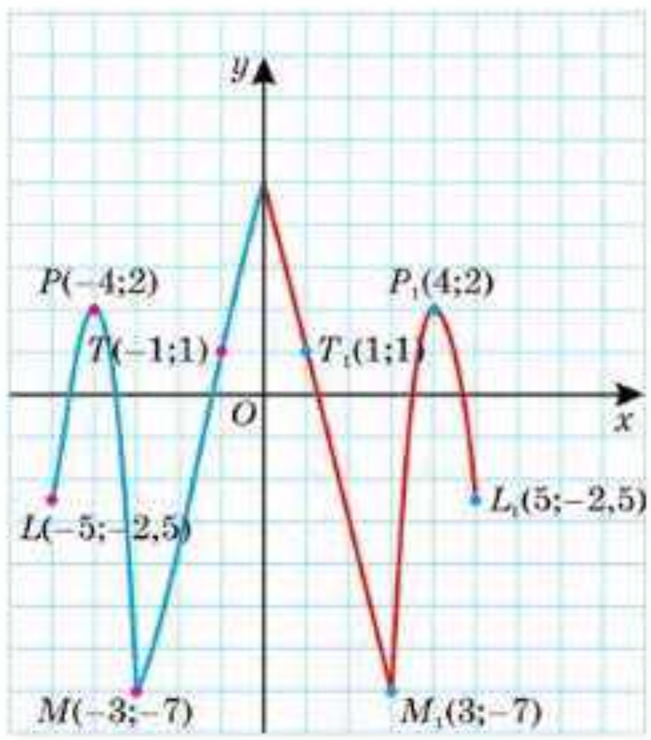


Рис. 5.14

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

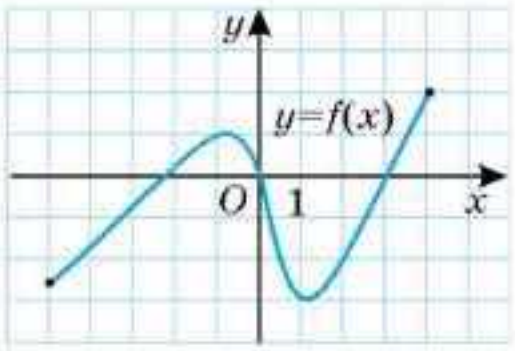


Рис. 5.15.1

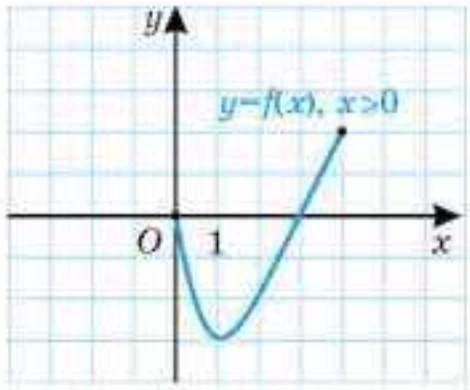


Рис. 5.15.2

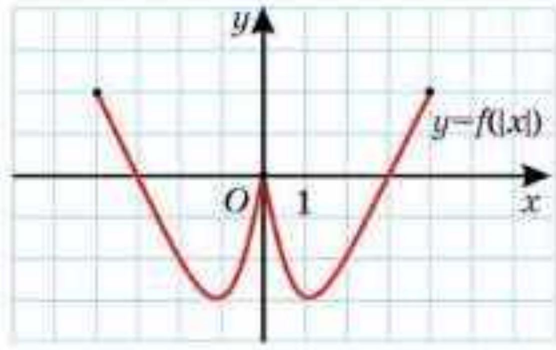


Рис. 5.15.3

Рассмотрим функцию $y = f(|x|)$.

Поскольку $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \geqslant 0, \\ f(-x) \text{ при } x \geqslant 0, \end{cases}$ то при построении графика функции $y = f(|x|)$ используют алгоритм.

АЛГОРИТМ

Алгоритм построения графика функции $y = f(x)$:
1) построить график функции $y = f(x)$ (рис. 5.15.1), но сохранить его часть для $x \geqslant 0$ (рис. 5.15.2);
2) отразить ее симметрично относительно оси Oy (рис. 5.15.3).

На рисунках 5.15.1– 5.15.3 показано, как изобразить график функции $y = f(|x|)$.

?

1. При каких значениях a график функции $y = f(ax)$ получается из графика функции $y = f(x)$: а) его растяжением вдоль оси Ox; б) его сжатием вдоль оси Ox; в) с помощью симметрии относительно оси Oy? Приведите примеры.
2. Как, используя график функции $y = f(x)$, построить график функции: а) $y = f(-2x)$; б) $y = f(-0,5x)$?
3. Как связаны координаты точек графиков функций $y = f(x)$ и $y = f(ax)$, если: а) $a > 1$; б) $0 < a < 1$; в) $a = -1$? Приведите примеры.

Упражнения

А

5.1. Найдите координаты точки, в которую перейдет точка $A(4; 5)$ в результате сжатия вдоль оси Ox в a раз, если a равно:
1) 2; 2) 1,5; 3) 4.
Постройте эти точки на координатной плоскости.

5.2. Найдите координаты точки, в которую перейдет точка $C(-2; 3)$ в результате сжатия вдоль оси Ox в a раз, если a равно:
1) $-0,5$; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) $\frac{3}{4}$.
Постройте эти точки на координатной плоскости.

5.3. Найдите координаты точки, в которую перейдет точка $M(-4; 6)$ в результате сжатия вдоль оси Ox в a раз, если a равно:
1) 0,5; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{4}{5}$.
Постройте эти точки на координатной плоскости.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

5.4. Выполните сжатие вдоль оси Ox в 3 раза графика функции $y = x^2 - 2$. Запишите формулу полученной функции.

5.5. Выполните растяжение вдоль оси Ox в 0,4 раза графика функции $y = x^2 + 3x$. Запишите формулу полученной функции.

5.6. Заданы координаты вершин прямоугольника $ABCK$ — $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 4)$, $C(6;\ 4)$, $K(6;\ 0)$. Выполните растяжение или сжатие вдоль оси Ox или Oy прямоугольника так, чтобы получился квадрат.

B

5.7. Используя график функции $y = \sqrt{x}$, постройте график функции:

1) $y = \sqrt{2x}$; 2) $y = \sqrt{0{,}5x}$; 3) $y = \sqrt{-4x}$; 4) $y = \sqrt{-0{,}2x}$.

5.8. Найдите число общих точек графиков функций:

1) $y = (2 - x)^2$ и $y = \sqrt{0{,}4x}$; 2) $y = -(2x - 3)^2$ и $y = -\sqrt{0{,}6x}$.

C

5.9. Используя график функции $y = \sqrt{x}$, постройте график функции:

1) $y = \sqrt{2|x|}$; 2) $y = \sqrt{0{,}5|x|}$; 3) $y = -\sqrt{-4x}$; 4) $y = 2\sqrt{0{,}3x}$.

***5.10.** Используя графики функций, найдите число корней уравнения:

1) $x^2 - 2|x| = \frac{1}{|x|}$; 2) $-x^2 + 4|x| = -\sqrt{2|x|}$.

5.11. Постройте график функции:

1) $y = |x^2 - 4|x| + 1|$; 2) $y = |-x^2 + 2|x| - 2|$; 3) $y = \left|\sqrt{|x|} - 2\right|$.

ПОВТОРИТЕ

5.12. Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} x^2 - 3 \text{ при } x \geqslant 0, \\ 3 - 2x \text{ при } x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{при } x \geqslant 0, \\ \sqrt{-x} & \text{при } x < 0; \end{cases}$

5.13. Найдите корни уравнения:

1) $|x - 2| - 2|x + 1| = 4$; 2) $2|x - 1| - |x + 3| = -3$.

5.14. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 3 > x, \\ 3x + 5 \leqslant -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2 + 3 < 10x, \\ x^2 + 2 < 3x. \end{cases}$

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Линейная функция, квадратичная функция и их графики, координатная плоскость, координаты точки, модуль, обратная пропорциональность, виды преобразований фигур, симметричность относительно точки и прямой, параллельный перенос, гомотетия.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Вы научитесь выполнять преобразования графиков функций (параллельный перенос, сжатие и растяжение).

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

График, функция, параллельный перенос, сжатие, растяжение

АЛГОРИТМ

Алгоритм построения графика функции: $y = kf(a(x + n)) + m$, используя график функции $y = f(x)$:

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) сжать график функции $y = f(x)$ в $|a|$ раз вдоль оси Ox, получить график функции $y = f(ax)$. Если $a < 0$, то отразить полученный график симметрично относительно оси Oy;

3) растянуть в k раз полученный график вдоль оси Oy, получить график функции $y = k\,f(ax)$. Если $k < 0$, то отразить полученный график симметрично относительно оси Ox;

4) сместить (сдвинуть, параллельно перенести) последний график вдоль оси Ox на n единиц. Получить график функции $y = k\,f(a(x + n))$;

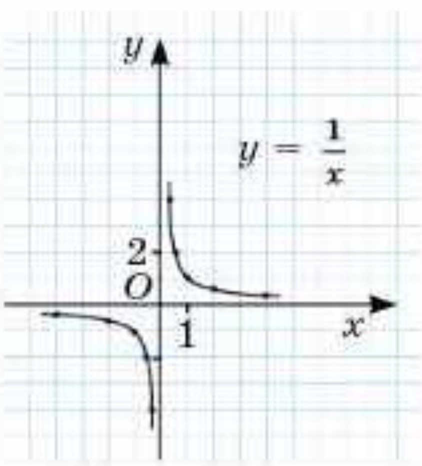
5) сместить (сдвинуть, параллельно перенести) полученный график вдоль оси Oy на m единиц. Получить график функции $y = k\,f(a(x + n)) + m$.

Построим график функции $y = \dfrac{2}{0{,}25(x+1)} - 3$.

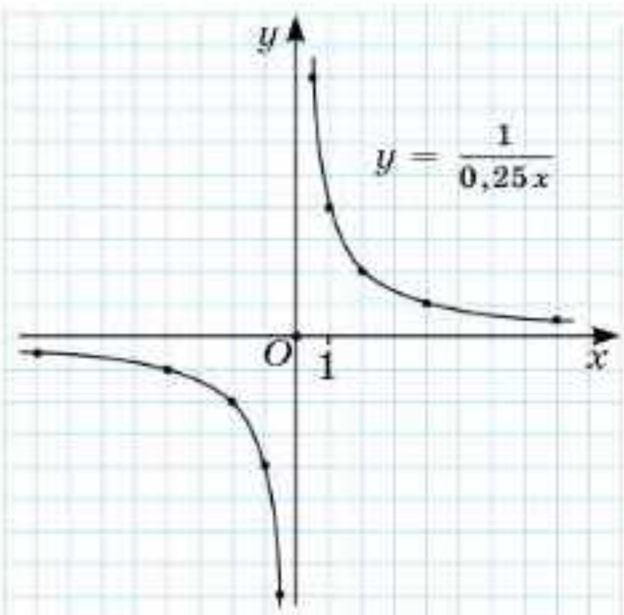
Данная функция имеет вид $y = k\,f(a(x + n)) + m$, где $k = 2$, $a = 0{,}25$, $m = -3$, $n = 1$, исходная функция $y = \dfrac{1}{x}$.

ОБЪЯСНИТЕ

Как построили график функции $y = \dfrac{2}{0{,}25(x+1)} - 3$, преобразуя график функции $y = \dfrac{1}{x}$ (рис.6.1)?

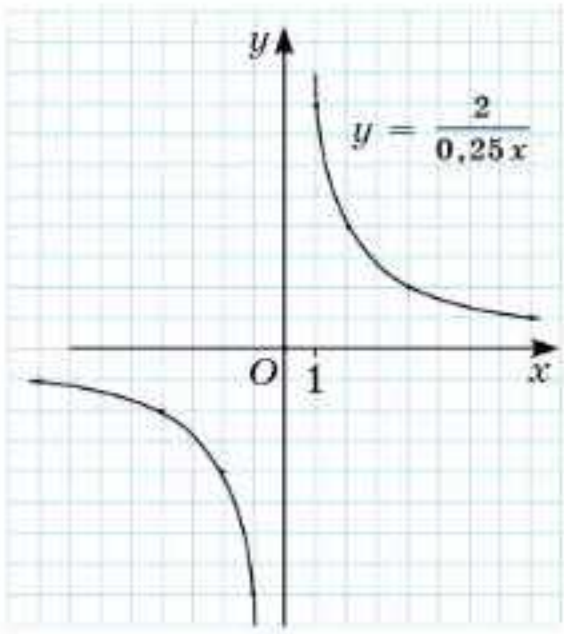


1)



Растяжение вдоль оси Ox в 4 раза

2)



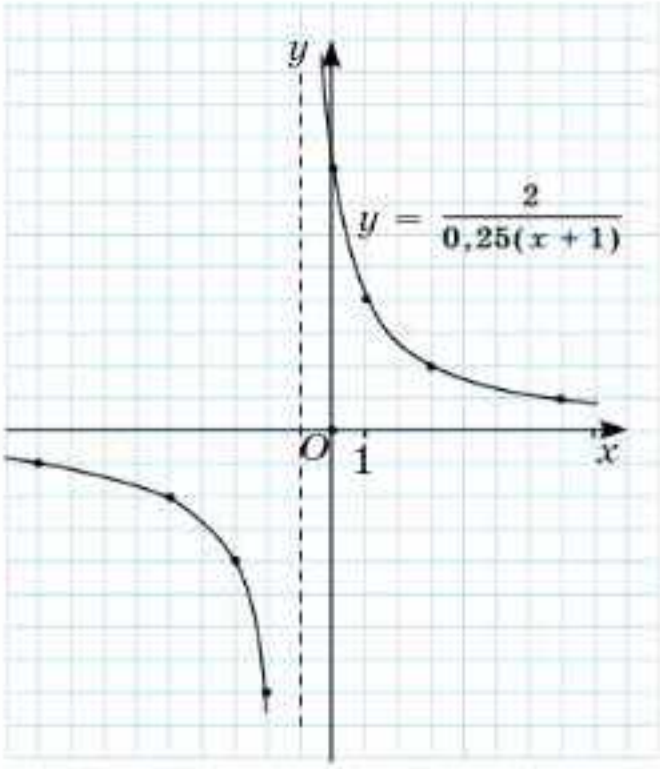
Растяжение вдоль оси Oy в 2 раза

3)

Рис. 6.1

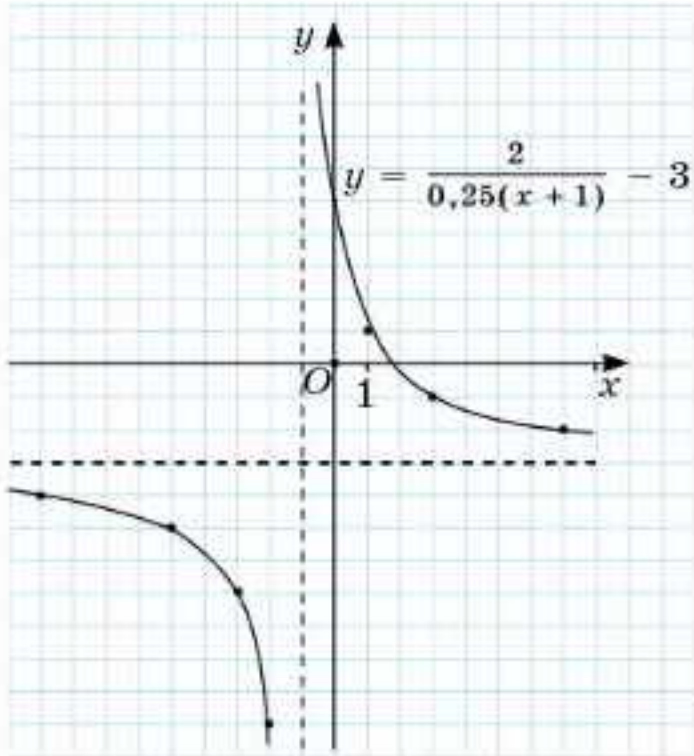
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ



Перемещение (сдвиг, параллельный перенос) влево вдоль оси Ox на 1

4)



Перемещение (сдвиг, параллельный перенос) вниз вдоль оси Oy на 3

5)

Рис. 6.1

1. Сформулируйте алгоритм построения графика функции:
1) $y = 3f(x + 2) + 1$; 2) $y = 3f(x - 2) - 1$; 3) $y = -f(-x + 1)$; 4) $y = 2f(2x + 2)$, используя график функции $y = f(x)$.

2. Приведите пример функции, полученной из графика функции $y = f(x)$ его:
1) растяжением вдоль оси Ox и сжатием вдоль оси Oy;
2) перемещением вправо вдоль оси Ox и вверх вдоль оси Oy;
3) сжатием и перемещением влево вдоль оси Ox;
4) растяжением и перемещением вниз вдоль оси Oy.

Упражнения

A

6.1. Используя алгоритм построения графиков функции и график функции $y = \frac{1}{x}$, постройте график функции $y= f(x)$:

1) $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$; 2) $f(x) = 3 - \frac{1}{x+2}$; 3) $f(x) = \frac{1}{x-3} - 2$.

6.2. Постройте график функции:

1) $y = (x - 2)^2 - 3$; 2) $y = 4 - \sqrt{2+x}$; 3) $y = \sqrt{2-x} - 3$.

B

Используя график функции $y = f(x)$ и алгоритм построения графика функции $y = kf(a(x + n)) + m$, постройте график функции **(6.3 —6.4)**:

6.3. 1) $y = 2(x - 1)^2 - 4$; 2) $y = 3 - 2\sqrt{-x}$; 3) $y = 3\sqrt{2-x} - 1$.

6.4. 1) $y = -2(x + 1)^2 + 3$; 2) $y = 4 - \sqrt{2-x}$; 3) $y = -3\sqrt{2-x} + 2$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

6.5. Используя график функции $y = f(x)$ и алгоритм построения графика функции $y = kf(a(x + n)) + m$, постройте график функции:

1) $y = 2 - \frac{3}{x-2}$; 2) $y = 2 + \frac{1}{x+3}$; 3) $y = -2 - \frac{1}{x+4}$.

C

6.6. Используя график функции $y = \sqrt{x}$ и алгоритм построения графика функции $y = kf(a(x + n)) + m$, постройте график функции:

1) $y = 2\sqrt{2x-4} - 1$; 2) $y = 1 + 2\sqrt{3-2x}$; 3) $y = -2\sqrt{6+3x} + 4$.

6.7. Используя график функции $y = \frac{1}{x}$ и алгоритм построения графика функции $y = kf(a(x + n)) + m$, постройте график функции:

1) $y = \frac{3x}{x-2}$; 2) $y = \frac{2x+1}{x+3}$; 3) $y = \frac{3x-2}{2x+4}$.

6.8. Используя график функции $y = \frac{1}{|x|}$ и алгоритм построения графика функции $y = k\ f(a(x + n)) + m$, постройте график функции:

1) $y = 2 + \frac{1}{|x-2|}$; 2) $y = -3 + \frac{1}{|x+3|}$; 3) $y = -2 - \frac{2}{|x+4|}$.

6.9. Используя алгоритм построения графика функции $y = kf(a(x + n)) + m$, постройте график функции:

1) $y = \left|\frac{3x+1}{x-1}\right|$; 2) $y = \left|\frac{2-x}{x+3}\right|$; 3) $y = \left|\frac{3x+4}{x-2}\right|$.

6.10. Используя алгоритм построения графика функции $y = kf(a(x + n)) + m$, постройте график функции:

1) $y = |\sqrt{x-1} - 2|$; 2) $y = |2\sqrt{2-x} - 4|$; 3) $y = |3 - \sqrt{2x-3}|$.

ПОВТОРИТЕ

6.11. Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{3}{x-3} + \sqrt{\frac{2x-3}{x^2-4}}$; 2) $y = \frac{5x}{2x-3} + \sqrt{\frac{1-2x}{2x^2-18}}$.

6.12. Докажите, что функция $y = f(x)$ возрастает, если:

1) $f(x) = x^2 - 2x$ на множестве $[1; +\infty)$;
2) $f(x) = x^2 + 4x$ на множестве $[-2; +\infty)$;
3) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ на множестве $(-\infty; 1]$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения функции, множество значений функции, график функции, способы задания, простейшие преобразования графиков функций.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§7. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

Вы научитесь описывать по заданному графику функции ее свойства: область определения функции, область значений функции, нули функции, периодичность функции, промежутки монотонности функции, промежутки знакопостоянства функции, наибольшее и наименьшее значения функции, четность, нечетность, ограниченность функции, непрерывность функции, экстремумы функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Нули функции, периодичность, промежутки монотонности, промежутки знакопостоянства, наибольшее и наименьшее значения, четность, нечетность, ограниченность функции, точки экстремума, экстремумы функции

Определение. *Функция $f(x)$ называется* ***возрастающей на множестве*** *D, если для любых x_1 и x_2 из этого множества, таких, что $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.*

Возрастающая функция изображена на рисунке 7.1.

На практике пользуются следующей формулировкой этого определения: функция называется *возрастающей*, если любому большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение. *Функция $f(x)$ называется* ***убывающей на множестве*** *D, если для любых x_1 и x_2 из этого множества, таких, что $x_1 < x_2$ выполнено неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.*

Убывающая функция изображена на рисунке 7.2.

На практике пользуются следующей формулировкой этого определения: функция называется *убывающей*, если любому большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

ОБЪЯСНИТЕ

Возрастающей или убывающей будет функция, если меньшему значению аргумента соответствует значение функции: 1) меньшее; 2) большее?

ПРИМЕР

1. Докажем, что функция $y = -3x$ — убывающая. Действительно, по определению: функция убывающая, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Пусть $x_1 > x_2$. Найдем y_1 и y_2. Получим $y_1 = -3x_1$ и $y_2 = -3x_2$. Рассмотрим разность $y_1 - y_2$. В выражение $y_1 - y_2$ вместо y_1 подставим $-3x_1$ и вместо y_2 подставим $-3x_2$.

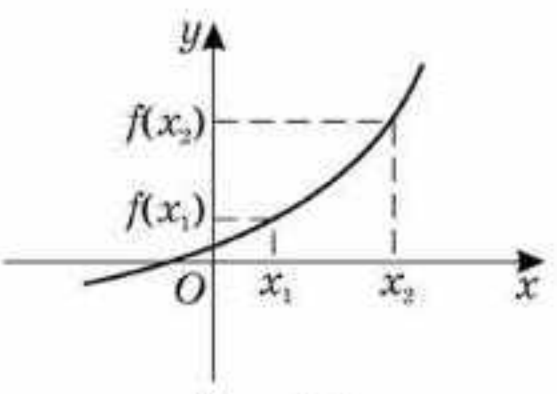


Рис. 7.1

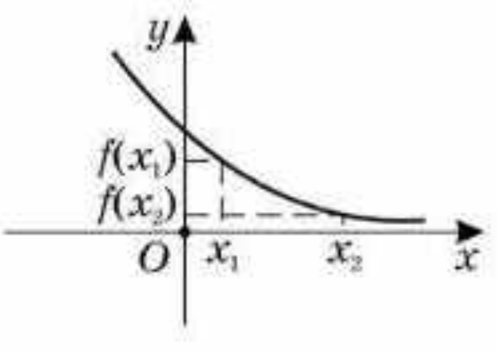


Рис. 7.2

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Получим $y_1 - y_2 = -3x_1 - (-3x_2)$.

Раскроем скобки и вынесем общий множитель за скобки: $-3x_1 + 3x_2 = -3(x_1 - x_2)$. Поскольку $x_1 > x_2$, то значение разности $x_1 - x_2$ положительно. Следовательно, $y_1 - y_2 < 0$, тогда $y_1 < y_2$.

ОБЪЯСНИТЕ

Если функция задана табличным способом, то как по таблице можно установить, является функция возрастающей или убывающей или не является ни возрастающей, ни убывающей?

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными функциями*.

Исследовать функцию на монотонность, значит выяснить, является она возрастающей или убывающей функцией.

Определение. *Промежутки, на которых функция возрастающая (убывающая), называются* ***промежутками возрастания (убывания) функции.***

Определение. *Функция $f(x)$ называется* ***ограниченной****, если для всех значений x существует такое положительное число M, что $|f(x)| \leqslant M$.*

Если такого числа не существует, то функция — *неограниченная*.

ПРИМЕР 2. На рисунке 7.3 изображена ограниченная функция, на рисунке 7.4 — неограниченная функция.

Определение. *Функция $f(x)$ называется* ***ограниченной сверху****, если для всех значений x существует такое число M, что $f(x) \leqslant M$.*

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной снизу****, если для всех значений x существует такое число M, что $f(x) \geqslant M$.*

ПРИМЕР 3. На рисунке 7.5 изображена ограниченная сверху функция, на рисунке 7.6 — ограниченная снизу функция.

ОБЪЯСНИТЕ

1) Как расположен график ограниченной (ограниченной снизу; ограниченной сверху) функции $y = f(x)$ относительно некоторой прямой, параллельной оси Ox?

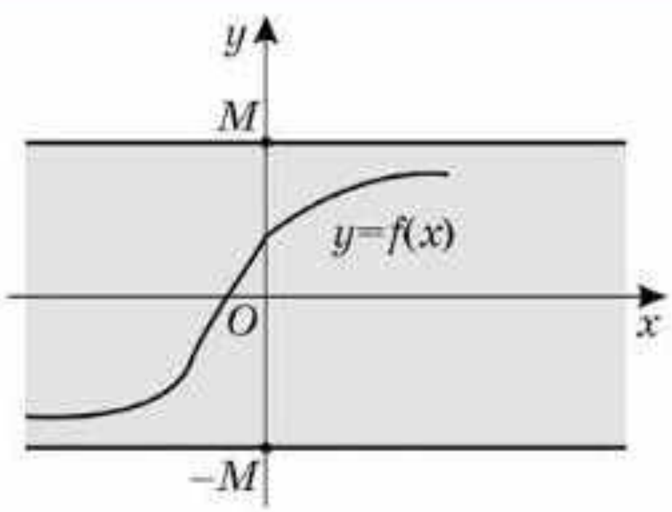


Рис. 7.3

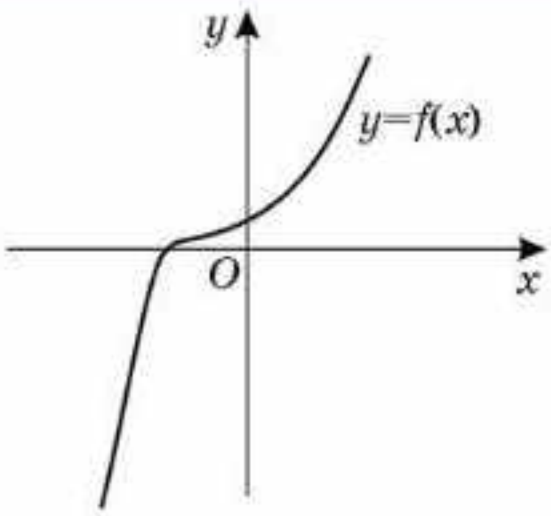


Рис. 7.4

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

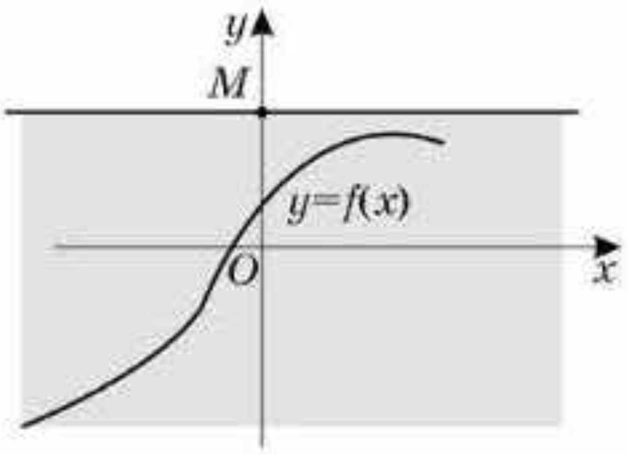


Рис. 7.5

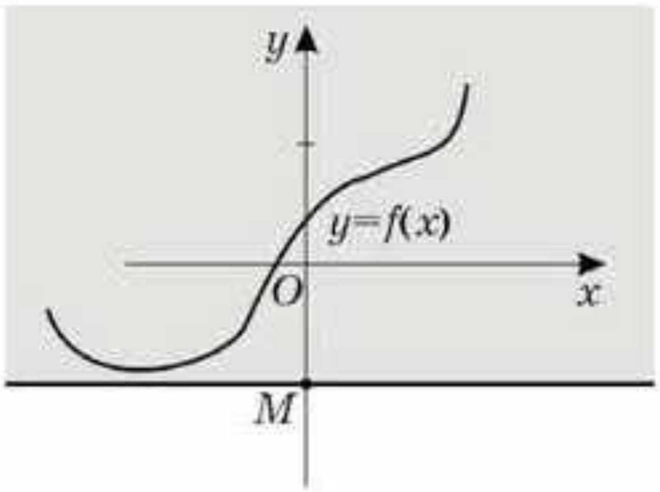


Рис. 7.6

2) Какие из функций: $y = kx$, где $k \neq 0$; $y = x^2$; $y = -x^2$; $y = x^3$; $y = \sqrt{x}$; $y = |x|$ ограничены, ограничены снизу, ограничены сверху?

Определение. *Значение аргумента, при котором значение функции равно* 0, *называется* ***нулем (корнем) функции.***

Функция может иметь несколько нулей. Например, функция $y = x\,(x + 1)(x - 3)$ имеет три нуля: $x = 0$, $x = -1$, $x = 3$.

Геометрически нуль функции — это абсцисса точки пересечения графика функции с осью Ox. Например, на рисунке 7.7 изображен график функции с нулями: a, b и c.

ПРИМЕР

4. Найдем нули функции $y = -5x + 10$, т. е. точки пересечения графика функции $y = -5\,x + 10$ с осью абсцисс. Поскольку точки, лежащие на оси абсцисс, имеют ординаты, равные нулю, то надо в формулу $y = -5\,x + 10$ вместо переменной y подставить число 0. Получим уравнение $-5\,x +$ $+ 10 = 0$, из которого находим $x = 2$.

Значит, график функции $y = -5\,x + 10$ пересекает ось абсцисс в одной точке с координатами (2; 0), а нулем этой функции является число 2.

ОБЪЯСНИТЕ

Для каких функций: $y = kx$, где $k \neq 0$; $y = x^2$; $y = -x^2$; $y = x^3$; $y = |x|$; $y = \sqrt{x+2}$ число 0 является нулем этой функции?

Определение. *Числовые промежутки, состоящие из значений аргумента, при которых значения функции положительны или отрицательны, называются* ***промежутками знакопостоянства функции*** .

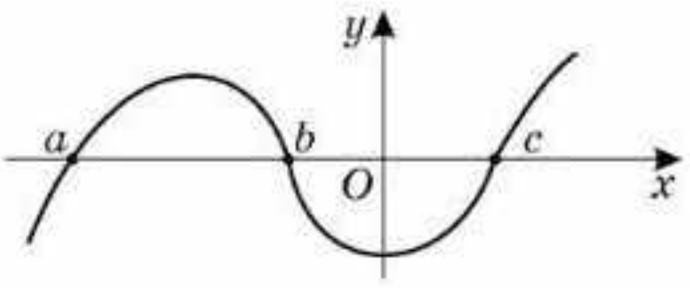


Рис. 7.7

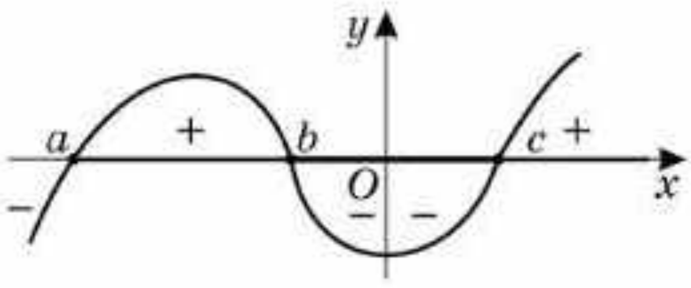


Рис. 7.8

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПРИМЕР 5. Найдем значения аргумента x, при которых значения функции $y = -5x + 10$ положительны. Для этого составим и решим неравенство: $-5x + 10 > 0$. Получим $-5x > -10$, или $x < 2$, т. е. получим числовой промежуток $(-\infty; 2)$.

Ответ: $(-\infty; 2)$.

Для функции, изображенной на рисунке 7.8, укажите промежутки ее знакопостоянства.

Определение. *Число k называется* ***наибольшим значением функции*** *$y = f(x)$ на множестве X, если:*

1) *во множестве X существует такое число x_0, для которого $f(x_0) = k$;*
2) *для любого числа x из множества X верно неравенство: $f(x) \leqslant k$.*

Определение. *Число k называется* ***наименьшим значением функции*** *$y = f(x)$ на множестве X, если: 1) во множестве X существует такое число x_0, для которого $f(x_0) = k$; 2) для любого числа x из множества X верно неравенство: $f(x) \geqslant k$.*

Примечание. Если множество X не указывается, то речь идет о нахождении наибольшего или наименьшего значения функции на всей области определения.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему для функции $y = x^2$ на отрезке $[-2; 3]$ имеем $y_{\text{наим.}} = 0$, $y_{\text{наиб.}} = 9$ (рис. 7.9)?

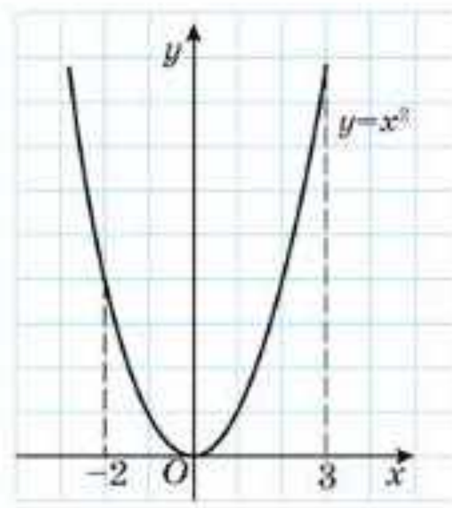


Рис. 7.9

Определение. *Функция называется* ***четной***, *если:*

1) *область определения функции симметрична относительно нуля;*
2) *для любого x из области определения $f(-x) = f(x)$.*

Например, функция $y = x^2$ — четная функция. Действительно, 1) область определения $(-\infty; +\infty)$ — симметрична относительно нуля; 2) для любого x из области определения $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ и $f(x) = x^2$. Значит, $f(-x) = f(x)$.

ОБЪЯСНИТЕ

1) Почему функции $y = x^4$; $y = x^6$; $y = x^8$; $y = x^{10}$; $y = x^{2n}$, где n — натуральное число, являются четными функциями?

2) Почему график четной функции симметричен относительно оси Oy (осевая симметрия) рис. 7.10?

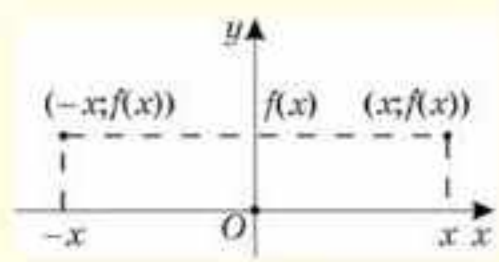


Рис. 7.10

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Определение. *Функция называется* ***нечетной****, если:*

1) *область определения функции симметрична относительно нуля;*

2) *для любого x из области определения $f(-x) = -f(x)$.*

Например, функция $y = x^3$ — нечетная функция. Действительно, 1) область определения $(-\infty; +\infty)$ — симметрична относительно нуля; 2) для любого x из области определения $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ и $f(x) = x^3$. Значит, $f(-x) = -f(x)$.

ОБЪЯСНИТЕ

1) Почему функции $y = x^5$; $y = x^7$; $y = x^9$; $y = x^{11}$; $y = x^{2n+1}$, где n — натуральное число, являются нечетными функциями?

2) Почему график нечетной функции симметричен относительно начала координат (центральная симметрия) (рис. 7.11)?

3) На каком из графиков изображена четная функция, на каком — нечетная (рис. 7.12, 7.13)?

4) Может ли функция быть четной; нечетной, если известно, что точки $A(-3; -2)$, $B(1; 5)$, $C(3; 2)$, $D(-1; -5)$ принадлежат одному и тому же графику функции?

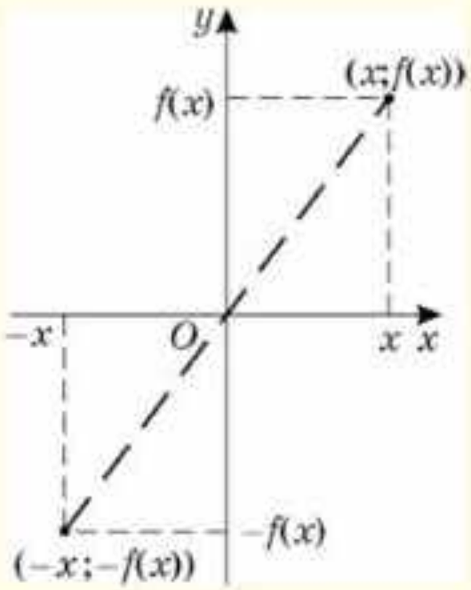


Рис. 7.11

Определение. ***Функциями общего вида*** *называются функции, которые являются ни четными, ни нечетными.*

Определение. ***Окрестностью точки*** *называется любой интервал, содержащий эту точку.*

Определение. *Точка a называется* ***точкой максимума функции*** *$y = f(x)$, если существует такая окрестность точки $x = a$, что для всех x, $x \neq a$, из этой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) < f(a)$.*

Точку максимума обычно обозначают x_{max}.

ПРИМЕР **6.** Функция, график которой изображен на рисунке 7.14, имеет три точки максимума: $x_{max} = -4$, $x_{max} = 3$, $x_{max} = 6$.

Определение. *Значение функции в точке максимума называется* ***максимумом функции****.*

Рис. 7.12

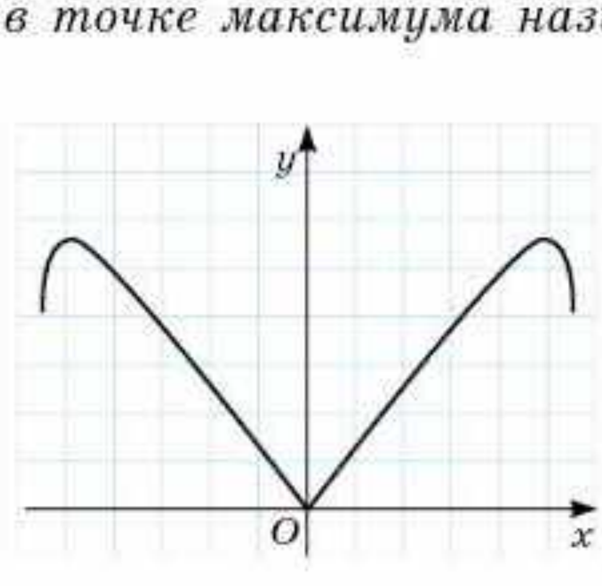


Рис. 7.13

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

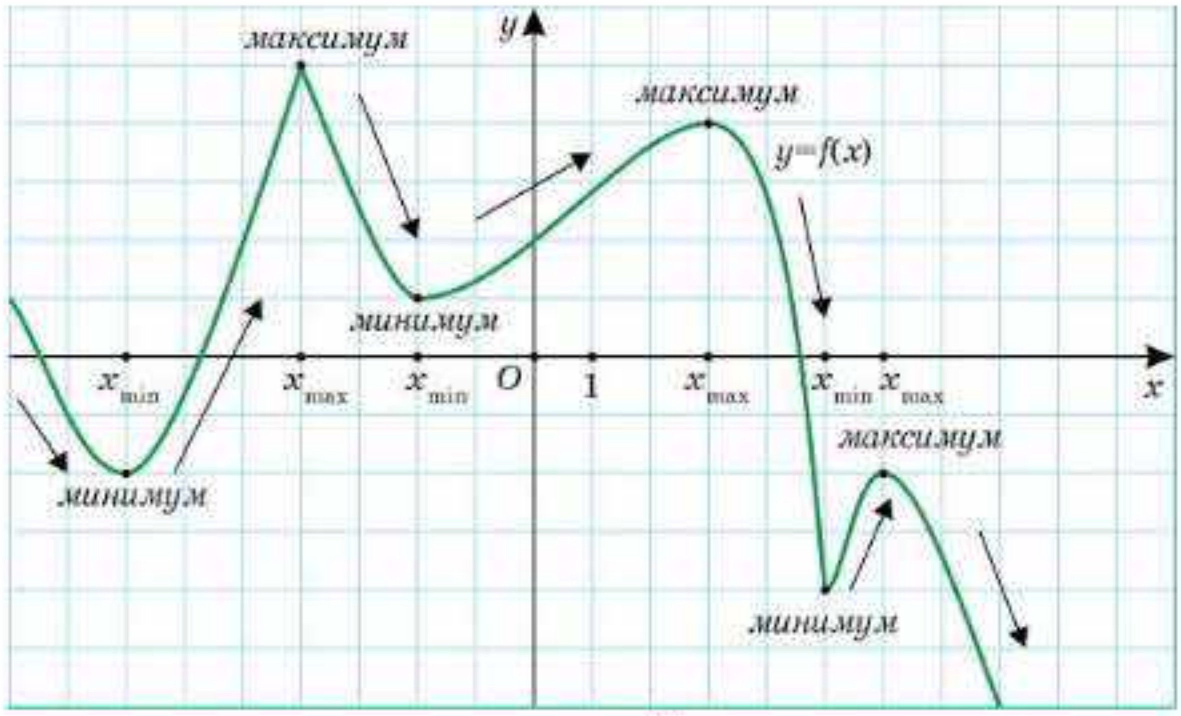


Рис. 7.14

ПРИМЕР

7. Функция, график которой изображен на рисунке 7.14, имеет три максимума функции: 5; 4 и −2.

Действительно, $5 = f(-4)$; $4 = f(3)$; $-2 = f(6)$.

Определение. *Точка a называется* ***точкой минимума функции*** *$y = f(x)$, если существует такая окрестность точки $x = a$, что для всех x, $x \neq a$, из некоторой этой точки a выполняется неравенство $f(x) > f(a)$.*

Точку минимума обычно обозначают x_{min}.

ПРИМЕР

8. Функция, график которой изображен на рисунке 7.14, имеет три точки минимума: $x_{min} = -7$, $x_{min} = -2$, $x_{min} = 5$.

Определение. *Значение функции в точке минимума называется* ***минимумом функции.***

ПРИМЕР

9. Функция, график которой изображен на рисунке 7.14, имеет три максимума функции: −2; 1 и −4.

Действительно, $-2 = f(-7)$; $1 = f(-2)$; $-4 = f(5)$.

Определение. *Точки максимума и минимума называются* ***точками экстремума функции,*** *а значение функции в точке экстремума называется* ***экстремумом функции.***

ПРИМЕР

10. Функция, график которой изображен на рисунке 7.14, имеет шесть точек экстремума.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему точки $x = -1$ и $x = 4$ являются точками максимума, а точка $x = 2$ — точкой минимума (рис. 7.15)?

Равны ли максимум и минимум функции на рисунке 7.16?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

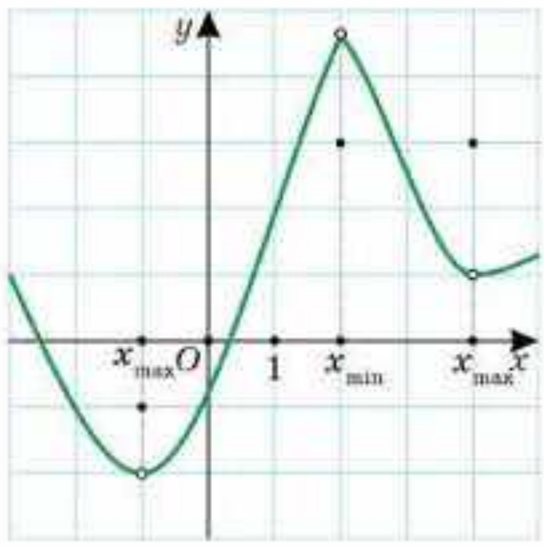


Рис. 7.15

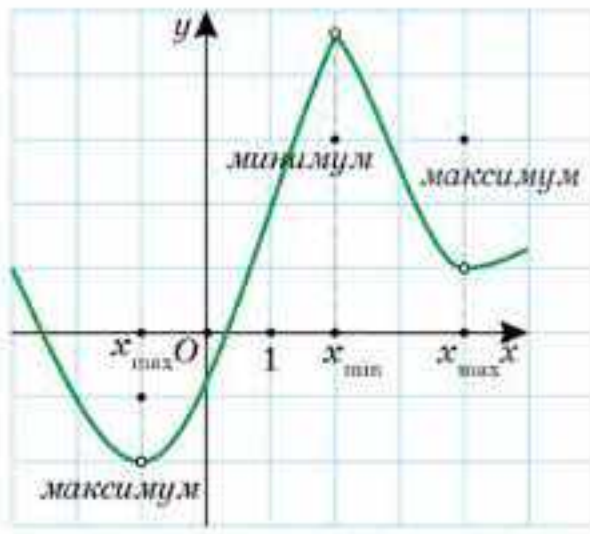


Рис. 7.16

Наибольшее значение функции на множестве может совпадать с одним из максимумов функции, наименьшее — с одним из минимумов.

ПРИМЕР

11. На рисунке 7.17 максимум функции и наибольшее значение функции равно 5, минимум функции и наименьшее значение функции равно −3.

12. На рисунке 7.18 максимум функции равен −2, наибольшее значение равно 3, минимум функции равен −4, наименьшее значение функции равно −6.

Рис. 7.17

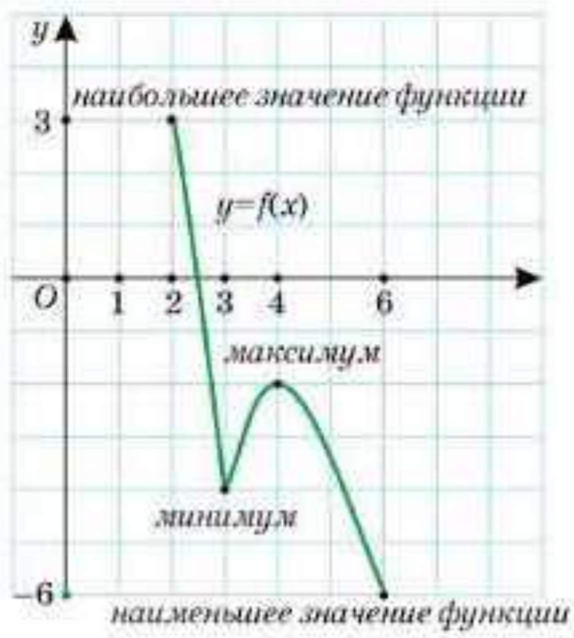


Рис. 7.18

Наибольшее и наименьшее значения функции не всегда совпадают с максимумами и минимумами функции.

?

1. Что означает: исследовать функцию на: 1) монотонность; 2) ограниченность?

2. Известно, что график некоторой функции $y = f(x)$ расположен выше оси Ox для всех значений аргумента x из открытого числового луча $(-\infty; 7)$ и ниже оси Ox для всех x из открытого числового луча $(7; +\infty)$ и при $x = 7$ пересекает ось Ox. Назовите нули и промежутки знакопостоянства этой функции.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3. Какова связь наличия наибольшего и наименьшего значений функции с ее ограниченностью?
4. Будет ли функция ограниченной, если она ограничена только сверху или только снизу?
5. Что означает исследовать функцию на четность?
6. Известно, что область определения функции не симметрична относительно нуля. Может ли эта функция быть четной или нечетной?
7. Известно, что некоторая функция четная (нечетная). Как это можно использовать при построении ее графика?
8. Может ли минимум функции быть больше максимума этой функции? Приведите пример.
9. Может ли максимум функции быть равен минимуму функции? Приведите пример.
10. Почему максимум функции не может быть наименьшим значением функции?
11. Почему минимум функции не может быть наибольшим значением функции?

Упражнения

A

7.1. На рисунке 7.19 изображен график функции $y = f(x)$. Используя график данной функции, перечислите ее свойства.

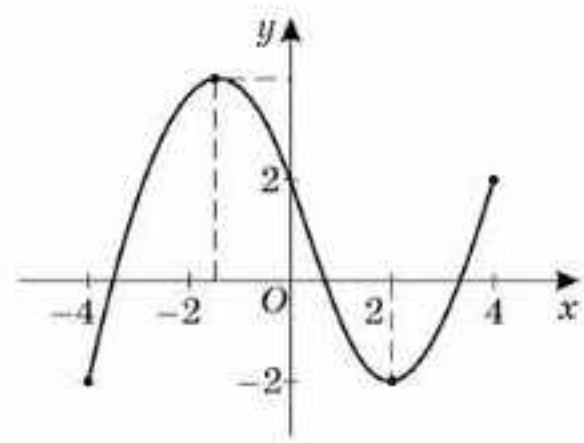


Рис. 7.19

Используя свойства верных числовых неравенств, докажите, что возрастают функции **(7.2—7.3)**:

7.2. 1) $y = 9 + 2x$; 2) $y = 6x + 1$;
3) $y = -8 + 4x$; 4) $y = 0{,}5x - 3$;
5) $y = x^3 + 3$; 6) $y = 0{,}2x^3$;
7) $y = -5 + x^3$; 8) $y = x^3 - 1$.

7.3. 1) $y = x^2 - 4$ при $x \geqslant 2$; 2) $y = -x^2 + 2$ при $x \leqslant -3$;
3) $y = -\frac{4}{x}$ при $x \leqslant -4$; 4) $y = -\frac{3}{x}$ при $x \geqslant 3$.

Используя свойства верных числовых неравенств, докажите, что убывают функции **(7.4—7.5)**:

7.4. 1) $y = 2{,}5 - 4x$; 2) $y = -3x + 2$; 3) $y = -7 - x$;
4) $y = -3{,}5x + 8$; 5) $y = -x^3 + 2$; 6) $y = -2x^3$;
7) $y = -6 - x^3$; 8) $y = -x^3 - 4$.

7.5. 1) $y = x^2 - 9$ при $x \leqslant -2$; 2) $y = -x^2 + 4$ при $x \geqslant 3$;
3) $y = \frac{5}{x}$ при $x \geqslant 5$; 4) $y = \frac{2}{x}$ при $x \leqslant -4$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Выясните, являются ли ограниченной снизу, ограниченной сверху или ограниченной функции **(7.6—7.7)**:

7.6. 1) $y = 5 + x$; 2) $y = -x + 9$;
3) $y = -1 - x^2$; 4) $y = x^2 + 3$;
5) $y = \sqrt{x} - 2$; 6) $y = -\sqrt{x} + 1$;
7) $y = \frac{2}{x}$, $x \leqslant 0$; 8) $y = -\frac{3}{x}$, $x \geqslant 0$;
9) $y = |x| - 5$; 10) $y = -|x| + 2$;
11) $y = -|x| + 6$, где $-1 \leqslant x \leqslant 6$;
12) $y = |x| - 7$, где $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

7.7. 1) $y = x^2 - 4x + 5{,}25$, где $-1 \leqslant x \leqslant 4$;
2) $y = -x^2 - x + 3{,}75$, где $-5 \leqslant x \leqslant 1$;
3) $y = x^2 + 6x + 6$, где $-6 \leqslant x \leqslant 0$;
4) $y = -x^2 - 8x - 18{,}5$, где $1 \leqslant x \leqslant 3$.

7.8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:
1) $y = 1{,}5 + 6x$, где $-2 \leqslant x \leqslant 1$;
2) $y = -0{,}8x + 10$, где $-5 \leqslant x < 4$;
3) $y = 11 - x^2$, где $2 < x \leqslant 7$;
4) $y = x^2 + 5{,}4$, где $-3 \leqslant x \leqslant -2$;
5) $y = \sqrt{x} + 5$, где $9 \leqslant x \leqslant 16$;
6) $y = -\sqrt{x} + 4$, где $0 < x \leqslant 4$;
7) $y = \frac{6}{x}$, где $0{,}5 \leqslant x < 3$;
8) $y = \frac{4}{x}$, где $-8 \leqslant x \leqslant -5$;
9) $y = -|x| - 8{,}5$, где $-7 \leqslant x \leqslant -3$;
10) $y = |x| + 1{,}6$, где $2 < x \leqslant 9$.

7.9. Постройте график и перечислите свойства функции:

1) $y = \begin{cases} x^2 + 2, \text{ если } -2 \leqslant x < 1, \\ -x + 3, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 8; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 4x + 5, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x^3 + 1, \text{ если } 0 < x \leqslant 2. \end{cases}$

7.10. Какие из приведенных графиков являются графиками:
1) четной функции; 2) нечетной функции;
3) функции, которая является ни четной, ни нечетной (рис. 7.20)?

Докажите, что являются четными функции **(7.11—7.13)**:

7.11. 1) $y = 19x^2$; 2) $y = x^2 - 34$; 3) $y = x^4 - 7x^2$;
4) $y = -x^2 - x^4$; 5) $y = \frac{10}{x^2}$; 6) $y = -\frac{8}{3 + x^2}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

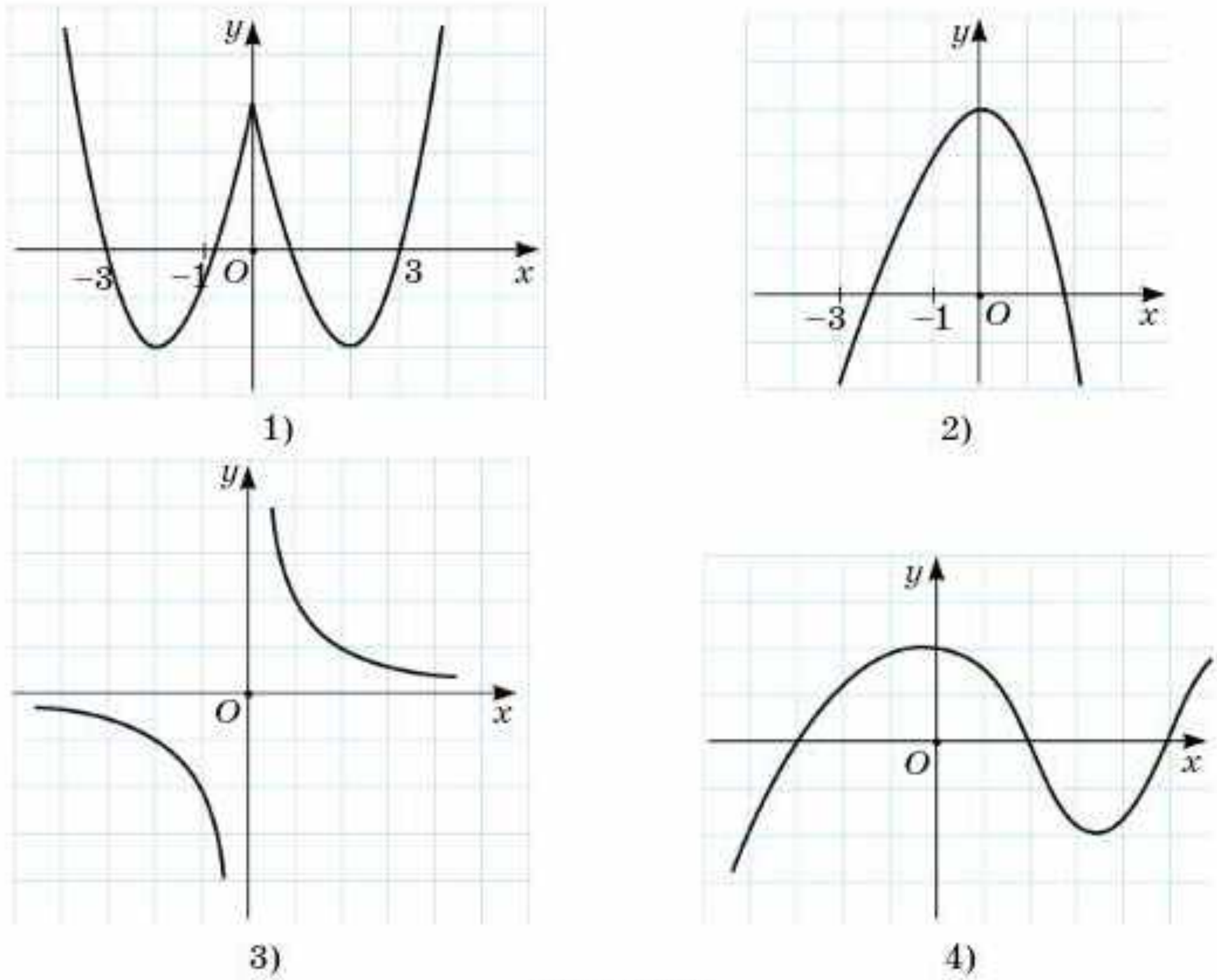


Рис. 7.20

7.12. 1) $y = \sqrt{x^2 + 1} - 15$; 2) $y = \sqrt{x^4 - 6} + 22$;

3) $y = |x| + 54$; 4) $y = 31 - |x|$.

7.13. 1) $y = |x| + x^2$; 2) $y = x^4 - |x|$;

3) $y = \sqrt{x^2 + 9} - x^2$; 4) $y = \sqrt{x+9} + \sqrt{9-x}$.

Докажите, что являются нечетными функции **(7.14—7.16)**:

7.14. 1) $y = 23x$; 2) $y = 5x^3$; 3) $y = -9x^3$;

4) $y = -x^3 + 2x$; 5) $y = \frac{7}{x} + x$; 6) $y = -\frac{16}{x} - x$.

7.15. 1) $y = x\sqrt{x^4 + 1}$; 2) $y = x\sqrt{x^2 - 2} + 44x$;

3) $y = x^3|x|$; 4) $y = -\frac{1}{x}|x|$.

7.16. 1) $y = -x|x| + x^3$; 2) $y = -x\,|x^3|$;

3) $y = \frac{x}{x^2 + 4} - x$; 4) $y = \sqrt{x+8} - \sqrt{8-x}$.

7.17. На рисунке 7.21 построена часть графика функции $y = f(x)$. Постройте график функции на R, если известно, что она: 1) четная; 2) нечетная; 3) ни четная, ни нечетная.

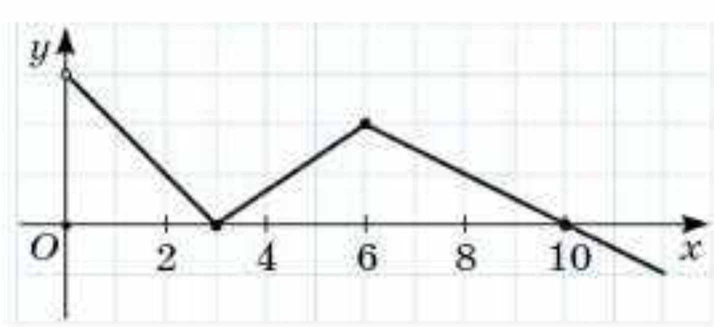


Рис. 7.21

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

7.18. Исследуйте на четность функцию:

1) $y = -6x + x^2$; 2) $y = |x| - x^3$; 3) $y = \sqrt{x^4 + 1} + 12|x|$;

4) $y = 0{,}7x^3 - x|x|$; 5) $y = -\frac{1}{x^2 - 5} + x$; 6) $y = x - \frac{x}{x^3 + 1}$;

7) $y = \frac{4x}{x^4 - 2}$; 8) $y = \frac{9 + x^2}{x^3}$.

7.19. Используя определения точек экстремума и экстремумов функции, запишите для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 7.22:

1) точки максимума; 2) точки минимума;

3) экстремумы функции.

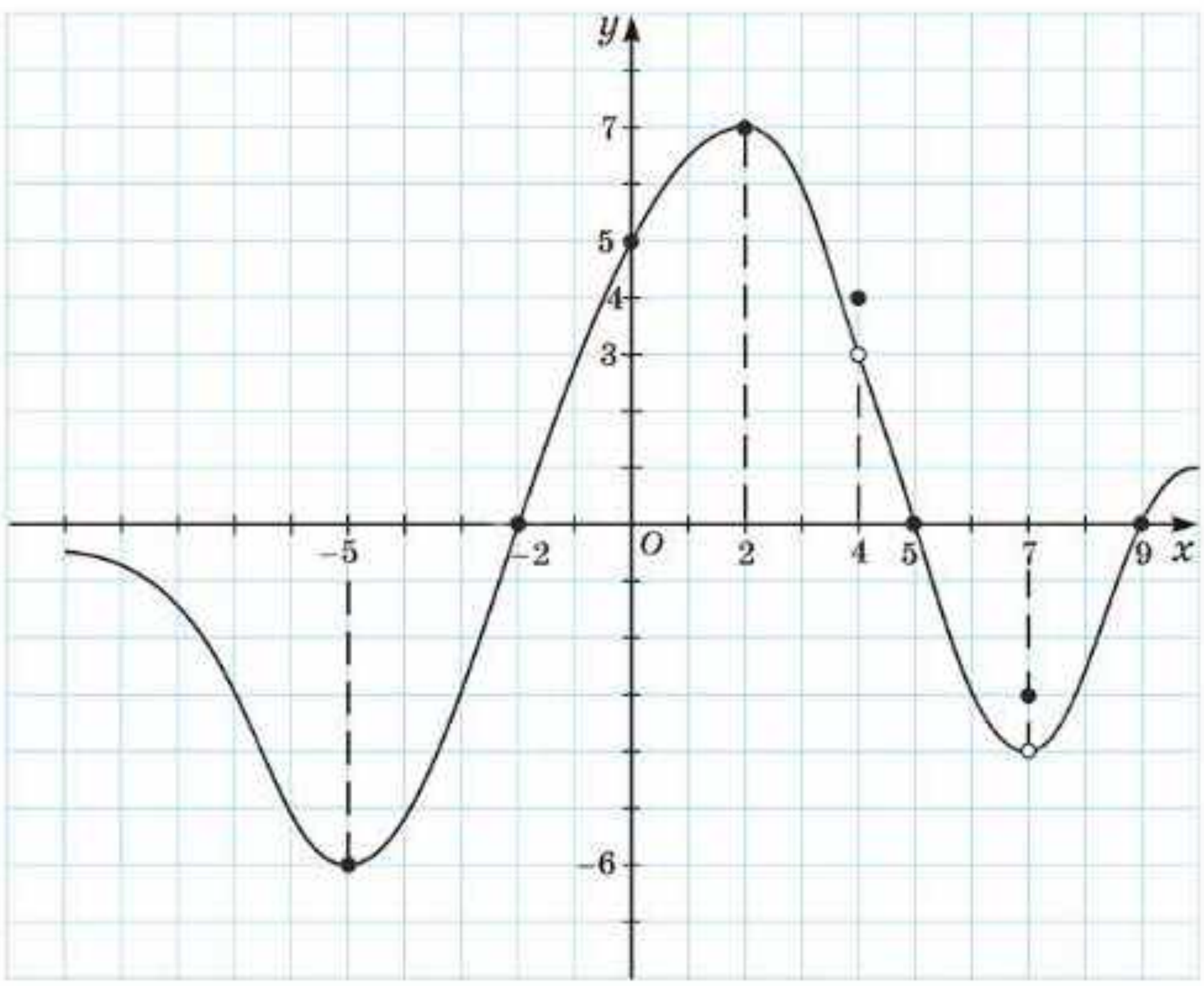


Рис. 7.22

7.20. Какой из графиков, изображенных на рисунке 7.23, является графиком функции? Для функции запишите ее точки экстремума и экстремумы.

7.21. Постройте график и запишите точки экстремума функции:

1) $y = 2x^2 - 4x + 3$; 2) $y = -x^2 - 2x + 5$;

3) $y = -2x^2 + 3x - 4$.

B

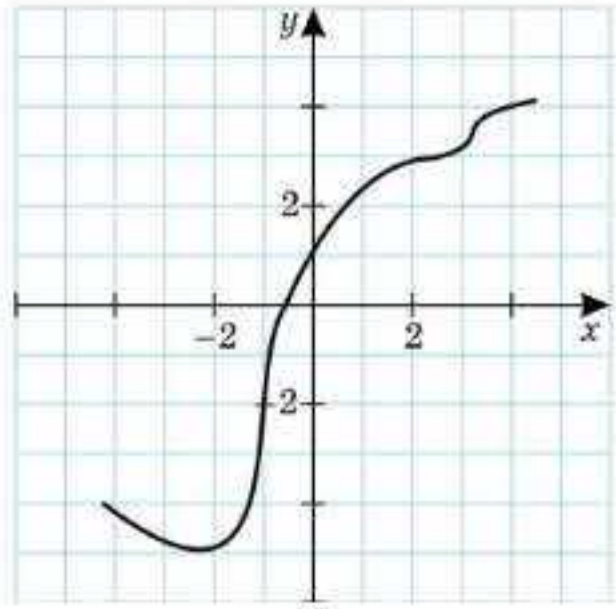
Найдите промежутки возрастания функций (**7.22—7.23**):

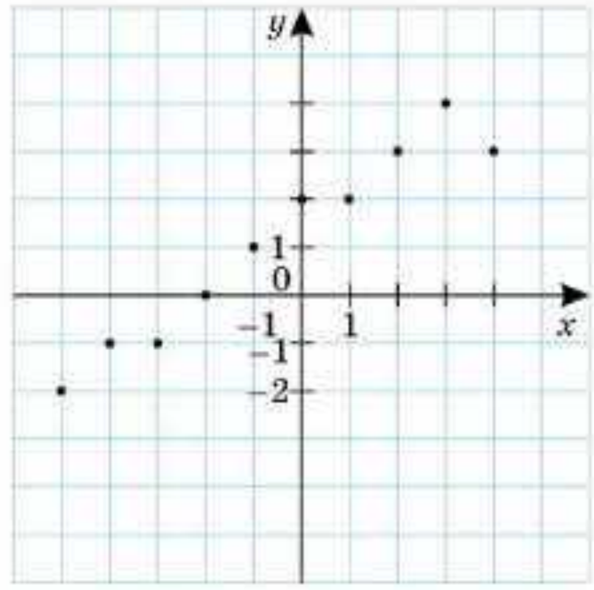
7.22. 1) $y = x^3 + x$; 2) $y = x^2 + 5x$ при $x \geqslant -1$;

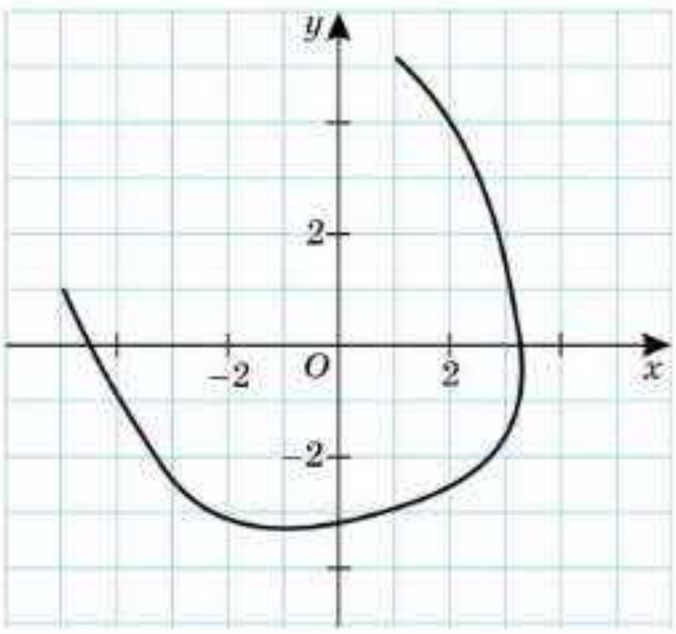
3) $y = x^4 + 4$ при $x \geqslant 2$; 4) $y = -x^4 + 6$ при $x \leqslant -1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ







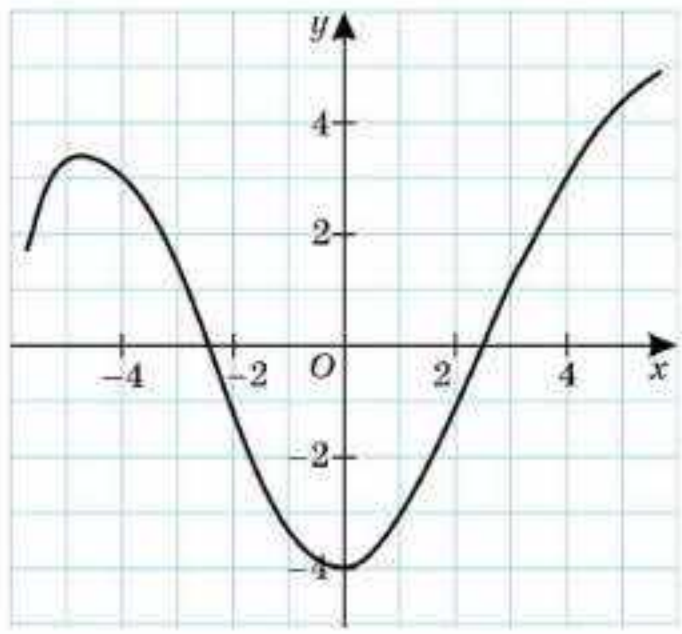


Рис. 7.23

7.23. 1) $y = \frac{3x + 7}{x + 2}$; 2) $y = \frac{6 - x}{4 - x}$; 3) $y = \{4x\}$.

Найдите промежутки убывания функций (**7.24—7.25**):

7.24. 1) $y = -x^3 - x$; 2) $y = -x^2 + 3x$, где $x \leqslant 1$; 3) $y = x^4 + 3$, где $x \leqslant -3$; 4) $y = -x^4 + 8$, где $x \geqslant 2$.

7.25. 1) $y = \frac{5 - 3x}{x + 2}$; 2) $y = \frac{3 - 2x}{x - 2}$.

7.26. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = x^2 - x + 3{,}75$; 2) $y = -x^2 - 3x - 6{,}25$;
3) $y = 2x^2 - 4x - 3$; 4) $y = -3x^2 - 6x + 4$.

7.27. На рисунке 7.24 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = (f(x))^2$.

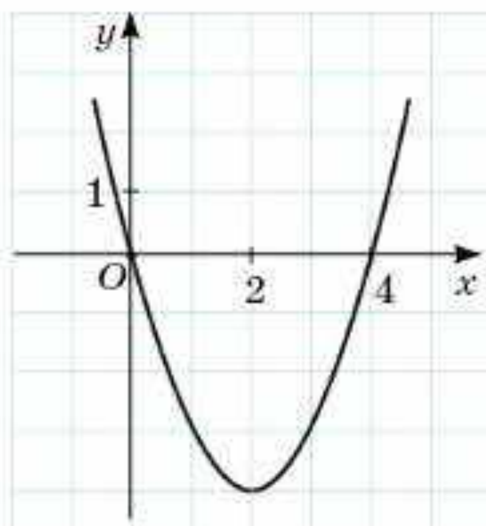


Рис. 7.24

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

7.28. Постройте график и перечислите свойства функции:

1) $y = \begin{cases} x + 7, \text{ если } x < -2, \\ x^2 - 3, \text{ если } -2 \leqslant x < 1, \\ \sqrt{x+4}, \text{ если } x \geqslant 1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} -\frac{6}{x}, \text{ если } x < -3, \\ 5x + 14, \text{ если } -3 \leqslant x < 0, \\ \sqrt{x+14}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

7.29. Четной или нечетной является функция $f(x) + g(x)$, где:

1) $f(x) = -11x + x^2$ и $g(x) = -11x - 19$;
2) $f(x) = x^2 + x^3$ и $g(x) = -x^2 + 43x$;
3) $f(x) = |x| - x^3$ и $g(x) = x^3 - x^2$;
4) $f(x) = \dfrac{6}{x^4 + 1} - 15$ и $g(x) = \dfrac{x - 6}{x^4 + 1} + 15$?

7.30. Постройте график и исследуйте на четность функцию:

1) $y = \begin{cases} -x, \text{ если } -4 \leqslant x < -2, \\ 6 - x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x, \text{ если } 2 < x \leqslant 4; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x - 2, \text{ если } -5 \leqslant x \leqslant -1, \\ -4 + x^2, \text{ если } -1 < x < 1, \\ -x - 2, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$

7.31. Исследуйте на четность функцию:

1) $y = -8x + x^2 + x^3$; 2) $y = 0{,}2x^2|x| - x^3|x|$;

3) $y = \sqrt{x^3 + x^2} - 31|x^3|$; 4) $y = -x^4\sqrt{x - x^2} - x^2|x^2|$.

5) $y = -\dfrac{1}{x^2 - 5} + \sqrt{x^3 - 1}$; 6) $y = \sqrt{x^2 - 1} - \dfrac{x^3}{x^4 - 3}$;

7) $y = x + |x| - \dfrac{1 - x^2}{\sqrt{5 + x^3}}$; 8) $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x^3 - x} + x^2|x|$.

7.32. Постройте график и запишите точки экстремума функции:

1) $y = |x^2 - 4|$; 2) $y = |-x^2 - 2x|$;
3) $y = |2x^2 - 4|$; 4) $y = |3x^2 - 6x|$.

7.33. Постройте график и запишите точки экстремума функции:

1) $y = |x^2 - 4x - 1|$; 2) $y = |x^2 - 2x + 3|$;
3) $y = |2x^2 - 6x + 3|$; 4) $y = |3x^2 - 6x - 1|$.

7.34. Найдите точки минимума и максимума, построив график функции:

1) $y = \left|\sqrt{x-2} - 1\right|$; 2) $y = \left|\sqrt{3-x} - 2\right|$;

3) $y = \left|4 - \sqrt{2x-3}\right|$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

C

7.35. Исследуйте на ограниченность функцию:

1) $y = \sqrt{x^2 - 9x + 8}$; 2) $y = \sqrt{8 - 2x - x^2}$;

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9x + 9}}$; 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{8 - 2x - x^2}}$.

7.36. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = \dfrac{x+3}{x+2} + \sqrt{2+x}$; 2) $y = \dfrac{x+2}{x-2} + \sqrt{-2+x}$.

7.37. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции с параметром a:

1) $y = x^2 + 5x + 6a$ на числовом отрезке $[-3; -1]$;
2) $y = -x^2 + 5x + 8a$ на числовом отрезке $[-1; 5]$;
3) $y = x^2 - ax + 7$ на числовом отрезке $[0; 4]$.

7.38. Представьте в виде суммы четной и нечетной функций функцию $y = f(x)$:

1) $f(x) = 5x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 11x + 30$;
2) $f(x) = -x^4 + x^3 - 11|x| + 30x$;
3) $f(x) = x^3 - 27x^2 + x^2|x| - x\sqrt{x}$.

7.39. Постройте схематический график и перечислите свойства функции:

1) $y = \begin{cases} x^2 - 9, \text{ если } -5 \leqslant x < -3, \\ 3 + x, \text{ если } -3 \leqslant x < 0, \\ 3 - x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ x^2 - 9, \text{ если } 3 < x \leqslant 5; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -x^2 - 2x - 2, \text{ если } -4 \leqslant x < -1, \\ x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -x^2 - 2x + 2, \text{ если } 1 < x \leqslant 4. \end{cases}$

7.40. Дана функция $y = f(x)$:

1) $f(x) = \begin{cases} 4 + x^2, \text{ если } x < 0, \\ g(x), \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

Составьте выражение $g(x)$ так, чтобы $y = f(x)$ была четной.

2) $f(x) = \begin{cases} 5 - x^2, \text{ если } x > 0, \\ g(x), \text{ если } x < 0. \end{cases}$

Составьте выражение $g(x)$ так, чтобы $y = f(x)$ была нечетной.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

***7.41.** Функция $y = f(x)$ является нечетной. Известно, что:

1) $f(x) = \sqrt{x}$ при $x > 0$;

2) $f(x) = x^2 - 4x$ при $x \geqslant 0$;

3) $f(x) = x^2 + 2x$ при $x \leqslant 0$.

Постройте график функции $y = f(x)$.

Задайте данную функцию одной формулой.

7.42. Постройте график и запишите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x) = ||x-2|-2|$; 2) $f(x) = ||x+1|-3|$; 3) $f(x) = ||x+2|-4|$.

7.43. Постройте схематический график четной функции $y = f(x)$, которая имеет минимум в точке $x_1 = 2$ и максимум в точке $x_2 = 4$. Найдите число точек экстремумов этой функции.

7.44. Постройте схематический график нечетной функции $y=f(x)$, которая имеет минимум в точке $x_1 = 1$ и максимум в точке $x_2 = 3$. Найдите число точек экстремумов этой функции.

ПОВТОРИТЕ

7.45. Найдите наибольший корень уравнения $\frac{x+11}{x} + \frac{11}{x^2} = -\frac{1}{x}$.

7.46. Упростите выражение $\left(\frac{7-x}{5x+x^2} - \frac{x+6}{5x-x^2}\right)\left(\frac{20x+23x^2-x^3}{23x-5} - x\right)$.

7.47. Найдите значение суммы целых чисел, удовлетворяющих неравенству $\frac{20+x-x^2}{-40+13x-x^2} \leqslant 0$.

7.48. Найдите значение тригонометрического выражения:

1) $\cos 60^\circ - \sin 225^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ - \cos^2 300^\circ$;

2) $\sin^2 160^\circ + \cos^2 160^\circ - \sin 135^\circ + \operatorname{tg} 240^\circ - \sin^2 300^\circ$.

7.49. Найдите множество значений функции:

1) $y = 2x^2 - 4|x|$; 2) $y = x^2 - 3|x|$; 3) $y = 2x^2 - |x| + 2$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Линейная функция, квадратичная функция, дробь, целая часть, дробно-рациональное выражение.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§8. ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Вы научитесь устанавливать свойства дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad \neq bc$ и строить ее график.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Дробно-линейная функция, график

Определение. ***Дробно-линейной функцией*** *называется функция вида* $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad \neq bc$.

Докажем, что выражение $\frac{ax+b}{cx+d}$ можно преобразовать к виду $\frac{k}{x+n} + m$.

Доказательство.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}\right)+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+\left(b-\frac{ad}{c}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} =$$

$$= \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Если ввести обозначения $k = \frac{bc-ad}{c^2}$, $n = \frac{d}{c}$, $m = \frac{a}{c}$, то получим $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{k}{x+n} + m$.

Это преобразование означает, что графиком дробно-рациональной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad \neq bc$ является гипербола. Ее можно получить из гиперболы $y = \frac{k}{x}$ с помощью параллельного переноса вдоль оси Ox на $|n|$ единиц и вдоль оси Oy на $|m|$ единиц. Направление параллельного переноса зависит от знаков n и m.

1. Что является графиком функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ при $c = 0$?
2. Что является графиком функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ при $ad = bc$?
3. Как вы думаете, почему в определении дробно-линейной функции исключили случаи $c = 0$ и $ad = bc$?

ПРИМЕР

Значит, функция принимает отрицательные значения для всех x.

Построим график дробно-рациональной функции $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Преобразуем: $y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$. Тогда график функции $y = \frac{2x+1}{x-1}$ можно получить из графика $y = \frac{3}{x}$ с помощью параллельного переноса вдоль оси Ox на 1 единицу вправо и на 2 единицы вверх вдоль оси Oy (рис. 8.1).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

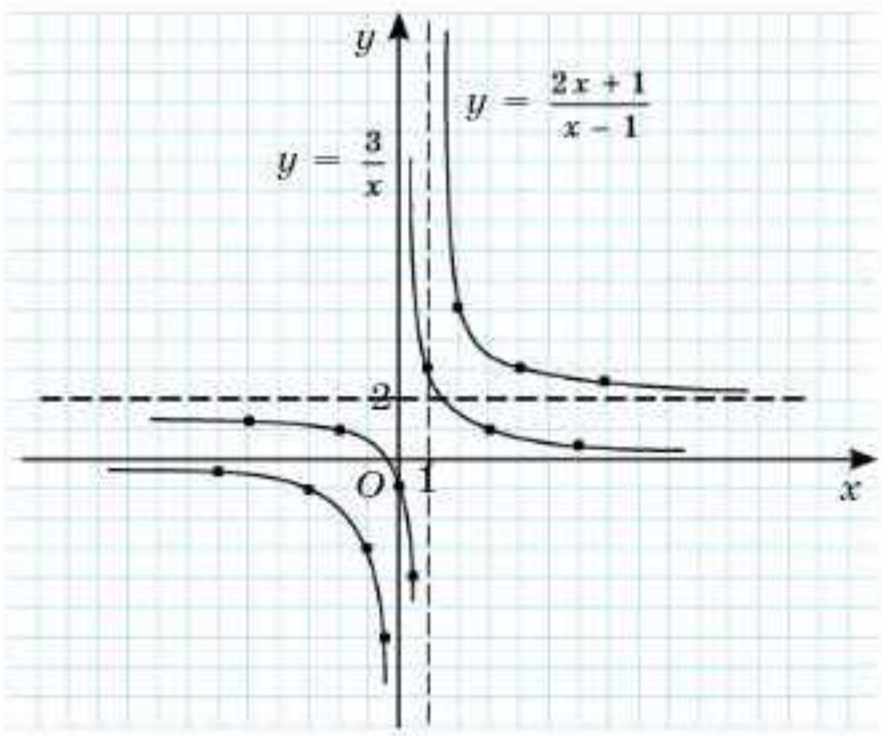


Рис. 8.1

Используя график функции $y = \frac{2x+1}{x-1}$, опишите ее свойства.

1. Как получили формулу дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$?
2. Как вы думаете, почему функцию $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ назвали *дробно-линейной*?

Упражнения

A

8.1. Используя параллельный перенос вдоль оси Ox, постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{x-2}$; 2) $y = -\frac{1}{x-3}$; 3) $y = \frac{1}{x+2}$; 4) $y = -\frac{1}{x+3}$.

8.2. Постройте график функции:

1) $y = -\frac{2}{x-2}$; 2) $y = \frac{2}{x-3}$; 3) $y = -\frac{3}{x+2}$; 4) $y = \frac{0,5}{x+3}$.

8.3. Используя параллельный перенос вдоль оси Oy, постройте график функции:

1) $y = 1 + \frac{1}{x}$; 2) $y = 2 + \frac{1}{x}$; 3) $y = 1 - \frac{1}{x}$; 4) $y = 2 - \frac{1}{x}$.

Постройте график функции (**8.4—8.6**):

8.4. 1) $y = 2 + \frac{3}{x}$; 2) $y = 1 + \frac{2}{x}$; 3) $y = 1 - \frac{2}{x}$; 4) $y = 2 - \frac{1}{2x}$.

8.5. 1) $y = 2 + \frac{1}{x-2}$; 2) $y = 2 + \frac{1}{x-3}$; 3) $y = 1 - \frac{1}{x+2}$; 4) $y = 1 - \frac{1}{x+3}$.

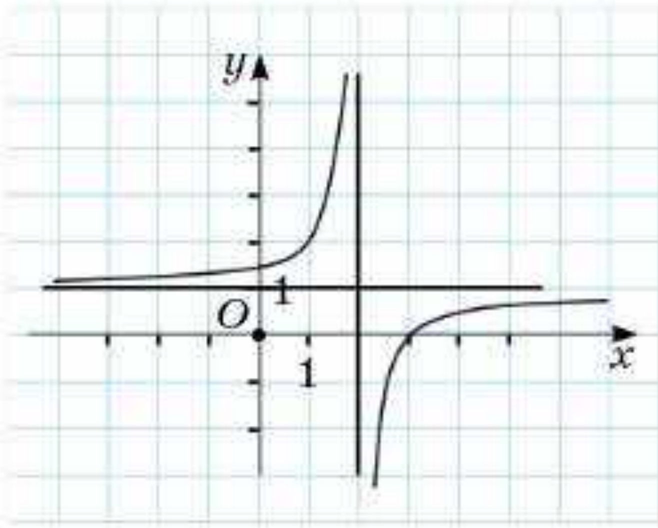
8.6. 1) $y = 1 - \frac{1}{x-2}$; 2) $y = 3 - \frac{2}{x-3}$; 3) $y = 3 - \frac{2}{x+2}$; 4) $y = 3 - \frac{1}{2x+4}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

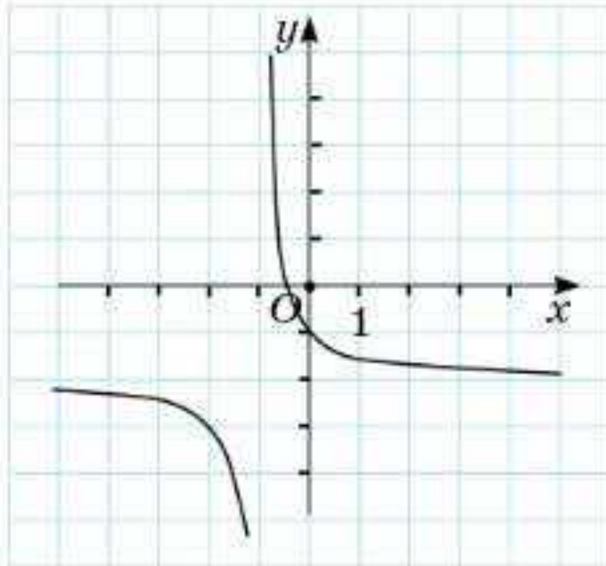
Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

B

8.7. Запишите аналитическую формулу по графику функции $f(x)$ (рис. 8.2):



1)



2)

Рис. 8.2

8.8. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{1}{|x-2|}$; 2) $y=\dfrac{1}{|x-3|}$; 3) $y=\left|\dfrac{1}{x+2}\right|$; 4) $y=\left|\dfrac{1}{2x-3}\right|$.

8.9. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{1}{|2x-1|}$; 2) $y=\dfrac{1}{|2x+3|}$; 3) $y=\left|1+\dfrac{1}{x+2}\right|$; 4) $y=\left|1+\dfrac{1}{2x-3}\right|$.

C

8.10. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{2x}{x-2}$; 2) $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$; 3) $y=\left|\dfrac{4x}{x+2}\right|$; 4) $y=\left|\dfrac{-2x}{2x-3}\right|$.

8.11. На рисунке 8.3 построен график функции $f(x)$. Запишите аналитическую формулу этой функции, если ее график проходит через точку $A(2;\ 1)$.

8.12. Постройте график функции (**8.12—8.14**):

1) $y=\left|\dfrac{2x}{x-2}\right|$; 2) $y=\left|\dfrac{3x-1}{x-1}\right|$;

3) $y=\left|\dfrac{4x+2}{x+2}\right|$; 4) $y=\left|\dfrac{2x-1}{2x-3}\right|$.

8.13. 1) $y=\left|\dfrac{2x+5}{2x-2}\right|$; 2) $y=\left|\dfrac{4x-1}{2x-1}\right|$;

3) $y=\left|\dfrac{4x-3}{2x+1}\right|$; 4) $y=\left|\dfrac{2x-5}{2x+3}\right|$.

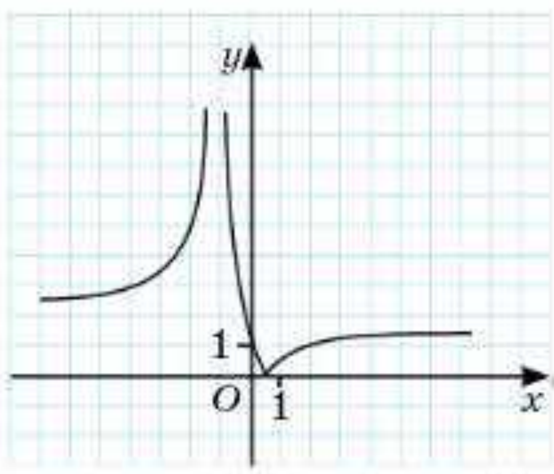


Рис. 8.3

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

8.14. 1) $y=\left|\frac{1-2x}{2x-2}\right|$; 2) $y=\left|\frac{4x+1}{1-2x}\right|$; 3) $y=\left|\frac{3-4x}{2x+1}\right|$; 4) $y=\left|\frac{2x-5}{3-2x}\right|$.

ПОВТОРИТЕ

8.15. Упростите выражение:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha$; 2) $\frac{1}{2}\cos\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

3) $\sqrt{2}\sin\alpha-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$.

8.16. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{\cos^2\frac{3\pi}{8}}{1-\sin^2\frac{3\pi}{8}}$; 2) $\dfrac{6\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{12}}-1$; 3) $4\sin15^\circ\cos15^\circ$;

4) $8\sin15^\circ\cos15^\circ\cos30^\circ$; 5) $\cos^2 15^\circ-\cos^2 75^\circ$; 6) $\sin^2 15^\circ-\sin^2 75^\circ$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, график функции, область определения, множество значений, нули функции, периодичность, промежутки монотонности, промежутки знакопостоянства, наибольшее и наименьшее значения функции, четность, нечетность, ограниченность, экстремумы.

§9. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

Вы ознакомитесь с алгоритмом исследования функции для построения графика;
научитесь описывать по заданному графику функции ее свойства:
1) область определения;
2) область (множество) значений;
3) нули функции;
4) периодичность;
5) промежутки монотонности;
6) промежутки знакопостоянства;
7) наибольшее и наименьшее значения функции;
8) четность, нечетность;
9) ограниченность;
10) экстремумы.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Область определения, область (множество) значений, нули функции, периодичность, монотонность, ограниченность, промежутки знакопостоянства, наибольшее и наименьшее значения функции. четность, нечетность, непрерывность, экстремумы

ВЫ ЗНАЕТЕ: *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному равенству.

Чтобы точнее построить график функции, надо как можно больше построить точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y = f(x)$. Такой способ построения графиков, во-первых, требует больших затрат времени, во-вторых, все точки графика таким способом

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

построить невозможно и в результате может оказаться, что график построен неправильно. Чтобы точнее построить график функции, проводят ее исследование.

АЛГОРИТМ Исследование функции для построения графика можно провести, используя план:

1) Найти область определения $D(f)$ и область значений $E(f)$ функции f;
2) выяснить, является ли функция четной или нечетной; периодической;
3) вычислить координаты точек пересечения графика функции с осями координат;
4) найти промежутки знакопостоянства функции;
5) найти промежутки монотонности (возрастания и убывания) функции;
6) найти точки экстремума (максимума и минимума) функции и вычислить в них значения функции;
7) найти наибольшее и наименьшее значения функции;
8) выяснить, является ли функция ограниченной;
9) если у функции есть точки, не входящие в ее область определения, то надо исследовать поведение функции в их окрестностях для того, чтобы понять, куда стремится значение функции при устремлении значения аргумента к этой точке.

Этот план примерный — не все пункты целесообразно выполнять (если, например, не удается решить уравнение аналитически и т. п.).

ПРИМЕР Исследуем функцию $y = \frac{2}{|0,5x+2,5|} - 3$ и построим ее график.

Решение. Сначала упростим выражение $\frac{2}{|0,5x+2,5|} - 3$. В знаменателе вынесем 0,5 за скобки и за знак модуля. Получим выражение $\frac{2}{0,5|x+5|} - 3$. Сократим числитель и знаменатель дроби на 0,5. Получим выражение $\frac{4}{|x+5|} - 3$. Тогда функция примет вид $y = \frac{4}{|x+5|} - 3$.

1. Найдем область определения $D(y)$ и область значений $E(y)$ функции y.

Поскольку область определения функции не указана, то она совпадает с областью определения выражения $\frac{4}{|x+5|} - 3$.

Дробь имеет смысл тогда и только тогда, когда ее знаменатель не равен нулю, поэтому $D(y) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

Поскольку $\frac{4}{|x+5|} > 0$, то $\frac{4}{|x+5|} - 3 > -3$. Значит, $E(y) = (-3; +\infty)$.

2. Выясним, является ли функция четной или нечетной; периодической.

Поскольку область определения функции $D(y) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$ не симметрична относительно нуля, то функция $y = \frac{4}{|x+5|} - 3$ является ни четной, ни нечетной (общего вида).

Функция также не является периодической.

Так как числа $T \neq 0$, чтобы равенство $\frac{4}{|x+T+5|} - 3 = \frac{4}{|x+5|} - 3$ выполнялось для всех x из области определения, не существует.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Действительно, решим уравнение $\frac{4}{|x+T+5|} - 3 = \frac{4}{|x+5|} - 3$ относительно T. Получим $\frac{4}{|x+T+5|} = \frac{4}{|x+5|}$, или $|x + T + 5| = |x + 5|$. Это равенство верно для всех x только при $T = 0$.

3. Вычислим координаты пересечения графика функции с осями координат.

Если $y = 0$, то $\frac{4}{|x+5|} - 3 = 0$, или $|x + 5| = 1\frac{1}{3}$. Тогда $x_1 = -3\frac{2}{3}$ и $x_2 = -6\frac{1}{3}$. Значит, функция имеет два нуля (корня), а ее график пересекает ось Ox в двух точках: $A(-3\frac{2}{3};\ 0)$ и $B(-6\frac{1}{3};\ 0)$.

Найдем $f(0) = \frac{4}{|0+5|} - 3 = 0{,}8 - 3 = -2{,}2$. Значит, график пересекает ось Oy в точке $C\ (0;\ -2{,}2)$.

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции.

Найдем все значения x, при которых $f(x) > 0$. Для этого решим неравенство $\frac{4}{|x+5|} - 3 > 0$.

При $x > -5$ неравенство $\frac{4}{|x+5|} - 3 > 0$ примет вид: $\frac{4}{x+5} - 3 > 0$, или $\frac{4-3x-15}{x+5} > 0$. Упростив числитель, получим неравенство $\frac{-3x-11}{x+5} > 0$, решением которого является числовой интервал $(-5;\ -3\frac{2}{3})$ (рис. 9.1).

При $x < -5$ неравенство $\frac{4}{|x+5|} - 3 > 0$ примет вид: $\frac{4}{-x-5} - 3 > 0$ или $\frac{4+3x+15}{x+5} < 0$. Упростив числитель, получим неравенство $\frac{3x+19}{x+5} < 0$, решением которого является числовой интервал $(-6\frac{1}{3};\ -5)$ (рис.9.2).

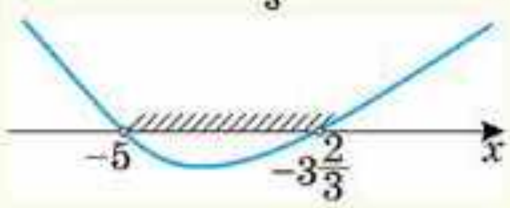


Рис. 9.1

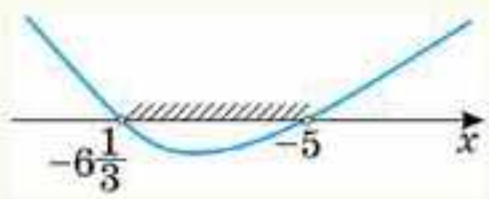


Рис. 9.2

Таким образом, $f(x) > 0$ для всех x из множества $(-6\frac{1}{3};\ -5) \cup (-5;\ -3\frac{2}{3})$.

Аналогично найдем все значения x, при которых $f(x) < 0$. Для этого решим неравенство $\frac{4}{|x+5|} - 3 < 0$.

Убедитесь, что решением неравенства $\frac{4}{|x+5|} - 3 < 0$ является множество $(-\infty;\ -6\frac{1}{3}) \cup$ $\cup\ (-3\frac{2}{3};\ +\infty)$.

Значит, функция принимает отрицательные значения для всех x из множества $(-\infty;\ -6\frac{1}{3}) \cup (-3\frac{2}{3};\ +\infty)$.

5. Найдем промежутки возрастания и убывания функции.

Пусть $x_1 < x_2 < -5$. Сравним $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Для этого рассмотрим разность $f(x_1) - f(x_2)$.

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{4}{-x_1-5} - 3 - \frac{4}{-x_2-5} + 3 = -\frac{4}{x_1+5} + \frac{4}{x_2+5} = \frac{-4(x_2-x_1)}{(x_1+5)(x_2+5)} < 0.$$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Значит, $f(x_1) < f(x_2)$ и для всех x из множества $(-\infty; -5)$ функция возрастающая.

Пусть $-5 < x_1 < x_2$. Сравним $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Для этого рассмотрим разность $f(x_1) - f(x_2)$.

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{4}{x_1+5} - 3 - \frac{4}{x_2+5} + 3 = \frac{4(x_2 - x_1)}{(x_1+5)(x_2+5)} > 0.$$

Значит, $f(x_1) > f(x_2)$ и для всех x из множества $(-5; +\infty)$ функция убывающая.

6. Найдем точки экстремума (максимума и минимума) функции и вычислим в них значения функции.

Функция не имеет экстремумов.

7. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции.

Функция не имеет ни наибольшего значения, ни наименьшего значения.

8. Выясним, является ли функция ограниченной.

Поскольку $E(f) = (-3; +\infty)$, то существует такое число $M = -3$, что для всех значений x верно неравенство $f(x) \geq -3$. Это означает, что функция $f(x)$ ограничена снизу.

9. Поскольку число (-5) не входит в область определения функции $y = \frac{4}{|x+5|} - 3$, то при устремлении значения аргумента к числу (-5) знаменатель $|x+5|$ уменьшается — стремится к 0, а значение дроби $\frac{4}{|x+5|}$ увеличивается, поэтому значение функции стремится к плюс бесконечности $(+\infty)$.

Для более точного построения графика кроме найденных построим еще несколько точек.

Таблица 9

x	-10	-9	-1	-6	-4	$-5{,}5$	$-4{,}5$
y	$-2{,}2$	-2	-2	1	1	5	5

Используя эти данные, построим график функции $y = \frac{4}{|x+5|} - 3$ (рис. 9.3).

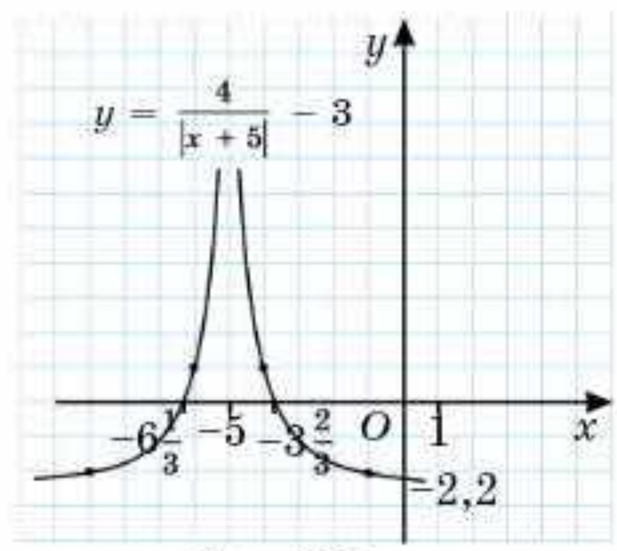


Рис. 9.3

1. Как найти область определения и множество значений функции, заданной: 1) аналитически (по формуле); 2) графически? Приведите пример.
2. Как установить промежутки знакопостоянства и монотонности функции, заданной: 1) аналитически (по формуле); 2) графически?
3. Каким свойством обладает функция, если ее график расположен симметрично относительно начала координат?
4. Приведите примеры известных вам функций, которые имеют: 1) наименьшее (наибольшее) значение; 2) максимум (минимум).

Упражнения

А

9.1. Исследуйте на четность функцию $y = f(x)$:

1) $f(x) = (1 - 2x)^3 + (1 + 2x)^3$;

2) $f(x) = (3x - 2)^4 - (3x + 2)^4$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3) $f(x) = |2x - 1|(x + 2) + |2x + 1|(x - 2)$;
4) $f(x) = |x - 1|(x + 3) - |x + 1|(x - 3)$.

9.2. Найдите область определения и множество значений функции:

1) $f(x) = |x - 1| \cdot \frac{1}{x-1}$; 2) $f(x) = |x + 2| \cdot \frac{1}{2+x}$;
3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$; 4) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}-1}$.

9.3. Докажите, что функция:
1) $f(x) = 3x - 5$ возрастает на R;
2) $f(x) = 4 - 2x$ убывает на R;
3) $f(x) = 3x^2 - 5$ возрастает на $[0; +\infty)$;
4) $f(x) = 1 - x^2$ убывает на $[0; +\infty)$.

9.4. Используя определение возрастания и убывания функции на множестве, докажите, что функция:

1) $y = \frac{3}{x-2}$ убывает на множестве $(-\infty; 2)$;

2) $y = \frac{1}{x+3}$ возрастает на множестве $(-3; +\infty)$;

3) $y = \frac{2x}{x-1}$ убывает на множестве $(-\infty; 1)$;

4) $y = \frac{3x}{3-x}$ возрастает на множестве $(3; +\infty)$.

Постройте график этой функции.

9.5. Найдите наибольшее значение функции и значение аргумента, при котором оно достигается:

1) $y = 3 - |x + 5|$; 2) $y = 4 - |x - 2|$;
3) $y = 3 - \sqrt{x - 2}$; 4) $y = 1 - \sqrt{x+1}$.

9.6. По графику функции (рис. 9.4) найдите промежутки ее возрастания и убывания, точки экстремума и экстремумы, наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-5; 5]$.

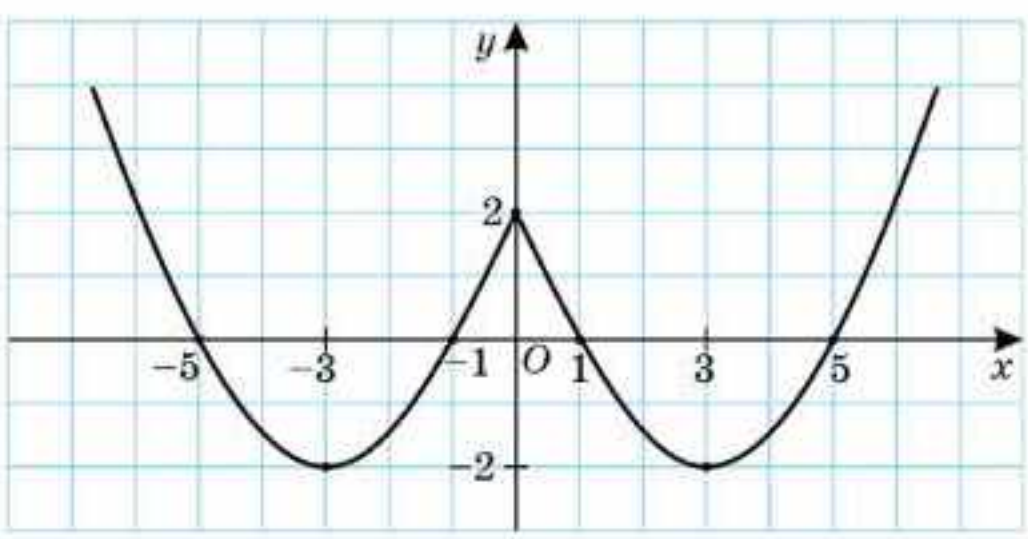


Рис. 9.4

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

9.7. Найдите наименьшее значение функции и значение аргумента, при котором достигается это наименьшее значение функции:
1) $y = 3 + \sqrt{x+2}$;   2) $y = \sqrt{x^2 - 1} - 2$;   3) $y = 3 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

B

9.8. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции:
1) $y = x^2 - 5x + 2$ на промежутке $[1; 4]$;
2) $y = -x^2 + 2x + 1$ на промежутке $[-1; 5]$;
3) $y = 2x^2 + 4x - 3$ на промежутке $[-3; 1]$.

9.9. По алгоритму исследуйте функцию и постройте ее график:
1) $y = -x^2 + 3x + 2$;   2) $y = 3x^2 + 6x - 4$;   3) $y = 2 + \frac{2}{x-1}$;
4) $y = 3 - \frac{2}{x-1}$;   5) $y = -3 + \frac{1}{x+2}$;   6) $y = -2 - \frac{2}{2x-5}$.

9.10. Начертите схематический график функции $y = f(x)$, если:
1) $y = f(x)$ возрастает на числовых промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; 4]$ и убывает на числовых промежутках $[-1; 1]$ и $[4; +\infty)$;
2) $y = f(x)$ возрастает на числовых промежутках $(-\infty; 2]$ и $[4; 6]$ и убывает на числовых промежутках $[2; 4]$ и $[6; +\infty)$;
3) $y = f(x)$ убывает на числовых промежутках $(-\infty; 1]$ и $[2; 5]$ и возрастает на числовых промежутках $[1; 2]$ и $[5; +\infty)$;
4) $y = f(x)$ убывает на числовых промежутках $(-\infty; -2]$ и $[3; 6]$ и возрастает на числовых промежутках $[-2; 3]$ и $[6; +\infty)$.

9.11. Начертите схематический график функции $y = f(x)$, если функция имеет:
1) $x_{min} = -3$, $x_{max} = 2$, $f(-3) = -2$, $f(2) = 5$ и $f(-1) = 0$;
2) $x_{min} = -4$, $x_{max} = 3$, $f(-4) = -4$, $f(3) = 6$ и $f(-2) = 0$;
3) $x_{min} = -2$, $x_{max} = 4$, $f(-2) = -5$, $f(4) = 7$ и $f(1) = 1$;
4) $x_{min} = -3{,}5$, $x_{max} = 5$, $f(-3{,}5) = -6$, $f(5) = 6$ и $f(-1) = 0$, $f(2) = 3$.

C

9.12. Начертите эскиз графика функции $y = f(x)$, если функция:
1) $y = f(x)$ — четная, $x_{min} = 1$, $x_{max} = -3$, $f(-3) = 6$, $f(1) = -2$;
2) $y = f(x)$ — нечетная, $x_{min} = -3$, $x_{max} = -1$, $f(-3) = -2$, $f(-1) = 3$.

9.13. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки максимума и точки минимума функции и ее экстремумы:
1) $y = (x + 1)^4 + 1$;   2) $y = 2 - (x - 1)^4$;   3) $y = (x + 1)^3 - 2$.

9.14. Даны функции $f(x) = x^2 - 2$ и $g(x) = \frac{1}{x+2}$. Напишите формулу функции:
1) $y = f(2x)$;   2) $y = g(x^2)$;   3) $y = g(3x)$;   4) $y = f(x - 2)$.

9.15. Докажите, что функция:
1) $f(x) = x^4 + 4x$ возрастает на множестве $[0; +\infty)$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

2) $f(x) = -x^3 - 3x$ убывает на множестве $(-\infty; +\infty)$;
3) $f(x) = x^5 + 2x$ возрастает на множестве R.

ПОВТОРИТЕ

9.16. Упростите выражение:

1) $\dfrac{(1-\cos(2\pi-\alpha))\cdot(1+\cos(2\pi+\alpha))}{\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{(1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin(2\pi+\alpha))}{\cos(\pi-\alpha)}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$; 4) $\dfrac{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)\cdot\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

9.17. В какой координатной четверти может находиться угол α, если:
1) $|\sin\alpha| > \sin\alpha$; 2) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$; 3) $|\cos\alpha| > \cos\alpha$;
4) $|\operatorname{tg}\alpha| > \operatorname{tg}\alpha$; 5) $|\operatorname{ctg}\alpha| = \operatorname{ctg}\alpha$; 6) $|\operatorname{ctg}\alpha| < \operatorname{ctg}\alpha$?

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, аргумент, преобразования, график функции.

§ 10. СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Вы ознакомитесь с понятиями *сложная функция* $f(g(x))$, *обратная функция*;
научитесь распознавать и составлять композицию функций; находить функцию, обратную заданной, и узнаете свойство расположения графиков взаимно-обратных функций.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Сложная функция, композиция функций, обратная функция, взаимно-обратные функции

Рассмотрим функцию $y = f(u)$. Составим новую функцию так, чтобы ее аргументом была другая функция $u = g(x)$.

ПРИМЕР **1.** Пусть $f(u) = u^2$, $u = kx + b$; $u = ax^2 + bx + c$; $u = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Тогда новые функции, полученные из функции $y = f(u)$, у которой аргумент другая функция $u = g(x)$, будут выглядеть так: $f(x) = (kx + b)^2$; $f(x) = (ax^2 + bx + c)^2$; $f(x) = \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^2$.

ОБЪЯСНИТЕ

Как из функций $f(u) = \sqrt{u}$ и $u = kx + b$; $u = ax^2 + bx + c$; $u = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ получили новые функции: $f(x) = \sqrt{kx+b}$; $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$; $f(x) = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$?

Определение. ***Сложной функцией*** *от x называется функция $y = f(g(x))$, где в функции $y = f(x)$ вместо аргумента x используется другая функция $\phi = g(x)$.*

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Сложная функция $y = f(g(x))$ определена для тех значений независимой переменной x, для которых значения функции $\varphi = g(x)$ входят в область определения функции $y = f(x)$.

ПРИМЕР **2.** $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$ — сложная функция. Она получена из функции $f(u) = \sqrt{u}$, при замене аргумента на $u = \frac{2x+1}{x-1}$.

$\frac{2x+1}{x-1} \geqslant 0$, так как область определения функции $f(x) = \sqrt{x}$ состоит из неотрицательных чисел. Тогда область определения функции $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$ есть множество $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup (1; +\infty)$.

Сложную функцию можно составить из нескольких функций.

ВЫ ЗНАЕТЕ: *Числовой функцией с областью определения D* называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу единственное число y, зависящее от x.

В обратном соответствии, наоборот, каждому числу y сопоставляется число x.

ПРИМЕР **3.** Если числу 2 соответствует число 4, то в обратном соответствии числу 4 соответствует число 2.

Если из равенства $y = f(x)$ выразить x через y, то получим зависимость x от y. Обозначим ее $x = \varphi(y)$. Говорят, что $x = \varphi(y)$ — есть функция, обратная функции $y = f(x)$. Поскольку функцию принято обозначать буквой y, а аргумент буквой x, то обратная функция запишется как $y = \varphi(x)$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D, а E — множество ее значений. Обратная функция по отношению к функции $y = f(x)$— это функция $x = g(y)$, которая определена на множестве E и каждому $y \in E$ ставит в соответствие такое значение $x \in D$, что $f(x) = y$.

Как связаны область определения и множество значений данной функции и ей обратной функции?

АЛГОРИТМ Алгоритм составления обратной функции:

1) Выразить x через y из формулы $y = f(x)$;

2) в полученном равенстве $x = \varphi(y)$ зависимую переменную обозначить буквой y, аргумент — буквой x.

ПРИМЕР **4.** Для функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, составим обратную функцию. Согласно алгоритму:

1) выразим x через y. Получим $x = \sqrt{y}$.

2) В полученном равенстве $x = \sqrt{y}$ зависимую переменную обозначим буквой y, аргумент — буквой x. Получим $y = \sqrt{x}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

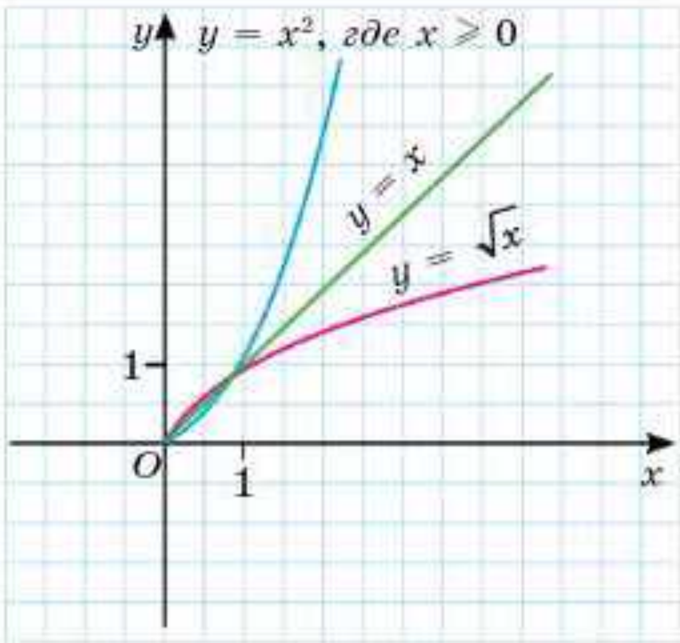


Рис. 10.1

Для каждой ли функции можно составить обратную функцию?

Если $y = \varphi(x)$ — функция, обратная функции $y = f(x)$, то говорят, что функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ взаимно-обратные.

Как расположены графики взаимно-обратных функций, рассмотрим на примере функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, и ей обратной функции $y = \sqrt{x}$.

Графики взаимно-обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$.

Какими (возрастающими или убывающими) являются графики взаимно-обратных функций $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, и $y = \sqrt{x}$?

Постройте график функции $y = 4 - 2x$ и график обратной для нее функции. Являются ли эти функции убывающими?

Если $y = f(x)$ возрастает на промежутке, то и обратная к ней функция также возрастает на этом промежутке; если $y = f(x)$ убывает, то и обратная функция убывает.

Графики взаимно-обратных функций расположены симметрично относительно биссектрисы 1 и 3 координатных четвертей.

1. Назовите область определения и множество значений функции, которая обратна функции с областью определения $(-\infty\ 5] \cup (6; +\infty)$ и множеством значений $(-\infty\ +\infty)$.
2. Являются ли функции $y = 0{,}5x + 2$ и $y = 2x - 4$ взаимно-обратными?
3. Имеет ли функция обратную функцию, если она не является монотонной (рис. 10.2)?
4. Почему для монотонной функции всегда есть обратная функция?

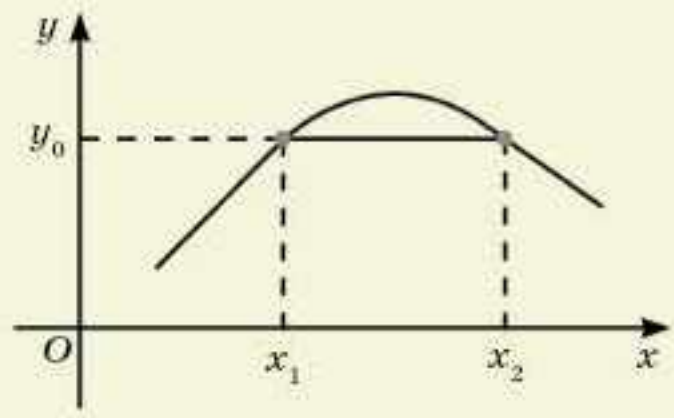


Рис. 10.2

Упражнения

A

10.1. К заданной функции $f(x)$ найдите обратную функцию и постройте их графики в одной координатной плоскости:

1) $y = 3x - 7$; 2) $y = 2 - 3x$; 3) $y = 2x + 1$; 4) $y = 3 - 2x$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

10.2. Составьте сложные функции $f(3x)$, $f(2x-1)$, $f(2x^2-1)$, если:
1) $f(x) = x - 1$; 2) $f(x) = 3 - 2x^2$; 3) $f(x) = 3x - x^2$.

10.3. Дано равенство $y = \frac{x^2}{1+x^2}$. Выразите из этого равенства x через y, если:
1) $x \geqslant 0$; 2) $x \leqslant 0$.

10.4. Для функции, заданной табличным способом, запишите ее область определения и выясните, имеет ли эта функция в своей области определения обратную функцию (табл. 10.1, 10.2). Если да, то постройте график обратной функции.

Таблица 10.1

x	1	2	3	5	8	9
y	3	4	5	7	10	11

Таблица 10.2

x	1	2	3	5	8	9
y	4	5	6	7	5	7

10.5. Являются ли функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ взаимно-обратными, если:

1) $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$; 2) $f(x) = \frac{3}{5} - 6x$, $g(x) = 0{,}1 - \frac{1}{6}x$;

3) $f(x) = \frac{1}{7}x - 3$, $g(x) = 7x + 3$?

10.6. Найдите функцию, обратную данной. Постройте на одном чертеже графики этих взаимно-обратных функций:

1) $y = 5x + 2$; 2) $y = \frac{1}{3}x - 4$; 3) $y = \frac{3}{x-1}$; 4) $y = \frac{2}{x+4}$.

B

10.7. Составьте сложные функции $f(g(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$, если:

1) $f(x) = x-1$, $g(x) = \sqrt{3x-2}$; 2) $f(x) = 3-2x^3$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$;

3) $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+2}$; 4) $f(x) = \sqrt{x^3-2x}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$;

5) $f(x) = \sin 3x + 5x$, $g(x) = x^2-1$; 6) $f(x) = \cos 5x - 6$, $g(x) = \mathrm{tg}\, 7x$.

10.8. Является ли данная функция обратной по отношению к самой себе:
1) $y = x$; 2) $y = -x$; 3) $y = 2x$; 4) $y = 1 - x$?

10.9. Совпадает ли график функции с графиком данной обратной функции:

1) $y = \frac{7}{x}$; 2) $y = -\frac{5}{x}$; 3) $y = \frac{7}{x-2}$; 4) $y = 5 - \frac{8}{x}$?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

10.10. Может ли функция иметь обратную, если она:
1) линейная; 2) квадратичная; 3) дробно-линейная; 4) функция вида $y = \sqrt{x+a}$?

10.11. Рассмотрите график функции, представленный на рисунке 10.3. Запишите несколько промежутков, на которых данная функция имеет обратную функцию и несколько промежутков, на которых она не имеет обратной функции.

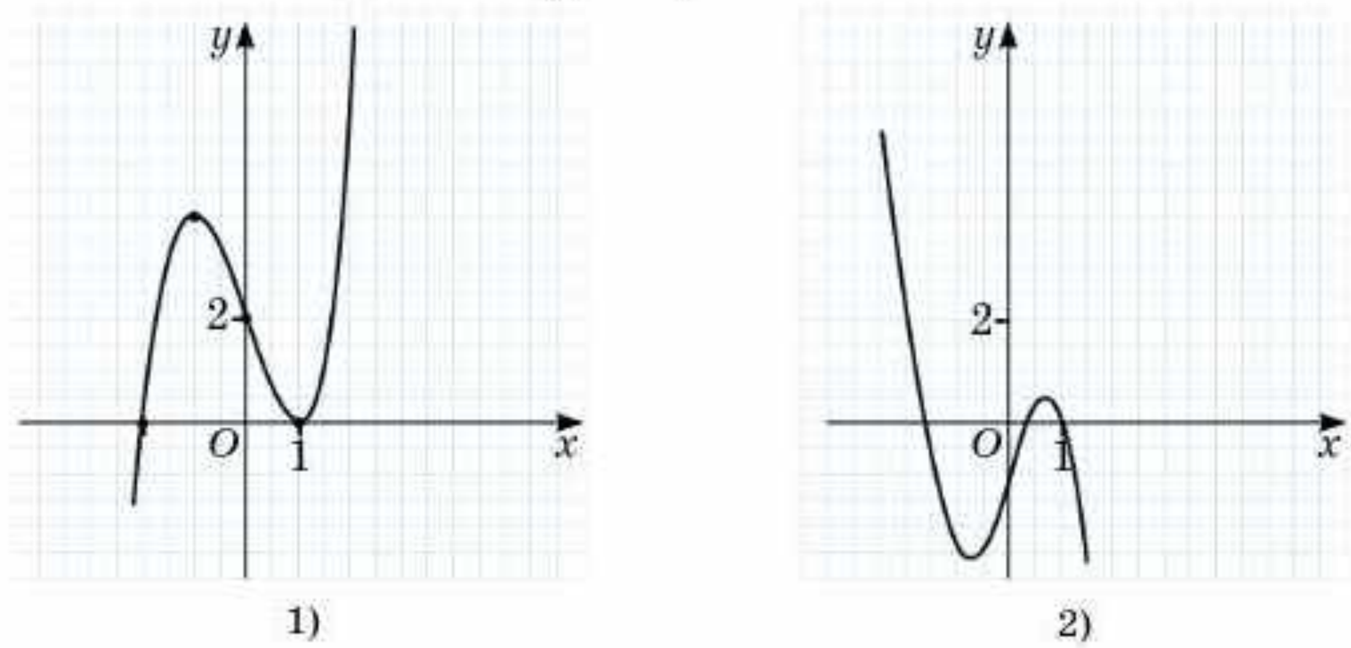


Рис. 10.3

C

10.12. Может ли функция иметь обратную, если она:
1) четная; 2) нечетная;
3) периодическая; 4) убывающая?

10.13. Постройте график функции $y = f(g(x))$, если:
1) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$;
2) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{-x}$.

10.14. Для функции найдите обратную функцию и постройте их графики в одной координатной плоскости:
1) $y = x^2 + 1$ при $x \geqslant 0$; 2) $y = (x + 1)^2$ при $x \leqslant -1$;
3) $y = x^2 - 2x + 1$ при $x \geqslant 1$; 4) $y = x^2 - 4x + 4$ при $x \leqslant 2$.

10.15. Для функции найдите обратную функцию и постройте их графики в одной координатной плоскости:
1) $y = x^2 - 2x$ при $x \geqslant 1$; 2) $y = x^2 + 2x$ при $x \leqslant -1$;
3) $y = x^2 - 3x$ при $x \leqslant 1,5$; 4) $y = 2 + \sqrt{x-2}$ при $x \geqslant 2$.

ПОВТОРИТЕ

10.16. Докажите тождество:
1) $\operatorname{ctg}\alpha - \cos 2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \sin 2\alpha$; 2) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} = 1$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3) $\operatorname{tg}^4\alpha \cdot (8\cos^2(\pi - \alpha)) - \cos(\pi + 4\alpha) - 1) = 8\sin^4\alpha$;

4) $\operatorname{ctg}2\alpha - \sin4\alpha = \cos4\alpha \cdot \operatorname{ctg}2\alpha$.

10.17. Найдите значение выражения:

1) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}$ и $\alpha - \beta = \frac{7\pi}{2}$;

2) $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{4}$; $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{2}$;

3) $\sqrt{2}\cos(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{3}$; $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, свойства и график функции, определение тригонометрической функции $y = \sin x$, область определения и область значений функции $y = \sin x$, таблица значений тригонометрических функций, тригонометрические тождества.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Сколько точек экстремума имеет функция, график которой изображен на рисунке 10.4:

A) 3; B) 4; C) 2; D) 1?

2. Найдите экстремумы функции, график которой изображен на рисунке 10.4:

A) $y_{max} = 1$, $y_{min} = 3$; B) $y_{max} = 3$, $y_{min} = -1$;

C) $y_{max} = 1$, $y_{min} = -1$ и $y_{min} = 3$; D) $y_{max} = 1$, $y_{min} = 3$.

3. Найдите промежутки возрастания функции, график которой изображен на рисунке 10.4:

A) $[-1; 1]$, $[3; +\infty)$;

B) $[-1; 0]$, $[3; +\infty)$;

C) $(-\infty; -1]$, $[0; 3]$;

D) $(-\infty; -1]$, $[1; 3]$.

4. Найдите промежутки убывания функции, график которой изображен на рисунке 10.4:

A) $[-5; -3]$, $[-1; 1]$, $[3; 5]$;

B) $[-1; 0]$, $[3; +\infty)$;

C) $(-\infty; -1]$, $[0; 3]$.

D) $(-\infty; -1]$, $[1; 3]$.

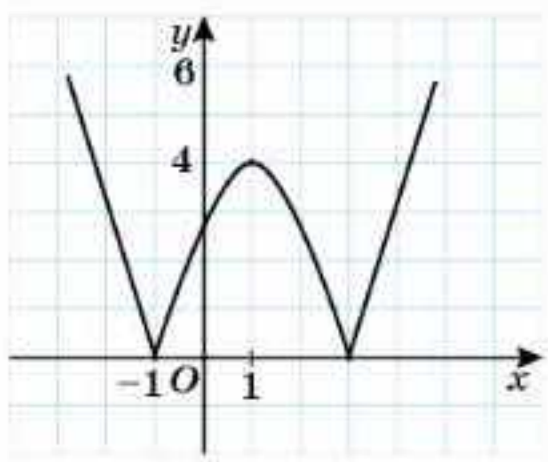


Рис. 10.4

5. Составьте сложную функцию $f(g(x))$, если $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = 2x - 3$:

A) $f(g(x)) = (2x - 3)^2 - 3(2x - 3)$;

B) $f(g(x)) = (2x - 3)^2 + 3(2x - 3)$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

C) $f(g(x)) = (2x - 3)^2 - (2x - 3)$;
D) $f(g(x)) = (2x - 3)^2 + (2x - 3)$.

6. Найдите четную функцию:

A) $f(x) = 3x^8 - 2x$; B) $f(x) = 2 - x\sqrt{x}$;
C) $f(x) = x^4 + x^2 + x$; D) $f(x) = x^6 + 2x^4$.

7. Найдите функцию общего вида:

A) $f(x) = x^7 - 5x^3 + x$;
B) $f(x) = x^3 - 4x^5 + x$;
C) $f(x) = x^6 - 5x^3 + \dfrac{1}{x-1}$;
D) $f(x) = x^4 - 2x^2 + \sqrt{|x|}$.

8. Если график функции $y = -\sqrt{x}$ сместить влево вдоль оси Ox на 3 единицы и вверх вдоль оси Oy на 3 единицы, то получим график функции:

A) $y = -\sqrt{x-3} - 3$;
B) $y = \sqrt{x-3} + 3$;
C) $y = 3 - \sqrt{x+3}$;
D) $y = \sqrt{x+3} - 3$.

9. Сколько видов преобразований нужно применить к графику функции $y = x^2$, чтобы построить график функции $f(x) = 2(x-1)^2 - 2$:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5?

10. Областью определения функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \dfrac{2}{x-1} + \sqrt{x+3}$ является:

A) $(1; 3)$; B) $(-3; 3)$; C) $[-3; 3)$; D) $(-3; 1)\cup(1; 3)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

2 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

§11. ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = \sin x$ И ЕЕ СВОЙСТВА

Вы ознакомитесь с понятием *синусоида*, свойствами функции $y = \sin x$;
научитесь строить синусоиду.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Функция, график, синусоида, синус, периодичность

ВЫ ЗНАЕТЕ: *Синусом угла* α называется ордината точки P_α единичной окружности.

Зависимость синуса от величины угла α называется *тригонометрической функцией*, которая обозначается так: $y = \sin x$.

Областью определения функции $y = \sin x$ является числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$. Функция $y = \sin x$ периодическая, ее период равен 2π.

Чтобы построить график функции $y = \sin x$, сначала построим его часть на отрезке $[0; 2\pi]$. Для этого отметим на оси абсцисс точку с абсциссой 2π ($\pi \approx 3,14$) и воспользуемся определением синуса. Слева от оси Oy изобразим единичную окружность, центр которой находится на оси Ox, и на оси ординат отметим точки $(0; -1)$ и $(0;1)$. Разделим единичную окружность и отрезок $[0,2\pi]$ на 16 равных частей (рис. 11.1).

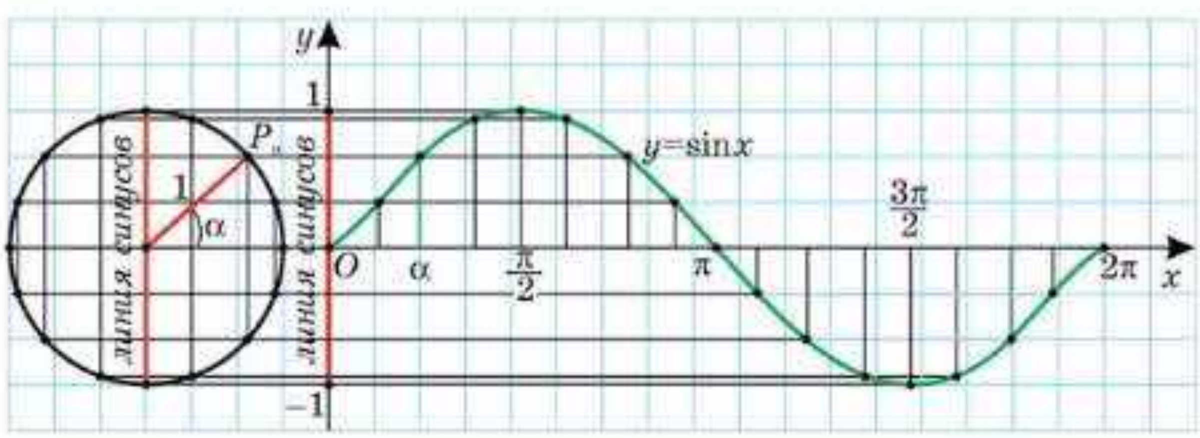


Рис. 11.1

Отметим точку P_α на единичной окружности и проведем через нее прямую, параллельную оси абсцисс. Точка пересечения этой прямой с прямой $x = \alpha$ и есть искомая точка графика функции $y = \sin x$. Ее ордината совпадает с ординатой точки P_α, а $\sin\alpha$ по определению и есть ордината точки P_α.

Чтобы построить график функции $y = \sin x$ на всей числовой прямой, переместим (сдвинем, перенесем параллельно) его часть, построенную на отрезке $[0; 2\pi]$, вдоль оси Ox на 2π, 4π, 6π, и т. д. $2\pi n$, где n — целое число.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой* (рис. 11.2).

Функция $y = \sin x$ обладает свойствами:

1. Областью определения является числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$.
2. Областью значений является числовой промежуток $[-1; 1]$.
3. Функция $y = \sin x$ ограниченная: $|\sin x| \leqslant 1$.
4. Функция $y = \sin x$ периодическая, ее наименьший положительный период равен 2π.

$\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, где n — целое число.

5. Функция $y = \sin x$ является *нечетной* функцией: $\sin(-x) = -\sin x$, ее график симметричен относительно начала координат.
6. Функция $y = \sin x$ принимает положительные значения на промежутках $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ и отрицательные значения — на промежутках $(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, где k — целое число.

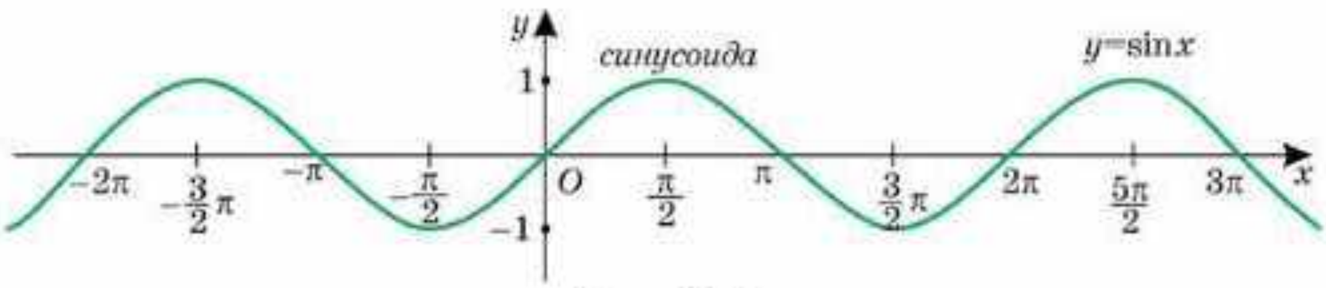


Рис. 11.2

7. Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ и убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, где k — целое число.

Доказательство.

Докажем, что функция $y = \sin x$ возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, k — целое число. Поскольку функция $y = \sin x$ периодическая, то доказательство достаточно провести для отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Пусть $x_2 > x_1$. Применим формулу разности синусов и найдем: $\sin(x_2) - \sin(x_1) = 2\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\sin\frac{x_2 - x_1}{2}$. Из неравенства $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ следует, что $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2 + x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$ и $\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$.

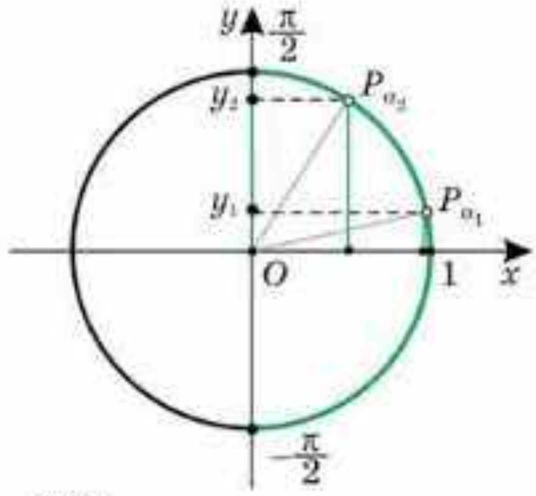
Следовательно, $\sin(x_2) - \sin(x_1) > 0$ и $\sin(x_2) > \sin(x_1)$. Это доказывает, что на указанных промежутках функция $y = \sin x$ возрастает.

Докажите, что промежутки $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где n — целое число, являются промежутками убывания функции $y = \sin x$.

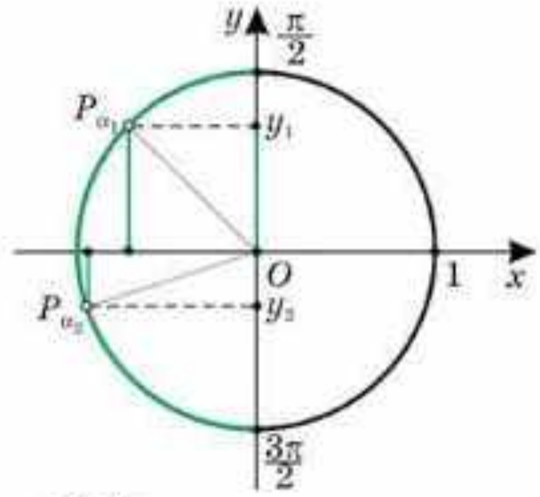
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Рассмотренное свойство можно проиллюстрировать с помощью единичной окружности (рис.11.3).



1) С увеличением угла (числа) от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ ордината увеличивается



2) С увеличением угла (числа) от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ ордината уменьшается

Рис. 11.3

Если $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, то точка P_{α_2} имеет ординату бо́льшую, чем точка P_{α_1} (рис. 11.3.1). Если же $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то ордината точки P_{α_2} меньше, чем ордината точки P_{α_1} (рис. 11.3.2).

8. Функция $y = \sin x$ имеет экстремумы: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k — целое число, $x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k — целое число, наибольшее и наименьшее значения: $y_{\text{наиб.}} = 1$, $y_{\text{наим.}} = -1$.

ПРИМЕР Построим график функции $y = \sin x + 2$.

Сначала построим график функции $y = \sin x$. Для этого построим точки $A, B, C, D, O, E, F, K, L, M, N$ и соединим их плавной кривой линией, как показано на рисунке 11.4. Затем переместим (сдвинем, параллельно перенесем) каждую из этих точек на 2 единицы вверх вдоль оси ординат (Oy). Получим точки $A_1, B_1, C_1, D_1, O_1, E_1, F_1, K_1, L_1, M_1, N_1$ и соединим их плавной кривой линией, как показано на рисунке 11.4.

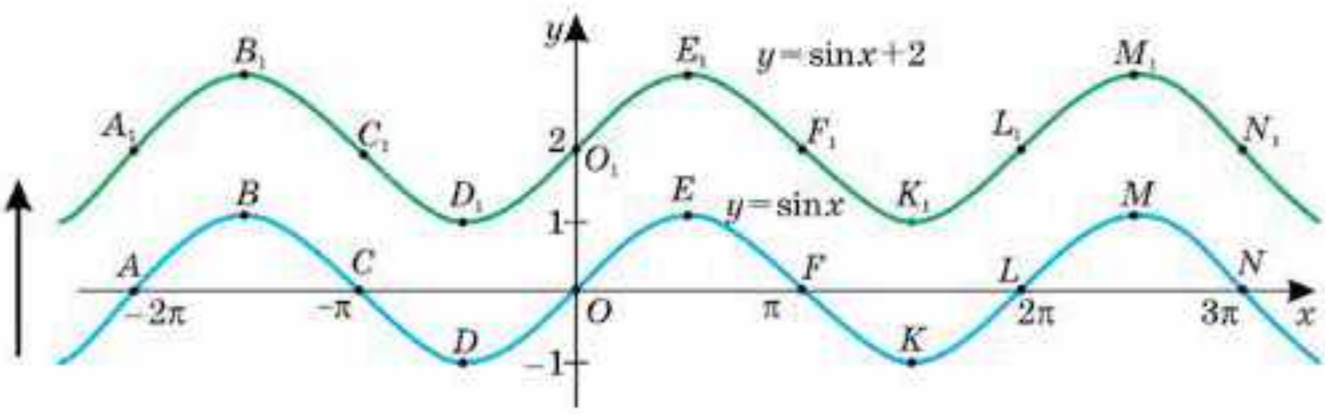


График функции $y = \sin x$ перемещаем (сдвигаем, параллельно переносим) на 2 единицы вверх вдоль оси Oy

Рис. 11.4

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Периодичность функций вида $y = Af(kx + b)$

ВЫ ЗНАЕТЕ: Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число T, что для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$. Наименьшее из положительных чисел T называется *наименьшим периодом функции* $y = f(x)$, или *периодом*.

Если функция $y = f(x)$ периодическая и имеет период, равный T, то функция $y = Af(kx + b)$, где A, k, b постоянные действительные числа, а число $k \neq 0$, также периодическая, причем ее период равен $\frac{T}{|k|}$.

Например, периодом функции $y = \sin 3x$ является число $\frac{2}{3}\pi$, а период функции $y = \sin\frac{x}{2}$ равен 4π.

?

1. Какие координаты будут у точки F_1, соответствующей точке $F(\pi; 0)$, если известно, что она получена в результате: 1) растяжения графика функции $y = \sin x$ вдоль оси Oy в 4 раза; 2) сжатия графика функции $y = \sin x$ вдоль оси Oy в 3 раза?
2. Сравните периоды функций $y = \sin x + 2$ и $y = \sin x$, если они заданы на всей их области определения (используйте рис. 11.4).

Упражнения

А

11.1. Докажите, что является четной функция $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^2 + \sin^2 x$; 2) $f(x) = x^4\sin^2 x$;
3) $f(x) = (2 - x^2)\sin^2 x - 5$; 4) $f(x) = x\sin^3 x$;
5) $f(x) = \frac{\sin x}{x^3 - 4x}$; 6) $f(x) = \frac{\sin 3x}{x^5 - 9x}$.

11.2. Докажите, что является нечетной функция $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^3 + \sin x$; 2) $f(x) = x^5\sin^2 x$;
3) $f(x) = (2 - x^2)\sin^3 x$; 4) $f(x) = x - \sin^3 x$;
5) $f(x) = \frac{\sin x}{x^4 - 4}$; 6) $f(x) = \frac{\sin 6x}{x^2 - 9}$.

11.3. Докажите, что функция $y = \sin 2x$ является возрастающей на множестве:

1) $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right]$, $k \in Z$; 2) $\left[\frac{3\pi}{4}\pi k; \frac{5\pi}{4} + \pi k\right]$, $k \in Z$.

11.4. Найдите наименьший положительный период функции:

1) $y = 2\sin 2x$; 2) $y = \sin 4x\cos x + \sin x\cos 4x$;
3) $y = \frac{2}{3}\sin 3x + 1$; 4) $y = \sin x\cos x$;
5) $y = \sin 4x\cos 3x - \sin 3x\cos 4x$; 6) $y = \sin 3x\cos 3x$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

11.5. Найдите наименьший положительный период и постройте график функции:

1) $y = \sin 3x$; 2) $y = \sin 3x\cos 2x + \sin 2x\cos 3x$;

3) $y = \sin\frac{1}{3}x + 1$.

11.6. Найдите наименьший положительный период функции:

1) $y = \sin 2x - \sin x$; 2) $y = \sin 5x\cos x - \sin x\cos 5x$;

3) $y = \frac{2}{3}\sin 4x + \sin 2x$; 4) $y = 2 - \sin x\cos x$;

5) $y = \sin 4x\cos 4x$; 6) $y = \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$.

11.7. Для функции $f(x)$ проверьте справедливость двух равенств и сделайте вывод — является ли число T периодом функции:

1) $f(x) = \sin x$, $\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5$ и $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = 0{,}5$, $T = \frac{2\pi}{3}$;

2) $f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 3 - x \text{ при } x > 1, \end{cases}$ $f(-1) = 1$ и $f(-1+3) = f(2) = 1$, $T = 3$.

11.8. Постройте график и запишите промежутки убывания функции:

1) $y = 2 - \sin 0{,}5x$; 2) $y = 1 + \sin 1{,}5x$;

3) $y = 2\sin 2x$; 4) $y = -\sin 3x$.

11.9. Сравните значения выражений:

1) $\sin\frac{5\pi}{7}$ и $\sin\frac{7\pi}{8}$; 2) $\sin\frac{4\pi}{9}$ и $\sin\frac{3\pi}{8}$; 3) $\sin\frac{3\pi}{11}$ и $\sin\frac{5\pi}{13}$.

B

11.10. Постройте график функции, используя программу “Живая математика” или “GeoGebra”. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = 1 + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2 - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $y = 1 - \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

11.11. Расположите в порядке возрастания значения выражений:

1) $\sin 1{,}3$, $\sin(-1{,}3)$, $\sin 0{,}3$, $\sin 0{,}9$;

2) $\sin 0{,}3$ $\sin(-0{,}3)$, $\sin 0{,}7$, $\sin 1{,}4$.

11.12. Постройте согласно алгоритму график функции:

1) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

11.13. Используя алгоритм, постройте график функции:

1) $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $y = \sin(3x - 4)$;

3) $y = \sin\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

C

11.14. Используя преобразования, постройте график и найдите промежутки возрастания функции:

1) $y = 3 + \sin\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2\sin(3x - 4) - 1$;

3) $y = -2\sin\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

11.15. Исследуйте на четность, найдите промежутки убывания и множество значений функции:

1) $y = 3 + 2\sin 2x$; 2) $y = -2\sin(3x - 2)$;

3) $y = 4 - 2\sin(2x + 4)$.

***11.16.** Постройте график функции и исследуйте ее на монотонность:

1) $y = x + \sin x$; 2) $y = x - \sin x$.

ПОВТОРИТЕ

11.17. Найдите период и постройте график функции:

1) $y = \{x\}$; 2) $y = 3 - \{x\}$; 3) $y = 2\{2x\}$; 4) $y = \left\{\frac{x}{3}\right\} + 2$,

где $\{x\}$ — дробная часть числа x.

11.18. Вычислите значение тригонометрического выражения:

1) $\dfrac{\operatorname{ctg} 30^\circ + \cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{2} - 2\cos 45^\circ}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}\sin 135^0 + \sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4})}{6\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 4\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}$.

11.19. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}(4\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(4\pi + \alpha)$;

2) $\left(\dfrac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 5\alpha - \cos 3\alpha}\right)$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, свойства и график функции, определение триногометрической функции $y = \cos x$, область определения и область значения функции $y = \cos x$, таблица значений тригонометрических функций, тригонометрические тождества.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§ 12. ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = \cos x$ И ЕЕ СВОЙСТВА

Вы ознакомитесь со свойствами функции $y = \cos x$; научитесь строить ее график.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, график, синусоида, косинус, периодичность

ВЫ ЗНАЕТЕ: *Косинусом угла* α называется абсцисса точки P_α единичной окружности.

Зависимость косинуса от величины угла α называется *тригонометрической функцией*, которая обозначается так: $y = \cos x$.

Ее областью определения является числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Для построения графика функции $y = \cos x$ воспользуемся формулой приведения: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. График функции $y = \cos x$ получается из графика функции $y = \sin x$ с помощью его параллельного переноса на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево вдоль оси Ox (рис. 12.1), поэтому график функции $y = \cos x$ также называется *синусоидой*.

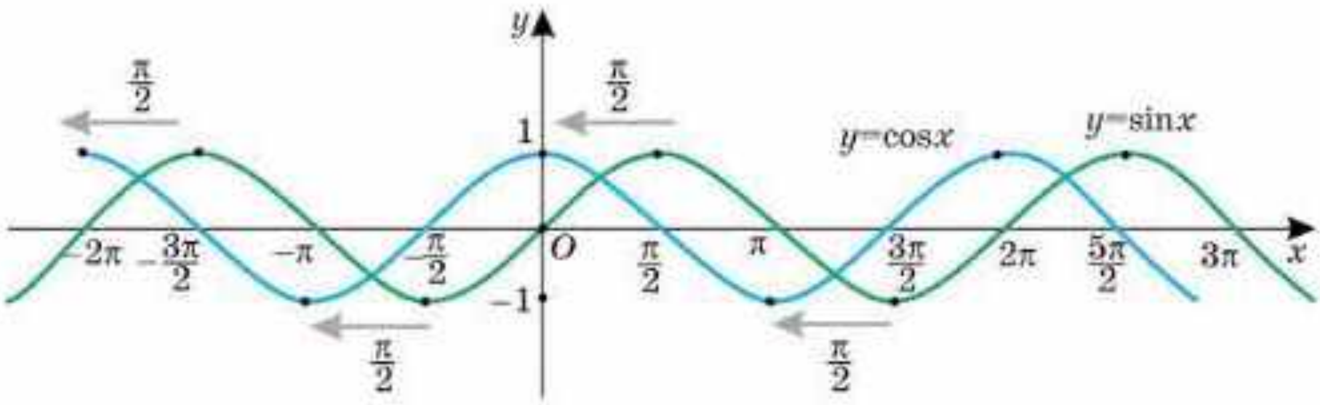


Рис. 12.1

График функции $y = \cos x$ также называется *косинусоидой* (рис. 12.2).

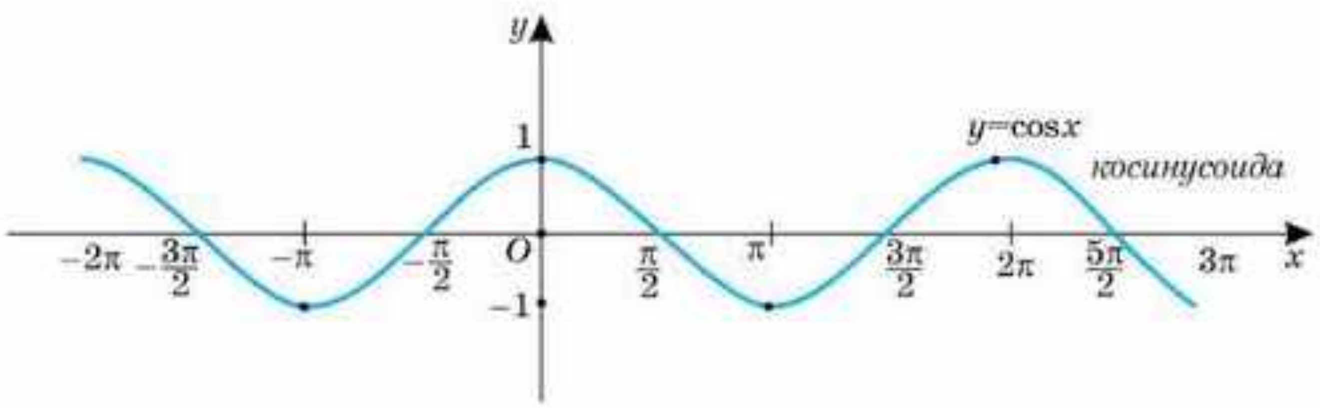


Рис. 12.2

Функция $y = \cos x$ обладает свойствами:

1. Областью определения является числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$.
2. Областью значений является числовой промежуток $[-1; 1]$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3. Функция $y = \cos x$ ограниченная: $|\cos x| \leqslant 1$.

4. Функция $y = \cos x$ периодическая, ее период равен 2π. $\cos(x + 2\pi n) = \cos x$, где n — целое число.

5. Функция $y = \cos x$ является *четной* функцией: $\cos(-x) = \cos x$, ее график симметричен относительно оси ординат.

6. Функция $y = \cos x$ принимает положительные значения на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ и отрицательные значения — на промежутках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, где k — целое число.

7. Функция $y = \cos x$ возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k]$ и убывает на промежутках $[2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$, где k — целое число.

Доказательство.

Докажем, что функция $y = \cos x$ возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k]$, k — целое число. Поскольку функция $y = \cos x$ периодическая, то доказательство достаточно провести для отрезка $[-\pi;\ 0]$.

Пусть $x_2 > x_1$. Применим формулу разности косинусов и найдем: $\cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\frac{x_1 + x_2}{2}\sin\frac{x_2 - x_1}{2}$.

Из неравенства $-\pi \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0$ следует, что $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $-\pi < \frac{x_2 + x_1}{2} < 0$. Действительно, так как $x_1 < x_2$, то $x_2 - x_1 > 0$ и $\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$. Поскольку $x_2 \leqslant 0$ и $-x_1 \leqslant \pi$, то $x_2 - x_1 \leqslant \pi$ и $\frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Складывая почленно неравенства $-\pi \leqslant x_1 < 0$ и $-\pi < x_2 \leqslant 0$, получим: $-2\pi < x_1 + x_2 < 0$ и $-\pi < \frac{x_1 + x_2}{2} < 0$. Тогда $\sin\frac{x_1 + x_2}{2} < 0$ и $\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$, следовательно, $\cos x_2 - \cos x_1 > 0$ и $\cos x_2 > \cos x_1$. Это доказывает, что на указанных промежутках функция $y = \cos x$ возрастает.

Докажите, что промежутки $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, где n — целое число, являются промежутками убывания функции $y = \cos x$.

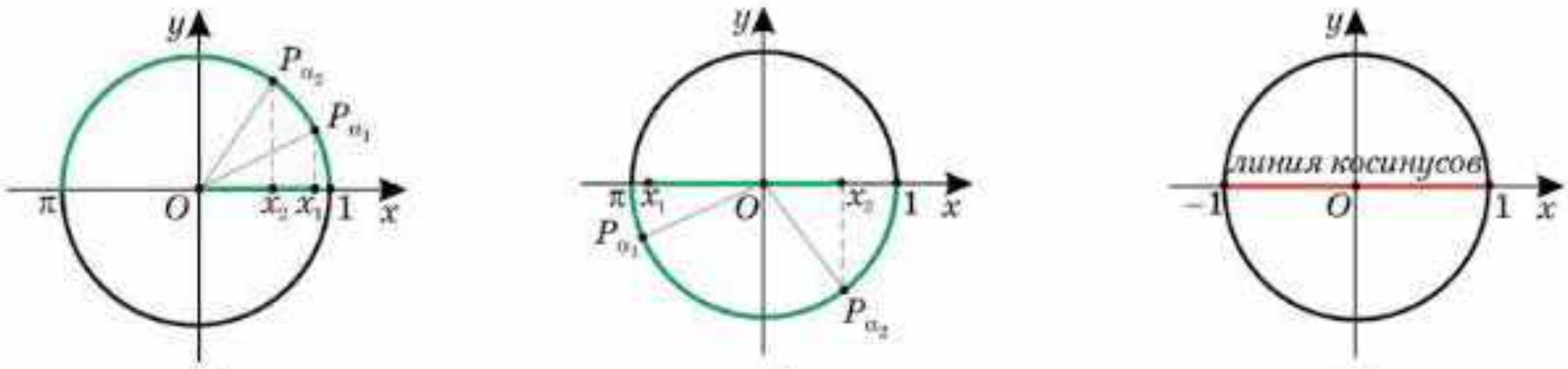
Рассмотренное свойство можно проиллюстрировать с помощью единичной окружности (рис. 12.3.1, 12.3. 2).

Линией косинусов называется числовой отрезок $[-1;\ 1]$ на оси Ox (рис.12.3. 3).

Если $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \pi$, то точка P_{α_2} имеет абсциссу меньшую, чем точка P_{α_1} (рис. 12.3.1). Если же $-\pi \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 0$, то абсцисса точки P_{α_2} больше, чем абсцисса точки P_{α_1} (рис. 12.3.2).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ



1) С увеличением угла (числа) от 0 до π абсцисса уменьшается

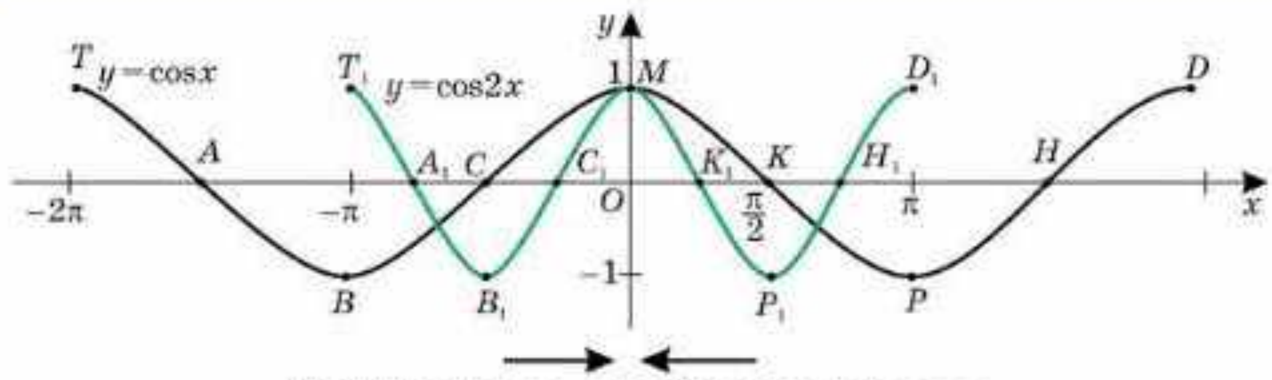
2) С увеличением угла (числа) от π до 2π абсцисса увеличивается

3) Числовой отрезок [−1; 1] на оси Ox — линия косинусов

Рис. 12.3

8. Функция $y = \cos x$ имеет экстремумы: $x_{\min} = -\pi + 2\pi k$, где k — целое число, $x_{\max} = 2\pi k$, где k — целое число, наибольшее и наименьшее значения: $y_{\text{наиб.}} = 1$, $y_{\text{наим.}} = -1$.

ПРИМЕР Построим график функции $y = \cos 2x$ на числовом отрезке $[-\pi; \pi]$. Сначала построим на числовом отрезке $[-2\pi; 2\pi]$ график функции $y = \cos x$. Для этого построим точки $T, A, B, C, M, K, P, H, D$ и соединим их плавной кривой линией, как показано на рисунке 12.4. Затем выполним сжатие в 2 раза вдоль оси абсцисс (Ox). Для этого построим точки $T_1, A_1, B_1, C_1, M_1, K_1, P_1, H_1, D_1$, ординаты которых равны, соответственно, ординатам точек $T, A, B, C, M, K, P, H, D$, а абсциссы — в 2 раза меньше и соединим их плавной кривой линией, как показано на рисунке 12.4.



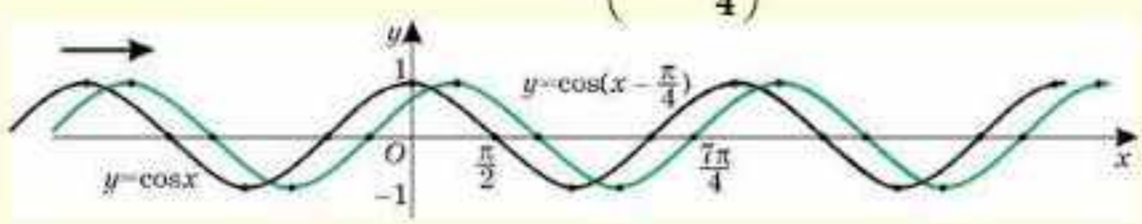
Сжатие вдоль оси абсцисс в 2 раза

Рис. 12.4

На графике наглядно видно, что период функции $y = \cos 2x$ равен π. Действительно, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

ОБЪЯСНИТЕ

Как построили график функции $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$?



Перемещение (сдвиг, параллельный перенос) вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{4}$ единицы вправо.

Рис. 12.5

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

1. Какие координаты будут у точки F_1, соответствующей точке $F(\pi; -1)$, если известно, что она получена в результате: 1) растяжения графика функции $y = \cos x$ вдоль оси Oy в 4 раза; 2) сжатия графика функции $y = \cos x$ вдоль оси Oy в 3 раза?
2. Сравните периоды функций $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $y = \cos 2x$ и $y = \cos x$, если они заданы на всей области их определения (используйте рисунки 12.4 и 12.5).

Упражнения

А

12.1. Докажите, что является четной функция $y = f(x)$:
1) $f(x) = x^2 + \cos^2 x$; 2) $f(x) = x^4 \cos x$;
3) $f(x) = (2 - x^2)\cos^2 x$; 4) $f(x) = x\sin^3 x + \cos x$;
5) $f(x) = \frac{\sin x}{x^3 - 4x} + \cos 2x$; 6) $f(x) = \cos x - \frac{\sin 3x}{x^5 - 9x}$.

12.2. Докажите, что не является ни четной, ни нечетной (говорят, является функцией общего вида) функция $y = f(x)$:
1) $f(x) = x^3 + \cos x$; 2) $f(x) = x^5 - \cos^2 x$;
3) $f(x) = (2 - x)\cos^3 x$.

12.3. Докажите, что является нечетной функция $y = f(x)$:
1) $f(x) = x^3 \cos x$; 2) $f(x) = x^5 \cos^2 x$;
3) $f(x) = x\cos^3 x + x$; 4) $f(x) = \cos x \cdot \sin 3x$;
5) $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{x^4 - 4}$; 6) $f(x) = \frac{\sin 6x}{\cos x^2 - 9}$.

12.4. Докажите, что функция $y = \cos 2x$ является возрастающей на множестве:

1) $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \pi k\right]$, $k \in Z$; 2) $\left[\frac{3\pi}{4} + \pi k;\ \pi + \pi k\right]$, $k \in Z$.

12.5. Найдите наименьший положительный период функции:
1) $y = 2\cos 2x$; 2) $y = \cos 4x \cos x + \sin x \sin 4x$;
3) $y = \frac{2}{3}\cos 2x + 1$; 4) $y = 2 - \cos 4x$;
5) $y = \cos 4x \cos 3x - \sin 3x \sin 4x$;
6) $y = \sin x - \cos 3x$.

12.6. Найдите наименьший положительный период и постройте график функции:

1) $y = \cos 3x$; 2) $y = \cos 3x \cos 2x + \sin 2x \sin 3x$; 3) $y = \cos\frac{1}{3}x + 1$.

12.7. Найдите период функции:
1) $y = \cos 2x - \sin x$; 2) $y = \cos 5x \cos x + \sin x \sin 5x$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3) $y = \frac{2}{3}\cos 4x + \sin 2x$;
4) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;
5) $y = \sin 4x - \cos 4x$;
6) $y = 3\sin\frac{x}{3} + 2\cos\frac{x}{3}$.

12.8. Для функции $y = f(x)$ проверьте справедливость двух равенств и сделайте вывод — является ли число T периодом функции: $f(x) = \cos x$, $\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$ и $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = 0{,}5$, $T = \frac{4\pi}{3}$.

12.9. Постройте график и запишите промежутки убывания функции:
1) $y = 2 - \cos 0{,}5x$;
2) $y = 1 + \cos 1{,}5x$;
3) $y = \cos x + |\cos x|$;
4) $y = \cos x - |\cos x|$.

12.10. Сравните значения выражений:
1) $\cos\frac{5\pi}{7}$ и $-\cos\frac{7\pi}{8}$;
2) $\cos\frac{4\pi}{9}$ и $\cos\frac{3\pi}{8}$;
3) $\cos\frac{3\pi}{11}$ и $\cos\frac{5\pi}{13}$.

12.11. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:
1) $y = 1 + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
2) $y = 3 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
3) $y = 1 - \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

12.12. Начертите единичную окружность. На линии синусов отметьте точку, значение синуса от ординаты которой равно a и $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Через эту точку проведите прямую, параллельную оси Ox. Найдите точки пересечения этой прямой с единичной окружностью. На чертеже отметьте углы, синус которых равен a, если:
1) $a = \frac{1}{4}$;
2) $a = \frac{1}{3}$;
3) $a = -\frac{1}{4}$;
4) $a = -\frac{3}{4}$.

12.13. Начертите единичную окружность. На линии косинусов отметьте точку, значение косинуса от абсциссы которой равно a и $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Через эту точку проведите прямую, параллельную оси Oy. Найдите точки пересечения этой прямой с единичной окружностью. На чертеже отметьте углы, косинус которых равен a, если:
1) $a = \frac{3}{4}$;
2) $a = \frac{2}{3}$;
3) $a = -\frac{1}{4}$;
4) $a = -\frac{3}{4}$.

B

12.14. Расположите в порядке возрастания значений выражения:
1) $\cos 1{,}9$, $\cos(-0{,}3)$, $\cos 1{,}3$;
2) $\cos\frac{25\pi}{9}$, $\cos\frac{-5\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$.

12.15. Постройте согласно алгоритму график функции:
1) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
2) $y = 2 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
3) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

12.16. Используя алгоритм, постройте график функции:

1) $y = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $y = \cos(3x - 4)$;

3) $y = \cos\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

12.17. Используя преобразования, постройте график и найдите промежутки возрастания функции:

1) $y = 4 + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2\cos(3x - 4) - 3$;

3) $y = -2\cos\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

C

12.18. Исследуйте функцию на четность, найдите промежутки убывания и множество значений функции:

1) $y = 3 + 2\cos 2x$; 2) $y = -2\cos(3x - 2)$;

3) $y = 1 - \cos^2 x$.

***12.19.** Постройте график функции и исследуйте ее на монотонность:

1) $y = x + \cos x$; 2) $y = x - \cos x$.

***12.20.** Найдите графическим способом число корней уравнения:

1) $2 - x^2 = \cos x$; 2) $2x^2 - 4x = 2\cos x$.

ПОВТОРИТЕ

12.21. Найдите период и постройте график функции:

1) $y = \{x\} - 2$; 2) $y = 2\{x\}$;

3) $y = 2\{4x\}$; 4) $y = \left\{\frac{x}{4}\right\} + 2$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x.

12.22. Упростите выражение:

1) $\frac{\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta}{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}$; 2) $\frac{\cos^2\alpha - \text{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \text{tg}^2\alpha}$; 3) $\text{ctg}\beta + \frac{\sin\beta}{1 + \cos\beta}$.

12.23. Докажите тождество:

1) $\sin^2 x - \cos^2 x - \sin^4 x + \cos^4 x = 0$;

2) $(1 + \cos\alpha)(1 + \text{tg}\alpha) - 1 - \sin\alpha - \cos\alpha = \text{tg}\alpha$;

3) $(\text{tg}x + 2\text{ctg}x)^2 - (\text{tg}x - 2\text{ctg}x)^2 = 8$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, свойства и график функции, определение триногометрических функций $y = \text{tg}x$, $y = \text{ctg}x$, область определения и область значений функций $y = \text{tg}x$, $y = \text{ctg}x$, таблица значений тригонометрических функций, тригонометрические тождества.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§13. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ $y = \text{tg}x$, $y = \text{ctg}x$ И ИХ СВОЙСТВА

Вы ознакомитесь со свойствами функции $y = \text{tg}x$, $y = \text{ctg}x$;
научитесь строить их графики.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Функция, график, периодичность, линия тангенсов, линия котангенсов, тангенсоида

ВЫ ЗНАЕТЕ: *Тангенсом угла* α называется отношение ординаты точки P_α единичной окружности к ее абсциссе. Зависимость тангенса от величины угла α называется *тригонометрической функцией*, которая обозначается так: $y = \text{tg}x$.

Ее областью определения являются все действительные числа, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число; а областью (множеством) значений — $(-\infty; +\infty)$.

Проведем касательную l к единичной окружности в точке P_0 (рис. 13.1).

Пусть α — произвольное число, для которого $\cos\alpha \neq 0$. Тогда точка P_α $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ не лежит на оси ординат, поэтому прямая OP_α пересекает l в некоторой точке T_α с абсциссой 1.

Найдем ординату этой точки. Поскольку по определению $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{T_\alpha P_0}{1}$, то $T_\alpha P_0 = \text{tg}\alpha$. Итак, ордината точки пересечения прямых OP_α и l равна $\text{tg}\alpha$.

Прямую l называют *линией тангенсов* (рис. 13.2).

Функция $y = \text{tg}x$ периодическая, ее период равен π. Действительно, ординаты всех точек на линии тангенсов, соответствующих углам $\alpha + \pi k$,

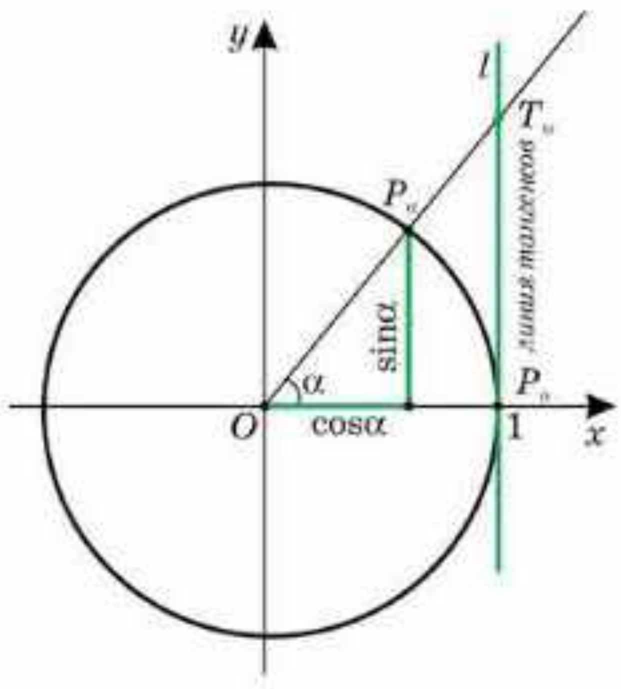


Рис. 13.1

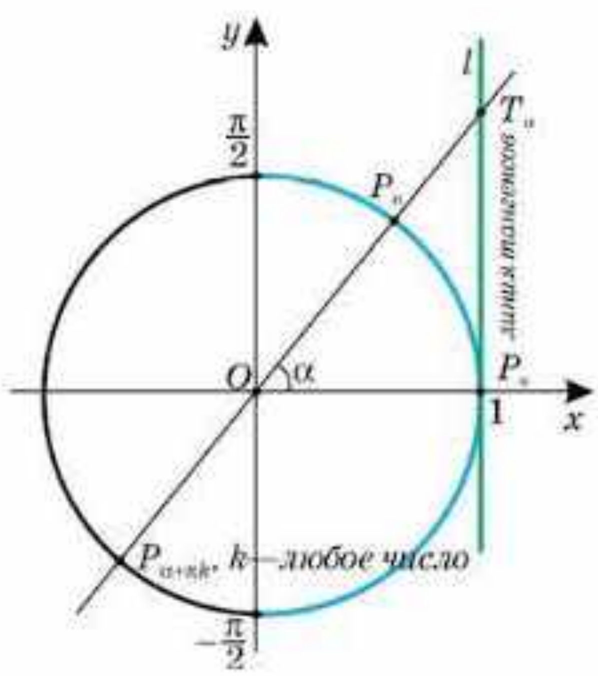


Рис. 13.2

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

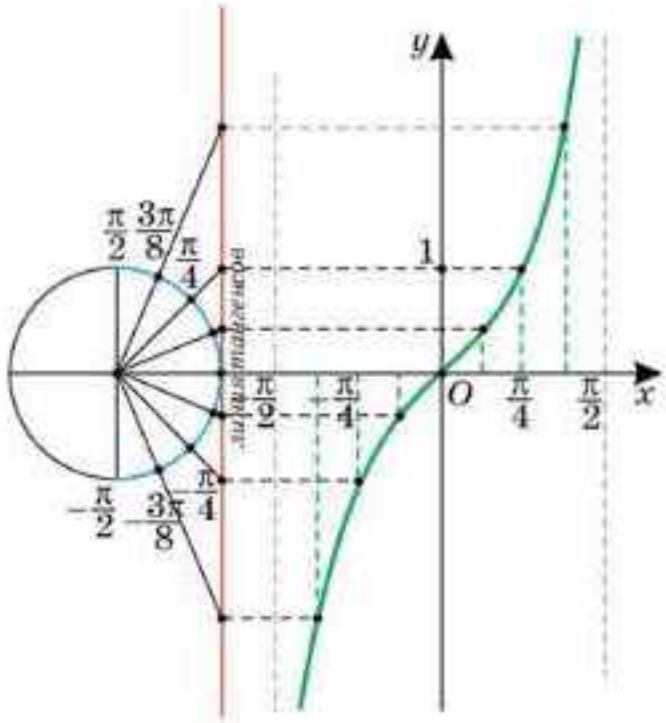


Рис. 13.3

где k — любое целое число, совпадают с ординатами точек, соответствующих углу α, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Значит, $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg}x$, где k — любое целое число.

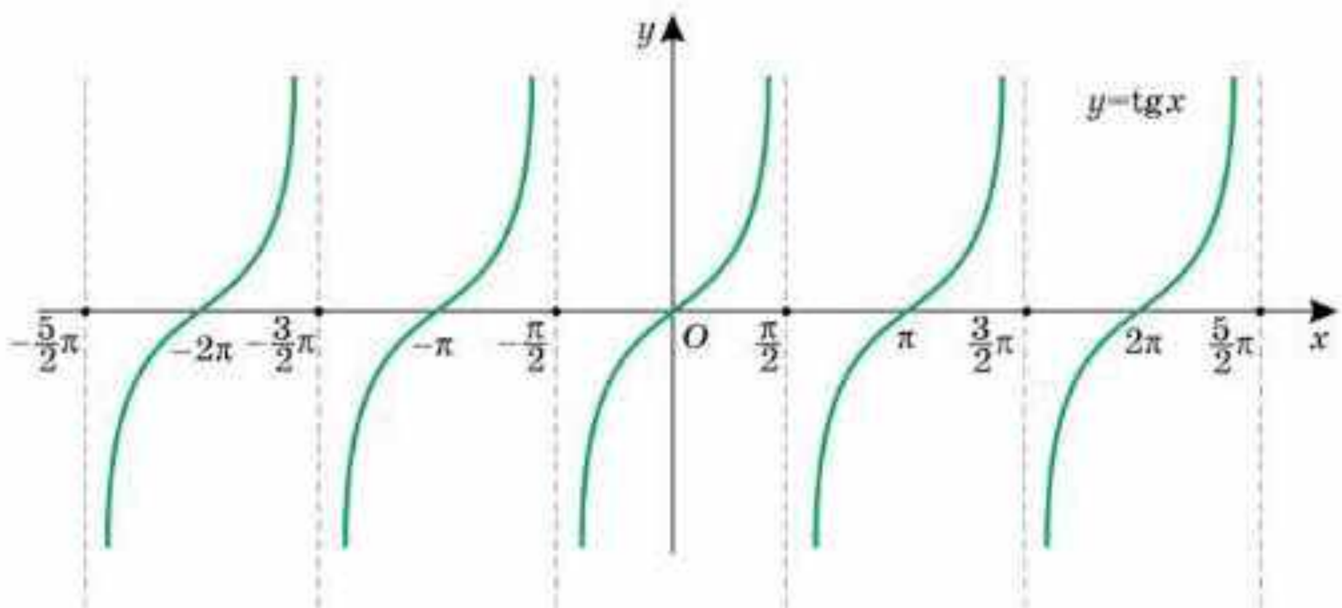
Чтобы построить график функции $y = \operatorname{tg}x$, сначала построим его часть на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Для этого отметим на оси абсцисс точки с абсциссами $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ ($\pi \approx 3{,}14$) и

воспользуемся осью тангенсов. Слева от оси Oy изобразим единичную окружность, центр которой находится на оси Ox. Разделим правую часть единичной окружности и отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ на 8 равных частей (рис.13.3).

Отметим на единичной окружности точки, соответствующие углам $-\frac{3\pi}{8}$; $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{8}$; 0; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{4}$. Значения функции $y = \operatorname{tg}x$ для этих углов найдем с помощью линии тангенсов. Для этого проведем через начало координат и каждую из этих точек прямую до пересечения с осью тангенсов. Точка пересечения с осью тангенсов и есть ордината искомой точки графика функции $y = \operatorname{tg}x$ (рис.13.3).

Чтобы построить график функции $y = \operatorname{tg}x$ на всей числовой прямой, переместим (сдвинем, перенесем параллельно) его часть, построенную на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, вдоль оси Ox на π, 2π, 3π, 4π и т. д. πn, где n — целое число.

График функции $y = \operatorname{tg}x$ называется *тангенсоидой* (рис. 13.4).



тангенсоида
Рис. 13.4

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Функция $y = \operatorname{tg} x$ обладает свойствами:

1. Областью определения являются все значения α, за исключением $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число.

2. Областью значений является числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$ — вся числовая прямая.

Доказательство.

Пусть y_0 — произвольное действительное число. Рассмотрим точку $A(1;\ y_0)$. Поскольку линия тангенсов — прямая, то для любого действительного числа y_0 точка $A(1;\ y_0)$ принадлежит линии тангенсов и $y_0 = \operatorname{tg}\angle AOX$ (рис. 13.5). Это означает, что функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает любое действительное значение.

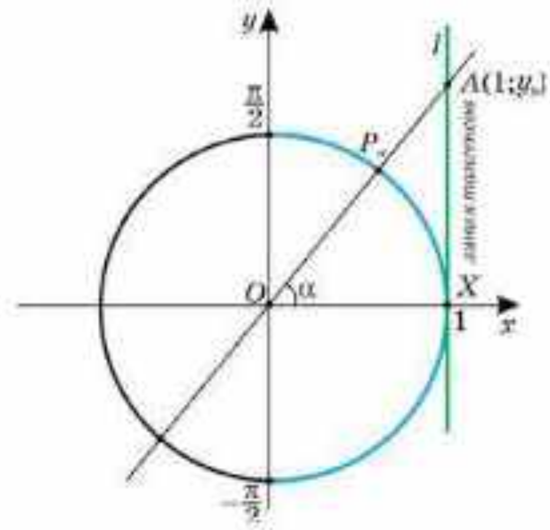


Рис. 13.5

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ неограниченная.

4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая, ее период равен π.

$y = \operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$, где n — целое число.

5. Функция $y = \operatorname{tg} x$ является *нечетной* функцией: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, ее график симметричен относительно начала координат.

6. Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает положительные значения на числовых промежутках $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ и отрицательные значения — на числовых промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right)$, где k — целое число.

7. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, где k — целое число.

Докажем, что функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, где k — целое число. Поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая, доказательство проведем для интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Пусть x_1 и x_2 — некоторые произвольные числа из этого интервала, такие, что $x_2 > x_1$. Надо доказать, что $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$. Для этого рассмотрим равенство $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cdot \cos x_1}$.

По предположению $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\cos x_1 > 0$ и $\cos x_2 > 0$. Поскольку $0 < x_2 - x_1 < \pi$, то и $\sin(x_2 - x_1) > 0$. Следовательно, $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 > 0$.

Докажите это свойство, используя линию тангенсов (рис. 13.5).

8. Функция $y = \operatorname{tg} x$ не имеет экстремумов, наибольшего и наименьшего значений.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

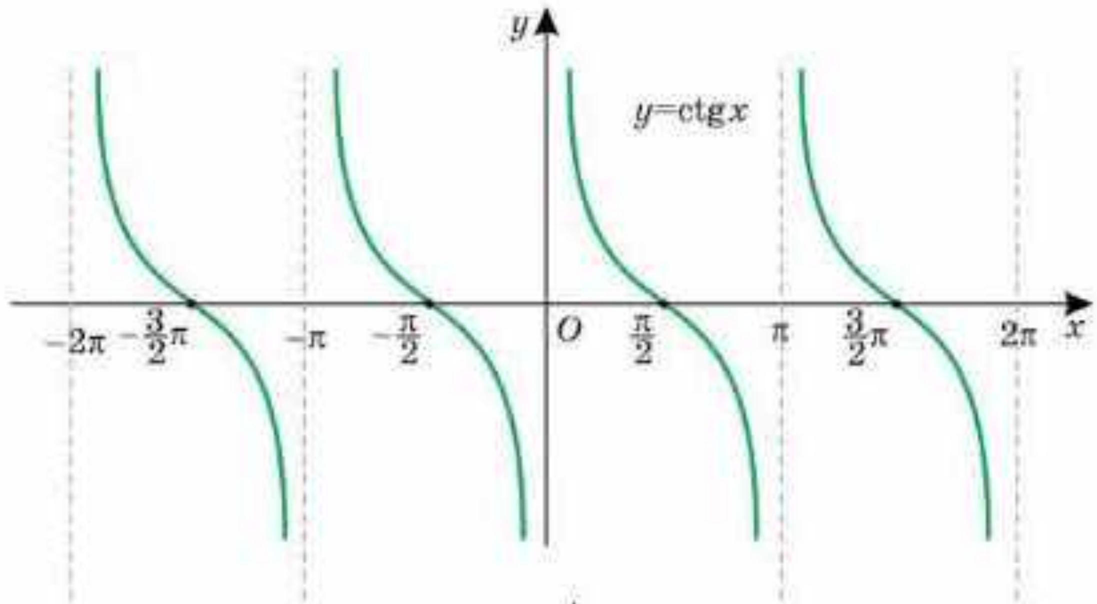


Рис. 13.6

ВЫ ЗНАЕТЕ: *Котангенсом угла* α называется отношение абсциссы точки P_α единичной окружности к ее ординате, а зависимость котангенса от величины угла α называется *тригонометрической функцией*, которая обозначается так: $y = \mathrm{ctg}x$.

Ее областью определения являются все действительные числа, кроме $x = \pi k$, где k — любое целое число; множеством значений — $(-\infty; +\infty)$.

Для построения графика функции $y = \mathrm{ctg}x$ воспользуемся формулой приведения: $\mathrm{ctg}x = -\mathrm{tg}(x + \frac{\pi}{2})$. Следовательно, график функции $y = \mathrm{ctg}x$ получается из графика функции $y = \mathrm{tg}x$ с помощью его параллельного переноса на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево вдоль оси Ox и симметрии относительно оси Ox (рис. 13.6).

Функция $y = \mathrm{ctg}x$ обладает свойствами:

1. Областью определения являются все значения x, за исключением πk, где k — любое целое число.

Докажите что абсцисса точки B_α пересечения прямой OP_α с касательной t к единичной окружности, проведенной через точку $P_{\frac{\pi}{2}}$, равна $\mathrm{ctg}\alpha$ (рис. 13.7).

Прямую t называют *линией котангенсов* (рис. 13.7).

2. Множеством значений является числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$ — вся числовая прямая.

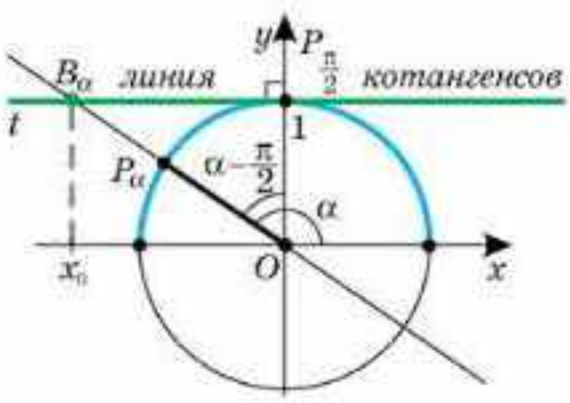


Рис. 13.7

Доказательство.

Пусть x_0 — произвольное действительное число. Рассмотрим точку $B_\alpha(x_0; 1)$. Поскольку линия котангенсов — прямая, то для любого действительного числа x_0 точка $B_\alpha(x_0; 1)$ принадлежит линии котангенсов и $x_0 = \mathrm{ctg}\alpha$ (рис. 13.7). Это означает, что функция $y = \mathrm{ctg}x$ принимает любое действительное значение.

3. Функция $y = \mathrm{ctg}x$ неограниченная.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

4. Функция $y = \mathrm{ctg}x$ периодическая, ее период равен π.
$y = \mathrm{ctg}(x + \pi n) = \mathrm{ctg}x$, где n — целое число.

5. Функция $y = \mathrm{ctg}x$ является *нечетной* функцией: $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}x$, ее график симметричен относительно начала координат.

6. Функция $y = \mathrm{ctg}x$ принимает положительные значения на числовых промежутках $\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ и отрицательные значения — на числовых промежутках $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, где k — целое число.

7. Функция $y = \mathrm{ctg}x$ убывает на промежутках $(\pi k;\ \pi + \pi k)$, где k — целое число.

Докажем, что функция $y = \mathrm{ctg}x$ убывает на промежутках $(\pi k;\ \pi + \pi k)$, где k — целое число. Поскольку функция $y = \mathrm{ctg}x$ периодическая, доказательство проведем для интервала $(0;\ \pi)$. Пусть x_1 и x_2 — некоторые произвольные числа из этого интервала, такие, что $x_2 > x_1$. Надо доказать, что $\mathrm{ctg}x_2 < \mathrm{ctg}x_1$. Рассмотрим и преобразуем разность $\mathrm{ctg}x_2 - \mathrm{ctg}x_1$. Получим $\mathrm{ctg}x_2 - \mathrm{ctg}x_1 = -\frac{\sin(x_2 - x_1)}{\sin x_2 \cdot \sin x_1}$.

Действительно, по предположению $0 < x_1 < x_2 < \pi$, поэтому $\sin x_1 > 0$ и $\sin x_2 > 0$.

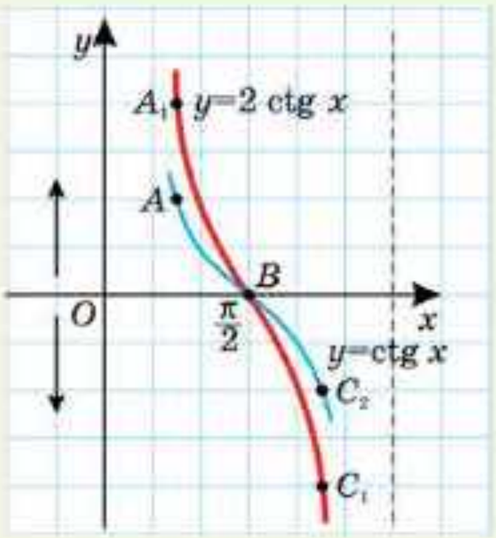
Поскольку $0 < x_2 - x_1 < \pi$, то и $\sin(x_2 - x_1) > 0$. Следовательно, $\mathrm{ctg}x_2 - \mathrm{ctg}x_1 < 0$, отсюда $\mathrm{ctg}x_2 < \mathrm{ctg}x_1$.

Докажите это свойство, используя линию котангенсов (рис. 13.7).

8. Функция $y = \mathrm{ctg}x$ не имеет экстремумов, наибольшего и наименьшего значений.

ПРИМЕР Построим график функции $y = 2\,\mathrm{ctg}x$ на интервале $(0;\ \pi)$.

Сначала построим график функции $y = \mathrm{ctg}x$ на интервале $(0;\ \pi)$. Для этого построим точки A, B, C и соединим их плавной кривой линией, как показано на рисунке 13.8. Затем выполним растяжение в 2 раза вдоль оси ординат (Oy). Для этого построим точки A_1, B_1, C_1, абсциссы которых равны, соответственно, абсциссам точек A, B, C, ординаты — в 2 раза больше, и соединим их плавной кривой линией, как показано на рисунке 13.8.



Растяжение вдоль оси ординат в 2 раза

Рис. 13.8

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

1. Какие координаты будут у точки F_1, соответствующей точке $F(\frac{\pi}{4}; 1)$, если известно, что она получена в результате: 1) растяжения графика функции $y = \operatorname{tg}x$ вдоль оси Ox в 4 раза? 2) сжатия графика функции $y = \operatorname{tg}x$ вдоль оси Oy в 3 раза?
2. Сравните периоды функций $y = 2\operatorname{ctg}x$ и $y = \operatorname{ctg}x$, если они заданы на всей области их определения.

Упражнения

А

13.1. Докажите, что является четной функция $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^2\operatorname{tg}^2x$;
2) $f(x) = x^4\operatorname{ctg}^2x$;
3) $f(x) = -\operatorname{ctg}(-x)^2 - 5$;
4) $f(x) = x\operatorname{tg}^3x$;
5) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg}5x}{x^3 - 4x} - \cos3x$;
6) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}3x}{x^5 - 9x} + \cos x$.

13.2. Докажите, что является нечетной функция $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^3 + \operatorname{ctg}2x$;
2) $f(x) = x^5\operatorname{tg}^2x$;
3) $f(x) = (2 - x^2)\operatorname{tg}^3x$;
4) $f(x) = 2x - \operatorname{tg}^3x$;
5) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg}5x}{x^4 - 4} - x$;
6) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}6x}{x^2 - 9} + \sin3x$.

13.3. Докажите, что функция $y = \operatorname{tg}2x$ является возрастающей на множестве:

1) $\left(-\frac{\pi}{4} + 0{,}5\pi k;\ \frac{\pi}{4} + 0{,}5\pi k\right)$, $k \in Z$;

2) $\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi k;\ \frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi k\right)$, $k \in Z$.

13.4. Найдите наименьший положительный период функции:

1) $y = 2\operatorname{tg}2x$;
2) $y = \operatorname{ctg}4x$;
3) $y = \frac{2}{3}\operatorname{ctg}3x + 1$.

13.5. Найдите наименьший положительный период:

1) $y = \operatorname{tg}x + \sin3x$;
2) $y = \operatorname{ctg}2x - 2\cos x$;
3) $y = \operatorname{tg}\frac{1}{3}x + 1$.

13.6. Найдите наименьший положительный период функции:

1) $y = \sin2x - \operatorname{ctg}0{,}5x$;
2) $y = \operatorname{tg}5x - \operatorname{tg}x$;
3) $y = \frac{2}{3}\operatorname{tg}4x + \cos2x$;
4) $y = 2 - 5\operatorname{ctg}2x$;
5) $y = \operatorname{tg}4x - \cos4x$;
6) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3} + \operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

13.7. Для функции $f(x)$ проверьте справедливость двух равенств и сделайте вывод — является ли число T периодом функции:

1) $f(x) = \operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$, $T = \pi$.

13.8. Постройте график и запишите промежутки убывания функции:
1) $y = 2 - \operatorname{tg}0{,}5x$; 2) $y = 1 + \operatorname{ctg}1{,}5x$;
3) $y = 2\operatorname{tg}2x$; 4) $y = -\operatorname{ctg}3x$.

13.9. Сравните значения выражений:

1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$ и $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{9}$ и $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{11}$ и $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{13}$.

13.10. Начертите единичную окружность. На линии котангенсов отметьте точку P, котангенс от значения абсциссы которой равен p. Через эту точку и начало координат проведите луч OP. Найдите точки пересечения линии котангенсов и луча OP. На чертеже отметьте угол, котангенс которого равен p, если:

1) $p = \frac{3}{4}$; 2) $p = 2$; 3) $p = -1$; 4) $p = -2\frac{3}{4}$.

13.11. Начертите единичную окружность. На линии тангенсов отметьте точку M, тангенс от значения ординаты которой равен p. Через эту точку и начало координат проведите луч OM. Найдите точки пересечения линии тангенсов и луча OM. На чертеже отметьте угол, тангенс которого равен p, если:

1) $p = 3\frac{3}{4}$; 2) $p = 2{,}5$; 3) $p = -1$; 4) $p = -\frac{3}{4}$.

B

13.12. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = 1 + 2\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2 - \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $y = 1 - \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

13.13. Расположите в порядке возрастания значений выражения:

1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{13}\right)$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$, и $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{20}$;

2) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{10}$, $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{15}$, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{11}$ и $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{13}$.

13.14. Постройте согласно алгоритму график функции:

1) $y = 2\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2 + \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

13.15. Используя алгоритм, постройте график функции:

1) $y = \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg}(3x - 4)$; 3) $y = -\operatorname{tg}\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

C

13.16. Используя преобразования, постройте график и найдите промежутки возрастания функции:

1) $y = 1 + \operatorname{tg}\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2\operatorname{ctg}(3x - 4) - 1$;

3) $y = -2\operatorname{tg}\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

13.17. Исследуйте на четность и найдите период функции:

1) $y = 3\operatorname{tg}x + 2\sin 2x$; 2) $y = -2\operatorname{ctg}(3x - 2) + x$;

3) $y = -5\operatorname{tg}(0{,}2x + 4)$.

***13.18.** Найдите число корней уравнения:

1) $2x - 3 = \operatorname{ctg}0{,}4x$; 2) $x^2 - 2x = \operatorname{tg}0{,}2x$.

13.19. Найдите период функции:

1) $y = \{x\} + \operatorname{tg}\pi x$; 2) $y = \operatorname{ctg}4x - \sin 2x$;

3) $y = 2\{2x\} + \cos 4\pi x$; 4) $y = \left\{\frac{x}{3}\right\} + 2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}$.

ПОВТОРИТЕ

13.20. Найдите значение тригонометрического выражения:

1) $\dfrac{-\sin\frac{3\pi}{20}\cdot\cos\frac{21\pi}{10} - \cos\frac{3\pi}{20}\cdot\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{7\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{7\pi}{8}\cdot\sin\frac{7\pi}{24}}$;

2) $\dfrac{3\sin\frac{15\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{21} + 3\cos\frac{4\pi}{21}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}}{-\sin\frac{7\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{24} + \cos\frac{7\pi}{24}\cdot\sin\frac{23\pi}{24}}$.

13.21. Упростите выражение:

1) $\cos\beta - \sin\beta - \sqrt{2}\sin(45^\circ - \beta)$; 2) $\sqrt{3}\cos\beta + \sin\beta - 2\cos(30^\circ - \beta)$.

13.22. Докажите тождество:

1) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) - 2\cos\alpha\cos\beta = 0$;

2) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\cos\beta = 0$;

3) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

4) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, свойства и график функции, определение триногометрических функций, координатная плоскость, координаты точки, модуль, обратная пропорциональность, виды преобразований фигур, симметричность относительно точки и прямой.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§14. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Вы научитесь строить графики тригонометрических функций с помощью преобразований.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

График, преобразования, тригонометрические функции

ПРИМЕР Построим график функции $y = 2\sin 0,5\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2,5$ на числовом отрезке $[0; 4\pi]$.

Решение. Построение графика проведем по следующей схеме.

Сначала построим график функции $y = \sin x$ на числовом отрезке $[0; 2\pi]$.

Затем выполним растяжение в 2 раза вдоль оси абсцисс (Ox). Получим график функции $y = \sin(0,5x)$ на числовом отрезке $[0; 4\pi]$.

Затем выполним растяжение в 2 раза вдоль оси ординат (Oy). Получим график функции $y = 2\sin(0,5x)$ на числовом отрезке $[0; 4\pi]$.

Далее сдвинем его на $\frac{\pi}{3}$ единицы вправо вдоль оси Ox — получим график функции $y = 2\sin 0,5\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, потом переместим его вниз на 2,5 единицы вдоль оси Oy, дополнив на числовом отрезке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ и удалив ту его часть, которая построена на числовом отрезке $\left[4\pi; \frac{4\pi}{3}\right]$.

Получим график функции $y = 2\sin 0,5\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2,5$ на числовом отрезке $[0; 4\pi]$ (рис. 14.1).

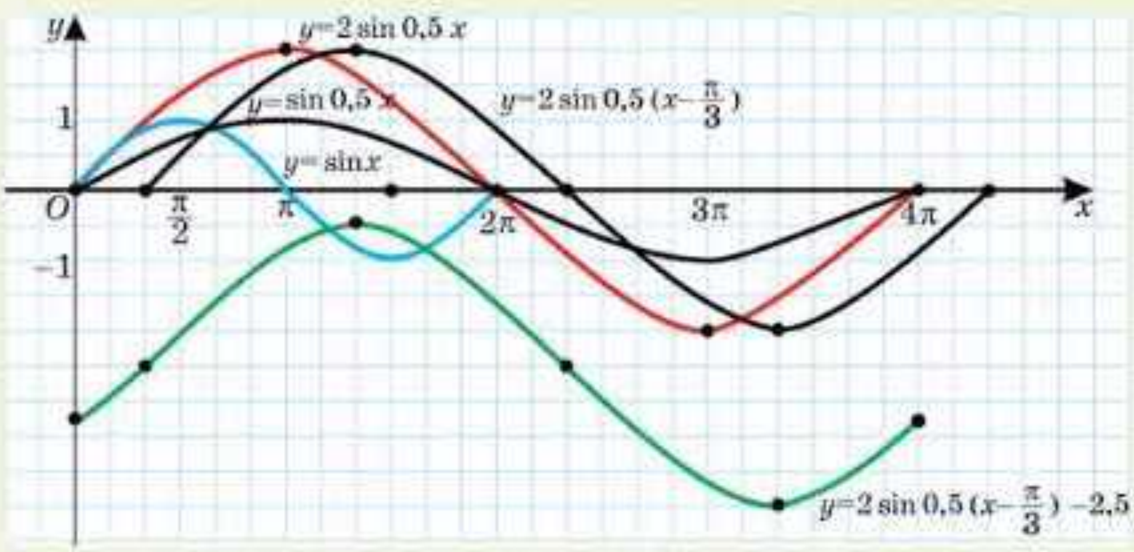


Рис. 14.1

Долгое время тригонометрия носила чисто геометрический характер. Начиная с XVII в. тригонометрические функции начали применять при решении уравнений, задач механики, оптики, электричества, радиотехники, для описания колебательных процессов, распространения волн, движения различных механизмов, изучения переменного электрического тока и т. д. Тригонометрические функции всесторонне и глубоко исследовались и приобрели большое значение для всей математики.

Колебаниями называются движения или процессы, характеризующиеся определе нной повторяемостью во времени.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Колебательные процессы имеют широкое распространение в природе и технике, например, качание маятника часов, переменный электрический ток и т. д.

Величины, меняющиеся согласно закону $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ или $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, играют важную роль в физике. По такому закону движется шарик, подвешенный на пружине, качается маятник, в некоторых случаях такие законы описывают распространение света в пространстве.

Говорят, что движения, которые описываются этими законами, называются *гармоническими колебаниями*. A называют *амплитудой колебаний*, ω — *частотой колебаний*, φ — *начальной фазой колебаний*. Период функций $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ и $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, равный $\frac{2\pi}{\omega}$, называют *периодом гармонического колебания*.

Следует отметить, что обе функции могут описывать одно и то же колебание с разной начальной фазой. Действительно, воспользовавшись формулой приведения, можно записать: $A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Какие координаты будут у точки F_1, соответствующей точке $F\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$, если известно, что она получена в результате растяжения графика функции $y = \cos x$ вдоль оси Ox в 4 раза, сжатия вдоль оси Oy в 3 раза и перемещения вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{3}$ единицы вправо и на $\frac{1}{2}$ единицы вниз вдоль оси Oy?
2. Сравните периоды функций $y = 2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}x$ и $y = \mathrm{tg}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, если они заданы на всей области их определения.
3. Назовите амплитуду, частоту, начальную фазу и период гармонического колебания, заданного формулой $y = 2\sin 0{,}5\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Упражнения

A

14.1. Постройте график функции:

1) $y = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 2$;
2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$;
3) $y = \mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$.

14.2. Используя свойство периодичности тригонометрических функций, замените тригонометрическое выражение, равным ему, той же тригонометрической функцией наименьшего положительного аргумента:

1) $\cos\frac{20\pi}{9}$, $\mathrm{tg}\frac{21\pi}{5}$, $\sin\frac{23\pi}{7}$;
2) $\mathrm{ctg}\frac{23\pi}{9}$, $\mathrm{tg}\frac{41\pi}{5}$, $\sin\frac{16\pi}{7}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

14.3. Постройте график функции:

1) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 3$; 2) $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$;

3) $y = 2\mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

14.4. Найдите область определения и множество значений функции:

1) $f(x) = 2\sin 3x - 1$; 2) $f(x) = 3 - 2\cos 2x$;

3) $f(x) = 2 - \sin(x - \pi)$.

14.5. Постройте график, запишите нули и промежутки знакопостоянства функции:

1) $f(x) = -\sin 2x$; 2) $f(x) = 2\cos\frac{x}{4}$;

3) $f(x) = 2\mathrm{tg}\frac{x}{3}$; 4) $f(x) = -\mathrm{ctg}\frac{x}{2}$.

14.6. Постройте график и запишите числовые промежутки, на которых принимает неотрицательные значения функция:

1) $f(x) = 2 - \sin x$; 2) $f(x) = \cos\frac{x}{3} - 3$;

3) $f(x) = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2}$; 4) $f(x) = -\mathrm{ctg}2x$.

B

Исследуйте функции и постройте их графики **(14.7—14.10)**:

14.7. 1) $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $f(x) = -\cos\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)$.

14.8. 1) $f(x) = 2\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $f(x) = -3\mathrm{ctg}0,5x$;

3) $f(x) = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

14.9. 1) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $f(x) = \cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$;

3) $f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{5}\right)$.

14.10. 1) $f(x) = 4\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{5}\right)$; 2) $f(x) = -\cos(2x - \frac{2\pi}{3})$;

3) $f(x) = 0,5\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{2\pi}{5}\right)$.

14.11. Найдите область значений функции:

1) $f(x) = \cos 3x \sin 3x$; 2) $f(x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$;

3) $f(x) = \frac{4}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$; 4) $f(x) = \cos^4 3x - \sin^4 3x$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

5) $f(x) = \frac{3}{1 + ctg^2 x}$; 6) $f(x) = 2 - \frac{1}{1 + tg^2 x}$.

14.12. Найдите период функции:

1) $f(x) = 2 + \cos 3x \cdot \sin 3x$; 2) $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$;

3) $f(x) = tg 3x + \sin x + 3$; 4) $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x + ctg 0{,}2x$.

14.13. Постройте график, укажите период, точки максимума и минимума функции:

1) $f(x) = 0{,}5\sin 2x$; 2) $f(x) = -2\cos\frac{x}{3}$; 3) $f(x) = 1{,}5\sin 0{,}2x$;
4) $f(x) = \cos x\, tg x$; 5) $f(x) = \sin x\, ctg x$; 6) $f(x) = |ctg x|$.

C

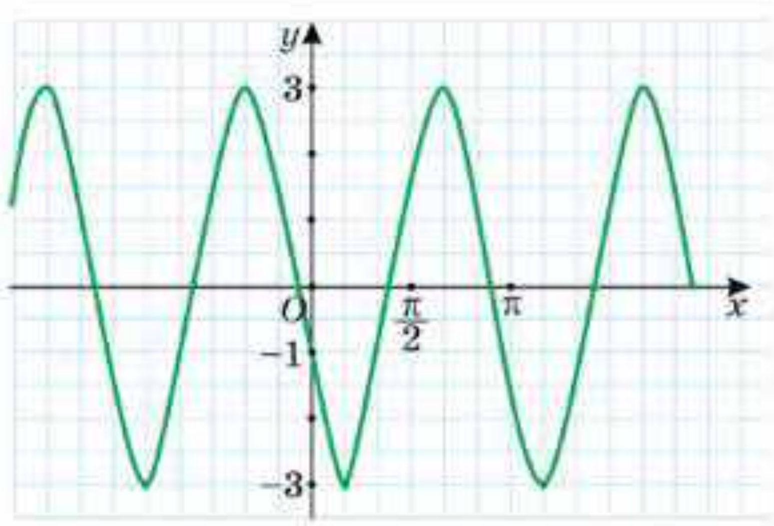
14.14. Тело движется по закону $x(t)$. Найдите амплитуду, период и частоту колебания. Найдите координату нахождения тела в момент времени t_0, если:
1) $x(t) = 2{,}5\cos 2\pi t$, $t_0 = 6{,}5$ с;

2) $x(t) = 5\cos(3\pi t + \frac{\pi}{3})$, $t_0 = 10{,}5$ с.

14.15. Найдите амплитуду, период и частоту напряжения тока, если оно изменяется по закону:
1) $U(t) = 220\cos 20\pi t$; 2) $U(t) = 360\cos 10\pi t$;
3) $U(t) = 110\cos 30\pi t$; 4) $U(t) = 180\cos 60\pi t$,
если напряжение измеряется в вольтах, время — в секундах.

14.16. Найдите амплитуду, период и частоту силы тока, если она изменяется по закону:
1) $I(t) = 5\sin 20\pi t$; 2) $I(t) = 0{,}25\sin 10\pi t$;
3) $I(t) = 10\sin 30\pi t$; 4) $I(t) = 0{,}8\sin 60\pi t$,
если сила тока измеряется в амперах, время — в секундах.

14.17. Найдите числа A, b и c так, чтобы на рисунке 14.2 был изображен график функции $y = A\cos(bx + c)$.

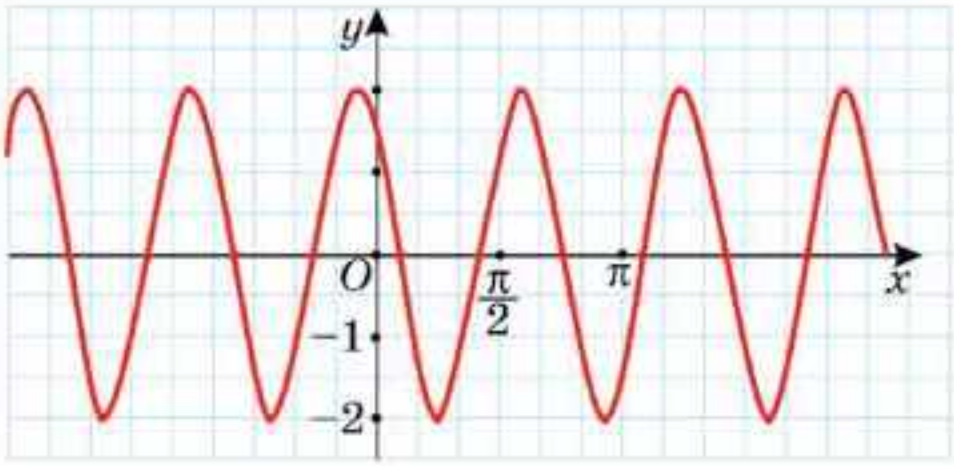


1)

Рис. 14.2

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ



2)

Рис. 14.2

14.18. Исследуйте функцию $y = 3\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ на монотонность на промежутке:

1) $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$; 2) $(1; 2)$; 3) $(-1; 1)$; 4) $\left[-\frac{7\pi}{12}; 0\right]$.

***14.19.** При каких положительных значениях параметра p функция $y = -3\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$:

1) возрастает на $(p; 2p)$; 2) убывает на $\left[p; p + \frac{\pi}{3}\right]$?

***14.20.** При каких значениях параметра p функция $y = 2\sin\left(0{,}5x + \frac{\pi}{6}\right)$:

1) возрастает на $\left(p - \frac{2\pi}{3}; p + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) убывает на $\left[p; p + \frac{\pi}{2}\right]$?

14.21. Расположите в порядке возрастания значений выражения:

1) sin2, sin3, cos4, cos5; 2) sin3, sin4, sin6, sin7.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ

14.22. 1) Тригонометрические функции у древних греков.
2) Тригонометрические функции в Индии.
3) Учение о тригонометрических функциях у народов Центральной Азии и Кавказа.
4) Развитие учения о тригонометрических функциях в Европе.
5) Примеры применения тригонометрических функций в различных областях знаний и практической деятельности человека.

ПОВТОРИТЕ

14.23. Решите относительно переменной x неравенство:

1) $\cos 2 \cdot (2x - 1) < 0$; 2) $\cos 3 \cdot \cos 5 \cdot (x^2 - 1) < 0$.

14.24. Вычислите значение выражения:

1) $\mathrm{tg}2 \cdot \mathrm{ctg}2 + \cos^2\pi - \sin^2 15 - \cos^2 15$;
2) $\cos 1 + \cos(1 + \pi) + \sin 60^\circ - \cos 30^\circ$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

14.25. Найдите знак выражения:

1) $\sin 1 \cdot \cos 2$;
2) $\sin(-3) \cdot \cos 2$;
3) $\sin 2 \cdot \cos 6$;
4) $\sin(-4) \cdot \cos(-3)$.

14.26. Докажите тождество:

1) $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\operatorname{ctg} x - \sin x \cos x} = 2\operatorname{tg}^2 x$;
2) $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\operatorname{tg} x - \sin x \cos x} = 2\operatorname{ctg}^2 x$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Четной функцией является:

A) $f(x) = 5x^4 - \sin 3x$;
B) $f(x) = x^2 + x\sin 3x$;
C) $f(x) = 2 + x\cos 4x$;
D) $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\sin x^2}$.

2. Нечетной функцией является:

A) $f(x) = \cos 3x$;
B) $f(x) = x^3 + \dfrac{\cos^3 x}{\operatorname{tg}^2 x}$;
C) $f(x) = 2x + \dfrac{\cos^3 x}{\operatorname{tg}^2 x}$;
D) $f(x) = \dfrac{2\sin^3 x}{\operatorname{ctg} x^3}$.

3. Наименьший положительный период функции $y = \sin 0{,}2x \cos 0{,}2x$ равен:

A) $\frac{2}{5}\pi$;
B) $2{,}5\pi$;
C) 4π;
D) 5π.

4. Множество значений функции $f(x) = 4 - \sin 7x$ равно:

A) $[3;\ 7)$;
B) $[3;\ 5]$;
C) $(3;\ 7]$;
D) $(2;\ 7]$.

5. Сколько видов преобразований нужно применить к графику функции $y = \cos x$, чтобы построить график функции $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3}) - 2$:

A) 2;
B) 3;
C) 4;
D) 5?

6. Областью определения функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\cos x}$ является:

A) R;
B) R, кроме; $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$;
C) R, кроме $x \neq \pi n,\ n \in Z$;
D) R, кроме $x \neq 2\pi n,\ n \in Z$.

7. Множество значений функции $f(x) = |3 - 4\cos 2x|$ равно:

A) $[0;7]$;
B) $[-1;7]$;
C) $[1;7)$;
D) $[1;7]$.

8. Наименьший положительный период функции $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{4}$ равен:

A) $\frac{1}{4}\pi$;
B) 2π;
C) π;
D) 4π.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

9. Функция $f(x) = 2\cos x + 5$ убывает на множестве:

A) $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$;

B) $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$;

C) $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$, $n \in Z$;

D) $[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n]$, $n \in Z$.

10. Функция $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ является возрастающей на множестве:

A) $(\pi k; \pi + k)$, $k \in Z$;

B) $(2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$;

C) $(-\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$;

D) $(-2\pi + \pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, график функции, уравнение, корень уравнения, координатная плоскость.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3 ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 15. АРКСИНУС, АРККОСИНУС, АРКТАНГЕНС, АРККОТАНГЕНС

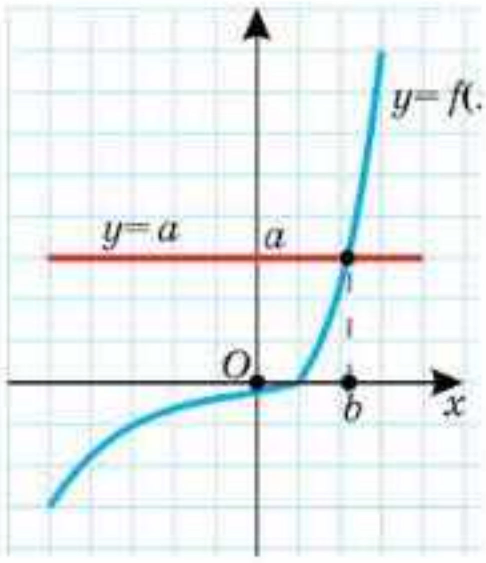
Вы ознакомитесь с понятиями арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса;
научитесь находить значения арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

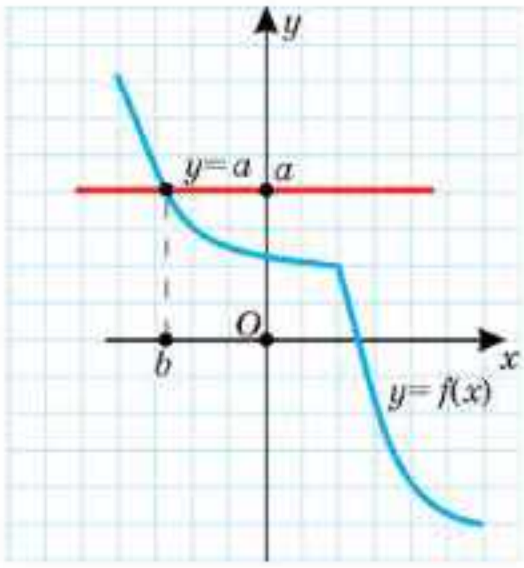
Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс

ВЫ ЗНАЕТЕ: Чтобы решить графически уравнение вида $f(x) = a$, надо построить в одной и той же системе координат графики функций $y = f(x)$ и $y = a$, найти точки пересечения и их абсциссы.

ПРИМЕР **1.** Решением уравнения $f(x) = a$ является число b (рис.15.1).



1)



2)

Рис. 15.1

Теорема (о корне). *Если функция $y = f(x)$ возрастает (или убывает) на некотором числовом промежутке, число а принадлежит множеству значений функции, то уравнение $f(x) = a$ имеет единственный корень на этом числовом промежутке.*

Доказательство. Рассмотрим возрастающую функцию $y = f(x)$ (в случае, если $y = f(x)$ — убывающая функция, рассуждения аналогичны).

Поскольку число a принадлежит множеству значений функции, то существует такое число b, что $f(b) = a$. Надо показать, что b — единственный корень уравнения $f(x) = a$.

Доказательство проведем *методом от противного*. Допустим, что на данном числовом промежутке есть еще число $c \neq b$, такое, что $f(c) = a$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Поскольку $c \neq b$, то или $c < b$, или $c > b$. По условию функция $y = f(x)$ возрастает на данном числовом промежутке, поэтому по определению возрастающей функции соответственно, либо $f(c) < f(b)$, либо $f(c) > f(b)$. Это противоречит равенству $f(c) = f(b) = a$. Следовательно, сделанное предположение неверно и кроме числа b, других корней на данном числовом промежутке у уравнения $f(x) = a$ нет.

Докажите теорему о корне для случая, если $y = f(x)$ — убывающая функция.

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на числовом отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис.15.2). Вы знаете, что на этом числовом отрезке эта функция возрастает и принимает значения от -1 до 1. Тогда по теореме о корне для любого числа a, удовлетворяющего условию: $-1 \leqslant a \leqslant 1$, на числовом отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение $\sin x = a$ имеет единственный корень. Этот корень называют *арксинусом числа a* и обозначают $\arcsin a$ (рис.15.3).

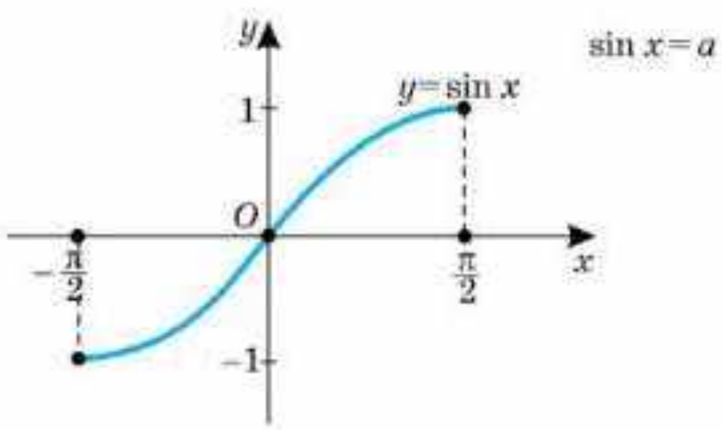


Рис. 15.2

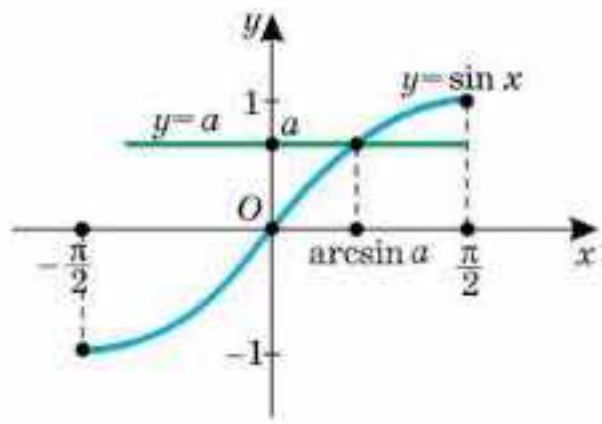


Рис. 15.3

Определение. *Если $|a| \leqslant 1$, то **арксинусом** a называют такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.*

ПРИМЕР

2. $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Из определения следует равенство:

$$\sin(\arcsin a) = a, \text{ где } |a| \leqslant 1 \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

ОБЪЯСНИТЕ

Почему в выражении $\arcsin a$ для числа a вводятся ограничения $|a| \leqslant 1$?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

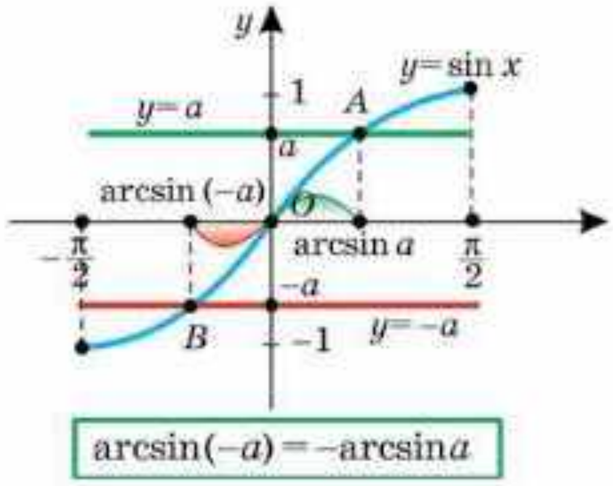


Рис. 15.4

Установите зависимость между значениями выражений: $\arcsin(-1)$ и $\arcsin 1$; $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\arcsin\frac{1}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\arcsin(-a)$ и $\arcsin a$ (рис. 15.4).

Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на числовом отрезке $[0; \pi]$ (рис.15.5). Вы знаете, что на этом числовом отрезке эта функция убывает и принимает значения от −1 до 1. Тогда по теореме о корне для любого числа a, удовлетворяющего условию: $-1 \leqslant a \leqslant 1$, на числовом отрезке $[0; \pi]$ уравнение $\cos x = a$ имеет единственный корень. Этот корень называют *арккосинусом числа a* и обозначают $\arccos a$ (рис. 15.6).

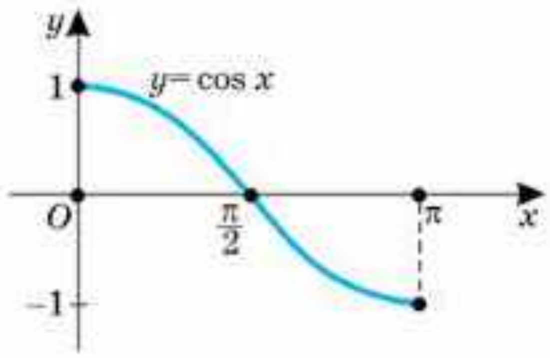


Рис. 15.5

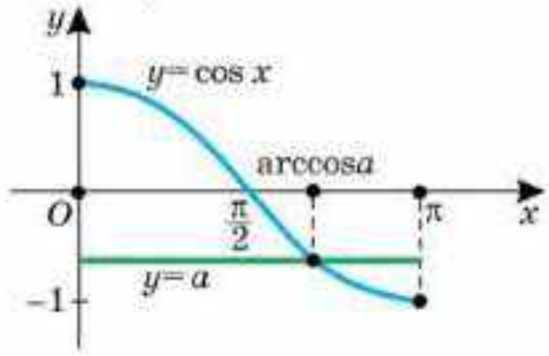


Рис. 15.6

Определение. *Если $|a| \leqslant 1$, то **арккосинусом a** называют такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.*

ПРИМЕР

3. $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Из определения следует равенство:

$$\cos(\arccos a) = a, \text{ где } |a| \leqslant 1 \text{ и } 0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi.$$

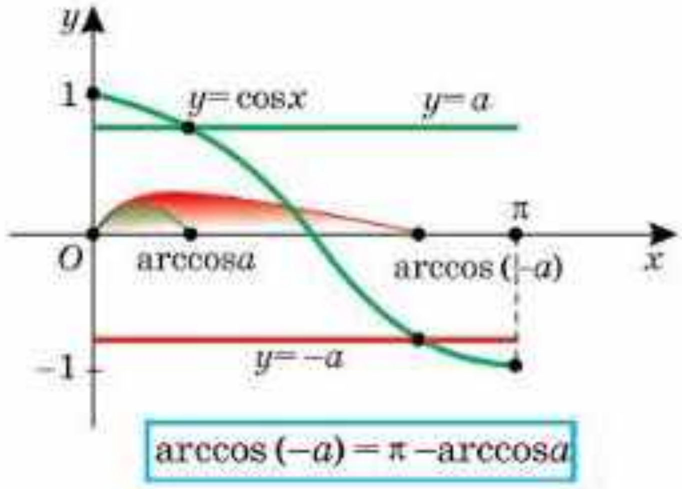


Рис. 15.7

ОБЪЯСНИТЕ

Какие значения в выражении $\arccos a$ может принимать число a? Почему?

Установите зависимость между значениями выражений: $\arccos(-1)$ и $\arccos 1$; $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\arccos\frac{1}{2}$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\arccos(-a)$ и $\arccos a$ (рис. 15.7).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg}x$ на числовом интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 15.8). Вы знаете, что на этом числовом интервале эта функция возрастает и принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда по теореме о корне для любого действительного числа a, на числовом интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ уравнение $\operatorname{tg}x = a$ имеет единственный корень. Этот корень называют *арктангенсом* числа a и обозначают $\operatorname{arctg}a$ (рис.15.9).

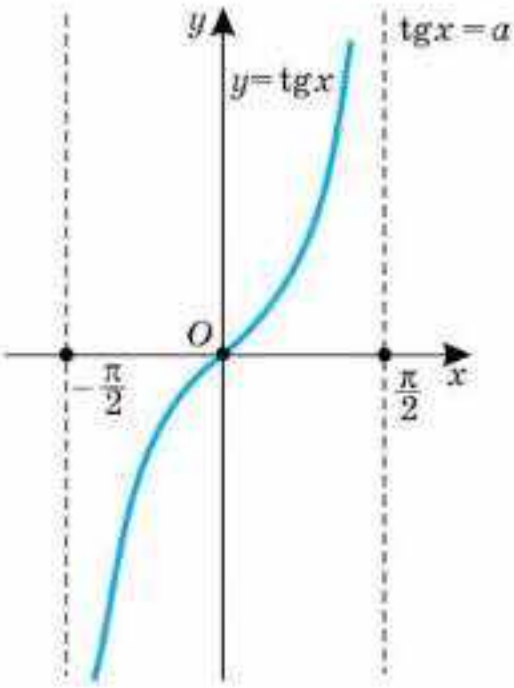


Рис. 15.8

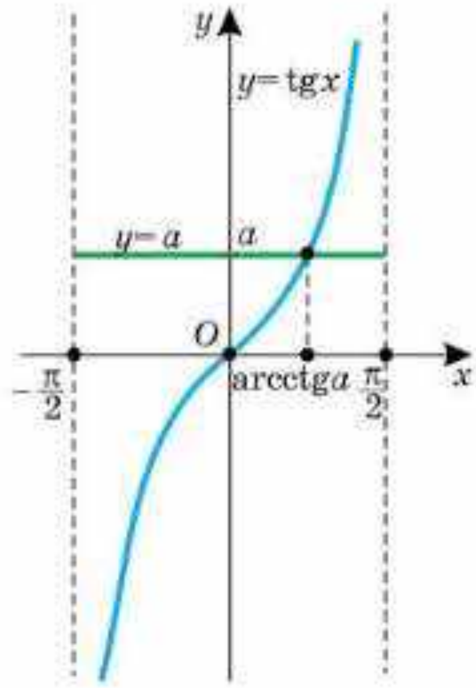


Рис. 15.9

Определение. ***Арктангенсом а*** *называется такое число из числового интервала* $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, *тангенс которого равен* a.

ПРИМЕР

4. $\operatorname{arctg}0 = 0$, $\operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Из определения следует равенство:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a) = a, \text{ где } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}a < \frac{\pi}{2}.$$

ОБЪЯСНИТЕ

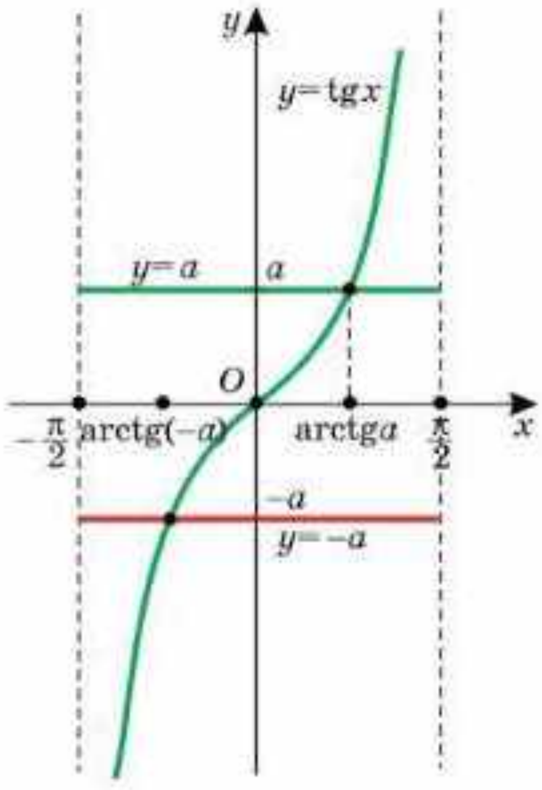
Какие значения в выражении $\operatorname{arctg}a$ может принимать число a? Почему?

Установите зависимость между значениями выражений: $\operatorname{arctg}(-1)$ и $\operatorname{arctg}1$; $\operatorname{arctg}(-a)$ и $\operatorname{arctg}a$ (рис. 15.10).

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg}x$ на числовом интервале $(0; \pi)$ (рис.15.11). Вы знаете, что на этом числовом интервале эта функция убывает и принимает значения от $+\infty$ до $-\infty$. Тогда по теореме о корне для любого действительного числа a, на числовом интервале $(0; \pi)$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ



$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg}a}$

Рис. 15.10

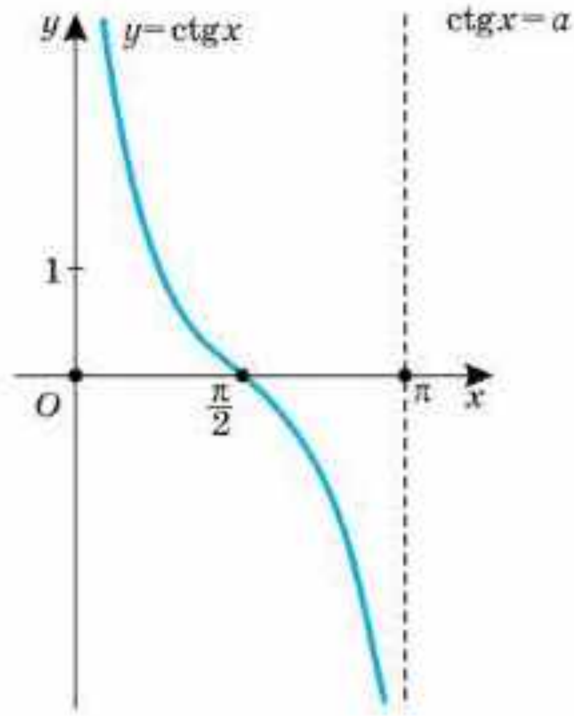


Рис. 15.11

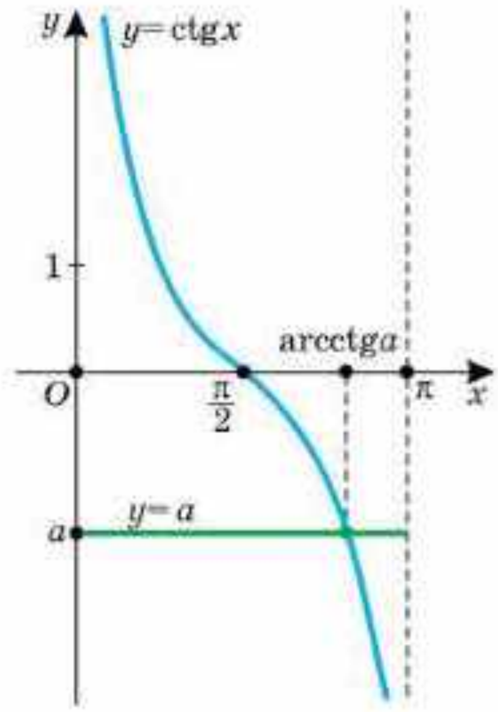
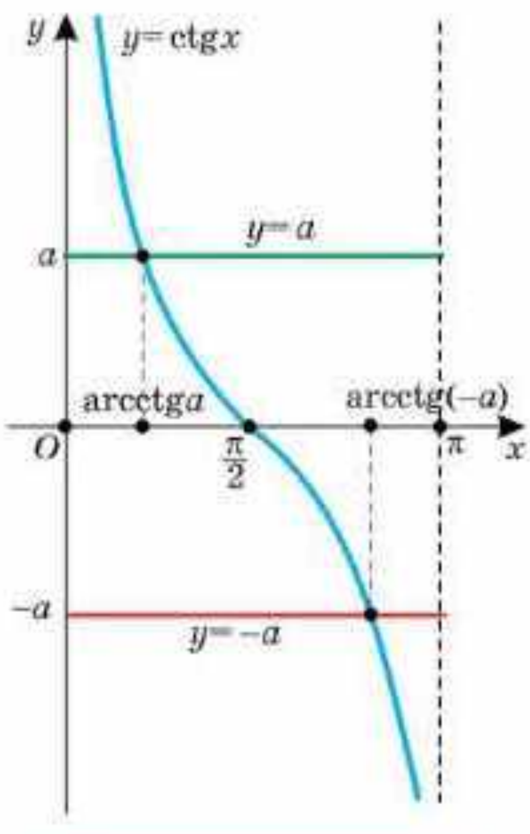


Рис. 15.12

уравнение $\operatorname{ctg}x = a$ имеет единственный корень. Этот корень называют *арккотангенсом числа a* и обозначают arcctg$a$ (рис. 15.12).



$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg}a}$

Рис. 15.13

Определение. ***Арккотангенсом a*** *называется такое число из интервала* (0; π), *котангенс которого равен a*.

ПРИМЕР

5. $\operatorname{arcctg}0 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arcctg}1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$.

Из определения следует равенство:

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}a) = a$, где $0 < \operatorname{arcctg} a < \pi$.

ОБЪЯСНИТЕ

Какие значения в выражении arcctg$a$ может принимать число a? Почему?

Установите зависимость между значениями выражений: arcctg(–1) и arcctg1; arcctg(–a) и arcctg$a$ (рис. 15.13).

1. Сколько корней может иметь уравнение $f(x) = a$? При каком условии это уравнение имеет единственный корень?
2. Сколько корней на числовом промежутке [–π; π] имеет уравнение: 1) $\sin x = a$; 2) $\cos x = a$; 3) $\operatorname{tg}x = a$; 4) $\operatorname{ctg}x = a$?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3. Чему равен:
1) $\arcsin(\sin\alpha)$; 2) $\arccos(\cos\alpha)$; 3) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\alpha)$; 4) $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\alpha)$?

4. Какие значения в выражении:
1) $\arcsin(\sin\alpha)$; 2) $\arccos(\cos\alpha)$; 3) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\alpha)$; 4) $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\alpha)$ может принимать α? Почему?

Упражнения

А

15.1. Найдите число корней уравнения:

1) $x^5 = 6$, если $x \in (-\infty; +\infty)$; 2) $\frac{5}{x-2} = -1$, если $x \in (-\infty; 2)$;
3) $x^8 = 1$, если $x \in [-10; +\infty)$;
4) $\frac{-3}{x+3} = -2$, если $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$;
5) $\cos x = -0{,}4$, если $x \in [-\pi; \pi]$; 6) $\sin x = 0{,}6$, если $x \in (-\pi; 0]$.

Начертите единичную окружность и отметьте точки P_t, для которых значение t удовлетворяет равенству. Найдите значение t, принадлежащее указанным числовым промежуткам **(15.2—15.5)**:

15.2. 1) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t \in [0; \pi]$; 2) $\cos t = 0{,}5$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
3) $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t \in [0; \pi]$; 4) $\cos t = -1$, $t \in [-0{,}3\pi; \pi]$.

15.3. 1) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t \in [-0{,}5\pi; 0]$; 2) $\sin t = 0{,}5$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
3) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t \in [0; \pi]$; 4) $\sin t = 1$, $t \in [0; \pi]$.

15.4. 1) $\mathrm{tg}\, t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $t \in [-0{,}5\pi; 0]$; 2) $\mathrm{tg}\, t = \sqrt{3}$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
3) $\mathrm{tg}\, t = 1$, $t \in [0; 0{,}5\pi]$; 4) $\mathrm{tg}\, t = -1$, $t \in [0; \pi]$.

15.5. 1) $\mathrm{ctg}\, t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $t \in [-0{,}5\pi; 0]$; 2) $\mathrm{ctg}\, t = \sqrt{3}$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
3) $\mathrm{ctg}\, t = 1$, $t \in [0; 0{,}5\pi]$; 4) $\mathrm{ctg}\, t = -1$, $t \in [0; \pi]$.

Найдите значения выражений **(15.6—15.8)**:

15.6. 1) $\arcsin(-1)$; 2) $\arcsin 0$; 3) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

15.7. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

15.8. 1) $\mathrm{arctg}\, 1$; 2) $\mathrm{arctg}\, 0$; 3) $\mathrm{arctg}\,(-1)$; 4) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Имеют ли смысл выражения (**15.9—15.12**):

15.9. 1) $\arcsin(-3)$; 2) $\arcsin 0{,}7$; 3) $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$; 4) $\arcsin\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$?

15.10. 1) $\arccos 1{,}2$; 2) $\arccos(-1)$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$; 4) $\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$?

15.11. 1) $\mathrm{arcctg}(-1)$; 2) $\mathrm{arctg}\,0{,}12$; 3) $\mathrm{arctg}\,21$; 4) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$?

15.12. 1) $\arcsin\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\arccos\left(-3\frac{1}{5}\right)$; 3) $2\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

4) $\arcsin 5$; 5) $\mathrm{arctg}\,17$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$?

15.13. Сравните значения выражений:

1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\arcsin(-1)$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\arcsin 0{,}6$; 4) $\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\arccos(-0{,}5)$.

B

Найдите значения выражений (**15.14—15.16**):

15.14. 1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin(-0{,}5)$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\arccos 0{,}5 + \arcsin(-1)$; 4) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

15.15. 1) $\mathrm{arcctg}(-1) - \mathrm{arctg}\sqrt{3}$; 2) $\mathrm{arctg}(-1) + \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

3) $\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; 4) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

15.16. 1) $\arccos(-1) - \mathrm{arctg}\sqrt{3}$; 2) $\arcsin(-1) + \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; 4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arcctg}(-1)$.

15.17. Вычислите:

1) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\mathrm{arcctg}(-1)$;

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arctg}\,1$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3) $3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arctg}(-1) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) - \arcsin(-1) - 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right)$.

C

15.18. Используя единичную окружность, линии тангенсов и котангенсов, докажите, что для любых чисел t_1 и t_2 из неравенства $t_1 < t_2$ следует неравенство:

1) $\operatorname{arctg} t_1 < \operatorname{arctg} t_2$; 2) $\operatorname{arcctg} t_1 > \operatorname{arcctg} t_2$.

15.19. Докажите, что для любых чисел x_1 и x_2, принадлежащих числовому промежутку $[-1; 1]$, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство:

1) $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$; 2) $\arccos x_1 > \arccos x_2$.

15.20. Расположите в порядке убывания значений выражения:

1) $\arcsin(-0,3)$; $\arcsin(-0,1)$; $\arcsin\frac{\pi}{9}$; $\arcsin\frac{\pi}{6}$;

2) $\arccos(-1)$; $\arccos(-0,2)$; $\arccos\frac{\pi}{5}$; $\arccos\frac{\pi}{9}$.

15.21. Расположите в порядке возрастания значений выражения:

1) $\operatorname{arctg}(-7,3)$; $\operatorname{arctg}(-0,3)$; $\operatorname{arctg}\frac{5\pi}{9}$; $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{6}$;

2) $\operatorname{arcctg}(-111)$; $\operatorname{arcctg}(-2,2)$; $\operatorname{arcctg}\frac{2\pi}{5}$; $\operatorname{arcctg}\frac{5\pi}{9}$.

ПОВТОРИТЕ

15.22. Преобразуйте в произведение и найдите значение выражения:
1) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$; 2) $\cos 152^\circ + \cos 28^\circ$.

15.23. Упростите выражение:
1) $\sin 5\alpha \cdot \sin 3\alpha + \cos 5\alpha \cdot \cos 3\alpha$;
2) $\cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha$.

15.24. Постройте график функции:

1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 3) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения, множество значений, свойства функции, понятие обратной функции и способы ее составления, тригонометрические функции, свойства и графики тригонометрических функций.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§16. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Вы ознакомитесь с понятием и свойствами обратных тригонометрических функций;
научитесь строить графики обратных тригонометрических функций.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Обратные тригонометрические функции

Функции, которые являются обратными к тригонометрическим функциям, называют *обратными тригонометрическими функциями*, или *аркфункциями*.

Определения. *Функция, которая является обратной к функции* $y = \sin x$, *называется* ***арксинусом*** *и обозначается* $\boldsymbol{y = \arcsin x}$.

Функция, которая является обратной к функции $\boldsymbol{y = \cos x}$, *называется* ***арккосинусом*** *и обозначается* $\boldsymbol{y = \arccos x}$.

Функция, которая является обратной к функции $\boldsymbol{y = \mathrm{tg}\, x}$, *называется* ***арктангенсом*** *и обозначается* $\boldsymbol{y = \mathrm{arctg}\, x}$.

Функция, которая является обратной к функции $\boldsymbol{y = \mathrm{ctg}\, x}$, *называется* ***арккотангенсом*** *и обозначается* $\boldsymbol{y = \mathrm{arcctg}\, x}$.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Область определения данной функции для обратной функции становится множеством значений, а множество значений — областью определений.

Графики взаимно-обратных функций расположены симметрично относительно биссектрисы 1 и 3 координатных четвертей.

Функция не имеет обратную функцию, если она не является монотонной.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему для построения графика функции $y = \arcsin x$, используя график функции $y = \sin x$ (рис.16.1), рассматривают только часть синусоиды (рис.16.2)?

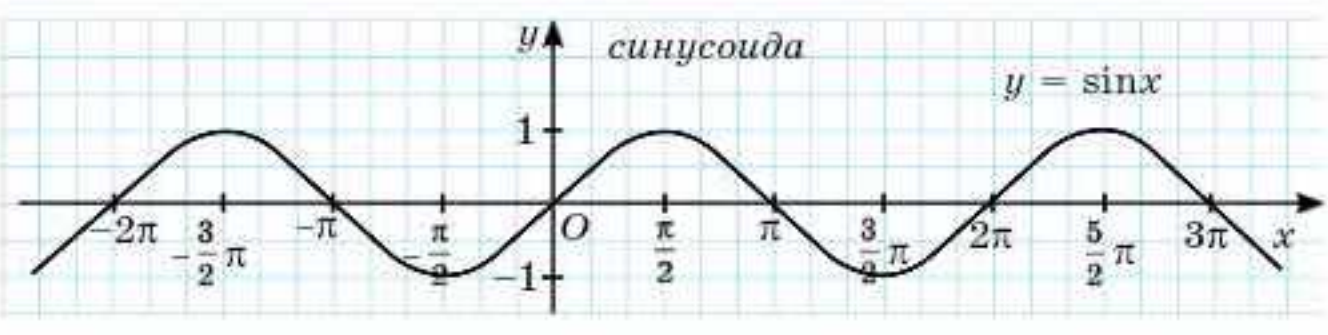


Рис. 16.1

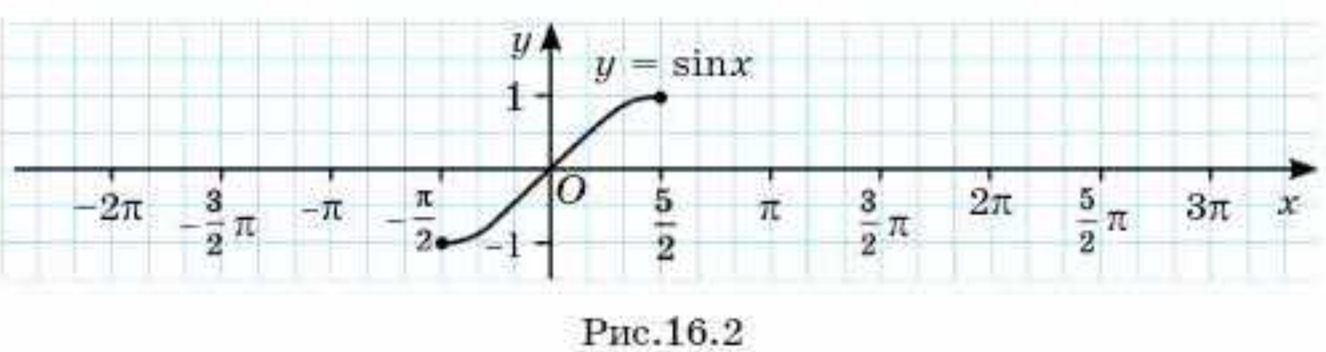


Рис.16.2

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ОБЪЯСНИТЕ

Как построили график функции $y = \arcsin x$ (рис. 16.3)?

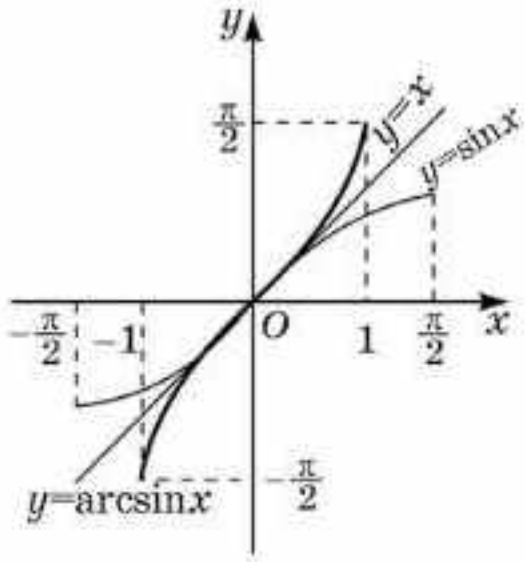


Рис. 16.3

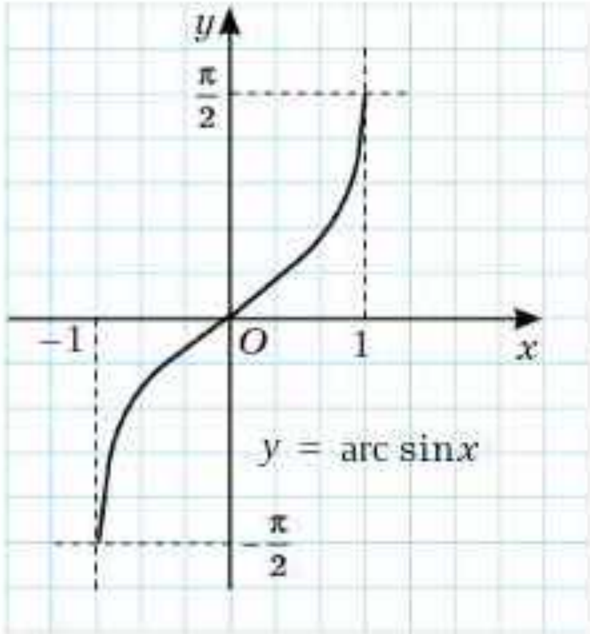


Рис. 16.4

Заполните таблицу, используя график функции $y = \arcsin x$ (рис. 16.4).

Область определения	
Область (множество) значений	
Четность (нечетность)	
Монотонность	
Наибольшее значение	
Наименьшее значение	
Нули функции	

ОБЪЯСНИТЕ

Почему для построения графика функции $y = \arccos x$, используя график функции $y = \cos x$ (рис. 16.5), рассматривают только часть синусоиды (рис. 16.6)?

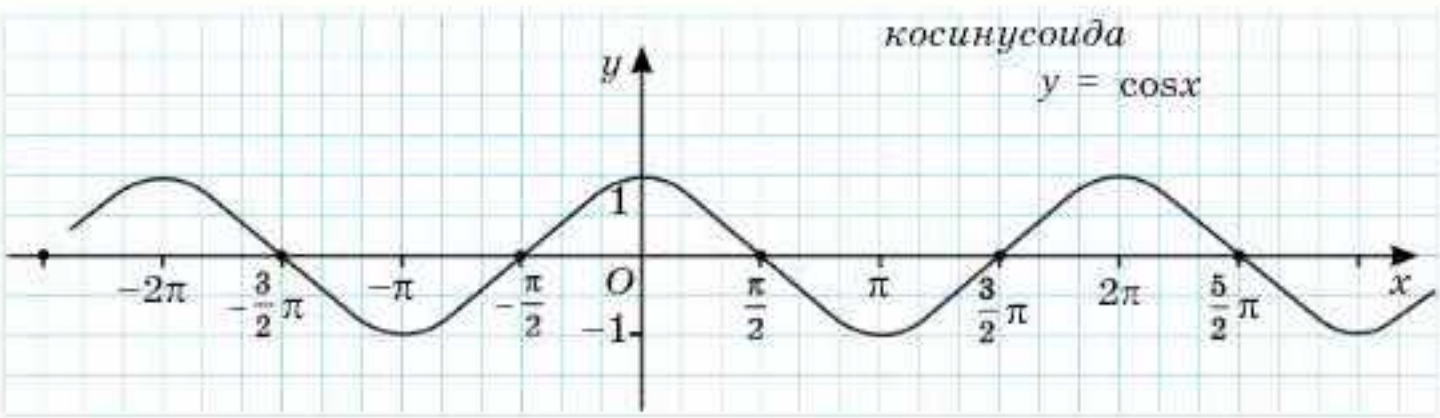


Рис. 16.5

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

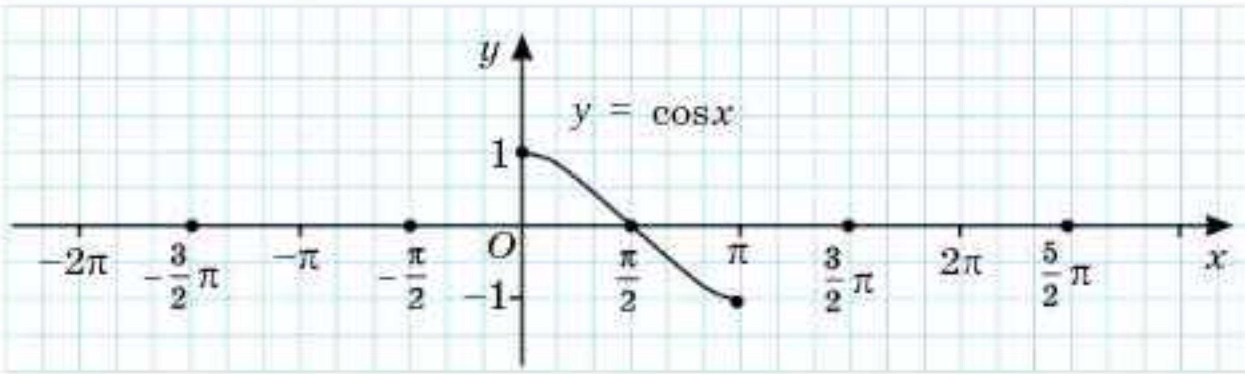


Рис. 16.6

ОБЪЯСНИТЕ

Как построили график функции $y = \arccos x$ (рис. 16.7)?

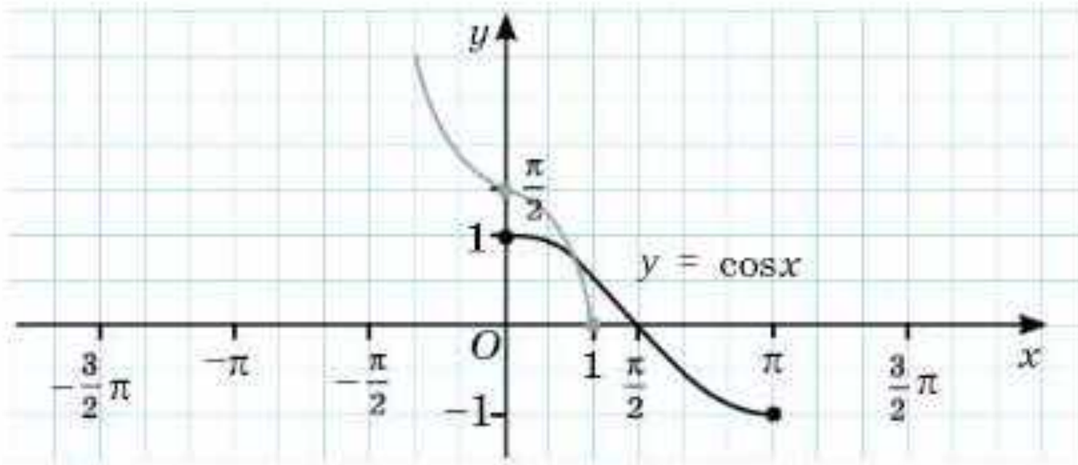


Рис. 16.7

Заполните таблицу, используя график функции $y = \arccos x$ (рис. 16.8).

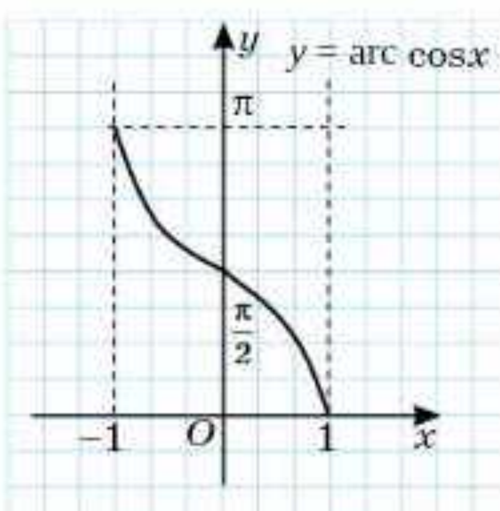


Рис. 16.8

Область определения	
Область (множество) значений	
Четность (нечетность)	
Монотонность	
Наибольшее значение	
Наименьшее значение	
Нули функции	

ОБЪЯСНИТЕ

Почему для построения графика функции $y = \operatorname{arctg} x$, используя график функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 16.9), рассматривают только часть тангенсоиды (рис. 16.10)?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

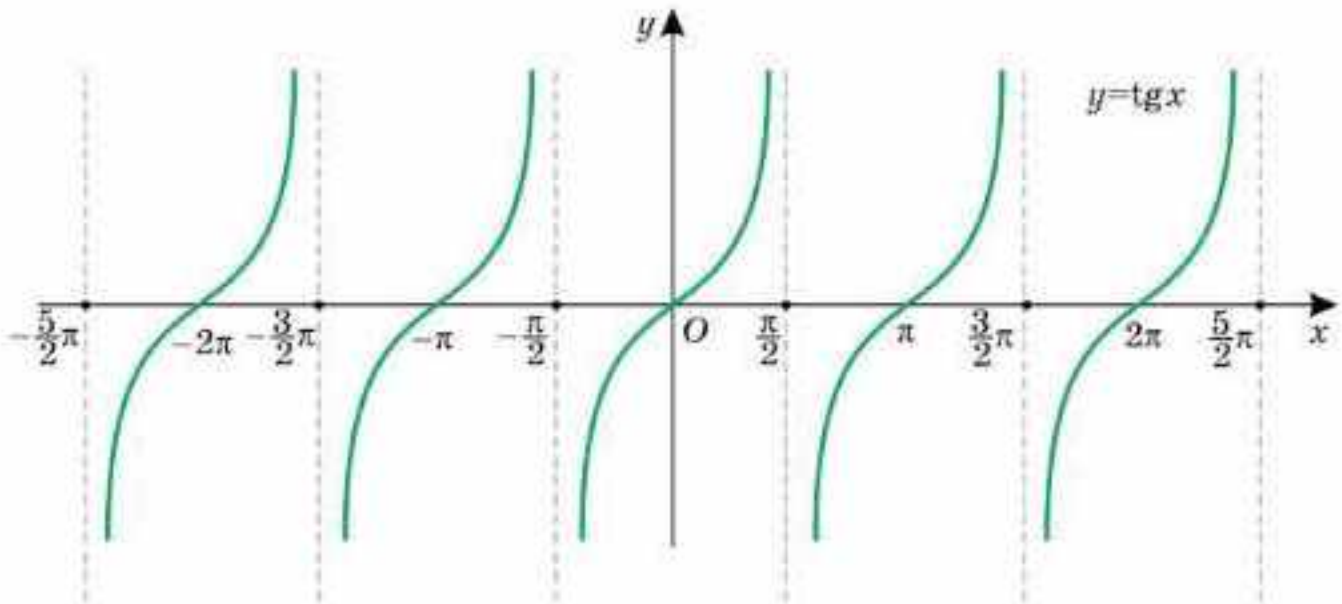


Рис. 16.9

ОБЪЯСНИТЕ

Как построили график функции $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 16.11)?

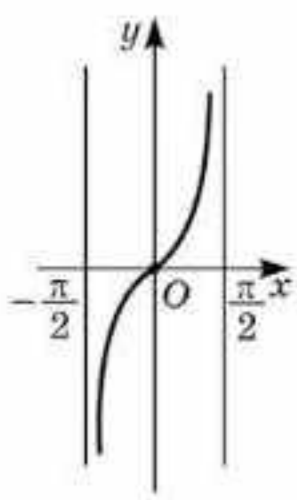


Рис. 16.10

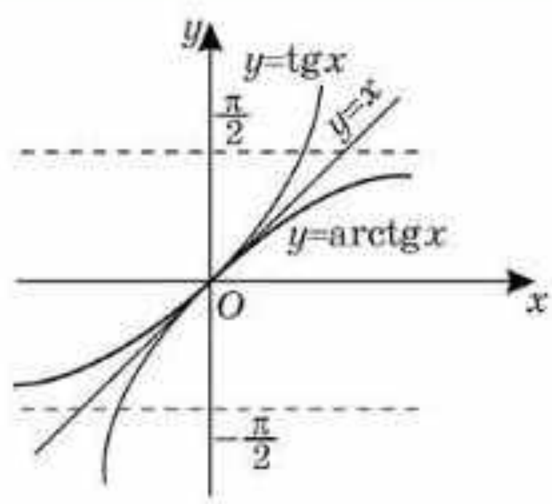


Рис. 16.11

Заполните таблицу, используя график функции $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 16.12).

Область определения	
Область (множество) значений	
Четность (нечетность)	
Монотонность	
Наибольшее значение	
Наименьшее значение	
Нули функции	

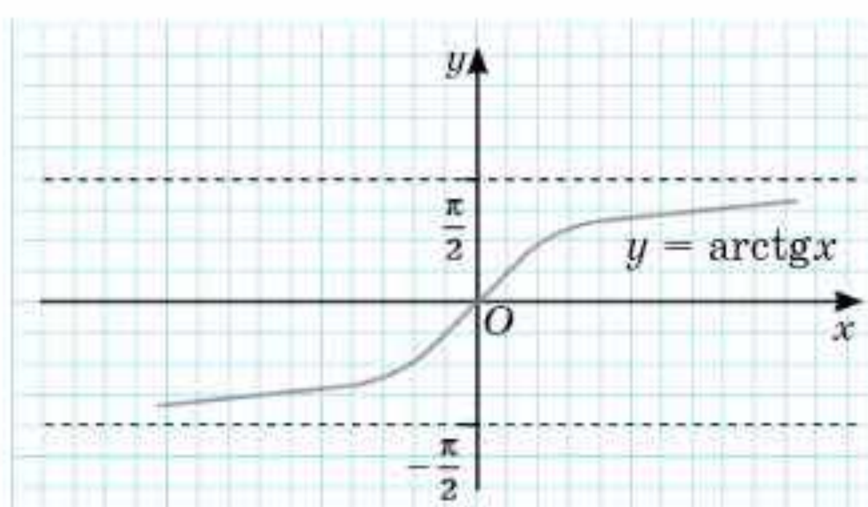


Рис. 16.12

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ОБЪЯСНИТЕ

Почему для построения графика функции $y = \mathrm{arcctg}x$, используя график функции $y = \mathrm{ctg}x$ (рис. 16.13), рассматривают только часть тангенсоиды (рис. 16.14)?

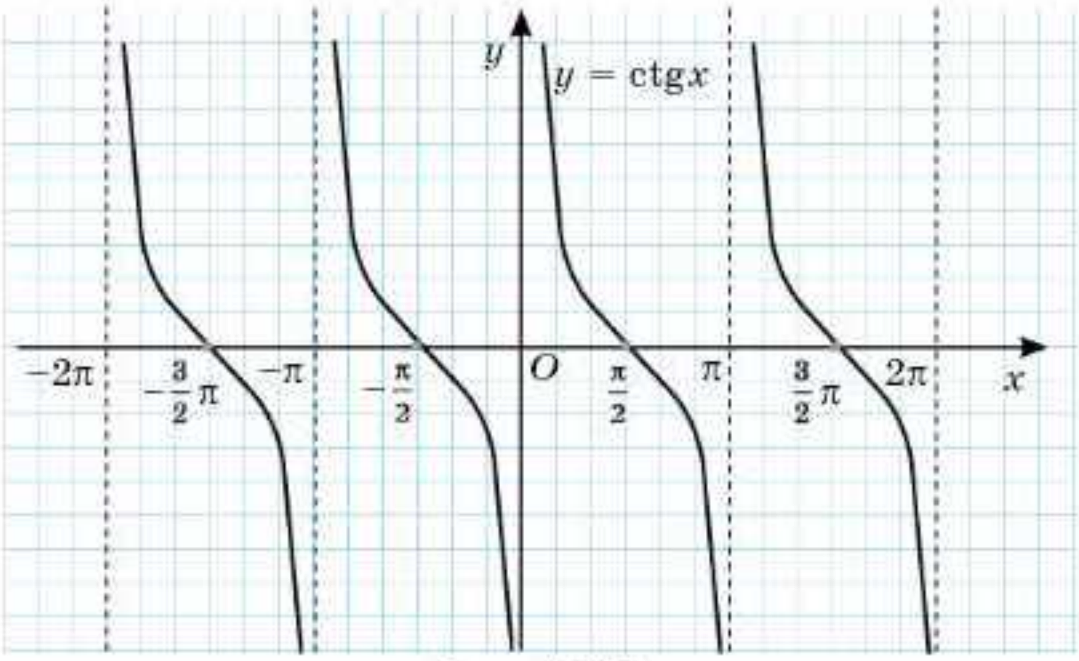


Рис. 16.13

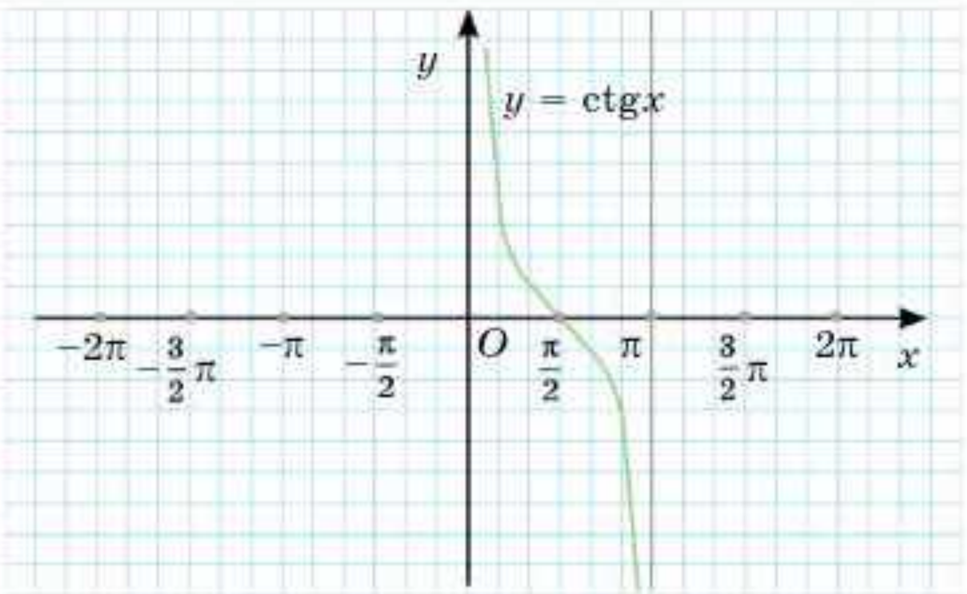


Рис. 16.14

ОБЪЯСНИТЕ

Как построили график функции $y = \mathrm{arcctg}x$ (рис. 16.15)?

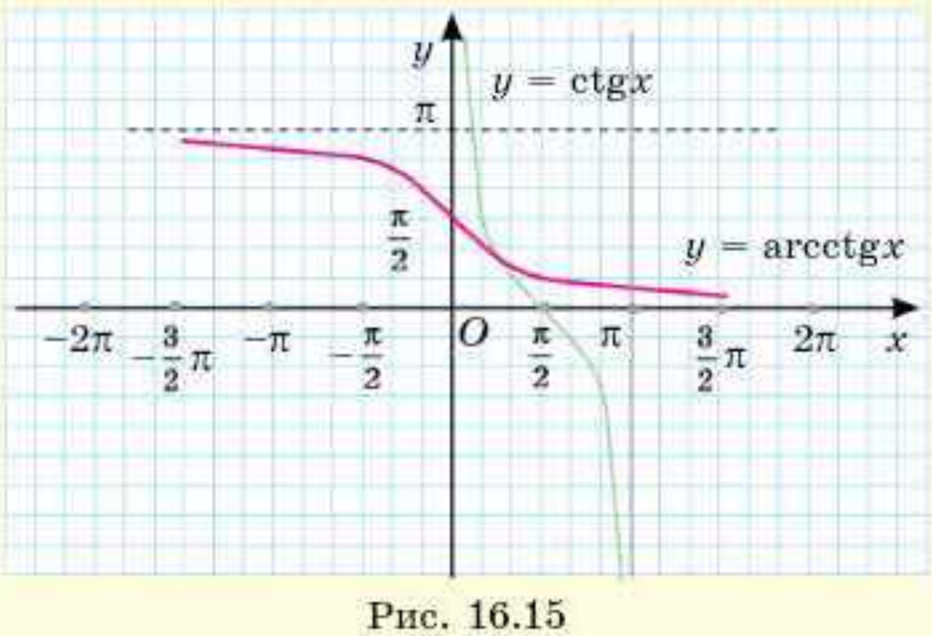


Рис. 16.15

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Заполните таблицу, используя график функции $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 16.16).

Область определения	
Область (множество) значений	
Четность (нечетность)	
Монотонность	
Наибольшее значение	
Наименьшее значение	
Нули функции	

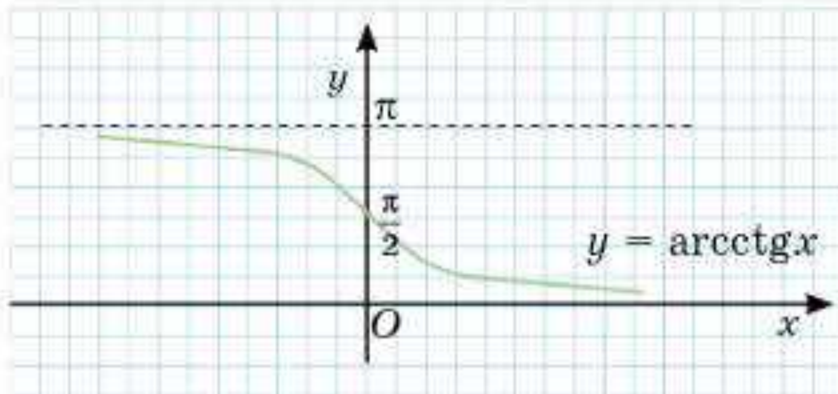


Рис. 16.16

1. Почему при построении графиков обратных тригонометрических функций с помощью соответствующих тригонометрических функций рассматривают только их части?
2. Являются ли периодическими обратные тригонометрические функции?

Упражнения

А

Найдите область определения функций **(16.1—16.3)**:

16.1. 1) $y = \arcsin 2x$; 2) $y = \arcsin(2x - 1)$; 3) $y = 2\arcsin(2x + 1)$; 4) $y = 2 - \arcsin(x + 2)$.

16.2. 1) $y = \arccos 3x$; 2) $y = 2\arccos(2x - 1)$; 3) $y = 2\arccos(2x + 3)$; 4) $y = 2 - \arccos(x - 3)$.

16.3. 1) $y = \operatorname{arctg} 2x$; 2) $y = \operatorname{arctg}(2x - 1)$; 3) $y = 2\operatorname{arctg}(2x - 1)$; 4) $y = 2 - \operatorname{arcctg}(x - 2)$.

16.4. Докажите, что верно числовое равенство:

1) $\arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2}$; 2) $\arcsin 1 + \arccos 0 = \pi$;

3) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$; 4) $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$.

16.5. Найдите множество значений функции:

1) $y = -1 + \arccos(3x - 1)$; 2) $y = \arcsin(2x - 1) + 1$;
3) $y = 2 - \arccos(2x + 3)$; 4) $y = 2 - 2\arcsin(x - 3)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

B

16.6. Найдите область определения функции:

1) $y = \arcsin\frac{1}{x}$; 2) $y = \arcsin\frac{1}{x-2}$;

3) $y = 2\arccos\frac{2}{x+2}$; 4) $y = 2 - \arccos\frac{1}{x-1}$.

16.7. Используя график функции $y = \arcsin x$, расположите выражения в порядке возрастания их значений:

1) $\arcsin\frac{\pi}{6}$; $\arcsin 0,8$; $\arcsin(-0,2)$;

2) $\arcsin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\arcsin 0,9$; $\arcsin(-0,1)$;

3) $\arcsin\frac{\pi}{18}$; $\arcsin 0,3$; $\arcsin(-0,8)$.

16.8. Используя график функции $y = \arccos x$, расположите выражения в порядке возрастания их значений:

1) $\arccos\frac{\pi}{6}$; $\arccos 0,8$; $\arccos(-0,2)$;

2) $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\arccos 0,9$; $\arccos(-0,1)$;

3) $\arccos 0$; $\arccos 0,3$; $\arccos(-0,7)$.

16.9. Исследуйте на четность функцию:

1) $y = 2 - \arcsin\frac{1}{x}$; 2) $y = 2x^2 - \arcsin x^2$;

3) $y = 2\arccos\frac{2}{x^2+1}$; 4) $y = 2\arccos\frac{1}{x+1}$.

16.10. Постройте график функции:

1) $y = -\arcsin x$; 2) $y = 2 - \arcsin x$;

3) $y = 2\arccos x$; 4) $y = -\arccos(-x)$.

C

16.11. Постройте график функции и исследуйте функцию на монотонность.

1) $y = \arcsin(x-1) + 2$; 2) $y = \pi - \arcsin x$;

3) $y = \pi + \arccos x$; 4) $y = -\arccos\frac{x}{2}$.

16.12. Постройте график функции:

1) $y = |\arcsin x - \pi|$; 2) $y = 2\arcsin|x|$;

3) $y = -2\arccos|x|$; 4) $y = \arccos|x-2|$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

16.13. Найдите область значений функции:

1) $y = 2\mathrm{arctg}x$;
2) $y = -\mathrm{arcctg}x$;
3) $y = 2 - \mathrm{arctg}(-x)$;
4) $y = -\mathrm{arcctg}(-x)$.

16.14. Постройте график функции:

1) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 0; \end{cases}$
2) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{arcctg}\ x, \text{ если } x \leqslant 1, \\ \sqrt{x-1}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

16.15. Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} \arccos x, \text{ если } |x| \leqslant 0, \\ \sqrt{|x|}, \text{ если } |x| > 0; \end{cases}$
2) $y = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \sqrt{x-1}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

16.16. Постройте график функции и исследуйте ее на монотонность:

1) $y = |\mathrm{arctg}\ x|$;
2) $y = |2 - \mathrm{arcctg}\ x|$;
3) $y = -2\mathrm{arcctg}|-x|$;
4) $y = \left|\mathrm{arctg}x + \frac{\pi}{2}\right|$.

ПОВТОРИТЕ

16.17. Докажите тождество:

1) $2\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{tg}(3\pi + \alpha) - 2\sin(-\alpha) \cdot \cos\alpha + \cos(270^\circ - 2\alpha) \cdot$
$\cdot\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - 2\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 2$;

2) $1 - \cos 4\alpha + \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha} - (1 - \cos^2 2\alpha) \cdot \frac{1}{\sin^2 2\alpha} + \mathrm{tg}3\alpha \cdot \mathrm{tg}(90^\circ - 3\alpha) = 2$.

16.18. Упростите выражение:

1) $1 + 2\mathrm{tg}3\alpha \cdot \mathrm{ctg}(\pi - 3\alpha) + \sin^2\frac{2\alpha}{3} \cdot \mathrm{ctg}^2\frac{2\alpha}{3} + \sin^2\frac{2\alpha}{3}$;

2) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \mathrm{tg}\ (\pi + \alpha) + \frac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}$;

16.19. Постройте график функции:

1) $y = [\sin x]$;
2) $y = [\cos x]$;
3) $y = [\sqrt{x}]$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Выражение, тождество, формулы тригонометрии, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, свойства тригонометрических функций, свойства обратных тригонометрических функций.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§ 17. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ АРКСИНУС, АРККОСИНУС, АРКТАНГЕНС, АРККОТАНГЕНС

Вы научитесь выполнять преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Преобразование выражений, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс

Рассмотрим нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса чисел, выраженных арксинусом, арккосинусом, арктангенсом, арккотангенсом.

Преобразуем выражение $\cos(\arcsin a)$. Для этого воспользуемся формулой $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, из которой выразим $\cos\alpha$. Получим:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \qquad (1)$$

Поскольку надо преобразовать выражение $\cos(\arcsin a)$, то в формулу (1) вместо α подставим $\arcsin a$, т. е. используем подстановку: $\alpha = \arcsin a$.

Тогда формула (1) примет вид:

$$\cos(\arcsin a) = \pm\sqrt{1 - (\sin(\arcsin a))^2} = \pm\sqrt{1 - a^2}.$$

Поскольку по определению $\arcsin a$ — это число, которое принадлежит числовому отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, и $\cos\alpha$ для чисел из этого числового отрезка принимает только неотрицательные значения, то получим формулу $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}$.

ОБЪЯСНИТЕ

Как выполнили преобразование $\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - (\cos(\arccos a))^2} = \sqrt{1 - a^2}$?

Преобразуем выражение $\operatorname{tg}(\arcsin a)$. Получим:

$$\operatorname{tg}(\arcsin a) = \frac{\sin(\arcsin a)}{\cos(\arcsin a)} = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

ОБЪЯСНИТЕ

Как выполнили преобразования:

1) $\operatorname{ctg}(\arcsin a) = \frac{\cos(\arcsin a)}{\sin(\arcsin a)} = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$;

2) $\operatorname{tg}(\arccos a) = \frac{\sin(\arccos a)}{\cos(\arccos a)} = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$;

3) $\operatorname{ctg}(\arccos a) = \frac{\cos(\arccos a)}{\sin(\arccos a)} = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Преобразуем выражение $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a)$. Для этого воспользуемся формулой $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$. В эту формулу вместо α подставим $\operatorname{arcctg} a$, т. е. используем подстановку: $\alpha = \operatorname{arcctg} a$. Получим $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)} = \frac{1}{a}$.

ОБЪЯСНИТЕ

Как выполнили преобразование $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)} = \frac{1}{a}$?

Преобразуем выражение $\cos(\operatorname{arctg} a)$. Для этого воспользуемся формулой $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. Выразив $\cos\alpha$, получим: $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

Поскольку по определению $\operatorname{arctg} a$ — это число, которое принадлежит числовому интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, и $\cos\alpha$ для чисел из этого числового интервала принимает только положительные значения, то получим формулу $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. В эту формулу вместо α подставим $\operatorname{arctg} a$, т. е. используем подстановку: $\alpha = \operatorname{arctg} a$. Получим $\cos(\operatorname{arctg} a) = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} a)}}$, или $\cos(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

Обоснуйте формулы:

1) $\sin(\operatorname{arcctg} a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$; 2) $\sin(\operatorname{arctg} a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$;

3) $\cos(\operatorname{arcctg} a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

Полученные формулы занесем в таблицу 11.

Таблица 11

α	$\arcsin a$	$\arccos a$	$\operatorname{arctg} a$	$\operatorname{arcctg} a$
1	2	3	4	5
$\sin\alpha$	a, $\lvert a\rvert \leqslant 1$	$\sqrt{1-a^2}$	$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-a^2}$	a, $\lvert a\rvert \leqslant 1$	$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	a	$\frac{1}{a}$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Продолжение

1	2	3	4	5
ctgα	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\frac{1}{a}$	a

Рассмотрим преобразования выражений, используя выведенные формулы.

ПРИМЕР

1. Преобразуем выражение $\sin(2\arcsin a)$.

Решение. Применим формулу синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ и подстановку $\alpha = \arcsin a$. Получим равенство: $\sin(2\arcsin a) = 2\sin(\arcsin a)\cos(\arcsin a)$.

Используя данные таблицы к преобразованию правой части полученного равенства, получим выражение: $2a\sqrt{1-a^2}$.

Значит, $\sin(2\arcsin a) = 2a\sqrt{1-a^2}$.

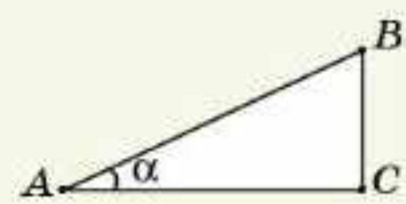
Ответ: $2a\sqrt{1-a^2}$.

ПРИМЕР

2. Найдем значение выражения $\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{2}{7}\right)$.

Решение. Способ 1. Применим формулу синуса от арктангенса: $\sin(\mathrm{arctg}\,a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ и подставим в формулу $a = \frac{2}{7}$.

Получим равенство: $\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{2}{7}\right) = \frac{\frac{2}{7}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{7}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{53}}$.



Способ 2. Построим прямоугольный треугольник ABC, у которого катеты имеют длины 2 и 7 и угол $\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{2}{7}$.

Тогда длина $AB = \sqrt{53}$.

Значит, $\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{2}{7}\right) = \sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{53}}$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{53}}$.

ОБЪЯСНИТЕ

Как выполнили преобразования:

1) $\cos(2\arccos a) = \cos^2(\arccos a) - \sin^2(\arccos a) = 2a^2 - 1$;

2) $\mathrm{tg}(2\,\mathrm{arctg}\,a) = \frac{2\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,a)}{1-\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\,a)} = \frac{2\alpha}{1-a^2}$?

1. Почему в результате выполнения какого-либо тригонометрического преобразования над выражением, содержащим арксинус, арккосинус, арктангенс или арккотангенс, получается алгебраическое выражение?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

2. Какие значения может принимать число a в выражении:
1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a)$; 2) $\operatorname{ctg}(\arccos a)$; 3) $\operatorname{tg}(\arccos a)$; 4) $\cos(\operatorname{arcctg} a)$?

Упражнения

А

17.1. Найдите значение выражения:

1) $\sin(\arcsin 0{,}2)$; 2) $\sin(\arcsin(-0{,}3))$; 3) $\sin\sin\left(-\arcsin\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$;

4) $\cos(\arccos 0{,}6)$; 5) $\cos(\arccos(-0{,}4))$; 6) $\cos\left(-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

17.2. Используя таблицы В. М. Брадиса, найдите значение выражения:

1) $\arcsin 0{,}2354$; 2) $\arcsin 0{,}7386$;
3) $\arccos 0{,}8351$; 4) $\arccos 0{,}3259$.

17.3. Вычислите:

1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\operatorname{arcctg}(-1)$;

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arcctg}1$;

3) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\operatorname{arctg}(-1) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

4) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) - \arccos(-1) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

17.4. Имеет ли смысл выражение:

1) $\sin(\arcsin 2)$; 2) $\sin(\arcsin(-1{,}3))$; 3) $\sin\left(-\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$;

4) $\cos(\arccos 1{,}6)$; 5) $\cos(\arccos(\sqrt{3}-2))$; 6) $\cos(-\arccos 7)$?

Вычислите **(17.5—17.9)**:

17.5. 1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\frac{2}{7}\right)$;

3) $\sin\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$; 4) $\sin\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

17.6. 1) $\cos\left(\arccos\frac{1}{5}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{6}\right)\right)$;

3) $\cos\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$; 4) $\sin\left(2\arccos\frac{1}{3}\right)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

17.7. 1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{2}{3}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{6}\right)$; 4) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

17.8. 1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{2}{7}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{2}{5}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

17.9. 1) $\arcsin(\sin 20^\circ)$; 2) $\arcsin(\sin(-40^\circ))$;
3) $\arccos(\cos 10^\circ)$; 4) $\arccos(\cos(-70^\circ))$.

17.10. Может ли $\arcsin x$ принимать значение:

1) 0; 2) 1; 3) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $-\frac{3\pi}{4}$; 5) 1,7; 6) −1,4?

17.11. Может ли $\arccos x$ принимать значение:

1) −1; 2) 0; 3) $-\frac{2\pi}{5}$; 4) $-\frac{\pi}{4}$; 5) 1,9; 6) 1,3?

17.12. Может ли $\operatorname{arctg} x$ принимать значение:

1) 0; 2) 1,4; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$; 5) −1,7; 6) −12?

17.13. Может ли $\operatorname{arcctg} x$ принимать значение:

1) 0; 2) 1,4; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$; 5) −1,7; 6) 1,2?

B

17.14. При каких значениях параметра a имеет смысл выражение:
1) $\arcsin(2 - a)$; 2) $\arcsin(2a - 3)$; 3) $\arcsin(a^2 - 3)$;
4) $\arccos(2a + 4)$; 5) $\arccos(2a - 7)$; 6) $\arccos(2a^2 - 5)$?

Найдите значения выражений (**17.15—17.17**):

17.15. 1) $\arcsin(\sin 1{,}2)$; 2) $\arcsin(\sin 2)$;
3) $\arcsin(\sin 6)$; 4) $\arcsin(\sin 20)$.

17.16. 1) $\arccos(\cos 1{,}1)$; 2) $\arccos(\cos 2)$;
3) $\arccos(\cos 6)$; 4) $\arccos(\cos 20)$.

17.17. 1) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1{,}2)$; 2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$;
3) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 6)$; 4) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 10)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

C

17.18. Вычислите значение выражения:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{1}{5}\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{4} - \arccos\frac{1}{5}\right)$;

3) $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}2 + \mathrm{arctg}4)$; 4) $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}4 + \mathrm{arcctg}5)$.

17.19. Вычислите:

1) $\mathrm{tg}\left(2\arccos\frac{12}{13}\right)$; 2) $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5} + \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $\sin\left(2{,}5\pi + \mathrm{arctg}\frac{3}{4}\right)$.

17.20. Найдите область определения функции:

1) $\arccos(x + 2) - \arcsin 2x$; 2) $\arccos(2x - 1) - \arcsin(3x + 1)$;
3) $\mathrm{arctg}(x + 2) - \arcsin 3x$; 4) $\mathrm{arcctg}(2x - 1) - \mathrm{arctg}(-3x)$.

17.21. Найдите значение выражения:

1) $\sin(\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \mathrm{arctg}\frac{1}{4})$; 2) $\cos(\mathrm{arctg}2 - \arccos\frac{1}{5})$;

3) $\mathrm{tg}(\arcsin 0{,}2 + \mathrm{arctg}4)$; 4) $\mathrm{ctg}(\arccos 0{,}4 - \mathrm{arcctg}5)$.

ПОВТОРИТЕ

17.22. Постройте график функции:

1) $y = 2\sin\frac{x}{2}$; 2) $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$; 3) $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$; 4) $y = \mathrm{ctg}\frac{3x}{2}$.

17.23. В одной координатной плоскости постройте графики функций и найдите абсциссы их точек пересечения:

1) $y = 2\sin\frac{5x}{2}$ и $y = 3x$; 2) $y = \cos\frac{x}{2}$ и $y = 2 - 3x$;

3) $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ и $y = x + 2$; 4) $y = \mathrm{ctg}(x - 2)$ и $y = 4 - x^2$.

17.24. Решите уравнение:

1) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$; 2) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$;
3) $x^4 + 6x^2 - 16 = 0$; 4) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$.

17.25. Используя способ введения новой переменной, найдите корни уравнения:

1) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 8 = 0$; 2) $(x^2 + x)^2 - 3(x^2 + x) - 10 = 0$;

3) $x^2 + 6|x| - 16 = 0$; 4) $x + 7\sqrt{x} - 18 = 0$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Уравнение, виды уравнения, корни уравнения, формулы тригонометрии, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, свойства тригонометрических функций, свойства обратных тригонометрических функций.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§ 18. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Вы научитесь решать простейшие уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Монотонность, ограниченность, множество значений, уравнение, неравенство

Для решения простейших уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, вспомним свойства обратных тригонометрических функций.

ВСПОМНИТЕ

Таблица 12

Функция	Определена и монотонна на промежутке	Основное равенство	Множество значений
$y = \arcsin x$			
$y = \arccos x$			
$y = \mathrm{arctg}\, x$			
$y = \mathrm{arcctg}\, x$			

ВСПОМНИТЕ

При каких значениях x выполняется равенство:

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; 2) $\mathrm{arctg}\, x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$?

Свойства монотонности и ограниченности являются ключевыми при решении многих уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Рассмотрим решения простейших уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

I. ***Уравнения, левая и правая части которых являются одноименными обратными тригонометрическими функциями.***

Решение уравнений, левая и правая части которых представляют собой одноименные обратные тригонометрические функции различных аргументов, основывается, прежде всего, на таком свойстве этих функций, как монотонность. Известно, что функции $y = \arcsin t$ и $y = \mathrm{arctg}\, t$ монотонно возрастают, а функции $y = \arccos t$ и $y = \mathrm{arcctg}\, t$ монотонно убывают на своих областях определения, поэтому верны утверждения:

1) $\arcsin f(x) = \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leqslant 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leqslant 1; \end{cases}$

2) $\arccos f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leqslant 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leqslant 1; \end{cases}$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3) $\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$;

4) $\operatorname{arcctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

ЗАПОМНИТЕ

Выбор системы при решении уравнений 1 и 2 зависит от того, какое неравенство проще.

ПРИМЕР

1. Решим уравнение $\arcsin(x^2 - 2x - 7) = \arcsin(x - 3)$.

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 7 = x - 3, \\ |x - 3| \leqslant 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ -1 \leqslant x - 3 \leqslant 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -1, \end{array}\right. \\ 2 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$

Отсюда $x = 4$. Выполнив проверку, убеждаемся, что $x = 4$ является корнем уравнения.

Ответ: 4.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему решением уравнения $\arccos(x^2 - 1) = \arccos(x - x^2)$ являются числа $-0{,}5$ и 1?

II. ***Уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями.***

При решении уравнений, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями, пользуются известными тригонометрическими тождествами. При решении таких уравнений можно сразу переходить к уравнению-следствию и после его решения делать проверку.

Пусть нужно решить уравнение $\arcsin f(x) = \arccos g(x)$.

Предположим, что x_0 — решение этого уравнения. Обозначим $\arcsin f(x_0) = \arccos g(x_0)$ через α. Тогда $\sin\alpha = f(x_0)$ и $\cos\alpha = g(x_0)$, откуда $f^2(x_0) + g^2(x_0) = 1$. Следовательно, $\arcsin f(x) = \arccos g(x)$, или $f^2(x) + g^2(x) = 1$.

Поэтому получим равносильное уравнение

$$\arcsin f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow f^2(x) + g^2(x) = 1.$$

ОБЪЯСНИТЕ

Используя формулы $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$, $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$, $\sin^2\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$, как получили, соответственно, следующие равносильные уравнения:

$\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x)\,g(x) = 1$;

$\arcsin f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f^2(x) = \dfrac{1}{g^2(x) + 1}$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

$\operatorname{arctg} f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{f^2(x)+1} = g^2(x);$

$\arcsin f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f^2(x) = \dfrac{g^2(x)}{g^2(x)+1};$

$\arccos f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \dfrac{g^2(x)}{g^2(x)+1}?$

ЗАПОМНИТЕ

Корнем каждого из уравнений $\arcsin f(x) = \arccos g(x)$, $\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x)$, $\arcsin f(x) = \operatorname{arcctg} g(x)$, $\operatorname{arctg} f(x) = \arccos g(x)$ может быть только такое число x_0, для которого $f(x_0) \geqslant 0$ и $g(x_0) \geqslant 0$. В противном случае уравнения не имеют решений.

ПРИМЕР

2. Решим уравнение $\arcsin(3x + 4) = \arccos(2 + x)$.

Решение. Используя равносильное уравнение, получим: $(3x + 4)^2 + (2 + x)^2 = 1$, или $9x^2 + 24x + 16 + 4 + 4x + x^2 - 1 = 0$, или $10x^2 + 28x + 19 = 0$. Корни уравнения: $x_1 = \dfrac{-14 - \sqrt{6}}{10}$ и $x_2 = \dfrac{-14 + \sqrt{6}}{10}$.

Надо учесть, что $\begin{cases} |3x + 4| \leqslant 1, \\ |2 + x| \leqslant 1, \end{cases}$ т. е. $x \in \left[-1\dfrac{2}{3}; -1\right]$, но оба корня являются корнями равносильного уравнения.

Так как выражения возводились в квадрат, то могли появиться посторонние корни. Поэтому для заданного уравнения выполним проверку полученных корней. По определению, множеством значений $\arcsin(3x + 4)$ является отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, а $\arccos(2 + x)$ является отрезок $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\arcsin(3x_1 + 4) = \arcsin\dfrac{-2 - 3\sqrt{6}}{10} \notin \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$,

а $\arccos(2 + x_1) = \arccos\dfrac{6 - \sqrt{6}}{10} \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Следовательно, $x_1 = \dfrac{-14 - \sqrt{6}}{10}$ посторонний корень.

$\arcsin(3x_2 + 4) = \arcsin\dfrac{-2 + 3\sqrt{6}}{10} \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$\arccos(2 + x_2) = \arccos\dfrac{6 + \sqrt{6}}{10} \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Значит, $x_2 = \dfrac{-14 + \sqrt{6}}{10}$ является корнем данного уравнения.

Ответ: $\dfrac{-14 + \sqrt{6}}{10}$.

1. Почему надо учитывать множество допустимых значений переменной в уравнениях, содержащих обратные тригонометрические функции?
2. Обязательно ли проверять полученное значение корня методом подстановки в уравнение?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Упражнения

A

Решите уравнения (**18.1—18.6**):

18.1. 1) $\arcsin 2x = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arcsin 3x = \frac{\pi}{4}$; 3) $\arcsin 2x = 1$; 4) $\arcsin 2x = 0$.

18.2. 1) $\arccos 2x = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos 3x = \frac{\pi}{3}$; 3) $\arccos 4x = \frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos 2x = 0$.

18.3. 1) $\operatorname{arctg} 4x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg} 3x = -\frac{\pi}{3}$; 3) $\operatorname{arcctg} 2x = \frac{\pi}{6}$; 4) $\operatorname{arcctg} 3x = \frac{\pi}{2}$.

18.4. 1) $\arccos(3x - 3{,}5) = \frac{2\pi}{3}$; 2) $\arcsin(x - 2) = -\frac{\pi}{4}$; 3) $\arccos(4 - x) = \frac{\pi}{2}$; 4) $\arcsin(2x + 1) = \frac{\pi}{3}$.

18.5. 1) $\operatorname{arctg}(4x + 1) = \frac{7\pi}{12}$; 2) $\operatorname{arcctg}(4x + 1) = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\operatorname{arcctg}(4 - x) = \frac{\pi}{2}$; 4) $\operatorname{arctg}(2x + 1) = -\frac{\pi}{4}$.

18.6. 1) $\operatorname{arctg}(3 - 4x) = \frac{\pi}{6}$; 2) $\operatorname{arcctg}(4x + 1) = \frac{5\pi}{4}$; 3) $\arccos(4 - 3x) = \frac{\pi}{3}$; 4) $\arcsin(2x - 1) = -\frac{\pi}{6}$.

B

Найдите корни уравнений (**18.7—18.8**):

18.7. 1) $\arccos(3x^2 - 10x + 2{,}5) = \frac{2\pi}{3}$; 2) $\arcsin(3x^2 - 5x + 1) = \frac{\pi}{2}$; 3) $\arccos(3 - x^2) = \pi$; 4) $\arcsin(2{,}5 - x^2) = -\frac{\pi}{6}$.

18.8. 1) $\operatorname{arctg}\left(x^3 - 27x - \sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(3x^2 - 12x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{arcctg}(3x - x^2 + 1) = \frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arcctg}(x^3 - 8x^2 + 15x + 1) = \frac{\pi}{4}$.

18.9. Решите уравнение:

1) $18\operatorname{arctg}^2 x - 3\pi\operatorname{arctg} x - \pi^2 = 0$;

2) $16\operatorname{arcctg}^2 x - 16\pi\operatorname{arcctg} x + 3\pi^2 = 0$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3) $\operatorname{arctg}(x^2 - 9) = \operatorname{arctg}8x$;

4) $\operatorname{arcctg}(x^2 - x) = \operatorname{arcctg}(4x - 6)$.

18.10. Найдите корни уравнения:

1) $8\arccos^2 x + 2\pi\arccos x - \pi^2 = 0$;

2) $3\arcsin^2 x + 2\pi\arcsin x - \pi^2 = 0$;

3) $18\arccos^2 x = 3\pi\arccos x + \pi^2$;

4) $\arcsin^2 x - 2\pi\arcsin x - 3\pi^2 = 0$.

C

18.11. Решите графически уравнение:

1) $\operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$; 2) $\operatorname{arcctg}x = \frac{\pi}{4}x$;

3) $\operatorname{arcctg}x = \frac{\pi}{2} - x$; 4) $\operatorname{arctg}x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$.

18.12. Решите уравнение (**18.12—18.13**):

1) $\arccos x = \operatorname{arctg} x$; 2) $\operatorname{arcctg}x = \operatorname{arctg} x$;

3) $\arccos x = \arcsin x$; 4) $\operatorname{arcctg}x = \arcsin x$.

18.13. 1) $\arccos\frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$; 2) $\arcsin 2x - 3\arcsin x = 0$.

18.14. Найдите корни уравнения:

1) $9\arccos^2 2x - 3\pi\arccos 2x - 2\pi^2 = 0$;

2) $2\arcsin 2x = \arccos 7x$;

3) $2\arccos x - \arccos(2x^2 - 1) = 0$;

4) $\arcsin\frac{2x}{x^2+1} - 2\operatorname{arctg}x = 0$.

18.15. Докажите, что если $x \in (-1; 1)$, то $\arcsin x - \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$.

18.16. Докажите, что $2\arccos\sqrt{\frac{x+1}{2}} = \arccos x$.

18.17. Решите уравнение:

1) $4\operatorname{arctg}x - 6\operatorname{arcctg}x = \pi$; 2) $\operatorname{arcctg}3x = \operatorname{arctg}3x - \frac{\pi}{4}$.

ПОВТОРИТЕ

18.18. Найдите:

1) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}4$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;

3) $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{8}$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

18.19. Найдите:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{7}{9}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

2) $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

18.20. Найдите $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin\beta = \frac{1}{8}$ и $\alpha, \beta \in$ I четверти.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Значение выражения $2\arcsin(-0{,}5) - 2\arccos 2\pi + \mathrm{arctg}\sqrt{3}$ равно:

A) $-\frac{3\pi}{4}$; B) 2π; C) π; D) -2π.

2. Значение выражения $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ равно:

A) $\frac{\pi}{2}$; B) $\frac{2\pi}{3}$; C) $-0{,}5\pi$; D) $-\pi$.

3. Значение выражения $\cos\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ равно:

A) $\frac{\pi}{3}$; B) $0{,}5$; C) $-0{,}5$; D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. При каких значениях x имеет смысл выражение $3x - 3\arccos(2-x)$:

A) $[-2;5]$; B) $[-1; 1]$; C) $[1; 3]$; D) $[-2; 2]$?

5. Значение выражения $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{2}\right)$ равно:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $-0{,}5$; C) $0{,}5$; D) $\frac{\pi}{3}$.

6. Множество значений выражения $5 - 3\mathrm{arcctg}\,x$ равно:

A) $[5 - 3\pi; 5 + 3\pi]$; B) $(5 - 3\pi; 5)$; C) $[3; 3 + 3\pi]$; D) $(5 - 3\pi; 5]$.

7. Корнями уравнения $\arcsin(x^2 - 3) = \frac{\pi}{2}$ являются числа:

A) 2; B) -2; C) -2; 2; D) π.

8. Значение выражения $2\mathrm{arcctg}(-\mathrm{ctg}5)$ равно:

A) $2\pi - 5$; B) 10π; C) $2(2\pi - 5)$; D) -5.

9. Областью определения функции $y = 3\arcsin\frac{1}{x-2}$ является множество:

A) $(-\infty; 1] \cup [3; \infty)$; B) $[1; 3]$; C) $(-\infty; 0] \cup [3; \infty)$; D) $[3; \infty)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

10. Значение выражения arccos(cos4) равно:

A) 4; B) $2\pi+4$; C) $2\pi-4$; D) $4-\pi$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Уравнение, виды уравнений, корни уравнения, формулы тригонометрии, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, свойства тригонометрических функций, свойства обратных тригонометрических функций.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

4 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 19. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Вы научитесь решать простейшие тригонометрические уравнения.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Тригонометрические уравнения

Определение. ***Тригонометрическим уравнением*** *называется уравнение, содержащее неизвестное (переменную) только под знаком тригонометрических функций.*

ПРИМЕР

1. Уравнение $2\sin^2 3x = \sin 3x$ является тригонометрическим уравнением, а уравнение $2\sin 3x = 3x$ не является тригонометрическим уравнением.

Уравнение $2(3x-1)\sin 3x = 3x - 1$ не является тригонометрическим уравнением, но его можно преобразовать в тригонометрическое уравнение. Действительно, выполнив алгебраические преобразования, получим уравнение $(3x-1)(2\sin 3x - 1) = 0$, решение которого сводится к решению двух уравнений, одно из которых тригонометрическое уравнение.

Простейшие тригонометрические уравнения:

$$\cos x = a,\ \sin x = a,\ \mathrm{tg}\, x = a,\ \mathrm{ctg}\, x = a$$

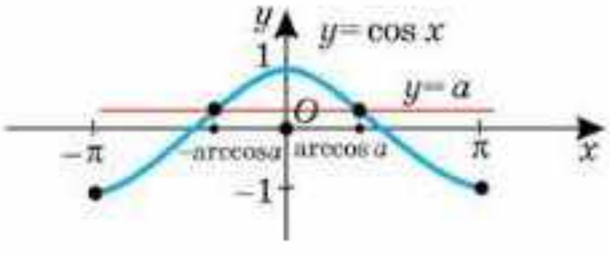
Тригонометрическое уравнение $\cos x = a$

Рассмотрим уравнение вида $\cos x = a$.

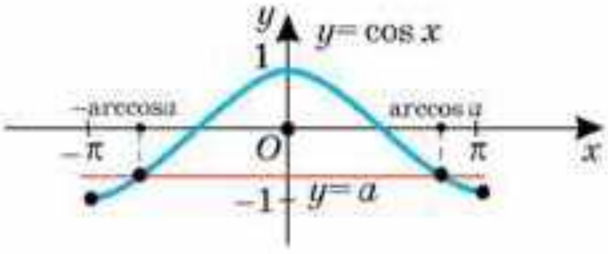
Если $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет решений, так как область значений функции $y = \cos x$ — числовой отрезок $[-1; 1]$.

Если $|a| \leqslant 1$, то уравнение $\cos x = a$ имеет решения. По определению арккосинуса на числовом отрезке $[0; \pi]$ существует одно решение уравнения, и этим решением является $\arccos a$ (рис. 19.1.1).

Так как косинус — это четная функция, то на отрезке $[-\pi; 0]$ уравнение $\cos x = a$ имеет также одно решение $-\arccos a$ (рис. 19.1.2).



1)



2)

Рис. 19.1

Значит, на числовом отрезке $[-\pi; \pi]$ уравнение $\cos x = a$ имеет два решения: $\arccos a$ и $-\arccos a$, которые совпадают при $a = 1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

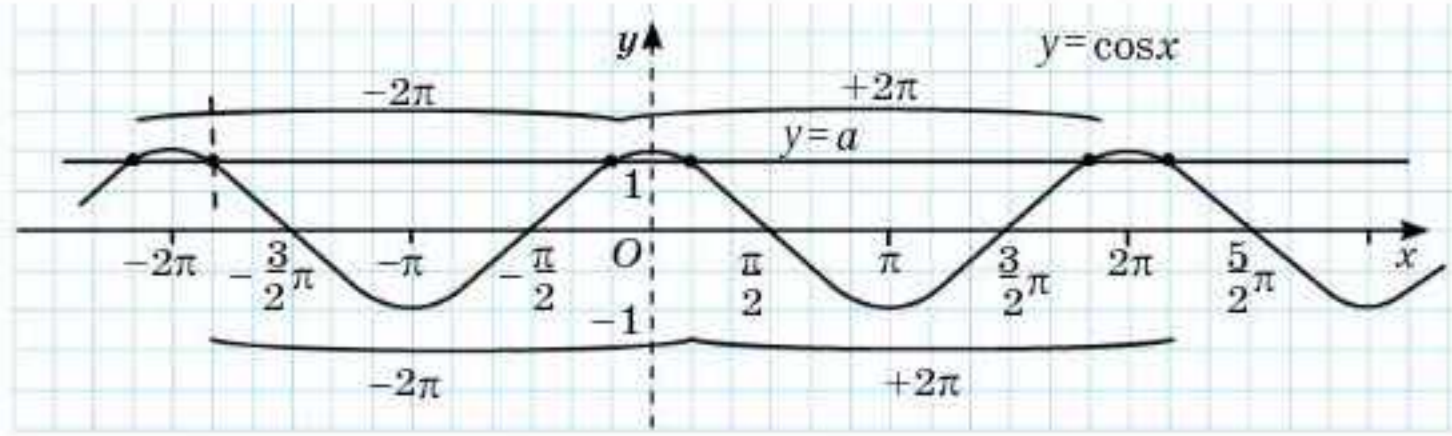


Рис. 19.2

Общая формула для поиска корней уравнения $\cos x = a$ такова:
$x = \pm\arccos a + 2\pi n$, где n — целое число, $|a| \leqslant 1$.

При $a = 1$ числа $\arccos a$ и $-\arccos a$ совпадают, поэтому формулу для нахождения решений уравнения $\cos x = 1$ принято записывать в виде $x = 2\pi n$, где n — целое число (пишут $n \in Z$).

Для уравнения $\cos x = -1$ множество его решений записывается так: $\{\pi + 2\pi n$, где $n \in Z\}$. Для уравнения $\cos x = 0$ множество его решений записывается так: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\right\}$.

Таблица 13

Уравнение	Формула для нахождения решения
$\cos x = a,\ \lvert a \rvert > 1$	$\varnothing$
$\cos x = a,\ \lvert a \rvert \leqslant 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n,\ n \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

ПРИМЕР

1. Решим уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. По условию $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $|a| \leqslant 1$, поэтому по таблице 13 имеем: $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Учитывая, что $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, получим $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

ПРИМЕР

2. Решим уравнение $\cos(2x - \frac{\pi}{5}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. В данном уравнении $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $|a| \leqslant 1$, поэтому по таблице 13 имеем:

$$2x - \frac{\pi}{5} = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k,\ n \in Z.$$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Учитывая, что $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, получим:

$$2x - \frac{\pi}{5} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Теперь перенесем слагаемое $-\frac{\pi}{5}$ в правую часть уравнения, затем все слагаемые разделим на 2:

$2x = \pm\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{5} + 2\pi n,\ n \in Z;$ $\qquad x = \pm\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{10} + \pi n,\ n \in Z.$

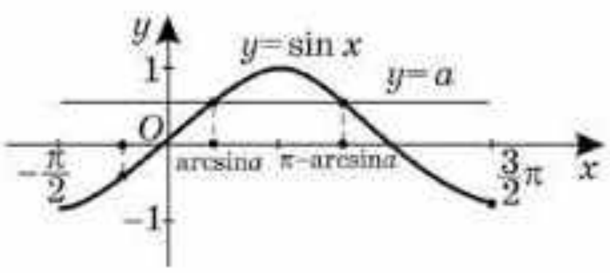
Ответ: $\pm\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{10} + \pi n,\ n \in Z.$

Тригонометрическое уравнение $\sin x = a$

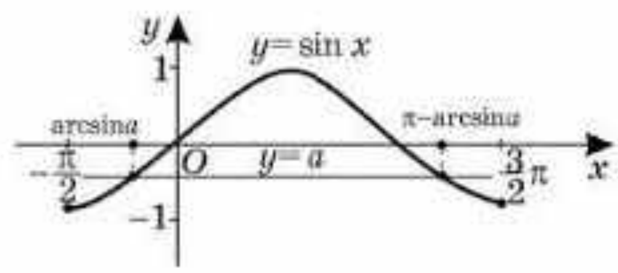
Если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет решений, так как область значений функции $y = \sin x$ – числовой отрезок $[-1; 1]$.

Если $|a| \leqslant 1$, то уравнение $\sin x = a$ имеет решение. По определению арксинуса на числовом отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ существует одно решение уравнения, и этим решением является $\arcsin a$ (рис. 19.3.1).

На промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ убывает и принимает значения от -1 до 1, следовательно, по теореме о корне, на этом промежутке уравнение $\sin x = a$ имеет один корень, равный $\pi - \arcsin a$, это видно из рисунка 19.3.2.



1)



2)

Рис. 19.3

Значит, на числовом отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ уравнение $\sin x = a$ имеет два решения: $x_1 = \arcsin a$ и $x_2 = \pi - \arcsin a$, которые совпадают при $a = 1$ (рис. 19.3).

Учитывая периодичность функции $y = \sin x$ (период равен 2π), получим формулы для записи всех решений уравнения: $x = \arcsin a + 2\pi n$, $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$, где n — целое число (рис.19.4).

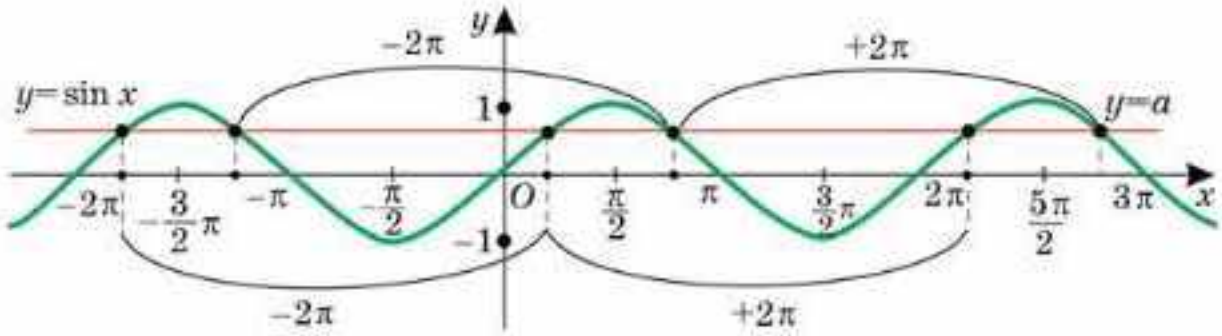


Рис. 19.4

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Эти две формулы можно объединить в одну: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, k — целое число (пишут $k \in Z$).

Для уравнения $\sin x = 1$ множество его решений записывается в виде: $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z\right\}$.

Для уравнения $\sin x = -1$ множество его решений записывается в виде: $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z\right\}$.

Для уравнения $\sin x = 0$ множество его решений записывается в виде: $\{\pi n,\ n \in Z\}$.

Таблица 14

Уравнение	Формула для нахождения решения
$\sin x = a,\ \lvert a \rvert > 1$	$\varnothing$
$\sin x = a,\ \lvert a \rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$\sin x = 0$	$x = \pi n,\ n \in Z$

ПРИМЕР

3. Решим уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. В данном уравнении $a = \frac{1}{2}$, т. е. $|a| \leqslant 1$, поэтому по таблице 14 имеем:

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

Учитывая, что $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, получим:

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Тригонометрическое уравнение $\operatorname{tg} x = a$

При любом значении a на числовом интервале $(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$ имеется ровно одно такое число x, что $\operatorname{tg} x = a$, это $\operatorname{arctg} a$. Следовательно, уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет единственный корень на числовом интервале $(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$. Этот интервал имеет длину π. Такому же числу равен и период функции $y = \operatorname{tg} x$, поэтому все остальные корни уравнения $\operatorname{tg} x = a$ отличаются от найденного корня на πn, где n — целое число ($n \in Z$).

Значит, решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ можно найти по формуле $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, где n — целое число ($n \in Z$), а множество его решений записать так: $\{\operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z\}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПРИМЕР

4. Решим уравнение $\operatorname{tg}x = -\sqrt{3}$.

Решение. $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n,\ n \in Z$ и $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

Тригонометрическое уравнение $\operatorname{ctg}x = a$

При любом значении a на числовом интервале $(0; \pi)$ имеется ровно одно такое число x, что $\operatorname{ctg}x = a$, это $\operatorname{arcctg}a$. Следовательно, уравнение $\operatorname{ctg}x = a$ имеет единственный корень на числовом интервале $(0; \pi)$. Этот интервал имеет длину π. Такому же числу равен и период функции $y = \operatorname{ctg}x$, поэтому все остальные корни уравнения $\operatorname{ctg}x = a$ отличаются от найденного корня на πn, где n — целое число $(n \in Z)$.

Значит, решение уравнения $\operatorname{ctg}x = a$ можно найти по формуле: $x = \operatorname{arcctg}a + \pi n$, где n — целое число $(n \in Z)$.

ПРИМЕР

5. Решим уравнение $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

Решение. $x + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z;\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z;\ x = -\frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z.$

1. Почему для уравнений видов: $\cos x = a$ и $\sin x = a$ при $|a| > 1$ нет корней?
2. Как, используя единичную окружность, можно решать простейшие тригонометрические уравнения?

Упражнения

А

Решите уравнения **(19.1—19.11)**:

19.1. 1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = \frac{1}{2}$;

4) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\cos x = 0$; 6) $\cos x = 1$.

19.2. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{1}{2}$;

4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\sin x = 0$; 6) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19.3. 1) $\operatorname{tg}x = 3$; 2) $\operatorname{tg}x = -2$; 3) $\operatorname{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\operatorname{ctg}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\operatorname{ctg}x = 0$; 6) $\operatorname{ctg}x = -3$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

19.4. 1) $\cos x = -0{,}7$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{4}$; 3) $\cos x = 0{,}3$;
4) $\mathrm{ctg}x = -5$; 5) $\mathrm{tg}x = 0$; 6) $\sin x = -1$.

19.5. 1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$;
4) $\mathrm{tg}0{,}5x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\sin 4x = 0$; 6) $\mathrm{ctg}3x = -1$.

19.6. 1) $\sin 2x = 1{,}2$; 2) $\cos 3x = \sqrt{2}$; 3) $\sin\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$;
4) $\mathrm{tg}5x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\cos 4x = 0$; 6) $\mathrm{ctg}(-3x) = -1$.

19.7. 1) $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos(-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\sin(2(x-1)) = -\frac{1}{2}$; 4) $\mathrm{tg}(0{,}5x + 2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
5) $\sin(4x - 1) = 0$; 6) $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{4} - 2x) = 1$.

19.8. 1) $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos(2 - 3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\sin(3(x+1)) = \frac{1}{2}$; 4) $\mathrm{tg}(5x - 2) = -\sqrt{3}$;
5) $\sin(4x - 3) = -1$; 6) $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{3} + 3x) = 1$.

19.9. 1) $\sin 3x \cdot \cos 4x + \cos 3x \cdot \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2) $\sin 5x \cdot \cos 3x - \cos 5x \cdot \sin 3x = -0{,}5$;
3) $\cos 8x \cdot \cos 4x + \sin 8x \cdot \sin 4x = -\frac{1}{2}$;
4) $\cos 3x \cdot \cos 4x - \sin 3x \cdot \sin 4x = \frac{1}{2}$.

19.10. 1) $\sin x + \sin 3x = 0$; 2) $\sin 7x - \sin 3x = 0$;
3) $\cos 3x + \cos x = 0$; 4) $\cos 3x - \cos x = 0$.

19.11. 1) $\sin 3x \cdot \cos 3x = 0{,}5$; 2) $\cos^2 2x - \sin^2 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\sin 2x \cdot \cos 2x = -\frac{1}{2}$; 4) $\sin^2 3x - \cos^2 3x = -\frac{1}{2}$.

B

19.12. Найдите решение уравнения на указанном интервале:
1) $\cos 4x + \sin 2x = 0$, $90^\circ < x < 180^\circ$;
2) $\sin 5x + \cos 4x = 0$, $270^\circ < x < 360^\circ$.
3) $\sin 5x - \cos 4x = 0$, $360^\circ < x < 450^\circ$;
4) $\cos 6x - \sin 3x = 0$, $90^\circ < x < 180^\circ$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

19.13. Найдите корни уравнения, принадлежащие указанному интервалу:

1) $\sin(x - 450^\circ) - \cos(3x - 180^\circ) = 0, \quad 0^\circ < x < 180^\circ;$

2) $\sin(x + 270^\circ) - \cos(3x + 720^\circ), \quad 40^\circ < x < 90^\circ;$

3) $\cos(-5x - 180^\circ) - \sin(4x + 630^\circ), \quad 0^\circ < x < 90^\circ;$

4) $\cos(4x - 180^\circ) - \sin(2x + 90^\circ) = 0, \quad 180^\circ < x < 270^\circ.$

19.14. Решите уравнение, используя способ понижения степени и формулы приведения:

1) $\cos^2(7\pi + x) = \frac{1}{2};$ 2) $\sin^2(4{,}5\pi - x) = \frac{3}{4};$

3) $\mathrm{tg}^2(5\pi + 3x) = 3;$ 4) $\cos^2(7{,}5\pi - 2x) - \frac{3}{4} = 0.$

C

19.15. Решите уравнение и запишите корни, принадлежащие указанному интервалу:

1) $\frac{\cos 7x}{\sin 2x} - 1 = 0, \quad 70^\circ < x < 150^\circ;$

2) $\frac{\sin 2x}{\cos 3x} - 1 = 0, \quad 0^\circ < x < 180^\circ;$

3) $\frac{\sin 24x}{\cos 6x} - 1 = 0, \quad 10^\circ < x < 30^\circ;$

4) $\frac{\cos 3x}{\sin 2x} - 1 = 0, \quad 180^\circ < x < 270^\circ.$

19.16. Найдите число корней уравнения графическим способом:

1) $\cos(2x - 1) = x^2 - 2x + 5;$ 2) $\cos(2x + 1) = 3 - x^2 - 3x;$

3) $\sin(x + 2) = 3 - x^2 - 2x;$ 2) $\mathrm{tg}(x + 2) = 3 - 2x.$

19.17. Найдите корни уравнения:

1) $\cos\frac{3\pi}{x^2} = 0;$ 2) $\sin^2\frac{\pi x}{2} = \frac{1}{2};$ 3) $\sin 2x \cdot \mathrm{tg}x = 0$, при $90^\circ < x \leqslant 180^\circ.$

19.18. Графическим способом решите уравнение:

1) $\arccos x = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2};$

2) $\mathrm{arctg}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x;$

3) $2\arcsin x = \pi + 1 - x.$

19.19. Найдите число корней уравнения:

1) $3x - 1 = \mathrm{ctg}0{,}2x;$ 2) $x^2 - 4x = \mathrm{tg}0{,}4x;$

3) $x^2 - 2 = \sin\frac{x}{2};$ 4) $1 - x^2 = \cos\frac{x}{2}.$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПОВТОРИТЕ

19.20. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{6x - x^2} + \dfrac{1}{\sin x - \frac{1}{2}}$; 2) $y = \sqrt{9x - 14 - x^2} + \dfrac{1}{\sin x}$.

19.21. Постройте график функции:

1) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 2$; 2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$;

3) $y = \mathrm{tg}\frac{x}{3} + 3$; 4) $y = 3 + \mathrm{ctg}\frac{x}{3}$.

19.22. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции:

1) $y = 2\sin(x + \pi)$ и прямой $y = -0,5$;

2) $y = 2\cos(x + \frac{\pi}{3})$ и прямой $y = \sqrt{3}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Способы решения уравнений и систем уравнений, способы преобразования выражений, тригонометрические тождества, формулы корней простейших тригонометрических уравнений.

§20. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Способ разложения на множители

Вы научитесь решать тригонометрические уравнения с помощью разложения на множители.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Тригонометрические уравнения; разложение на множители

ПРИМЕР

1. Решим уравнение $2\sin^2 3x = \sin 3x$.

Решение. Перенесем все члены уравнения в его левую часть и вынесем общий множитель за скобки. Получим уравнение $\sin 3x(2\sin 3x - 1) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0,\\ \sin 3x = \frac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}3x = \pi n,\ n \in Z,\\ 3x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi n}{3},\ n \in Z,\\ x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi n}{3},\ n \in Z;\ (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z\right\}$.

Примечание. Если во время решения получим совокупность нескольких серий решений, надо проверить, можно или нельзя их записать одной общей формулой. Для этого нужно использовать тригонометрическую окружность.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПРИМЕР 2. Совокупность решений уравнений $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z; \\ x = \pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$ можно записать одной общей формулой $x = \frac{\pi}{2}t$, $t \in Z$, так как решения первого и второго уравнения можно объединить (рис. 20.1).

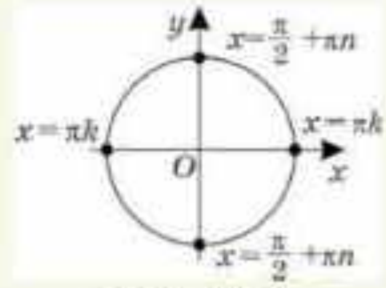


Рис. 20.1

Замена переменной. Тригонометрические уравнения, которые сводятся к квадратным уравнениям

Вы научитесь решать тригонометрические уравнения, приводимые к квадратному уравнению.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Тригонометрические уравнения; замена переменной; квадратное уравнение

ПРИМЕР 3. Решим уравнение $6\sin^2 x + 5\cos x - 7 = 0$.

Решение. Приведем уравнение $6\sin^2 x + 5\cos x - 7 = 0$ к алгебраическому виду относительно тригонометрической функции $y = \cos x$. Для этого воспользуемся основным тригонометрическим тождеством: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Поскольку $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то уравнение $6\sin^2 x + 5\cos x - 7 = 0$ примет вид: $6(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 7 = 0$, или $6\cos^2 x - 5\cos x + 1 = 0$.

Используем замену: обозначим $\cos x$ буквой t, т. е. $\cos x = t$, при этом $|t| \leqslant 1$. Тогда получим алгебраическое уравнение $6t^2 - 5t + 1 = 0$, решением которого являются числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

Выполним обратную замену: $\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z;\ \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z\right\}$.

Однородные уравнения

Вы научитесь решать однородные тригонометрические уравнения.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Однородное тригонометрическое уравнение

Рассмотрим уравнения вида: $a\cos x + b\sin x = 0$; $a\sin^2 x + b\cos^2 x + d\sin x\cos x = 0$; $a\sin^3 x + b\sin x\cos^2 x + d\sin^2 x\cos x = 0$ и т. п.

В первом уравнении $a\cos x + b\sin x = 0$ каждое слагаемое в его левой части относительно $\sin x$ и $\cos x$ первой степени, а правая часть равна 0. Говорят, что это *однородное уравнение первой степени относительно* $\sin x$ и $\cos x$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Во втором уравнении $a\sin^2 x + b\cos^2 x + d\sin x\cos x = 0$ каждое слагаемое в его левой части относительно $\sin x$ и $\cos x$ второй степени, а правая часть равна 0. Говорят, что это *однородное уравнение второй степени относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$.

В третьем уравнении $a\sin^3 x + b\sin x\cos^2 x + d\sin^2 x\cos x = 0$ каждое слагаемое в его левой части относительно $\sin x$ и $\cos x$ третьей степени, а правая часть равна 0. Говорят, что это *однородное уравнение третьей степени относительно* $\sin x$ и $\cos x$.

Приведите пример уравнения, у которого в его левой части два слагаемых, содержащих только $\sin x$ или $\cos x$, и каждое из них относительно $\sin x$ и $\cos x$ четвертой степени, а правая часть равна 0.

Определение. *Уравнение, у которого сумма показателей степеней при* $\sin x$ *и* $\cos x$ *у всех членов в его левой части одинакова, а правая часть равна* 0, *называется* ***однородным тригонометрическим уравнением относительно*** $\sin x$ ***и*** $\cos x$.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему уравнение $a\sin^2 x + b\cos^2 x + d\sin x \cos x = 1$ не является однородным?
Как привести это уравнение к однородному уравнению второй степени?
Почему $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не могут равняться нулю?

Любое однородное тригонометрическое уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$ можно привести к алгебраическому уравнению следующим образом:

АЛГОРИТМ

1) Разделить обе части уравнения на $\cos^k x \neq 0$ ($\sin^k x \neq 0$), где k степень уравнения. Получим равносильное ему уравнение, содержащее $\operatorname{tg} x$ ($\operatorname{ctg} x$) в каждом слагаемом левой части;

2) обозначить $\operatorname{tg} x$ ($\operatorname{ctg} x$) через, например y, получить алгебраическое уравнение.

ПРИМЕР

4. Решим однородное уравнение $\sin^2 x + 2\cos^2 x + 3\sin x \cos x = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$. Получим равносильное ему уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$. Действительно, $\cos x \neq 0$, в противном случае и $\sin x = 0$, и $\cos x = 0$, а этого быть не может, так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Обозначим $\operatorname{tg} x$ через y, получим алгебраическое уравнение $y^2 + 3y + 2 = 0$, решением которого являются числа -1 и -2.

Используя подстановку $\operatorname{tg} x = y$, найдем x. $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = -1,\\ \operatorname{tg} x = -2.\end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,\\ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z.\end{array}\right.$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z\right\}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Решение уравнений с помощью подстановки

Вы научитесь решать тригонометрические уравнения с помощью универсальной подстановки.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Тригонометрические уравнения; подстановка

Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = c$ можно привести к алгебраическому, выразив синус и косинус через тангенс половинного угла по формулам:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \text{ и } \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \text{ используя подстановку } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = y.$$

ПРИМЕР

5. Решим уравнение $\sin x + \cos x = -1$.

Решение. Выразим синус и косинус через одну функцию — тангенс.

Получим уравнение $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = -1.$

Используя подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$, получим уравнение:

$$\frac{2y}{1+y^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2} = -1, \text{ или } \frac{2y+1-y^2}{1+y^2} + \frac{1+y^2}{1+y^2} = 0, \text{ или } \frac{2y+1-y^2+1+y^2}{1+y^2} = 0.$$

Решением этого уравнения является число -1. Используя подстановку и равенство $y = -1$, получим уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$, или $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. Тогда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Поскольку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не существует для чисел $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, а $\sin x$ и $\cos x$ существуют для любых действительных чисел x, то обязательно надо проверить, чтобы решения $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ не были потеряны.

Проверка. $\sin(\pi + 2\pi n) + \cos(\pi + 2\pi n) = \sin\pi + \cos\pi = 0 + (-1) = -1$. Значит, решением уравнения $\sin x + \cos x = -1$ является множество действительных чисел x, удовлетворяющих условиям $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$ и $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$ и $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

Рассмотрим решение уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$ **способом введения вспомогательного угла.**

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Тригонометрические уравнения; вспомогательный аргумент

Вы научитесь решать тригонометрические уравнения способом введения вспомогательного аргумента.

Этот способ основывается на использовании известного тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Поскольку $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то можно использовать подстановку $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$. (1)

Преобразуем левую часть равенства $a\sin x + b\cos x = c$ следующим образом: вынесем за скобки $\sqrt{a^2+b^2}$.

Получим уравнение: $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = c$.

Используя подстановку (1), получим уравнение $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha) = c$ или $\sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. (2)

Уравнение (2) имеет решение, если $a^2 + b^2 \geqslant c^2$.

Тогда $x = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k - \alpha$, $k \in Z$. Используя формулу $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и подстановку (1), получим $\mathrm{tg}\alpha = \frac{b}{a}$. Тогда $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$.

ПРИМЕР

6. Решим уравнение $\sin x + \cos x = -1$ способом введения вспомогательного угла.

Решение. В этом уравнении $a = b = 1$, поэтому $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$.

$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = -1$, или $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, то $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тогда $x = (-1)^k \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + \pi k - \frac{\pi}{4}$, $k \in Z$, или $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{\pi}{4}$, $k \in Z$.

Ответ: $\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{\pi}{4},\ k \in Z\right\}$.

ОБЪЯСНИТЕ

Убедитесь с помощью единичной окружности, что формулы $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z, x = \pi + 2\pi n, n \in Z$, $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{\pi}{4}$, $k \in Z$, описывают одни и те же решения (рис. 20.2).

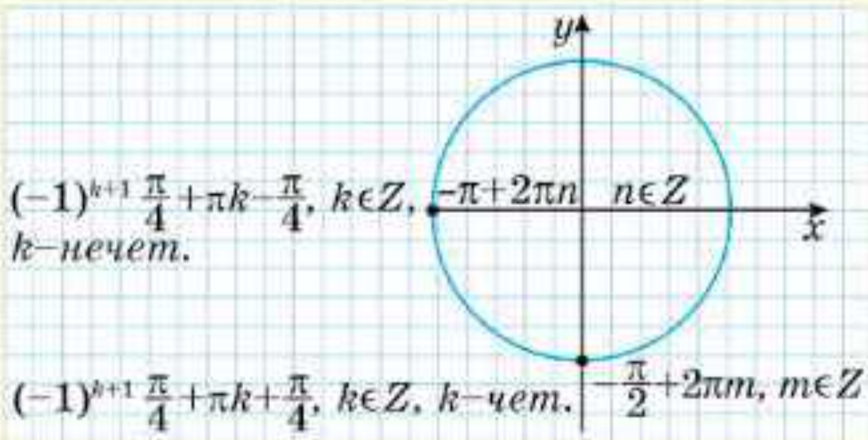


Рис. 20.2

Случай, когда нужно найти только определенные решения.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПРИМЕР

7. Найдем значение суммы корней уравнения $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$, которые принадлежат интервалу $(90^\circ; 270^\circ)$.

Решение. По формуле приведения $\cos 3x = \sin(90^\circ - 3x)$, поэтому уравнение $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$ примет вид $\sin 3x + \sin(90^\circ - 3x) = \sqrt{2}$.

Преобразуем сумму синусов в произведение. Получим уравнение

$2\sin 45^\circ \cos(3x - 45^\circ) = \sqrt{2}$, или $\cos(3x - 45^\circ) = 1$.

Тогда $3x - 45^\circ = 360^\circ n$, $n \in N$, или $x = 15^\circ + 120^\circ n$, $n \in N$.

Интервалу $(90^\circ; 270^\circ)$ принадлежат решения 135° (при $n = 1$) и 255° (при $n = 2$). Значение суммы этих решений равно 390°.

Ответ: 390°.

Уравнения, которые содержат тригонометрические функции в знаменателе

Вы научитесь решать тригонометрические уравнения с использованием тригонометрических формул.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Тригонометрические уравнения; тригонометрические формулы

ПРИМЕР

8. Решим уравнение $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$.

Решение. Перенесем все члены уравнения $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$ в его левую часть и приведем к общему знаменателю.

Получим уравнение $\frac{\cos x + \sin x - 2\sqrt{2}\sin x\cos x}{\sin x\cos x} = 0$, или (используя преобразования, аналогичные предыдущему примеру, и формулу синуса двойного угла) $\frac{\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\sin 2x}{\sin x\cos x} = 0$.

Преобразуем числитель дроби — разность синусов — в произведение, предварительно вынесем общий множитель $\sqrt{2}$ за скобки.

Получим уравнение $\frac{\sin(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})\cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8})}{\sin x\cos x} = 0$.

Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0, \\ \cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0, \end{array}\right. \\ \sin x\cos x \neq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi k,\ k \in Z, \\ \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z, \end{array}\right. \\ x \neq \frac{\pi}{2}m,\ m \in Z, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z, \end{array}\right. \\ x \neq \frac{\pi}{2}m,\ m \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z\right\}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Решение уравнений с использованием формул понижения степени тригонометрических функций

Вы научитесь решать тригонометрические уравнения, используя формулы понижения степени тригонометрических функций.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Тригонометрические уравнения; формулы понижения степени

ВЫ ЗНАЕТЕ: Формулы понижения степени:
$\sin^2 x = 0{,}5(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = 0{,}5(1 + \cos 2x)$

ПРИМЕР

9. Найдем корни уравнения $\sin^2 2x + \sin^2 3x = \sin^2 4x + \sin^2 5x$.

Решение. Используя формулы понижения степени, получим:

$$0{,}5(1 - \cos 4x) + 0{,}5(1 - \cos 6x) = 0{,}5(1 - \cos 8x) + 0{,}5(1 - \cos 10x).$$

Как после упрощения получили равенство $\cos 4x + \cos 6x = \cos 8x + \cos 10x$?

Используя формулу суммы косинусов

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$, получим

$2\cos 5x \cdot \cos x = 2\cos 9x \cdot \cos x$, или $\cos 5x \cdot \cos x - \cos 9x \cdot \cos x = 0$.

$(\cos 5x - \cos 9x) \cdot \cos x = 0$.

Используя формулу разности косинусов

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$, получим $2\sin 7x \sin 2x \cdot \cos x = 0$.

Следовательно, $\left[\begin{array}{l} \sin 7x = 0, \\ \sin 2x = 0, \\ \cos x = 0. \end{array}\right.$

Тогда $7x = \pi k$, $k \in Z$, или $x_1 = \frac{\pi}{7}k$, $k \in Z$,

или $2x = \pi k$, $k \in Z$, или $x_2 = \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$,

или $x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{7}k$, $k \in Z$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$

ОБЪЯСНИТЕ

Почему корни уравнения можно объединить в две формулы $x_1 = \frac{\pi}{7}k$, $k \in Z$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$ (рис. 20.3)?

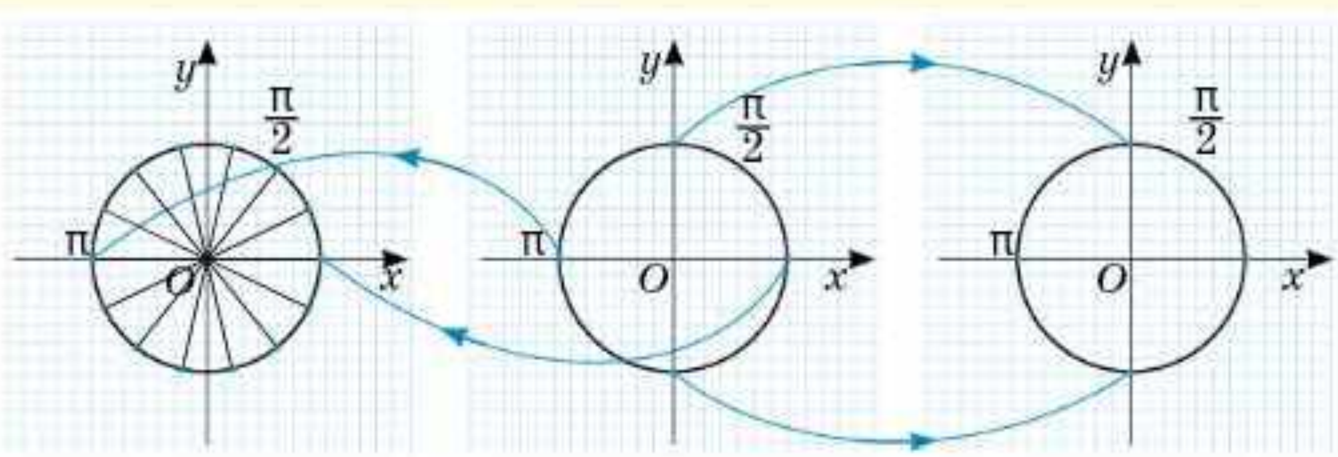


Рис. 20.3

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Метод равенств одноименных тригонометрических функций

Вы ознакомитесь с методом равенств одноименных тригонометрических функций;
научитесь решать тригонометрические уравнения, используя условия равенств одноименных тригонометрических функций.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Тригонометрические уравнения; одноименные функции

ВЫ ЗНАЕТЕ: Условия равенств одноименных тригонометрических функций, которые применяются для решения следующих уравнений:

$\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = (-1)^k y + \pi k,\ k \in Z,$

$\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = \pm y + 2\pi k,\ k \in Z,$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow x = y + \pi k,\ k \in Z.$

ПРИМЕР

10. Найдем корни уравнения $(\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 3 - \sin 4x.$

Решение. Преобразовывая левую часть уравнения, получим

$$2 + 2\sin^2 2x = 3 - \sin 4x.$$

Как после преобразования выражения $(\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4$ получили выражение $2 + 2\sin^2 2x$?

Используя формулы понижения степени, получим:

$$3 - \cos 4x = 3 - \sin 4x.$$

$$\cos 4x = \sin 4x.$$

Используя условия равенства одноименных тригонометрических функций: $\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = \pm y + 2\pi k,\ k \in Z$, получим:

$\cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \Leftrightarrow 4x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$ Отсюда рассмотрим два случая.

1 случай. $4x = \frac{\pi}{2} - 4x + 2\pi k,\ k \in Z;\ 8x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z,\ x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k,\ k \in Z.$

2 случай. $4x = -\frac{\pi}{2} + 4x + 2\pi k,\ k \in Z;\ 0 \cdot x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$, получаем $\varnothing$.

Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k,\ k \in Z.$

Системы, содержащие тригонометрические уравнения

Вы научитесь решать системы тригонометрических уравнений.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Система тригонометрических уравнений

ПРИМЕР

11. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x. \end{cases}$$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Решение. Возведем обе части первого уравнения в квадрат, при этом получим равносильное ему уравнение $\sin x - \cos y = \cos^2 x$ при условии $\cos x \geqslant 0$.

$\cos x \geqslant 0$ и $\sin x - \cos y \geqslant 0$.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему в уравнении $\sin x - \cos y = \cos^2 x$ значение разности $\sin x - \cos y$ больше или равно нулю?

Тогда система уравнений примет вид: $\begin{cases} \sin x - \cos y = \cos^2 x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x. \end{cases}$

Используя способ алгебраического сложения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = \cos^2 x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin x = 1, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2} + \cos y = \dfrac{1}{4}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos y = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Условие $\cos x \geqslant 0$ перехода к равносильной системе уравнений выполняется на числовых отрезках $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Тогда решением уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ является $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Решением уравнения $\cos y = -\frac{1}{4}$ является

$\pm\arccos(-\frac{1}{4}) + 2\pi n$, $n \in Z$, или $\pm(\pi - \arccos\frac{1}{4}) + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $(\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \pm(\pi - \arccos\frac{1}{4}) + 2\pi n,\ n \in Z)$.

?

1. Какие преобразования тригонометрических выражений могут привести:
   1) к приобретению посторонних корней;
   2) к потере корней?
2. Приведите пример уравнения, где удобно заменить синус, косинус, тангенс и котангенс через тангенс половинного угла.

Упражнения

А

20.1. Решите уравнение:

1) $\sin x + \sin 5x - 2\cos 2x = 0$;
2) $\cos 5x + \cos x + 2\cos 3x = 0$;
3) $\sin x - \sqrt{2}\sin 3x = -\sin 5x$;
4) $\cos x - \cos 3x - 2\sin 2x = 0$.

20.2. Решите уравнение:

1) $\cos(70^\circ + x)\cos(x - 20^\circ) = \frac{1}{2}$;
2) $\sin(40^\circ + x)\sin(x - 50^\circ) = 1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

20.3. Найдите корни уравнения:

1) $\cos 5x - \sin 5x - \sin 7x + \cos 7x = 0$;
2) $\cos 10x \cos 6x - \cos^2 8x = 0$;
3) $\sin x \cos 5x - \sin 9x \cos 7x = 0$;
4) $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$.

20.4. Решите однородное тригонометрическое уравнение:

1) $4\cos^2 x + \sin x \cos x + 3\sin^2 x - 3 = 0$;
2) $\cos^2 x - 3\sin x \cos x = -1$;
3) $5\sin^2 x - 3\sin x \cos x = 2\cos^2 x$;
4) $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x = \cos^2 x - 2$.

20.5. Решите способом введения дополнительного аргумента уравнение:

1) $\sin x - \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$; 2) $\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$;

3) $\sqrt{2}\sin x = 2 - \sqrt{2}\cos x$; 4) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{3}$.

20.6. Найдите значение суммы корней уравнения:

1) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$, если $x \in [0^\circ; 360^\circ]$;
2) $5\cos^2 x - 5\cos x = 1 - 3\sin^2 x$, если $x \in [270^\circ; 450^\circ]$;
3) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$, если $x \in [0^\circ; 180^\circ]$;
4) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$, если $x \in [270^\circ; 450^\circ]$.

20.7. Решите тригонометрическое уравнение:

1) $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 0$; 2) $\frac{\cos x}{\cos 3x} = 0$.

20.8. Решите уравнение способом понижения степени уравнения:

1) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x = \sin^2 4x$;

2) $\cos\frac{4x}{3} + \sin^2\frac{3x}{2} + 2\sin^2\frac{5x}{4} - \cos^2\frac{3x}{2} = 0$;

3) $\sin^4 x + \cos^4 x - \frac{5}{8} = 0$;

4) $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$;

5) $\cos^2\frac{3x}{4} + \cos^2 x + \cos^2\frac{5x}{4} = \frac{3}{2}$;

6) $\sin^2\frac{x}{3} + \sin^2\frac{4x}{9} = \sin^2\frac{5x}{9} + \sin^2\frac{2x}{3}$.

20.9. Решите уравнение способом преобразования произведения в сумму тригонометрических функций:

1) $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x - \frac{1}{4}\sin 12x = 0$;

2) $4\cos x \cos 2x \cos 3x - \cos 6x = 0$;

3) $\sin x \sin 2x \sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x = 0$;

4) $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x - \frac{1}{8}\cos 15x = 0$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

5) $\cos x \cos\frac{7x}{2}\ \sin\frac{9x}{2} = \frac{1}{4}\sin 7x$;

6) $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x - \frac{1}{16} = 0$.

20.10. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x - \cos x = \sqrt{3}\sin x$;

2) $2\sin 3x + \cos 5x - \sqrt{3}\sin 5x = 0$;

3) $2\cos 4x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$;

4) $\cos 2x = \cos 4x + 2\sqrt{3}\sin x \cos 3x$.

B

20.11. Решите уравнение разложением на множители:

1) $\sin^3 x(1 + \mathrm{ctg}\,x) + \cos^3 x(1 + \mathrm{tg}\,x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$;

2) $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) = -1$;

3) $\cos x + \sin x - \sqrt{1 - 2\cos^2 x} = 0$;

4) $1 + \sin 2x = 7(\cos x + \sin x)$.

20.12. Решите систему уравнений, используя метод подстановки:

1) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \\ x - y = -\frac{\pi}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0, \\ x - y = \frac{4\pi}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2}, \\ x + y = -\frac{\pi}{6}. \end{cases}$

C

20.13. Решите уравнение способом понижения степени и преобразования уравнения:

1) $\sin x + \sin 2x - \cos x = 2\cos^2 x$;

2) $\sin 4x - \cos^4 x = -\sin^4 x$;

3) $\sin(x + 45^\circ)\sin(x - 15^\circ) = 0{,}5$;

4) $\sin 2x - 2\sin^2 x - 4\sin x = -4\cos x$.

20.14. Найдите решение уравнения:

1) $\sqrt{5 - 2\sin x} + 1 = 6\sin x$; 2) $\sqrt{7 - 18\,\mathrm{tg}\,x} - 11 = 6\,\mathrm{tg}\,x$;

3) $\sqrt{10 - 18\cos x} + 2 = 6\cos x$; 4) $\sqrt{4 - 2\sin^2 x} - \sin x = 2$.

20.15. Способом понижения степени решите уравнение:

1) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$;

2) $\sin^4 2x + \cos^4 2x - \frac{5}{8} = 0$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

3) $\sin^2\frac{3x}{4} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2\frac{5x}{4} = \frac{3}{2}$;

4) $\cos^2\frac{x}{3} + \cos^2\frac{4x}{9} = \cos^2\frac{5x}{9} + \cos^2\frac{2x}{3}$.

20.16. Решите уравнение разложением на множители:

1) $\cos(2(x + 60^\circ)) + 4\sin(x + 60^\circ) = 2{,}5$;

2) $8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1$;

3) $9\operatorname{ctg}^2 x + 4\sin^2 x = 6$;

4) $2\cos^2(2x + 60^\circ) - 3\sin^2(x + 30^\circ) = 2$.

20.17. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = 0{,}5, \\ \sin(x + y) \cdot \sin(x - y) = 0{,}75; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin y = 1, \\ \cos^2 x + \cos y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -0{,}5, \\ \cos x \cdot \sin y = 0{,}5. \end{cases}$

ПОВТОРИТЕ

20.18. Решите относительно переменной x неравенство:

1) $\cos 4 \cdot (2x - 1) < 0$; 2) $\cos 3 \cdot \cos 5 \cdot (x^2 - 1) < 0$.

20.19. Найдите знак выражения:

1) $\operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{ctg} 2 + \cos^2\pi - \sin^2 35 - \cos^2 35$;

2) $\cos 1 \cdot \cos(1 + \pi) + \sin 60^\circ - \cos 30^\circ$;

3) $\sin 1 \cdot \cos 2$;

4) $\sin(-3) \cdot \sin 4 \cdot \cos 5$.

20.20. Решите методом интервалов неравенство:

1) $(x - 4)(x + 3)(x - 2)^2 \geqslant 0$; 2) $(2x - 3)(x + 6)(3x - 2)^3 \leqslant 0$;

3) $\frac{2}{x - 3} - \frac{1}{x + 3} \leqslant \frac{1}{x + 1}$.

20.21. Решите с помощью графика квадратичной функции и методом интервалов неравенство:

1) $x^2 + 3x - 18 \geqslant 0$; 2) $-5x^2 - 12x + 17 \leqslant 0$;

3) $6x^2 - 13x - 5 > 0$.

20.22. Расположите в порядке возрастания значений выражения:

1) $\sin 2$, $\sin 3$, $\cos 4$, $\cos 5$; 2) $\sin 3$, $\sin 4$, $\sin 6$, $\sin 7$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Неравенства, преобразование выражений, тригонометрические тождества.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§ 21. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Вы ознакомитесь с понятием *тригонометрическое неравенство*;
научитесь решать простейшие тригонометрические неравенства.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Тригонометрическое неравенство

Определение. ***Тригонометрическим неравенством*** *называется неравенство, содержащее неизвестное (переменную) только под знаком тригонометрической функции.*

ПРИМЕР

1. Неравенство $2\mathrm{tg}^2x - \mathrm{tg}x < 0$ является тригонометрическим неравенством; неравенство $2\mathrm{tg}x - x < 0$ не является тригонометрическим неравенством и решается приближенно или графически.

Неравенство $2(x + 1)\sin 3x \cos 3x \leqslant x + 1$ не является тригонометрическим неравенством, но его можно преобразовать к тригонометрическому неравенству. Действительно, выполнив алгебраические преобразования, получим неравенство $(x+1)(\sin 6x - 1) \leqslant 0$, решение которого сводится к решению неравенств, среди которых одно является тригонометрическим неравенством.

Тригонометрическое неравенство $\sin x \geqslant a$

Рассмотрим графический способ решения тригонометрического неравенства с синусом на примере неравенства $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$. Для этого в одной и той же системе координат построим графики функций $y = \sin x$ и $y = -\frac{1}{2}$ (рис. 21. 1, *а*).

Поскольку период функции $y = \sin x$ равен 2π, то сначала найдем все решения данного неравенства, принадлежащие числовому отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, затем воспользуемся периодичностью функции $y = \sin x$.

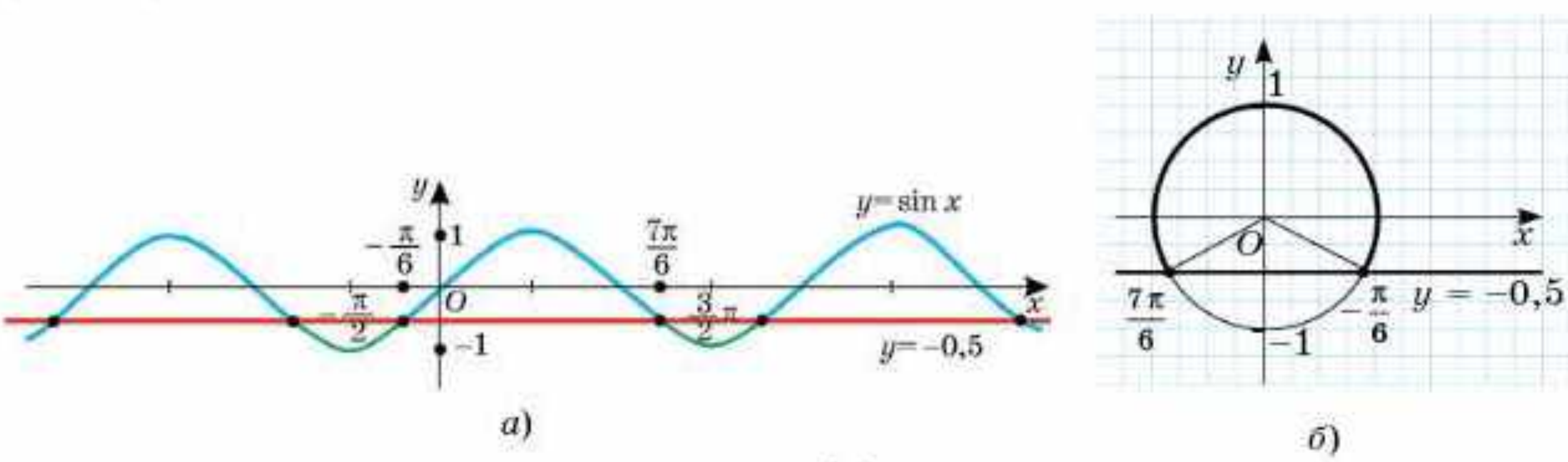


Рис. 21.1

Решением неравенства $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ на числовом отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ являются все значения переменной x, при которых график функции $y = \sin x$ лежит выше графика функции $y = -\frac{1}{2}$ или пересекает его, т. е. числовой отрезок $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$ (рис. 21.1, *а*).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Поскольку период функции $y = \sin x$ равен 2π, то остальные решения получаются добавлением к найденным решениям чисел вида $2\pi n$, где n — целое число ($n \in Z$).

Значит, решением неравенства $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ является множество $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right]$, где $n \in Z$.

Тригонометрические неравенства также решают с помощью единичной окружности.

Решим неравенство $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ с помощью единичной окружности.

Для этого на координатной плоскости построим единичную окружность и проведем прямую $y = -\frac{1}{2}$ (рис. 21.1. б). Значение $\sin x$ больше либо равно $-\frac{1}{2}$, поэтому выделим часть окружности выше прямой $y = -\frac{1}{2}$. Теперь найдем углы, соответствующие точкам пересечения окружности и прямой. Тогда $x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ и $x_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$. Значит, $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$. Далее учитывая периодичность функции $y = \sin x$ получим $[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n]$, $n \in Z$.

Используя рисунок 21.1, решите неравенство $\sin x < -\frac{1}{2}$ двумя способами: с помощью графика и с помощью единичной окружности.

Тригонометрическое неравенство $\cos x < a$

Рассмотрим графический способ решения тригонометрического неравенства с косинусом на примере неравенства $\cos x < \frac{1}{2}$. Для этого в одной и той же системе координат построим графики функций $y = \cos x$ и $y = \frac{1}{2}$.

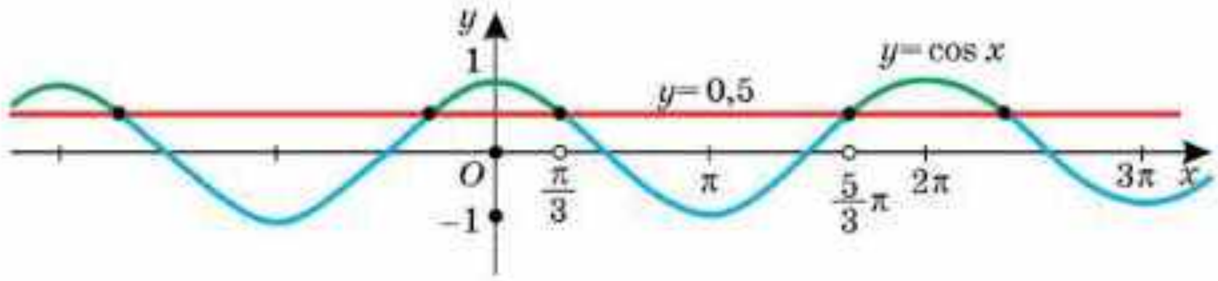
Поскольку период функции $y = \cos x$ равен 2π, то сначала найдем все решения данного неравенства, принадлежащие числовому отрезку $[0;\ 2\pi]$, затем воспользуемся периодичностью функции $y = \cos x$ (рис. 21.2).

Решением неравенства $\cos x < \frac{1}{2}$ на числовом отрезке $[0;\ 2\pi]$ являются все значения переменной x, при которых график функции $y = \cos x$ лежит ниже графика функции $y = \frac{1}{2}$, т. е. числовой интервал $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}\right)$ (рис. 21.2,*а*).

Поскольку период функции $y = \cos x$ равен 2π, то остальные решения получаются добавлением к найденным решениям чисел вида $2\pi n$, где n — целое число ($n \in Z$).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ



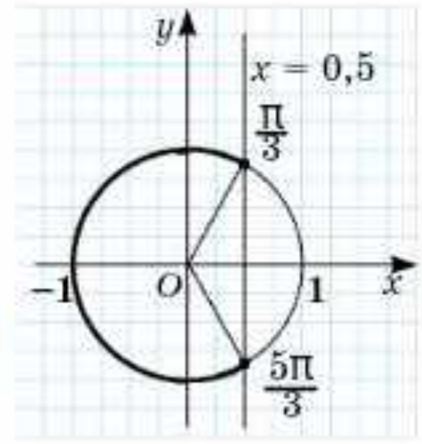


Рис. 21.2

Значит, решением неравенства $\cos x < \frac{1}{2}$ является множество $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

Решим неравенство $\cos x < \frac{1}{2}$ с помощью единичный окружности.

Для этого на координатной плоскости построим $y = \frac{1}{2}$ (рис. 22. б). Значение $\cos x$ меньше $\frac{1}{2}$, поэтому выделим часть окружности, лежащей левее прямой $x = \frac{1}{2}$.

Теперь найдем углы, соответствующие точкам пересечения окружности и прямой. Тогда $x_1 = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ и $x_2 = \arccos \frac{1}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

Значит, $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$. Далее, учитывая периодичность функции $y = \cos x$, получим $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Используя рисунок 21. 2, решите неравенство $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$ двумя способами: с помощью графика и с помощью единичной окружности.

Тригонометрическое неравенство $\operatorname{tg} x \leqslant a$

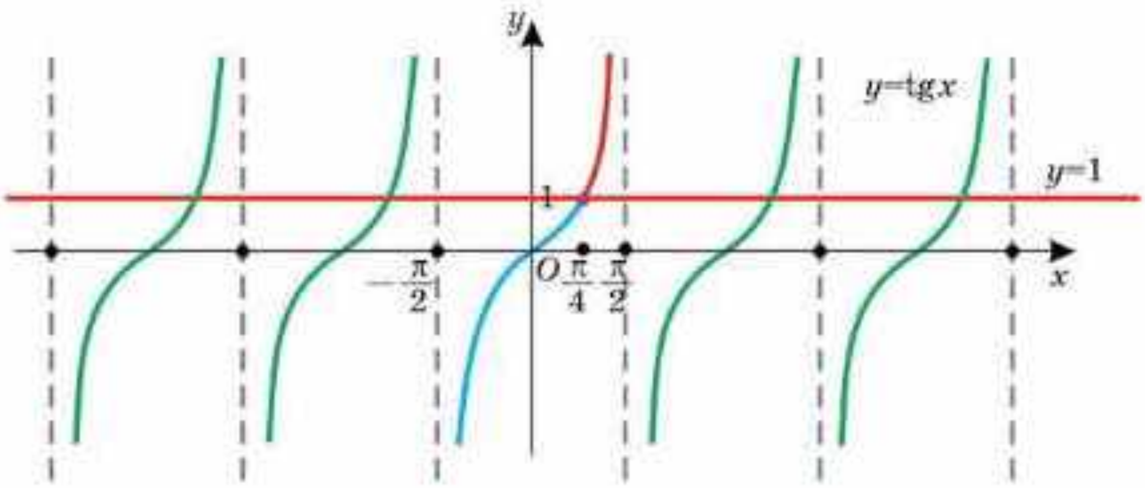
Рассмотрим графический способ решения тригонометрического неравенства с тангенсом на примере неравенства $\operatorname{tg} x \leqslant 1$. Для этого в одной и той же системе координат построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$.

Поскольку период функции $y = \operatorname{tg} x$ равен π, то сначала найдем все решения данного неравенства, принадлежащие числовому интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, затем воспользуемся периодичностью функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 21.3).

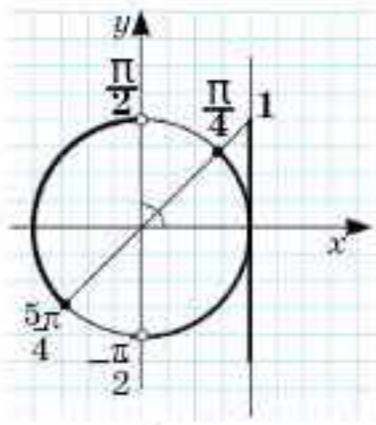
Решением неравенства $\operatorname{tg} x \leqslant 1$ на числовом интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ являются все значения переменной x, при которых график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит ниже графика функции $y = 1$ или пересекает его, т. е. числовой полуинтервал $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right]$ (рис. 21.3, *а*).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ



а



б

Рис. 21.3

Поскольку период функции $y = \mathrm{tg}x$ равен π, то остальные решения получаются добавлением к найденным решениям чисел вида πn, где n — целое число ($n \in Z$).

Значит, решением неравенства $\mathrm{tg}x \leqslant 1$ является множество $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, где $n \in Z$.

Используя рисунок 21. 3, решите неравенство $\mathrm{tg}x \geqslant 1$.

Рассмотрим графический способ решения тригонометрического неравенства с котангенсом на примере неравенства $\mathrm{ctg}x > -1$. Для этого в одной и той же системе координат построим графики функций $y = \mathrm{ctg}x$ и $y = -1$.

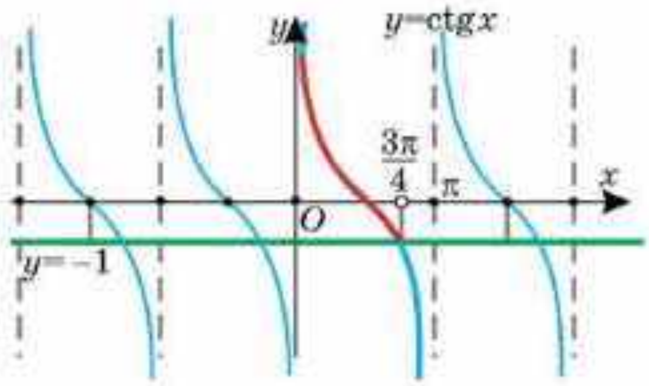


Рис. 21.4

Поскольку период функции $y = \mathrm{ctg}\ x$ равен π, то сначала найдем все решения данного неравенства, принадлежащие числовому интервалу (0; π), затем воспользуемся периодичностью функции $y = \mathrm{ctg}x$ (рис. 21.4).

Решением неравенства $\mathrm{ctg}x > -1$ на числовом интервале (0; π) являются все значения переменной x, при которых график функции $y = \mathrm{ctg}x$ лежит выше графика функции $y = -1$, т. е. числовой интервал $\left(0;\ \frac{3\pi}{4}\right)$.

Поскольку период функции $y = \mathrm{ctg}x$ равен π, то остальные решения получаются добавлением к найденным решениям чисел вида πn, где n — целое число ($n \in Z$).

Значит, решением неравенства $\mathrm{ctg}x > -1$ является множество $\left(\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

Используя рисунок 21. 4, решите неравенство $\mathrm{ctg}x \leqslant -1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Рис. 21.5

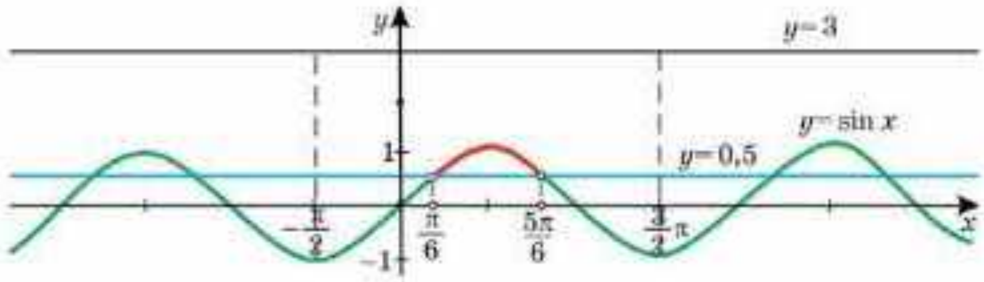


Рис. 21.6

Вы научитесь решать тригонометрические неравенства.

ПРИМЕР

2. Решим неравенство $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 < 0$.

Решение. Используя подстановку $\sin x = y$, получим квадратное неравенство: $2y^2 - 7y + 3 < 0$. Найдем корни трехчлена $2y^2 - 7y + 3$, получим: $y_1 = 0{,}5$ и $y_2 = 3$. Решим неравенство методом интервалов (рис. 21.5).

Тогда $0{,}5 < y < 3$, или $0{,}5 < \sin x < 3$ (рис. 21.6).

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z\right)$.

1. Что является решением неравенства:
1) $\sin x > 0$; 2) $\sin x < 0$; 3) $\cos x > 0$; 4) $\cos x < 0$; 5) $\operatorname{tg} x < 0$; 6) $\operatorname{ctg} x > 0$?

2. Решите неравенства:
1) $\sin x \geqslant 1$; 2) $\sin x \leqslant -1$; 3) $\cos x \geqslant 1$; 4) $\cos x \leqslant -1$.

Упражнения

A

Решите неравенства **(21.1—21.4):**

21.1. 1) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x > -1$.

21.2. 1) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x < \frac{1}{2}$; 3) $\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x > -1$.

21.3. 1) $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\operatorname{tg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x \geqslant -1$.

21.4. 1) $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\operatorname{ctg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{ctg} x \geqslant \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$.

21.5. Найдите решение неравенства:

1) $\sin x \cos x > \frac{1}{4}$; 2) $\cos^2 x - \sin^2 x \leqslant \frac{1}{2}$;

3) $\sin 2x \cos 2x \leqslant \frac{1}{4}$; 4) $\cos^2 x - \sin^2 x > \frac{1}{2}$.

Решите неравенства **(21.6—21.7):**

21.6. 1) $2\cos(2x + \frac{\pi}{3}) \leqslant 1$; 2) $2\cos(4x - \frac{\pi}{6}) > 1$; 3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

21.7. 1) $\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{6} \leqslant \frac{1}{2}$;

2) $\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21.8. Методом понижения степени решите неравенство:

1) $\sin^2 x \leqslant 0{,}5$;   2) $\cos^2 x \geqslant 0{,}5$;

3) $\sin^2 x \geqslant 1$;   4) $\cos^2 x < 1$.

B

21.9. Решите неравенство:

1) $\sin^2 x - 2\sin x < 0$;   2) $\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x \geqslant 0$;

3) $\sin^2 2x + \sqrt{2}\sin 2x \geqslant 0$.

21.10. Используя метод введения вспомогательного аргумента, решите неравенство:

1) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x < 0$;   2) $\sqrt{3}\cos x - \sin x > \sqrt{2}$;

3) $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x \geqslant \sqrt{3}$.

21.11. Найдите решение неравенства:

1) $2\sin x < \sin 2x \cdot \cos x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$;

2) $\sin 2x \cdot \sin x > 2\cos x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

21.12. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{2\sin x - 1} + \sqrt{7x - x^2}$;   2) $y = \frac{1}{2\sin x - 1} + \sqrt{6x - x^2}$;

3) $y = \sqrt{2\sin x - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$;   4) $y = \sqrt{1 - 2\cos x} + \sqrt{4x - x^2}$.

21.13. Найдите решение неравенства:

1) $\sqrt{2}(\sin 2x - \cos x) + 2\sin x > 1$, если $x \in [0; \pi]$;

2) $\sqrt{2}(\sin 2x + \sin x) - 2\cos x \leqslant 1$, если $x \in [0; \pi]$.

C

21.14. Решите неравенство:

1) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x < 0$;   2) $\cos x \cos 3x \leqslant 0{,}5\cos 2x$.

21.15. Решите неравенство, содержащее тригонометрическую функцию под знаком модуля:

1) $|\cos x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$;   2) $|\mathrm{tg}\, 3x| \geqslant 1$;

3) $\left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}$;   4) $\left|\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

***21.16.** Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{2x-3}{\sqrt{5x-6-x^2}} + \arcsin(3x-2)$;

2) $y = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2-x-6}} + \arccos(x^2-3)$;

3) $y = \dfrac{1-x}{\sqrt{5x+6-x^2}} + \arcsin(x-1)$;

4) $y = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2-2x-8}} + \arccos(x^2-8)$.

***21.17.** Решите неравенство $\sin(2\pi\cos x) < 0$.

21.18. Решите неравенство:

1) $2\cos^4 x \leqslant 0{,}5 + \cos 2x$; 2) $2\cos 2x - 5 < 4\sqrt{3}\sin x$.

***21.19.** Решите неравенство способом введения новой переменной.

1) $4\sin x + \dfrac{3}{\sin x} > 8$; 2) $4\cos x - \dfrac{5}{\cos x} > 8$.

ПОВТОРИТЕ

21.20. Постройте график и запишите промежутки монотонности функции:
1) $y = x^2 - 2x - 1$; 2) $y = -x^2 + 2x + 2$; 3) $y = 2x^2 - 4x - 3$.

21.21. Постройте график и запишите промежутки монотонности функции:
1) $y = |x^2 + 2x - 1|$; 2) $y = |-x^2 + 2x - 1|$; 3) $y = |-2x^2 - 4x + 3|$.

***21.22.** Найдите период функции:

1) $y = \{2x\} + \mathrm{tg}\,2\pi x$; 2) $y = \mathrm{ctg}\,6x - \sin 3x$;

3) $y = 2\{x\} + \cos 4\pi x$; 4) $y = \left\{\dfrac{x}{3}\right\} + 2\,\mathrm{ctg}\dfrac{\pi x}{3}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Корнями уравнения $\sin 5x\cos 3x - \cos 5x\sin 3x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ являются:

A) $(-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; B) $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$;

C) $\dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; D) $\dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{6} + 0{,}5\pi k$, $k \in Z$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

2. Решением уравнения $4\cos 2x + 3\sin 2x - 5 = 0$ является:

A) $\{\mathrm{arctg}3\}$; B) $\{\mathrm{arctg}\ \frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z\}$;

C) $\{\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z\}$; D) $\{\mathrm{arctg}\ 3 + \pi n,\ n \in Z\}$.

3. Число корней уравнения $\cos x = -0{,}7$ из промежутка $[-\pi;\ 2\pi]$ равно:

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

4. Число целых решений неравенства $2\cos x > -\sqrt{3}$ из промежутка $[-\pi;\ \pi]$ равно:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5.

5. Корни уравнения $\mathrm{tg}\ 3x + \sqrt{3} = 0$ равны:

A) $-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$; B) $-\frac{\pi}{9} + \in k,\ k \in Z$;

C) $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$; D) $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$.

6. Найдите корни уравнения $\sin^4 x - \cos^4 x = 1$:

A) $\pi k,\ k \in Z$; B) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;

C) $\frac{\pi}{4} + 0{,}5\pi k,\ k \in Z$; D) $-\pi + 0{,}5\pi k,\ k \geqslant Z$.

7. Неравенство $\mathrm{ctg}\ 3x \geqslant -1$ верно на множестве:

A) $(\frac{\pi k}{3}; -\frac{\pi k}{12} + \frac{\pi k}{3}],\ k \in Z$; B) $(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3};\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{3}],\ k \in Z$;

C) $(\frac{\pi k}{3};\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}],\ k \in Z$; D) $(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}; \frac{\pi k}{3}],\ k \in Z$.

8. Решите уравнение $\arcsin 2x = \frac{\pi}{3}$:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; C) $\sqrt{3}$; D) 1.

9. Неравенство $\arccos(x-2) < \frac{\pi}{4}$ верно на множестве:

A) $(-1{,}5;\ -2 + \frac{\sqrt{2}}{4})$; B) $[-1{,}5;\ 2 + \frac{\sqrt{2}}{2};\ 3]$;

C) $[\ 1;\ \sqrt{2}\ )$; D) $(2 + \frac{\sqrt{2}}{2};\ 3]$.

10. Неравенство $|\sin x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ верно на множестве:

A) $[\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{3\pi}{4} + \pi k],\ k \in Z$; B) $(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k],\ k \in Z$;

C) $[-\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{\pi}{4} + \pi k],\ k \in Z$; D) $[\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k],\ k \in Z$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Натуральные числа, умножение, множество, элементы множества, подмножество, способ подбора.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

5 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 22. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ. ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вы ознакомитесь с понятиями *комбинаторная задача; правило суммы; правило произведения;*
научитесь решать комбинаторные задачи, используя правило суммы и правило произведения.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Комбинаторика, комбинаторная задача, правило суммы, правило произведения

Вы умеете решать задачи, в которых из заданных цифр надо составить, например, трехзначные числа и узнать, сколько таких чисел получится. Это комбинаторные задачи.

Определение. *Задачи, в которых из элементов некоторого конечного множества по некоторым правилам составляются различные комбинации этих элементов и подсчитывается их число, называются* ***комбинаторными задачами***.

Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называется *комбинаторикой*.

С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. Уже несколько тысячелетий назад в Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов, в которых заданные числа располагали так, что их значение суммы по всем горизонталям, вертикалям и главным диагоналям было одним и тем же.

Комбинаторика становится наукой лишь в XVII в., т. е. в период, когда возникла теория вероятностей.

Комбинаторные задачи вы решали, используя способ перебора, т. е. рассматривали все возможные варианты.

ПРИМЕР

1. Сколько надо издать словарей, чтобы можно было сделать перевод с любого из трех языков: русского, казахского, английского на любой другой из этих языков?

Решение. Запись решения задачи способом перебора можно оформить следующим образом:

русско-казахский	русско-английский	казахско-английский
казахско-русский	англо-русский	англо-казахский

Ответ: 6 словарей.

Если число вариантов большое, то способом перебора решать такие задачи становится сложно. В комбинаторике имеются правила, которые позволяют более удобным способом решать комбинаторные задачи.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Большинство комбинаторных задач можно решить, используя два правила: правило суммы и правило произведения.

Правило суммы позволяет найти число элементов в объединении двух множеств.

Если множества X и Y не имеют общих элементов и множество X содержит a элементов, множество Y содержит b элементов, то объединение множеств X и Y содержит $(a + b)$ элементов.

ПРИМЕР 2. В классе 12 девочек и 15 мальчиков. Сколько в классе учащихся?

Решение. X — множество девочек в классе. Множество X содержит 12 элементов. Y — множество мальчиков в классе. Множество Y содержит 15 элементов. Тогда по правилу суммы объединение множеств X и Y содержит $12 + 15$, т. е. 27 элементов.

Ответ: 27 учащихся.

Если множества X и Y имеют c общих элементов и множество X содержит a элементов, множество Y содержит b элементов, то объединение множеств X и Y содержит $(a + b) - c$ элементов.

Действительно, складывая число элементов множества X с числом элементов множества Y, число элементов c сложили дважды: первый раз это число элементов вошло в число элементов множества X, второй — Y.

ПРИМЕР 3. Все учащиеся класса либо увлекаются плаванием, либо игрой в теннис. 12 учащихся увлекаются плаванием, 15 учащихся — игрой в теннис, 7 учащихся — плаванием и игрой в теннис. Сколько в классе учащихся?

Решение. X — множество учащихся в классе, которые увлекаются плаванием. Множество X содержит 12 элементов. Y множество учащихся в классе, которые увлекаются игрой в теннис. Множество Y содержит 15 элементов. 7 учащихся в классе, которые увлекаются плаванием и игрой в теннис. Значит, 7 учащихся входит как в число 12 учащихся в классе, которые увлекаются плаванием, так и в число 15 учащихся в классе, которые увлекаются игрой в теннис. Тогда по правилу, объединение множеств X и Y содержит $12 + 15 - 7$, т. е. 20 элементов.

Ответ: 20 учащихся.

Другая формулировка правила суммы:

Если элемент $a \in A$ можно выбрать m способами, элемент $b \in B$ — n способами, причем множества A и B не имеют общих элементов, то выбрать один элемент "a или b" можно $m + n$ способами.

ПРИМЕР 4. Сколькими способами можно купить одного гуся, если у одного продавца их 4, у другого — 6?

Решение. A — множество гусей у одного продавца, их 4. B — множество гусей у другого продавца, их 6. Надо купить 1 гуся. Тогда по правилу суммы это можно сделать $4 + 6 = 10$ (сп.).

Ответ: 10 способов.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПРИМЕР

5. Сколько комплектов одежды, состоящих из куртки и брюк, можно составить из 4 разных курток и 3 разных брюк, если они все подходят друг к другу? (рис. 22.1).

Рис. 22.1

Решение. С курткой $к_1$ можно составить 3 комплекта: $к_1$, $б_1$; $к_1$, $б_2$; $к_1$, $б_3$.

С курткой $к_2$ можно составить 3 комплекта: $к_2$, $б_1$; $к_2$, $б_2$; $к_2$, $б_3$.

С курткой $к_3$ можно составить 3 комплекта: $к_3$, $б_1$; $к_3$, $б_2$; $к_3$, $б_3$.

С курткой $к_4$ можно составить 3 комплекта: $к_4$, $б_1$; $к_4$, $б_2$; $к_4$, $б_3$.

Всего комплектов можно составить: по 3 комплекта 4 раза, т. е. $3 \cdot 4 = 12$ (комплектов).

В нашем примере куртку можно выбрать 4 способами, брюки — 3. Пару: куртку и брюки можно выбрать $3 \cdot 4$ способами.

Ответ: 12 способов.

Правило произведения:

Если элемент $x \in X$ можно выбрать m способами, элемент $y \in Y$ — k способами, то пару "x и y" можно выбрать $m \cdot k$ способами.

ПРИМЕР

6. Имеются 5 различных конвертов и 4 разные марки. Сколькими способами можно расклеить марки на конверты?

Решение. X — множество конвертов, их 5; Y — множество марок, их 4.

Поскольку составляются пары (конверт, марка) и требуется подсчитать, сколько пар получится, то по правилу произведения это можно сделать $5 \cdot 4 = 20$ (сп.).

Ответ: 20 способов.

Решите эту задачу способом перебора.

Правило произведения распространяется и на случаи упорядоченного выбора 3 (4, 5 и т. д.) элементов соответственно из 3 (4, 5 и т. д.) множеств.

ПРИМЕР

7. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 5, 6, 7, если они в записи числа не повторяются?

Решение. Первую цифру искомого числа можно выбрать тремя способами (это может быть либо 5, либо 6, либо 7).

Вторую цифру искомого числа можно выбрать двумя способами, так как цифры в записи этого числа не повторяются (если первую цифру выбрали 5, то вторая может быть либо 6, либо 7, аналогично, если первая цифра 6, то вторая — либо 5, либо 7 и т. д.).

Третью цифру искомого числа можно выбрать одним способом, а три цифры по правилу произведения можно выбрать $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (способами).

Ответ: 6 трехзначных чисел.

Решите эту задачу способом перебора элементов, соответственно, и запишите все получившиеся числа.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

1. Приведите пример комбинаторной задачи.
2. В каких случаях используется: 1) правило суммы; 2) правило произведения?
3. Является ли способ перебора способом решения комбинаторных задач?
4. В каких случаях способ перебора использовать нецелесообразно, в каких — целесообразно?

Упражнения

A

22.1. Сколькими способами можно приобрести 1 кг яблок и 1 кг груш, если в магазине имеется 4 различных сорта яблок и 3 различных сорта груш?

22.2. Сколькими способами можно приобрести 1 кг конфет и 1 кг печенья, если в магазине имеется 8 различных сортов конфет и 10 различных сортов печенья?

22.3. 12 студентов сдавали экзамены по математике и русскому языку. Из двух экзаменов 1 студент не сдал экзамен по математике, 3 — по русскому языку и 1 — по двум предметам. Сколько всего неуспевающих студентов?

22.4. Составлено 7 букетов с тюльпанами, 9 — с нарциссами, 3 — с тюльпанами и нарциссами. Сколько всего букетов составлено?

22.5. 12 школьников участвовали в соревнованиях по шашкам, 23 — по шахматам и 10 — по шахматам и шашкам. Сколько всего школьников участвовало в этих соревнованиях?

22.6. 42 студента приняли участие в олимпиаде по математике, 37 — по русскому языку, 19 — по двум предметам. Сколько всего студентов участвовало в олимпиадах по этим предметам?

B

22.7. Даны 9 простых и четных чисел. Из них 7 чисел являются простыми, одно простое — четное. Сколько четных чисел из этих 9?

22.8. Из 30 чисел, которые больше 10, 20 чисел являются простыми, 25 — нечетными. Сколько простых нечетных чисел из них?

22.9. Из 17 прямоугольников, ромбов и квадратов 10 являются ромбами, 9 прямоугольниками. Сколько всего квадратов?

C

22.10. Число дождливых дней 15, ветреных — 10, холодных — 6, дождливых и ветреных — 3, ветреных и холодных — 2,

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

дождливых и холодных — 4, ветреных, дождливых и холодных — 2. Найдите число неблагоприятных дней.

22.11. Из группы 9 студентов на экзаменах получили отличные отметки, 15 — хорошие, 7 — удовлетворительные, 6 — отличные и хорошие, 3 — удовлетворительные и хорошие, 3 — отличные и удовлетворительные, 2 — отличные, удовлетворительные и хорошие. Найдите число студентов в группе.

22.12. Из 80 открыток на 40 изображены тюльпаны, на 20 — нарциссы, на 10 — сирень с тюльпанами, на 5 — сирень с нарциссами, на 5 — нарциссы с тюльпанами, на 10 — сирень с тюльпанами и нарциссами. Найдите число открыток с сиренью.

22.13. Из 100 подарочных наборов в 50 находятся конфеты, в 45 — орехи, в 35 — мандарины, в 20 — конфеты, орехи и мандарины, в 25 — конфеты и орехи, в 15 — орехи и мандарины. Найдите число наборов с конфетами и мандаринами.

22.14. Из 50 сотрудников 40 человек владеют казахским языком, 20 — английским, 10 — турецким, 15 — казахским и английским, 5 — казахским и турецким, 5 — английским и турецким. Сколько сотрудников владеют тремя языками — казахским, английским и турецким?

ПОВТОРИТЕ

22.15. Постройте график функции и найдите период функции:

1) $y = \sin(2x - 3)$; 2) $y = \cos\left(\frac{x}{2} - 2\right)$;

3) $y = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 1\right)$.

22.16. Решите неравенство:

1) $5 - 2x^2 > 10$; 2) $0 < x^2 - 4 \leqslant 1$; 3) $x^2 - 4|x| < 0$.

22.17. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2 - 4} = 2$; 2) $\sqrt{1 - 2x^2} = 4$; 3) $\sqrt{x^2 - 4} = 2x - 1$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Упорядоченное множество, числовое множество, количество групп заданного состава, множество натуральных чисел.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§ 23. РАЗМЕЩЕНИЯ И ПЕРЕСТАНОВКИ С ПОВТОРЕНИЯМИ И БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

Вы ознакомитесь с понятиями *размещение, перестановка;* формулами для вычисления числа размещений и перестановок с повторениями и без повторений;
научитесь применять формулы для вычисления размещений и перестановок с повторениями и без повторений.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Перестановки, размещения

Рассмотрим множество $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, которое требуется упорядочить, т. е. установить, какой элемент будет первым, какой вторым и т. д. Такие упорядоченные множества записываются не с помощью фигурных скобок, а с помощью круглых скобок. Записи (x_1, x_2) и (x_2, x_1) различны, поскольку порядок записи элементов в них неодинаков: $(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$, но множества $\{x_1, x_2\}$ и $\{x_2, x_1\}$ равны.

Определение. *Упорядоченные множества, содержащие все n-элементов множества* $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, *называются* ***перестановками из n элементов без повторений.***

ПРИМЕР 1. $A = \{1, 7, 8, 9\}$, тогда $(1, 7, 8, 9)$, $(7, 1, 8, 9)$; $(9, 7, 1, 8)$ — перестановки без повторений из 4 элементов множества A.

Обозначение: P_n — число перестановок без повторений из n элементов.

Теорема. *Число перестановок без повторений из n элементов равно n!.*

Символ $n!$ (эн факториал) означает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Считают $1! = 1$ и $0! = 1$.

ПРИМЕР 2. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$; $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$.

В краткой записи теорема выглядит так: $P_n = n!$

Доказательство. Рассмотрим процесс составления перестановки без повторений из n элементов множества $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Составить перестановку — значит установить, какой из элементов A будет первым, какой вторым и т. д. Поскольку в множестве A содержится n элементов, то первый элемент перестановки можно выбрать n способами, второй элемент — $(n - 1)$ способом, так как элементы не повторяются. Выбор третьего элемента можно осуществить $(n - 2)$ способами. Продолжая этот процесс получим, что n-й элемент перестановки можно выбрать одним способом. Все n элементов по правилу произведения можно осуществить $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 1 = n!$ способами.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПРИМЕР 3. Сколько можно составить трезначных чисел из цифр 1, 3, 4 при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды?

Решение. Дано множество: {1, 3, 4}. Требуется его упорядочить и подсчитать число получившихся перестановок. Значит, $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: 6 чисел.

Четыре цифры 1, 2, 3, 4 можно переставить $P_4 = 4! = 24$ способами.

Обозначение: $P(n_1, n_2, ..., n_k)$ — число перестановок с повторениями из n элементов, где первый элемент повторяется n_1 раз, второй — n_2 раза, ..., k-й — n_k раз.

Теорема. $P(n_1, n_2, ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$, *где* $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Составим кортеж длины n, в котором x_1 повторяется n_1 раз, x_2 — n_2 раз, ..., x_k — n_k раз., т. е. $(\underbrace{x_1, x_1, ..., x_1}_{n_1 \text{ раз}}, \underbrace{x_2, x_2, ..., x_2}_{n_2 \text{ раза}}, ..., \underbrace{x_k, x_k, ..., x_k}_{n_k \text{ раз}})$, причем

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_k.$$

Весь кортеж содержит n элементов. Его элементы будем переставлять местами. Получим перестановки с повторениями. Их число равно $P(n_1, n_2, ..., n_k)$. Всего перестановок $n!$

Поскольку элементы повторяются, то различных перестановок будет меньше. Найдем число перемещений элементов, не меняющих данную перестановку. Поскольку элемент x_1 повторяется n_1 раз, то число перестановок элемента x_1, не меняющих всю перестановку, будет $n_1!$, элемента x_2 — $n_2!$, ..., элемента x_k — $n_k!$

Всего перестановок $x_1, x_2, ..., x_k$, не меняющих данную перестановку, по правилу произведения $n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!$

Значит, $n! = P(n_1, n_2, ..., n_k) \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!$ Отсюда получим:

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}, \text{ где } n = n_1 + n_2 + ... + n_k.$$

ПРИМЕР 4. Сколько перестановок можно получить из букв слова *математика*?

Решение. В этом слове 10 букв, значит $n = 10$. Буква “м” повторяется 2 раза, значит, $n_1 = 2$. Буква “а” — 3 раза, значит, $n_2 = 3$. Буква “т” — 2 раза, значит, $n_3 = 2$, остальные буквы повторяются по 1 разу, значит, $n_4 = 1$, $n_5 = 1$, $n_6 = 1$.

Тогда $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$.

$P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 =$
$= 151\,200$.

Если из элементов некоторого множества требуется выбрать несколько элементов, причем эти элементы могут повторяться, и установ-

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

вить среди них порядок, то речь идет о размещениях с повторениями. Упорядоченные наборы из k элементов называют *кортежами длины* k.

Определение. ***Размещениями с повторениями из n элементов по k*** *называются кортежи длины k, составленные из элементов множества X, содержащего n элементов.*

Обозначение: $\bar{A}_n^k$ — число размещений с повторениями из n элементов по k.

Теорема. $\bar{A}_n^k = n^k$.

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $n(X) = n$. Рассмотрим процесс составления размещения с повторениями из n по k. Первый его элемент можно выбрать n способами, так как элементы могут повторяться, второй элемент можно выбрать тоже n способами и т. д., k-й элемент — n способами.

По правилу произведения k элементов можно выбрать

$\underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k \text{ раз}} = n^k$ способами.

ПРИМЕР 5. Сколько чисел, меньших миллиона, можно написать с помощью цифр 9, 8, 7?

Решение. Меньше миллиона являются числа однозначные, двузначные, трехзначные, четырехзначные, пятизначные и шестизначные. Всего из цифр 9, 8, 7 однозначных чисел можно составить 3. Чтобы составить двузначные числа, надо из множества {9, 8, 7}, содержащего 3 элемента, выбрать 2, причем они могут быть одинаковые и упорядочить их, т. е. составить кортежи длины 2. Всего таких чисел $\bar{A}_3^2 = 3^2 = 9$; $\bar{A}_3^3 = 3^3 = 27$ — трехзначных, $\bar{A}_3^4 = 3^4 = 81$ — четырехзначных, $\bar{A}_3^5 = 3^5 = 243$ — пятизначных, $\bar{A}_3^6 = 3^6 = 729$ — шестизначных. Всего по правилу суммы $3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 = 1092$.

Ответ: 1092 числа.

Определение. ***Размещениями без повторений из n элементов по k*** *называются упорядоченные множества из k различных элементов, выбранных из множества, содержащего n элементов.*

Обозначение: A_n^k — число размещений без повторений из n по k.

Теорема. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ *или* $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$.

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$; $n(X) = n$.

Рассмотрим процесс составления размещения без повторений из n по k.

Первый элемент упорядоченного множества можно выбрать n способами; второй элемент — $(n-1)$ способом; третий элемент — $(n-2)$ способами, k-й элемент — $(n-k+1)$ способами.

Число способов выбора k элементов найдем по правилу произведения. Тогда получим:

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Справедлива формула: $A_n^k = \dfrac{P_n}{(n-k)!}$

ПРИМЕР

6. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: казахского, русского, английского, французского и немецкого на любой другой из этих языков?

Решение. X = {казахский, русский, английский, французский, немецкий}, $n(X) = 5$. Надо составить упорядоченные пары (без повторений элементов), т. е. упорядоченные множества из двух элементов. Например, казахско-русский, русско-казахский и т. п. Значит, требуется найти $A_5^2 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$

Ответ: 20 словарей.

1. Приведите пример комбинаторной задачи.
2. В чем сходство и в чем различие перестановок и размещений без повторений?
3. В чем сходство и в чем различие перестановок и размещений с повторениями?

Упражнения

А

23.1. 1) По какой формуле вычисляется число перестановок без повторений из n элементов?
2) По какой формуле вычисляется число перестановок с повторениями из n элементов, где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$?

23.2. Вычислите:
1) P_4; 2) P_6; 3) $\dfrac{P_7}{P_5}$; 4) $\dfrac{P_6}{P_8}$; 5) $\dfrac{P_8}{P_7} + \dfrac{P_5}{P_6}$; 6) $\dfrac{P_9}{P_7} - \dfrac{P_7}{P_5}$.

23.3. Найдите:
1) число перестановок, изменяющих число 3344;
2) число перестановок, не изменяющих число 3344;
3) число перестановок, не изменяющих слова *комбинаторика*.

23.4. 1) Найдите число четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 6, 7, 8, 9 при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды.
2) Найдите число способов раскрасить треугольник, круг и квадрат тремя различными цветами: синим, красным, желтым.
3) Найдите число способов распределения семи мест среди 7 участников соревнований.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

23.5. Найдите: 1) A_7^4; 2) $\bar{A}_7^4$; 3) A_5^4; 4) $\bar{A}_5^4$.

B

23.6. Решите уравнение:

1) $A_x^1 = 2$; 2) $A_x^1 = 2x$; 3) $A_x^2 = 2x$; 4) $A_x^2 = x + 8$.

23.7. 1) Найдите число способов выбора старосты и физрука класса из 20 учащихся.

2) Найдите число способов выставления двум учащимся одной из отметок $\{3; 4; 5\}$.

C

23.8. 1) Найдите число способов раскраски трех фигур 5 цветами.

2) Найдите число натуральных чисел, меньших 1000, которые можно написать с помощью цифр 1 и 2.

23.9. Решите уравнение:

1) $\bar{A}_x^3 = 8$; 2) $\bar{A}_x^4 = 16$; 3) $\bar{A}_x^2 = x(x - 1)$.

23.10. Найдите корни уравнения:

1) $\bar{A}_x^3 = 2x^2 + 3x$; 2) $\bar{A}_x^3 = 2x^2 + 8x$; 3) $\bar{A}_x^3 = 2x^2 + 15x$.

ПОВТОРИТЕ

23.11. 1) Длина окружности переднего колеса кареты равна 3 м, заднего — 4,5 м. Какое расстояние проехала карета, если переднее колесо сделало на 20 оборотов больше заднего?

2) Две снегоуборочные машины, работая вместе, смогут очистить от снега определенную площадь за 12 часов. Если бы сначала первая машина выполнила половину работы, а затем вторая закончила бы уборку снега, то на всю работу ушло бы 25 часов. За сколько часов могла бы очистить от снега эту площадь каждая машина, работая отдельно?

23.12. На координатной плоскости покажите штриховкой множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - y - 2 \leqslant 0, \\ y - |x| \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 16 \leqslant 0, \\ y - 2|x| \geqslant 2. \end{cases}$

23.13. Сколько потребуется взять членов арифметической прогрессии 18; 16; 14; ... , чтобы значение их суммы было равно нулю?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

23.14. Решите уравнение:

1) $4 - \cos^2 x = 4 \sin x$; 2) $4 - 5 \cos x - 2 \sin^2 x = 0$.

23.15. Постройте график функции:

1) $f(x) = 2 \sin 2x$; 2) $f(x) = 3 \cos 0{,}5x$;

3) $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$; 4) $f(x) = |2 - \sqrt{x+2}|$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Натуральные числа, факториал, перестановки, размещения, перестановки без повторений, размещения без повторений, перестановки с повторениями, размещения с повторениями.

§24. СОЧЕТАНИЯ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ И С ПОВТОРЕНИЯМИ

Вы ознакомитесь с понятиями *сочетание без повторений* и *сочетания с повторениями*, с некоторыми свойствами сочетаний без повторений;
научитесь использовать формулы для вычисления сочетаний без повторений и сочетаний с повторениями и использовать свойства сочетаний без повторений.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Сочетание, множество, подмножество

Определение. ***Сочетанием без повторений из n элементов по k называется подмножество, содержащее k элементов, выбранных из множества, состоящего из n элементов.***

Обозначение: C_n^k — число сочетаний из n элементов по k.

Теорема. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $n(X) = n$. Рассмотрим процесс составления сочетания без повторений из n по k. Выбрать k элементов и их упорядочить можно A_n^k способами, т. е. $\dfrac{n!}{(n-k)!}$, так как в сочетаниях порядок расположения элементов роли не играет, то сочетаний будет меньше во столько раз, сколько можно составить перестановок из k элементов, т. е. $k!$. Это значит, что $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

ПРИМЕР

1. Сколькими способами можно выбрать 6 номеров из 49?

Решение. Здесь речь идет о множестве номеров $A = \{1, ..., 49\}$, из которых надо выбрать 6 номеров. Порядок выбора номеров роли не играет. Значит, здесь речь идет о сочетаниях без повторений.

$C_{49}^6 = \dfrac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \dfrac{49!}{6! \cdot 43!} = 13\ 983\ 816.$

Ответ: 13 983 816 различных способов.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Некоторые свойства сочетаний без повторений

Свойство 1. $C_n^0 = C_n^n = 1.$

Доказательство.

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1. \qquad C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Значит, $C_n^0 = C_n^n = 1.$

ПРИМЕР 2. 1) $C_7^0 = C_7^7 = 1.$ 2) $C_4^0 = C_4^4 = 1.$

Свойство 2. $C_n^k = C_n^{n-k}.$

Доказательство.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Значит, $C_n^k = C_n^{n-k}.$

ПРИМЕР 3. 1) $C_7^3 = C_7^4.$ 2) $C_9^6 = C_9^3$

Свойство 3. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$

Доказательство.

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k-1)!}\cdot\frac{n}{(n-k)\cdot k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = C_n^k.$$

ПРИМЕР 4. 1) $C_7^3 + C_7^4 = C_8^4.$ 2) $C_5^2 = C_4^1 + C_4^2.$

Свойство 4. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$

Теорема. *Множество из n элементов имеет 2^n подмножеств.*

Доказательство.

Докажем с помощью метода математической индукции.

Проверим истинность утверждения при $n = 1$. $C_1^0 + C_1^1 = 2$; $2^1 = 2$; $2 = 2$.

Допустим, что при $n = k$ утверждение истинно, т. е. $C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k$.

Докажем его истинность при $n = k + 1$, т. е. $C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + \ldots + C_{k+1}^{k+1} = 2^{k+1}$.

Действительно, $C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k$. $2(C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k) = 2\cdot 2^k$.
$C_k^0 + (C_k^0 + C_k^1) + \ldots + (C_k^{k-1} + C_k^k) + C_k^k = 2^{k+1} \Rightarrow$ по свойствам 1—3.

$C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + \ldots + C_{k+1}^{k+1} = 2^{k+1}.$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПРИМЕР

5. Если множество содержит 3 элемента, то оно имеет 2^3 подмножеств, т. е. 8 подмножеств.

Если множество содержит 5 элементов, то оно имеет 2^5 подмножеств, т. е. 32 подмножества.

Рассмотрим ситуацию, которая приводит к введению сочетаний с повторениями. Пусть имеются предметы n различных типов, например, шары 7 различных цветов (рис. 24.1).

Рис. 24.1

Сколькими способами можно составить из них комбинацию из k элементов, если не принимать во внимание порядок элементов в комбинации, но при этом предметы одного и того же типа могут повторяться?

ПРИМЕР

6. Надо купить 10 шаров. При этом имеется не менее 10 шаров каждого цвета. Среди различных вариантов покупки могут быть и такие комбинации, какие показаны на рисунке 24.2.

Рис. 24.2

Определение. ***Сочетаниями с повторениями из n элементов различных типов по k*** *называются их неупорядоченные наборы из k элементов, отличающиеся друг от друга только количеством элементов хотя бы одного типа.*

Число сочетаний с повторениями из n элементов различных типов по k обозначают $\overline{C}_n^k$.

Чтобы вычислить число сочетаний с повторениями из n элементов различных типов по k, рассмотрим пример.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

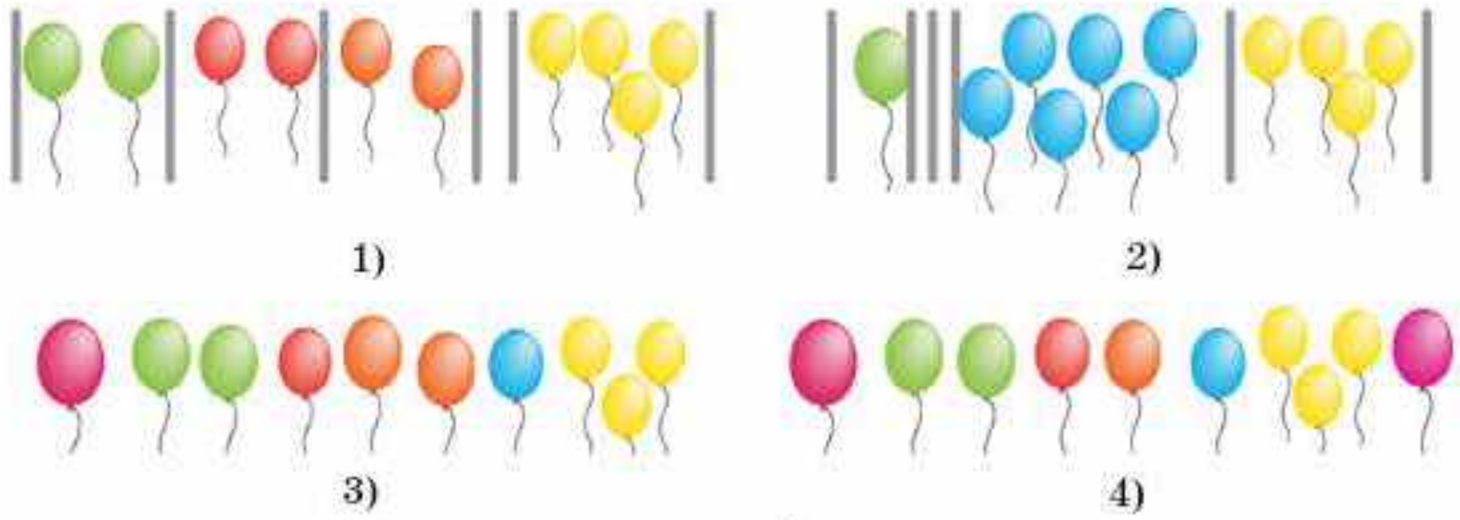


Рис. 24.3

ПРИМЕР 7. Составим схему, отделив каждую группу шариков одного цвета чертой (рис. 24.3).

Таких групп будет 7. Чтобы отделить одну группу шариков от другой, понадобится 6 черточек. Если шариков какого-либо из 7 цветов нет, то это видно с помощью отделяющей черты. Как видно из рисунков, всего шариков 10, а линий, отделяющих группы этих шариков, в каждом случае 6.

Разным покупкам соответствуют при этом разные комбинации из 10 шариков и 6 черточек. Обратно, каждой комбинации шариков и черточек соответствует какая-то покупка.

Значит, число способов покупки 10 шариков из шариков 7 цветов равно числу перестановок с повторениями из (10 + 6) элементов, т. е. $\bar{C}_7^{10} = P(10;\ 6) = \frac{16!}{10!6!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8008$.

Ответ: 8008.

Таким образом, для вычисления числа $\bar{C}_n^k$ сочетаний с повторениями из элементов n типов по k получили перестановки с повторениями из k единиц и $n-1$ черточек. Итак, число $\bar{C}_n^k$ сочетаний с повторениями из элементов n типов по k равно числу $P(k;\ n-1)$ перестановок с повторениями из $n-1$ и k элементов.

Поскольку $P(k;\ n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$, то $\bar{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$.

ПРИМЕР 8. В магазине имеется цветная бумага пяти сортов. Сколькими способами можно купить: 1) 14 листов; 2) 3 листа цветной бумаги для изготовления подарков своими руками?

Решение. Поскольку для изготовления подарков можно купить бумагу одного или разного цвета и порядок выбора листов бумаги роли не играет, то речь идет о нахождении числа сочетаний с повторениями из 5 элементов: 1) по 14, 2) по 3.

Следовательно, надо вычислить число сочетаний с повторениями:

1) из 5 по 14, т. е. $\bar{C}_5^{14} = P(14;\ 4) = \frac{18!}{14! \cdot 4!} = 3060$.

2) из 5 по 3, т. е. $\bar{C}_5^3 = P(3;\ 4) = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$.

Ответ: 1) 3060 способов, 2) 35 способов.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

1. Чем является сочетание без повторений из n элементов некоторого множества по k элементов для этого множества?
2. В чем сходство и в чем различие сочетаний и размещений без повторений? Сочетаний с повторениями и сочетаний без повторений?
3. Сколько элементов в множестве, если у него всего 16 подмножеств?

Упражнения

A

24.1. Вычислите: 1) C_5^4; 2) C_5^3; 3) C_6^2; 4) C_{11}^4.

24.2. 1) Найдите число способов выбора 2 ручек из 5 и 2 карандашей из 3.
2) Найдите число способов выбора 3 тюльпанов из 10 и 4 нарциссов из 7.
3) Найдите число способов выбора 2 юношей из 20 и 2 девушек из 21.

24.3. Докажите равенство:
1) $C_8^4 + C_8^3 = C_9^4$; 2) $C_8^4 + C_8^3 + C_9^5 = C_{10}^5$;
3) $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + ... + C_6^6 = 64$.

B

24.4. Решите уравнение:
1) $C_n^2 = 28$; 2) $C_n^{n-3} = 20$; 3) $C_{30}^m = 435$.

24.5. В меню столовой имеется 7 первых, 9 вторых и 4 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд (первое, второе и третье)?

24.6. Решите уравнение:
1) $C_{2n+1}^{n-1} : C_{2n}^{n+1} = \frac{5}{3}$; 2) $A_{2x+3}^{x-1} : A_{2x}^{x+1} = \frac{1}{30}$; 3) $C_n^2 \cdot A_n^2 = 32$.

24.7. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем:
1) 12 открыток? 2) 8 открыток? 3) 8 различных открыток?

24.8. В булочной имеется 3 вида батонов хлеба. Сколькими способами можно купить 9 батонов?

C

***24.9.** На окружности последовательно отмечены точки $A_1, A_2, ..., A_{11}, A_{12}$. Найдите:
1) число хорд с концами в этих точках;
2) число треугольников с вершинами в этих точках;
3) число выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

***24.10.** a и b – параллельные прямые, $a \neq b$. На прямой a отмечено 8 точек, а на прямой b отмечено 11 точек. Найдите:
1) число треугольников с вершинами в этих точках;
2) число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках (три вершины четырехугольника не должны лежать на одной прямой);
3) число не самопересекающихся 16-звенных ломаных с вершинами в отмеченных точках, звенья которых не лежат на прямых a и b.

***24.11.** Имеется 6 различных ящиков, 4 неразличимых белых шара и 3 неразличимых черных шара. Сколькими способами можно разложить все шары по ящикам так, чтобы в каждом был хотя бы один шар?

ПОВТОРИТЕ

24.12. Постройте схематический график функции и по ее графику найдите промежутки возрастания и убывания функции:

$$1)\ f(x)=\frac{2x}{x+1};\ 2)\ f(x)=\frac{3x}{x^2-9};\ 3)\ f(x)=\frac{x}{25-x^2};\ 4)\ f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-4}.$$

24.13. Решите неравенство:

1) $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$; 2) $\sin^2 x \leqslant \frac{1}{4}$; 3) $\cos^2 x \geqslant \frac{1}{4}$; 4) $\operatorname{tg} x \leqslant 1$.

24.14. На рисунке 24.4 изображен график функции $y = f(x)$. Укажите утверждения, неверные для функции $y = f(x)$:
1) $f(2) = f(4) = 0$;
2) функция возрастает на интервале $(0; 9)$;
3) функция постоянна на промежутке $[2; 4]$;
4) $x = 2$ — точка минимума функции;
5) функция возрастает при $x \in (1; 9)$.

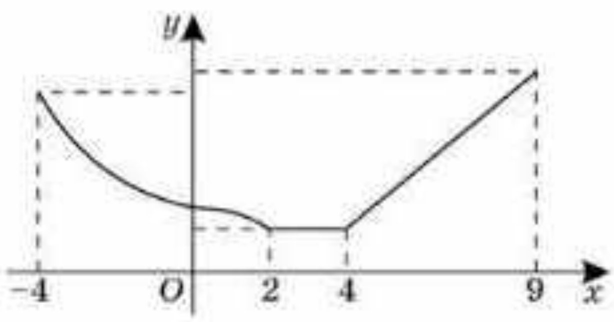


Рис. 24.4

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Двучлен, возведение в степень, формулы сокращенного умножения, основные элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания и их формулы.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§25. БИНОМ НЬЮТОНА (С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ) ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Вы ознакомитесь с понятиями *бином Ньютона*, *биномиальные коэффициенты;* свойствами бинома Ньютона, с новым символом — Σ;
научитесь применять бином Ньютона для приближенных вычислений (с натуральным показателем).

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Бином Ньютона, двучлен, степень, показатель степени, четное число, нечетное число, натуральное число

ВЫ ЗНАЕТЕ: Вами были изучены формулы сокращенного умножения. В частности, формула квадрата суммы двучлена $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ и формула куба суммы двучлена $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$.

Для того, чтобы получить формулу для суммы четвертой степени, можно воспользоваться формулой куба суммы и правилом умножения многочлена на многочлен. Тогда $(x + a)^4 = (x + a)^3 (x + a) = (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3)(x + a) = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$.

Продолжая таким образом можно получить формулу для суммы двучлена n-ой степени:

$$(x + a)^n = x^n + n \cdot a \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^k x^{n-k} + \ldots + a^n. \quad (1)$$

Теперь заменим коэффициенты правой части формулы (1), используя формулу числа сочетаний $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Тогда формула (1) примет следующий вид:

$$(x + a)^n = C_n^0 \cdot a^0 \cdot x^n + C_n^1 \cdot a^1 \cdot x^{n-1} + C_n^2 \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \ldots + C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot x^1 + C_n^n \cdot a^n \cdot x^0, \quad (2)$$

где $C^0_n = 1$; $a^0 = 1$; $C^1_n = n$; $C^2_n = \frac{n(n-1)}{2!}$; … ; $C^k_n = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$; … ; $C_n^{n-1} = n$; $C_n^n = 1$; $x^{n-n} = 1$.

Формулы (1) и (2) называются *формулами бинома Ньютона*.

Слово *бином* в переводе с французского языка означает “алгебраический двучлен”. Бином Ньютона используют для вычисления степеней биномов.

Коэффициенты в формуле бинома Ньютона называются *биномиальными коэффициентами*.

Формулу (2) сокращенно можно записать в следующем виде:

$(x + a)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$, где $\sum$ знак суммы.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Бином Ньютона обладает следующими свойствами:

1) число слагаемых бинома Ньютона на единицу больше, чем показатель степени бинома;

2) показатель степени x убывает от n до нуля, показатель степени a возрастает от нуля до n. Значение суммы показателей степеней каждого слагаемого равно показателю степени бинома;

3) коэффициенты слагаемых, равноотстоящих от начала и от конца бинома, равны между собой;

4) любой член бинома определяется по формуле $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$, (3) где k изменяется от 0 до n;

5) если $x = a = 1$, то $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$, т. е. значение суммы коэффициентов бинома Ньютона равно 2^n;

6) если показатель степени бинома — нечетное натуральное число, то в биноме число слагаемых будет четным; если показатель степени бинома — четное натуральное число, то число слагаемых в биноме нечетное число;

7) слагаемые бинома, имеющие наибольший коэффициент, называются *средними членами*. Если показатель степени бинома — нечетное число, то в разложении два средних члена; если показатель степени бинома — четное число, то в разложении бинома один средний член.

ПРИМЕР

1. Представим в виде многочлена степень $(x + a)^5$.

Решение. Используя бином Ньютона, получим:

$$(x+a)^5 = x^5 + 5 \cdot a \cdot x^4 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot a^2 \cdot x^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^3 \cdot x^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^4 \cdot x + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot a^5 \cdot x^0 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2 \cdot x^3 + 10a^3 \cdot x^2 + 5a^4 \cdot x + a^5.$$

Ответ: $(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^2 + 5a^4x + a^5$.

ПРИМЕР

2. Найдем четвертый и двадцатый члены бинома $(x + a)^{25}$.

Решение. По формуле (3) найдем четвертый и двадцатый члены данного бинома.

$T_{3+1} = C_{25}^3 \cdot a^3 \cdot x^{22} = 2300a^3x^{22}$ и $T_{19+1} = C_{25}^{19} \cdot a^{19} \cdot x^6 = 177\ 100\ a^{19}x^6$.

Ответ: $T_4 = 2300\ a^3x^{22}$; $T_{20} = 177\ 100\ a^{19}x^6$.

Формулу бинома Ньютона можно использовать в приближенных вычислениях. Часто используют не всю формулу, а ее часть, отбрасывая ее члены, значение суммы которых дает небольшую ошибку приближения.

Если в формуле бинома Ньютона $(x + a)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$ использовать замену $a = 1$, то получим равенство:

$$(1 + x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (4)$$

В тех случаях, когда значение x является небольшим ($|x| < 1$), то значения x^2, x^3, ..., x^n тем более малы. Значит, для получения приближенного значения выражения $(1 + x)^n$ в формуле (1) отбросим слагае-

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

мые, которые содержат x^2, x^3, ..., x^n. Получим приближенное равенство: $(1 + x)^n \approx 1 + C_n^1 x$. Поскольку $C_n^1 = n$, то $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.

ЗАПОМНИТЕ

Формула для приближенных вычислений: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.

ПРИМЕР

3. Вычислим $1{,}002^5$.

Решение. Используя формулу $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, получим: $1{,}002^5 = (1 + 0{,}002)^5 \approx 1 + 5 \cdot 0{,}002 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$.

Ответ: $1{,}002^5 \approx 1{,}01$.

Найдем погрешность приближения. Вычислив значение выражения с помощью калькулятора, получим $1{,}002^5 = 1{,}0\,100\,400\,801$. Тогда видим, что ошибка в вычислениях незначительна: $1{,}0\,100\,400\,801 - 1{,}01 = 0{,}0\,000\,400\,801$.

?

1. В каких преобразованиях можно использовать бином Ньютона?
2. Что означает слово "бином", символ $\sum$?
3. Чем являются биномиальные коэффициенты?

Упражнения

A

25.1. Представьте в виде многочлена степень:

1) $(x + a)^5$; 2) $(3x + 2a)^6$; 3) $(3x - a)^5$.

25.2. Найдите коэффициент при x^n в разложении степени с помощью бинома Ньютона:

1) $(x + 2)^{10}$, $n = 3$; 2) $(1 - 2x)^7$, $n = 4$; 3) $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^8$, $n = -5$.

25.3. Найдите значение суммы биномиальных коэффициентов разложения $(a + b)^{11}$.

B

25.4. Докажите тождество:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} kC_n^k = 0$.

25.5. Найдите n в разложении степени бинома $\left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, если отношение четвертого слагаемого разложения к третьему равно $3\sqrt{2}$.

25.6. Вычислите приближенное значение выражения:

1) $1{,}02^{11}$; 2) $1{,}022^{15}$; 3) $0{,}98^8$; 4) $0{,}97^{12}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

C

25.7. Значение суммы биномиальных коэффициентов разложения $\left(2na + \frac{1}{2na^2}\right)^{3n}$ равно 64. Найдите слагаемое, не содержащее a.

25.8. Пятое слагаемое разложения бинома n-ой степени $\left(\frac{1}{a} + \sqrt{a}\right)^n$ не зависит от a. Найдите A_n^2.

25.9. Докажите, что верно равенство:

1) $C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 3 \cdot C_n^3 + \ldots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$;

2) $C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 3 \cdot C_n^2 + \ldots + (n + 1) \cdot C_n^n = (n + 2) \cdot 2^{n-1}$.

ПОВТОРИТЕ

25.10. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{10 - 3x - x^2}$;
2) $y = \frac{x}{\sqrt{2x^2 - x - 3}}$;
3) $y = \arcsin\frac{1}{x}$;
4) $y = \arccos\sqrt{x}$.

25.11. Заполните таблицу 15.

Таблица 15

Урожайность зерновых (ц/га)	9—11	11—13	13—15	15—17	17—19	19—21
Число фермерских хозяйств	4	6	11	5	3	1
Накопленная частота						

1) У скольких хозяйств урожайность зерновых составила не менее 17 ц/га?
2) У скольких хозяйств урожайность зерновых была наименьшей?
3) Какова урожайность большинства хозяйств?

25.12. Решите уравнение:

1) $2\cos2x + 2\sin x\cos2x = 1 + \sin x$;
2) $4\sin^2x\cos^2x = 2$.

25.13. В турнире по футболу участвовало 6 команд. Сколько всего матчей было сыграно, если турнир проходил по круговой системе?

25.14. В классе 27 учащихся, из которых нужно выбрать троих. Сколькими способами это можно сделать, если:
1) первый учащийся должен уметь решать тригонометрические уравнения, второй — сходить за мелом, третий — быть дежурным в классе;
2) они будут исполнять танец?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Событие, элементарное событие, частота, относительная частота, вероятность, статистика, статистическая вероятность, классическое определение вероятности.

§ 26. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Вы ознакомитесь с понятием *случайное событие*, видами случайных событий;
научитесь приводить примеры случайных событий;
вычислять вероятность случайных событий, применяя свойства вероятностей;
научитесь решать задачи на нахождение вероятностей, применяя формулы комбинаторики.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Случайное событие, невозможное событие, достоверное событие, вероятность, равновозможные события, несовместимые события, противоположные события

Под *событием* понимается всякое явление, о котором имеет смысл говорить, что оно происходит (имеет место) или не происходит.

ПРИМЕР 1. 1) "Утром пойдет дождь"; 2) "десятиклассники изучают алгебру и начала анализа"; 3) "на елке вырастут яблоки"; 4) "при телефонном вызове абонент окажется занят"; 5) "число вызовов по телефонной связи в каждый момент времени"; 6) "попадание в цель при стрельбе из оружия".

Событиями являются и результаты различных опытов, наблюдений и измерений.

ПРИМЕР 2. 1) "Выпал герб" (в опыте подбрасывания монеты); 2) "выпала решка" (в опыте подбрасывания монеты).

Испытание, или *опыт* — это комплекс условий, в которых могут осуществиться или не осуществиться рассматриваемые события (результаты).

При многократном повторении комплекса условий говорят о *серии испытаний*.

Для обозначения событий используют символы: A, C, B, и т. д.

События делят на *достоверные, случайные и невозможные*.

События		
Достоверные	Случайные	Невозможные
Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в данном испытании.	Событие называется *случайным*, если оно может произойти, но может и не произойти.	Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в данном испытании, т. е. свершение которого при данных условиях исключается.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПРИМЕР

3. Примером случайного события является событие:

1) "Выпадение герба", связанного с опытом подбрасывания монеты, в одних случаях, которое может произойти, а в других — может и не произойти;

2) "Утром пойдет дождь", связанного с состоянием погоды, в одних случаях, которое может произойти, а в других — может и не произойти.

Примером достоверного события является событие:

1) "Десятиклассники изучают алгебру и начала анализа";

2) "За осенью наступит зима".

Примером невозможного события является событие:

1) "При подбрасывании монеты достоинством 5 тенге выпадет 2 тенге";

2) "За июнем сразу наступит январь".

В результате опыта могут произойти различные случайные события. Случайное событие "При бросании игральной кости выпала четверка" является элементарным событием — его нельзя разделить на более простые. Событие "При бросании игральной кости выпало нечетное число очков" не является элементарным событием — его можно разделить на более простые: "При бросании игральной кости выпало одно очко", "При бросании игральной кости выпало три очка", "При бросании игральной кости выпало пять очков".

Определение. *События, которые нельзя разделить на более простые события, называются* ***элементарными событиями****.*

Определение. *Исход опыта, в котором наблюдается интересующее нас событие, называется* ***благоприятствующим исходом****.*

ПРИМЕР

4. В классе 25 учащихся. Из них 17 мальчиков. Рассмотрим событие A: "Наугад выбранный учащийся является мальчиком". Число благоприятствующих событию A исходов равно 17.

Если из некоторого множества отбирается один его элемент и при этом никакому элементу множества не отдается предпочтения по сравнению с другими, то говорят, что каждому элементу множества обеспечена равная возможность быть отобранной (принцип равновозможности). Такие события называют *равновозможными событиями*.

Определение. Равновозможными исходами *называются исходы опыта, которые имеют одинаковые шансы наступления.*

ПРИМЕР

5. Являются равновозможными события:

A: "При бросании игральной кости выпала цифра 1";

B: "При бросании игральной кости выпала цифра 2";

C: "При бросании игральной кости выпала цифра 3";

D: "При бросании игральной кости выпала цифра 4";

E: "При бросании игральной кости выпала цифра 5";

F: "При бросании игральной кости выпала цифра 6".

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

События называются *совместными* (*совместимыми*), если наступление одного из них не исключает наступление другого в одном и том же испытании.

События называются *несовместными* (*несовместимыми*), если при данном испытании наступление одного из них исключает наступление другого.

ПРИМЕР

6. При стрельбе по мишени двух стрелков являются совместными события:

A: “Попадание в мишень первым стрелком”;

B: “Попадание в мишень вторым стрелком”.

При однократном бросании игральной кости являются несовместными события:

A: “Выпала цифра 5”;

B: “Выпала цифра 6”.

Определение. ***Событием, противоположным событию A,*** *называется событие, которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.*

Событие, противоположное событию A, обозначается через $\overline{A}$.

ПРИМЕР

7. Парами противоположных событий являются:

— “Попадание при выстреле” и “Промах при выстреле”.

— “Безотказная работа всех элементов системы” и “Отказ работы хотя бы одного элемента системы”.

—“Выпал герб при бросании монеты” и “Выпала решка при бросании монеты”.

Событием, противоположным событию “вынули синий шар” в опыте, когда вынимают один шар из ящика с зелеными, желтыми и синими шарами, является “вынули не синий шар, т. е. вынули желтый или зеленый”.

Достоверное событие обозначают буквой U.

Невозможное событие обозначают буквой V.

$$\overline{U} = V, \ \overline{V} = U.$$

На практике обычно проводят не одно, а несколько испытаний или опытов в одних и тех же условиях. Количество испытаний может быть большим. Число испытаний увеличивают, чтобы узнать, насколько часто появляется некоторое событие.

ВЫ ЗНАЕТЕ:

Например, если некоторое событие появилось k раз при n испытаниях, тогда $\frac{k}{n}$ называют *частотой появления наблюдаемого события*.

ВЫ ЗНАЕТЕ:

Частотой события называется отношение числа появлений этого события к числу проведенных испытаний.

Почему частота любого события заключена между нулем и единицей? Найдите частоту невозможного и достоверного событий.

ВЫ ЗНАЕТЕ:

Вероятностью события A называется отношение числа m результатов испытаний, благоприятствующих этому событию, к общему числу испытаний n, если они равновозможные и несовместимые.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Вероятность событий обозначается заглавной латинской буквой P (от французского слова “*probabilite*”, что означает “возможность”, “вероятность”).

Вероятность события A обозначается: $P(A)$.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Вероятность события A вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$, $m \leqslant n$; m, $n \in N$, где m — число появлений события A при n испытаниях.

ПРИМЕР 8. Вероятность события A — выпадет “орел” и события B — выпадет “решка” можно записать так: $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}5$, или $P(A) = 50\%$, $P(B) = 50\%$.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему вероятность события A, как и его частота, заключена между нулем и единицей: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$?

ПРИМЕР 9. Найдем вероятность события X — число выпавших очков на игральной кости является простым числом.

Решение. Для нахождения вероятности события X воспользуемся формулой: $P(X) = \frac{m}{n}$, где m — число появлений события A при n испытаниях.

Поскольку всего количество очков может быть только 1; 2; 3; 4; 5; 6, то $n = 6$, $m = 3$, так как простыми из чисел 1; 2; 3; 4; 5; 6 являются три числа: 2; 3; 5.

Получим $P(X) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

ПРИМЕР 10. В коробке 10 белых и 8 желтых шаров. Наугад извлечены три шара. Какова вероятность того, что вынутыми шарами будут два белых и один желтый шар?

Решение. Чтобы найти вероятность данного события, нужно найти значения n и m. Общее число элементарных событий $n = C_{18}^3$, а значение $m = C_{10}^2 \cdot C_8^1$, так как берем из 10 белых шаров два и из 8 желтых один шар.

Используем определение классической вероятности $P = \frac{m}{n}$.

Следовательно, $P(A) = \frac{C_{10}^2 \cdot C_8^1}{C_{18}^3} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{1! \cdot 7!} \cdot \frac{3! \cdot 15!}{18!} = \frac{15}{34}$.

Ответ: $\frac{15}{34}$.

Свойства вероятностей

Свойство 1. *Вероятность достоверного события равна* 1.

Свойство 2. *Вероятность невозможного события равна* 0.

Свойство 3. *Вероятность наступления событий, образующих полную группу, равна* 1.

Свойство 4. *Вероятность противоположного события равна значению разности между единицей и вероятностью данного события, т. е.* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Важное достоинство классического определения вероятности события состоит в том, что с его помощью вероятность события можно определить, не прибегая к опыту, а исходя из логических рассуждений.

1. Приведите примеры случайных событий.
2. Являются ли события "Выпал герб при бросании монеты" и "Выпала решка при бросании монеты" равновозможными?
3. Почему событие "При бросании игральной кости выпало четное число очков" не является элементарным?
4. Назовите событие, которое противоположно событию "При бросании игральной кости выпало четное число очков".
5. В каких случаях можно найти вероятность события без проведения испытаний?
6. Какие значения принимает вероятность события?

Упражнения

А

26.1. При бросании игрального кубика выпадает одна из цифр от 1 до 6. Найдите вероятность события:
1) выпадет цифра 2; 2) выпадет цифра 1 или 2;
3) выпадет цифра 4 или 6; 4) выпадет нечетная цифра.

26.2. а) В урне 2 белых и 5 красных шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется:
1) белый; 2) красный; 3) зеленый.
б) В урне 3 красных и 9 синих шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется:
1) не белый; 2) красный; 3) синий.

26.3. Испытание состоит в подбрасывании игральной кости. Рассмотрим события A, B и C. Событие A — выпавшее на верхней грани число очков делится на 12, B — выпавшее на верхней грани число очков равно 2, C — выпавшее на верхней грани число очков делится на 2. Объясните, какое утверждение верное, а какое нет:
1) $P(A) = 1$; 2) $P(A) = 0$; 3) $P(C) = 0{,}5$;
4) $P(\bar{B}) = \frac{5}{6}$; 5) $P(B) = \frac{1}{6}$.

26.4. 1) В классе 25 учащихся, из которых 5 учатся на отлично, 12 — на хорошо, 6 — удовлетворительно и 2 — слабо. Какова вероятность того, что наугад вызванный к доске учащийся отличник или ударник?
2) Среди 25 экзаменационных билетов 5 "легких". Двое учащихся по очереди взяли по одному билету. Какова вероятность того, что первый учащийся взял "легкий" билет?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

26.5. Из 100 лотерейных билетов 15 выигрышных. Приобретен один билет. Найдите вероятность того, что лотерейный билет: 1) выигрышный; 2) не выигрышный.

B

26.6. Брошены две игральные кости. Найдите вероятность того, что значение произведения выпавших очков равно: 1) 5; 2) 6.

26.7. 1) Монета брошена два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз появится герб?
2) Брошены три монеты. Какова вероятность того, что выпадут ровно два герба?

26.8. В таблице 16 приведены данные о продаже билетов на поездку в поездах, следующих из Алматы, за один день.

Таблица 16

Тип поезда	Скоростной поезд	Скорый поезд	Пассажирский поезд	Пригородный поезд
Количество проданных за день билетов	150	445	734	896

Найдите вероятность того, что очередной пассажир купит билет на поезд: 1) скорый; 2) пассажирский; 3) пригородный.

26.9. Для экзамена подготовлены билеты с номерами от 1 до 25. Какова вероятность того, что взятый наугад учащимся билет имеет: 1) однозначный номер; 2) двузначный номер?

26.10. Случайным образом выбрали двузначное число. Найдите вероятность того, что оно:
1) оканчивается нулем; 2) состоит из одинаковых цифр; 3) больше 27 и меньше 46; 4) не является квадратом целого числа.

C

26.11. Из 100 лотерейных билетов 10 выигрышных. Приобретены 5 билетов. Найдите вероятность того, что среди приобретенных билетов будут два выигрышных.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ

26.12. Изучение случайных явлений до середины XVII в. носило чисто качественный характер.
В XIX столетии теория вероятностей начала успешно применяться к решению задач прикладного характера.
В настоящее время теория вероятностей применяется при анализе различных процессов и явлений. Она изучает количественные закономерности, которым подчиняются однородные массовые события, поэтому позволяет предвидеть события в массовых явлениях.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПОВТОРИТЕ

26.13. Решите уравнение:

1) $\arcsin(2-x) = -\frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos(1-2x) = \frac{\pi}{2}$.

26.14. В шахматном турнире участвовало 10 игроков. Сколько всего игр было проведено, если турнир проходил по круговой системе?

26.15. В классе 27 учащихся, из которых 15 девочек. Нужно выбрать одного учащегося для участия в соревнованиях по легкой атлетике. Найдите вероятность того, что это будет:

1) мальчик; 2) девочка.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Испытание, событие, случайное событие, частота случайного события, вероятность, статистика, статистические данные, генеральная совокупность, выборка, статистический вывод.

§27. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вы ознакомитесь с понятием условной вероятности, правилами сложения и умножения вероятностей; научитесь применять правила сложения и умножения вероятностей.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Сумма событий, произведение событий, условная вероятность

1. Вероятность суммы несовместимых событий

Определение. ***Суммой событий A и B*** *называется событие, состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих одному из событий A или B.* Обозначается: $A + B$.

ПРИМЕР

1. В урне находится 30 шариков: 15 — красного цвета, 10 — синего и 5 — зеленого. Найдем вероятность того, что наугад извлеченный шарик окажется не зеленым (событие A).

Событие А наступит, если извлеченный наугад шарик окажется либо красного цвета (событие B), либо синего цвета (событие C), т. е. событие A есть сумма несовместимых событий B и C. Тогда получим:

$$P(A) = P(B+C) = P(B) + P(C) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} = \frac{5}{6}.$$

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Определение. ***Произведением событий A и B*** *называется событие, состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих одновременно событиям A и B. Обозначается: AB.*

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПРИМЕР 2. Если бросить монету и игральную кость, то какова вероятность того, что монета упадет гербом вверх и вместе с тем на кости выпадает пятерка?

$\frac{1}{2}$ есть вероятность выпадения герба и $\frac{1}{6}$ есть вероятность появления на кости пятерки. Вероятность совмещения этих двух независимых событий равна произведению их вероятностей: $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Пусть m — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию A, k — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию B, несовместимому по отношению к событию A. Пусть n — общее число равновозможных элементарных событий, образующих полную группу несовместимых событий.

Тогда и $P(A) = \frac{m}{n}$, и $P(B) = \frac{k}{n}$.

Согласно определению суммы несовместимых событий, $A+B$ означает: "имеет место или A, или B". Но число событий, благоприятствующих такому событию, равно $m + k$, поэтому $P(A + B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n}$, т. е. $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

ЗАПОМНИТЕ

Последнее равенство может быть распространено на любое конечное число событий.

ЗАПОМНИТЕ

Вероятность суммы попарно несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

2. Вероятность суммы совместимых событий

Пусть m – число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию A, k — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию B. Допустим, что среди упомянутых $m + k$ событий содержится q таких, которые благоприятствуют и событию A, и событию B. Если n — общее число равновозможных элементарных событий, образующих полную группу, тогда и $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(B) = \frac{k}{n}$, $P(AB) = \frac{q}{n}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Запись $A + B$ означает: "произойдет или событие A, или B, или и то и другое вместе". Но такому событию благоприятствуют $(m + k - q)$ элементарных событий, поэтому:

$$P(A+B) = \frac{m+k-q}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{q}{n}, \text{ т. е. } P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Эта формула представляет собой обобщение формулы

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

ЗАПОМНИТЕ

Вероятность суммы двух совместимых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного осуществления.

ПРИМЕР

3. Рассмотрим два связанных опытом события.

Опыт: в мешочке 3 белых и 2 черных шара. Достали наугад сначала один шар, затем — второй.

Событие A: первый шар белый.

Событие B: второй шар белый.

Найдем вероятность события A, т. е. $P(A)$.

Используя определение: *вероятностью события A* называется отношение числа m результатов испытаний, благоприятствующих этому событию, к общему числу испытаний n, если они равновозможные и несовместимые, т. е. $P(A) = \frac{m}{n}$, найдем m и n.

Если из мешочка достать первый шар, то благоприятствующих событию A будет три результата, поскольку белых шаров 3, а возможных результатов $n = 5$, поэтому $P(A) = \frac{3}{5}$.

Если событие A произошло, то в мешочке останется 2 белых и 2 черных шара. Тогда вероятность события B равна $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Если событие A не произошло, то осталось 3 белых шара и 1 черный. Тогда вероятность события B равна $\frac{3}{4}$.

Таким образом, вероятность события B зависит от того, произошло или не произошло событие A.

В таких случаях говорят, что:

1) событие B зависит от события A;

2) вероятность появления события B условная.

Определение. ***Условная вероятность*** *— вероятность одного события при условии, что другое событие уже произошло.*

Условная вероятность появления события B, если событие A произошло, обозначается символом: $P(B/A)$.

В нашем примере $P(B/A) = \frac{1}{2}$.

ОБЪЯСНИТЕ

Что означает запись $P(A/B)$?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Вернемся к нашему примеру. Пусть требуется вычислить вероятность события — первый и второй шар белые, т. е. вероятность произведения двух событий A и B. В данном случае события A и B зависимые: вероятность события B зависит от того, произошло или нет событие A. Формулы для нахождения вероятности зависимых событий еще не знаем. Выведем эту формулу.

Чтобы найти вероятность события B (второй шар белый), если событие A (первый шар белый) произошло, т. е. $P(B/A)$, надо знать число событий, которые благоприятствуют произведению событий A и B (первый и второй шар белые) и число событий, благоприятствующих событию A. Пусть событию AB благоприятствует d событий, событию A — m событий, всего — n событий.

$$\text{Тогда } P(B/A) = \frac{d}{m} = \frac{\frac{d}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (1)$$

Убедитесь, что $P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$. (2)

Определение. ***Условной вероятностью*** *события A при условии события B (аналогично события B при условии события A) называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию AB, к числу элементарных событий, благоприятствующих событию B (аналогично событию A).*

Используя формулы (1) и (2), получим

$$P(AB) = P(A) \cdot P\,(B/A) \qquad (3)$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P\,(A/B) \qquad (4)$$

Правило. *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий, на условную вероятность другого события.*

Вернемся к нашему примеру. Вычислим вероятность того, что оба шара белые, т. е. $P(AB)$. Воспользуемся формулой (3) и найденными выше $P(A) = \frac{3}{5}$ и $P(B/A) = \frac{1}{2}$. Получим $P(AB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

Если события A и B независимые, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. (5)

Правило. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

ПРИМЕР

4. Рассмотрим два события, связанные опытом. Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления на одной игральной кости 3 очков, на другой — четного числа очков?

Решение. Рассмотрим события:

Событие A — появление на одной игральной кости 3 очков.

Событие B — появление на другой игральной кости четного числа очков.

ОБЪЯСНИТЕ

Почему события A и B независимые?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПРИМЕР 5. Возможных событий 6, поскольку на игральной кости может появиться 1 очко, 2 очка, 3 очка, 4 очка, 5 очков, 6 очков, поэтому $P(A) = \frac{1}{6}$. Поскольку из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 четных чисел 3 (это числа 2, 4, 6), то $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

По условию бросают сразу 2 игральные кости, поэтому найдем $P(AB)$. Поскольку события A и B независимые, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

1. В каких случаях можно найти вероятность события без проведения испытаний?
2. Какие значения принимает вероятность события?
3. В чем состоит сходство вычисления суммы вероятностей несовместимых событий и произведения вероятностей независимых событий?

Упражнения

А

27.1. В произвольном порядке выписываются две буквы P и две буквы H. Найдите вероятность того, что обе буквы H будут стоять рядом при условии, что:
1) буква P стоит последней;
2) буква H стоит второй;
3) буква H стоит первой.

27.2. Серди 100 лотерейных билетов есть 10 выигрышных:
1) Найдите вероятность того, что два наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.
2) Найдите вероятность того, что из двух наудачу выбранных билетов только один окажется выигрышным.

27.3. В коробке находятся 4 шара: синий, зеленый и два красных. Из коробки вынимаются два шара. Найдите вероятность того, что:
1) оба шара красные;
2) первый вынутый шар зеленый, второй — красный.

27.4. В двух коробках имеются шары. В первой коробке 6 красных и 4 желтых шаров, во второй — 5 красных и 5 желтых шаров. Случайным образом выбирают одну их коробок и вынимают из нее шар. Найдите вероятность того, что: 1) этот шар будет красным; 2) красный шар будет вынут из второй коробки.

27.5. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первым стрелком равна 0,7, вторым — 0,8. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

27.6. Среди 100 лотерейных билетов, где только 10 выигрышных, куплено 3 билета. Рассматриваются события: A — выиграл первый билет; B — выиграл второй билет; C — выиграл третий билет. Найдите вероятность того, что выиграет только третий билет.

27.7. В каждой из двух коробок находятся по 5 кубиков — 2 синих, зеленый, белый и красный. Выбирается случайным образом коробка и из нее вынимается кубик. Найдите вероятность того, что:
1) будет вынут белый кубик;
2) будет выбрана вторая коробка и из нее вынут синий кубик.

27.8. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что для запуска автомобиля придется включать зажигание не более трех раз?

B

27.9. Оператор, обслуживающий три станка, вынужден был отлучиться на некоторое время. Вероятности того, что станки за это время не потребуют внимания рабочего, равны 0,7; 0,8; 0,8. Найдите вероятность того, что за время отсутствия оператора ни один станок не потребует внимания.

27.10. При увеличении напряжения в два раза может произойти разрыв электрической цепи из-за выхода из строя одного из трех последовательно соединенных элементов, соответственно с вероятностями 0,4; 0,3; 0,5. Найдите вероятность того, что в этом случае не произойдет разрыва цепи.

27.11. 1) Два спортсмена одновременно стреляют по одной мишени. Вероятность поражения мишени первым спортсменом равна 0,7, вторым — 0,8. Найдите вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из спортсменов.
2) Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени. Вероятность попадания первым стрелком — 0,9, вторым — 0,8. Найдите вероятность попадания в цель хотя бы одного стрелка.

27.12. Среди 100 лотерейных билетов есть 20 выигрышных:
1) Найдите вероятность того, что три наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.
2) Найдите вероятность того, что среди двух наудачу выбранных билетов есть выигрышные.

27.13. Подбрасываются одновременно два игровых кубика. Найдите вероятность того, что одновременно выпадут числа: 1) две двойки; 2) три и четыре.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

27.14. Вероятность того, что изготовленное на предприятии изделие является пригодным, равна $\frac{92}{100}$. Вероятность того, что взятое наугад годное изделие является изделием первого сорта, равна $\frac{72}{100}$. Найдите вероятность того, что взятое наугад изделие является изделием первого сорта.

27.15. В урне находятся 2 белых, 3 красных и 5 зеленых шаров, одинаковых по размеру. Найдите вероятность того, что случайным образом вынутый из урны шар будет: 1) цветным; 2) белым или красным.

C

27.16. 1) В урне находятся 7 белых шаров и 3 красных, одинаковых по размеру. Из урны извлекают 2 шара. Найдите вероятность извлечения из урны белого шара после извлечения из урны одного шара, который является или красным, или белым.
2) В урне находятся 30 шаров. Из них 1 белый, 5 красных, 10 синих и 14 зеленых шаров. Вынимаются по очереди три шара. Найдите вероятность того, что в первый раз будет вынут красный шар, во второй раз — синий и в третий раз — зеленый.

27.17. Если студент ответил на один из двух предложенных вопросов, то он сдал экзамен. На экзамене предлагается 40 вопросов, из которых студент не знает ответ на 8 вопросов. Найдите вероятность того, что студент сдаст экзамен.

27.18. В лотерее 10 билетов, из которых 4 выигрышных. Найдите вероятность того, чтобы выиграть хотя бы один раз, купив 4 билета.

27.19. Трое друзей договорились встретиться. Вероятности того, что каждый из трех друзей придет в условленное место, соответственно равны: $p_1 = 0,8$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,7$. Найдите вероятность того, что на встречу придут двое из трех друзей или все три.

27.20. 1) На пяти карточках записаны буквы *а*, *г*, *и*, *н*, *к*. Берут наугад одну карточку за другой и кладут в том порядке, в каком карточки были вынуты. Найдите вероятность того, что получится слово “книга”.

2) На семи карточках записаны буквы *о*, *о*, *о*, *л*, *л*, *к*, *к*. Берут наугад одну карточку за другой и кладут в том порядке, в каком карточки были вынуты. Найдите вероятность того, что получится слово “колокол”.

27.21. На сборку изделия берутся детали с трех станков. Первый станок дает бракованную деталь с вероятностью 0,002, второй — 0,003, третий — 0,004. Найдите вероятность попадания на

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

сборку бракованной детали, если с первого станка поступило 250 деталей, со второго — 200, с третьего — 100 деталей.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ

27.22.

ПОВТОРИТЕ

27.23. Каким (невозможным, достоверным или случайным) является событие — бросают две игральные кости:
1) на первой кости выпало 5 очков, на второй — 1 очко;
2) значение суммы выпавших на двух костях очков равно 1;
3) значение суммы выпавших на двух костях очков равно 11;
4) значение суммы выпавших на двух костях очков меньше 14?

27.24. Каким (невозможным, достоверным или случайным) является событие — случайным образом открывается учебник казахского языка и находится второе слово на левой странице. Это слово начинается:
1) с буквы: "Ә" или "Қ"; 2) с буквы "Ъ".

27.25. Из следующих событий: 1) "наступило утро"; 2) "сегодня по расписанию 10 уроков"; 3) "сегодня 1 января"; 4) "температура воздуха в г. Алматы + 35°" составьте все возможные пары совместных событий и пары несовместных событий.

27.26. Разложите многочлен на множители:
1) $x^3 - 3x + 2$; 2) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$; 3) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$.

27.27. Найдите вероятность выбора четной цифры из набора цифр:
1) 1; 2; 3; 6; 7; 9; 2) 0; 3; 4; 5; 6; 7; 9.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Событие, несовместное событие, вероятность, статистика, статистические данные, генеральная совокупность, выборка, статистический вывод.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§ 28. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Вы ознакомитесь с формулой полной вероятности Байеса;
научитесь применять ее при решении задач.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Формула полной вероятности Байеса, апостериорные и априорные вероятности

Если событие A может произойти только при выполнении одного из событий B_1, B_2, ..., B_n, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \ldots + P(B_n)P(A|B_n).$$

ЗАПОМНИТЕ

Эта формула называется *формулой полной вероятности*.

ПРИМЕР

1. В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% — продукция с первого предприятия, 30% — со второго предприятия, 50% — с третьего предприятия. С первого предприятия 10% продукции высшего сорта, со второго предприятия — 5% и с третьего — 20%. Найдите вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

Решение. Обозначим через B событие, заключающееся в том, что будет куплена продукция высшего сорта. Через A_1, A_2, A_3 обозначим события, заключающиеся в покупке продукции, принадлежащей, соответственно, первому, второму и третьему предприятиям.

Можно применить формулу полной вероятности:

$P(A_1) = 0{,}2$ $\quad$ $P(B|A_1) = 0{,}1$

$P(A_2) = 0{,}3$ $\quad$ $P(B|A_2) = 0{,}05$

$P(A_3) = 0{,}5$ $\quad$ $P(B|A_3) = 0{,}2$

Подставляя эти значения в формулу полной вероятности, получим искомую вероятность:

$$P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}135.$$

Ответ: 0,135.

Рассмотрим полную группу несовместных событий B_1, B_2, ..., B_n, вероятности появления которых, соответственно, равны $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_n)$.

Событие A может произойти только вместе с каким-либо из событий B_1, B_2, ..., B_n, которые будем называть *гипотезами*.

Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \ldots + P(B_n)P(A|B_n).$$

Если событие A произошло, то это может изменить вероятности гипотез $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_n)$.

По теореме умножения вероятностей:

$$P(AB_1) = P(B_1)P(A|B_1) = P(A)P(B_1|A), \text{ откуда } P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(A)}.$$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Аналогично, для остальных гипотез:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)},\ i = 1, \dots, n.$$

ЗАПОМНИТЕ

Полученная формула называется *формулой Байеса* (*Бейеса*).

Вероятности гипотез $P(B_i|A)$ называются *апостериорными* (оцененные после испытания) вероятностями, тогда как $P(B_i)$ — *априорными* (оцененные до испытания) вероятностями.

ПРИМЕР 2. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго — 0,5; для третьего — 0,8. Мишень не поражена. Найдите вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

Решение. Возможны три гипотезы:

A_1 — на линию огня вызван первый стрелок,
A_2 — на линию огня вызван второй стрелок,
A_3 — на линию огня вызван третий стрелок.

Так как вызов на линию огня любого стрелка равновозможен, то $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$.

В результате опыта наблюдалось событие B — после произведенных выстрелов мишень не поражена. Условные вероятности этого события при сделанных гипотезах равны:

$P(B|A_1) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49;$
$P(B|A_2) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25;$
$P(B|A_3) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$

По формуле Байеса находим вероятность гипотезы A_1 после опыта:

$$P(A_1|B) = \frac{0,49 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot 0,49 + \frac{1}{3} \cdot 0,25 + \frac{1}{3} \cdot 0,04} = \frac{0,49}{0,78} \approx 0,628.$$

Ответ: $\approx 0,628$.

1. В каких случаях используется формула полной вероятности?
2. В каких случаях используется формула Байеса?
3. Запишите формулу Байеса. Почему эту формулу называют *формулой гипотез*?

Упражнения

А

28.1. В трех коробках имеются шары. В первой коробке 4 красных и 3 желтых, во второй — 5 красных и 2 желтых, в третьей — 2 красных и 5 желтых шаров. Случайным образом выбирают одну из

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

коробок и вынимают из нее шар. Найдите вероятность того, что: 1) этот шар будет красным; 2) красный шар будет вынут из второй коробки.

28.2. В соревнованиях по стрельбе участвуют три спортсмена. Вероятность попадания в мишень первым спортсменом равна 0,3, вторым — 0,8, третьим — 0,5. Один из них выстрелил по мишени и поразил ее. Найдите вероятность того, что по мишени выстрелил третий спортсмен.

28.3. Оператор обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания оператора, для первого станка равна 0,9, для второго — 0,8, для третьего — 0,8. Найдите вероятность того, что в течение часа:

1) ни один из трех станков не потребует внимания оператора;

2) по крайней мере один из станков не потребует внимания оператора.

28.4. На экзамен по геометрии учитель составил 25 билетов. Учащийся подготовился только по 20 билетам. Найдите вероятность того, что учащийся экзамен сдаст, если: 1) учащийся зашел первым на экзамен; 2) учащийся зашел вторым на экзамен.

28.5. Найдите вероятность того, что при восьмикратном бросании монеты решка выпадет 8 раз.

B

28.6. Деталь к изделию поступает из двух заготовительных цехов: из первого цеха — 70%, из второго цеха — 30%. Деталь из первого цеха имеет 10% брака, из второго — 20% брака. Взятая наудачу деталь оказалась без дефекта. Какова вероятность ее изготовления первым цехом?

28.7. На сборку изделия попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 3% брака, второй — 2% и третий — 4%. Найдите вероятность того, что на сборку попадает бракованная деталь, если с первого автомата поступает 100 деталей, со второго — 200 и с третьего — 250 деталей.

28.8. В сборочной линии три автомата соединены последовательно. Вероятности того, что эти автоматы выйдут из строя, соответственно равны 0,2; 0,15 и 0,1. Найдите вероятность того, что сборочная линия будет работать.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

C

28.9. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками равны 0,4; 0,5; 0,6. Найдите вероятность того, что первый стрелок поразил мишень.

28.10. В четырех коробках находятся альчики. В первой коробке 1 белый и 1 красный альчик, во второй — 2 белых и 3 красных, в третьей — 3 белых и 5 красных, в четвертой — 4 белых и 7 красных альчиков. Вероятности выбора коробки равны $P(A_1) = \frac{1}{10}$; $P(A_2) = \frac{2}{10}$; $P(A_3) = \frac{3}{10}$; $P(A_4) = \frac{4}{10}$. Выбирается наугад одна из коробок и из нее вынимается альчик. Найдите вероятность того, что этот альчик будет: 1) белым; 2) красным.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ

28.11. Английский математик Томас Байес сформулировал и решил одну из основных задач теории вероятностей (теорема Байеса).
Формула Байеса играет важную роль в современной математической статистике и теории вероятностей.

Томас Байес
(1702—1761)

ПОВТОРИТЕ

28.12. Функция задана формулой $f(n) = \frac{C_n^3 \cdot C_n^2}{(n-2)!}$. Найдите значение функции при: 1) $n = 4$; 2) $n = 5$; 3) $n = 7$.

28.13. Запишите в виде степени двучлена выражение:
1) $x^3 - 6x^2a + 12xa^2 - 8a^3$;
2) $y^3 - 9y^2a + 27ya^2 - 27a^3$;
3) $x^4 + 8x^3a + 24x^2a^2 + 48xa^3 + 16a^4$.

28.14. Запишите разложения степеней:
1) $(y + 2a)^5$; 2) $(2x + 3a)^6$; 3) $(3x - 2a)^4$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Событие, случайное событие, вероятность, вероятность события, сочетание, испытание, независимые испытания.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

§ 29. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЙ И ПРОЦЕССОВ

Вы ознакомитесь с условиями для применения схемы Бернулли и формулой Бернулли;
научитесь использовать формулу Бернулли и ее следствия при решении задач, составлять вероятностные модели реальных явлений и процессов.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Схема и формула Бернулли, вероятностные модели

Пусть многократно реализуются повторные испытания при неизменных условиях их проведения. В ходе испытания фиксируется появление некоторого случайного события A, вероятность появления которого $P(A)$ не зависит от результатов предыдущих испытаний и остается неизменной ($P(A) = \text{const}$) при повторении опыта. Такие испытания называются *независимыми*, а схема проведения испытаний носит название *схемы Бернулли*.

Событие, противоположное событию A, обозначается $\overline{A}$ и значение суммы вероятностей противоположных событий равно единице, т. е. $p + q = 1$, где $p = P(A)$, $q = P(\overline{A})$.

Теорема Бернулли. *Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна, то вероятность наступления события A k раз в данных испытаниях вычисляется по формуле* $P_{n,k}(A) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где:

$P_{n,k}(A)$ — *вероятность наступления события A k раз в n независимых испытаниях;*

C_n^k — число *сочетаний из n элементов по k элементов;*

p — *вероятность события A;*

q — *вероятность события* $\overline{A}$.

ЗАПОМНИТЕ

$P_{n,k}(A) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ — *формула Бернулли.*

ПРИМЕР

1. Вероятность p события A равна 0,8. Вычислим вероятность появления события A два раза в пяти независимых испытаниях.

Решение. По условию $n = 5$ и $k = 2$, а вероятность $p = 0{,}8$. Тогда вероятность события $\overline{A}$ равна: $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Используя формулу Бернулли, найдем искомую вероятность:

$$P_{5,3}(A) = C_5^3 \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot (0{,}8)^2 \cdot 0{,}008 = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3!} \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}008 = 0{,}0512.$$

Ответ: 0,0512.

Следствия формулы Бернулли

1. *Вероятность того, что в серии из n опытов событие A появится хотя бы один раз, вычисляется по формуле:* $P_n(m \geqslant 1) = 1 - q^n$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

2. *Вероятность того, что в серии из n опытов событие A появится не менее k раз (k и больше), находится по формуле*:

$$P_n(m \geqslant k) = \begin{cases} \sum\limits_{m=k}^{n} P_n(m), & k > \frac{n}{2}, \\ 1 - \sum\limits_{m=0}^{k-1} P_n(m), & k < \frac{n}{2}. \end{cases}$$

ПРИМЕР 2. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее 8 машин, а их имеется 10. Вероятность невыхода каждой машины на линию равна 0,1. Найдем вероятность нормальной работы автобазы на ближайший день.

Решение. Автобаза будет работать нормально (событие D), если на линию выйдет или 8 (событие A), или 9 (событие B), или все 10 (событие C) автомашин.

По теореме сложения вероятностей $P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10)$. Каждое слагаемое найдем по формуле Бернулли. Поскольку вероятность невыхода каждой автомашины на линию равна 0,1, то вероятность выхода автомашины на линию будет равна 0,9, т. е. $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$. Из условия следует, что $n = 10$, $m = 8, 9, 10$.

Следовательно, $P(D) = P_{10}(m \geqslant 8) = C_{10}^{8} \cdot (0{,}9)^8 \cdot (0{,}1)^2 + C_{10}^{9} \cdot (0{,}9)^9 \cdot (0{,}1)^1 + C_{10}^{10} \cdot (0{,}9)^{10} \cdot (0{,}1)^0 \approx 0{,}1937 + 0{,}3874 + 0{,}3487 = 0{,}9298$.

Ответ: 0,9298.

3. Вероятность того, что в серии из n опытов событие A появится не более k раз (k и меньше), находится по формуле: $P_n(m \leqslant k) = \sum\limits_{m=0}^{k} P_n(m)$.

4. Число наступлений события A называется *наивероятнейшим*, если оно имеет наибольшую вероятность по сравнению с вероятностями наступления события A любое другое количество раз. Наивероятнейшее число m^* наступлений события A в n испытаниях заключено между числами $np - q$ и $np + p$ ($np - q \leqslant m^* \leqslant np + p$).

ПРИМЕР 3. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите наиболее вероятное число попаданий в мишень при 5 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность.

Решение. Воспользуемся неравенством $np - q \leqslant m^* \leqslant np + p$.

Поскольку $np - q = 5 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 = 3{,}8$, $np + p = 5 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 = 4{,}8$, то $m^* = 4$. Вероятность искомого события A находим по формуле Бернулли:

$P_{5,4}(A) = C_5^4\,(0{,}8)^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096$.

Ответ: 0,4096.

1. Какие испытания называются *независимыми*?
2. В каких случаях используется формула Бернулли? Запишите ее.
3. Как находится вероятность наступления события при n независимых испытаниях хотя бы один раз?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Упражнения

A

29.1. В коробке находится 6 одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найдите вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

29.2. В коробке находятся 3 шара синего цвета и 2 шара красного. Извлекаются два шара. Найдите вероятность того, что среди двух извлеченных шаров окажется:
1) один шар синего цвета;
2) два шара синего цвета;
3) хотя бы один шар синего цвета.

29.3. На стол бросают монету и игральный кубик. Найдите вероятность того, что:
1) на монете появится орел, на кубике — 4 очка;
2) на монете появится решка, на кубике — нечетное число очков.

29.4. Двузначное число составили из цифр 0, 1, 2, 3, 4. Найдите вероятность того, что это число: 1) четное; 2) нечетное; 3) делится на 5; 4) делится на 4.

29.5. В одной партии электросчетчиков 3% бракованных, в другой — 4% бракованных. Наугад берут по одному счетчику из каждой партии. Найдите вероятность того, что оба электросчетчика окажутся бракованными.

29.6. Надежность (т. е. вероятность безотказной работы) прибора равна 0,8. Для увеличения надежности работы изделия прибор дублируется в параллельном соединении $n-1$ такими же приборами. Сколько приборов надо соединить параллельно, чтобы повысить надежность работы изделия до 0,98?

B

29.7. При изготовлении детали совершается три операции. Вероятность брака при первой и третьей операциях равна 0,01, а при второй — 0,02. Найдите вероятность того, что после трех операций деталь окажется стандартной.

29.8. Случайным образом называют десять цифр. Найдите вероятность того, что цифра 5 встретится ровно семь раз.

29.9. Бросание кубика считается удачным, если выпадает 5 или 6 очков. Найдите вероятность того, что 125 бросаний из 200 будут удачными.

29.10. Отрезок разделен на четыре равные части. На отрезок наудачу брошено 8 точек. Найдите вероятность того, что на каждую из

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

четырех частей отрезка попадет по две точки. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

29.11. 90% изделий, изготовленных в цехе, соответствуют стандарту. Упрощенная схема проверки качества продукции признает пригодной стандартную деталь с вероятностью 0,96, а нестандартную — с вероятностью 0,06. Найдите вероятность того, что:
1) взятое наудачу изделие пройдет контроль;
2) изделие, прошедшее контроль качества, отвечает стандарту.

29.12. Среди швейных изделий, изготовленных в ателье, 4% нестандартные. Найдите вероятность того, что среди взятых на контроль 30 изделий, изготовленных в ателье, два будут нестандартными.

C

29.13. Событие B появится в том случае, если событие A наступит не менее четырех раз. Найдите вероятность наступления события B, если проведено пять независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A равна 0,8.

29.14. Вероятность того, что при изготовлении детали рабочий допустит брак, равна 0,3. Найдите наивероятнейшее число деталей, которые будут бракованными при изготовлении этим рабочим 200 деталей.

29.15. В проводимом шахматном турнире вероятность выигрыша партии учеником равна 0,8. Сколько надо сыграть партий ученику, чтобы наивероятнейшее число выигрышей было равно 20?

29.16. Наблюдениями установлено, что в городе N в сентябре бывает 12 дождливых дней. Найдите вероятность того, что в случайно выбранных в сентябре месяце 8 днях дождливыми будут: 1) 3 дня; 2) не менее 3 дней; 3) не более 3 дней.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ

29.17. Д. Бернулли — швейцарский математик, который развил математическую статистику, рассмотрев с применением вероятностных методов ряд практически важных задач.

Даниил Бернулли
(1700—1782)

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ПОВТОРИТЕ

29.18. Разложите на множители многочлен:

1) $x^3 + 3x - 4$; 2) $x^3 + 2x^2 - 3x - 6$; 3) $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$.

29.19. Решите уравнение с помощью замены переменной:

1) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$; 2) $x^4 + 4x^2 - 45 = 0$;

3) $x^2 - 4x - 3\sqrt{(x-2)^2} = 14$; 4) $x - 3 + 2\sqrt{x-3} = 8$;

5) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) = 0$; 6) $(x + 1)^2(x^2 + 2x) = 12$.

29.20. Упростите выражение:

1) $(x^2 + 3x + 1)(x - 3) - 3x^2 + 3$;

2) $(x - 1)(x^2 + 2x) - 12x^2 + 3x - 2$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Количество различных двузначных чисел, составленных из цифр 0, 2, 5, 7 и 8, равно:

A) 16; B) 22; C) 42; D) 20.

2. Если в классе 30 учащихся, то число различных способов назначения 4 дежурных равно:

A) 16 000; B) 27 405; C) 13 800; D) 27 000.

3. Число способов распределения 1, 2 и 3 призовых места между 15 участниками конкурса равно:

A) 2 100; B) 2 700; C) 2 730; D) 2 250.

4. Десять баскетболистов строятся перед началом игры. Первым становится капитан, а остальные — случайным образом.

Тогда число способов построения команды перед игрой равно:

A) 9!; B) 8!; C) 10!; D) 11!.

5. Число способов разбиения группы из 20 человек на две подгруппы из 7 и 13 человек равно:

A) C_{20}^{10}; B) C_{20}^{7}; C) C_{13}^{7}; D) 7!.

6. Значение выражения $\dfrac{C_6^3 - C_6^2}{P_3 \cdot A_6^2}$ равно:

A) $\dfrac{1}{6}$; B) 0,4; C) 0,5; D) $\dfrac{1}{36}$.

7. Найдите корень уравнения $C_{n+1}^2 - C_n^2 = 49$:

A) 7; B) 49; C) 42; D) 50.

8. Коэффициент четвертого члена в разложении бинома Ньютона $(x - 2)^{10}$ равен:

A) −960; B) 120; C) −40; D) 90.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

9. В корзине 5 белых и 10 красных шаров. Из корзины вынули 2 шара. Вероятность того, что оба шара белые, равна:

A) $\frac{4}{9}$; B) $\frac{2}{9}$; C) $\frac{2}{21}$; D) 0,5.

10. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,6; вторым стрелком — 0,7; третьим стрелком — 0,8.

Вероятность того, что в цель не попадет ни один стрелок, равна:

A) 0,024; B) 0,24; C) 0,016; D) 0,04.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Двучлен, многочлен, стандартный вид многочлена, степень многочлена.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Глоссарий

Арккосинус	Функция, которая является обратной к функции $y = \cos x$, называется *арккосинусом* и обозначается $y = \arccos x$.
Арксинус	Функция, которая является обратной к функции $y = \sin x$, называется *арксинусом* и обозначается $y = \arcsin x$.
Арккотангенс	Функция, которая является обратной к функции $y = \mathrm{ctg}\, x$, называется *арккотангенсом* и обозначается $y = \mathrm{arcctg}\, x$.
Арктангенс	Функция, которая является обратной к функции $y = \mathrm{tg}\, x$, называется *арктангенсом* и обозначается $y = \mathrm{arctg}\, x$.
Арккосинус числа a	*Арккосинусом числа a*, где $\|a\| \leqslant 1$, называется такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.
Арккотангенс числа a	*Арккотангенсом числа a* называется такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.
Арксинус числа a	*Арксинусом числа a*, где $\|a\| \leqslant 1$, называется такое число из числового отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.
Арктангенс числа a	*Арктангенсом числа a* называется такое число из числового интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.
Аркфункция	Функции, которые являются обратными к тригонометрическим функциям, называют *обратными тригонометрическими функциями*, или *круговыми функциями*, или *аркфункциями*.
Асимптота	Прямая a называется *асимптотой кривой (графика функции)*, если точка M, смещаясь вдоль графика этой функции, удаляется в бесконечность, а расстояние от нее до прямой a стремится к нулю.
Бесконечно большая функция	Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$ $(x \to \infty)$, если $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} f(x) = \infty$.
Биномиальные коэффициенты	Коэффициенты C_n^k в формуле бинома Ньютона называются *биномиальными коэффициентами*.
Биномиальный закон распределения дискретной случайной величины	*Биномиальным законом распределения дискретной случайной величины* называется распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли.
Взаимно-обратные функции	Если $y = \varphi(x)$ — функция, обратная функции $y = f(x)$, то говорят, что функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ *взаимно-обратные*.
Выпуклая вверх функция	Дифференцируемая функция называется *выпуклой вверх* на интервале X, если ее график расположен не выше касательной к нему в любой точке интервала X.
Выпуклая вниз функция	Дифференцируемая функция называется *выпуклой вниз* на интервале X, если ее график расположен не ниже касательной к нему в любой точке интервала X.
Выпуклая функция	Выпуклую вверх функцию часто называют *выпуклой*.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

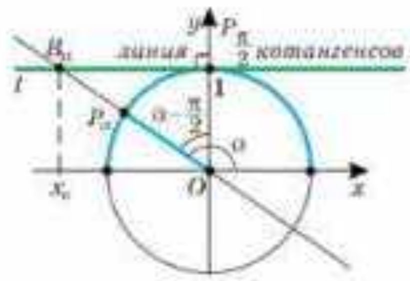
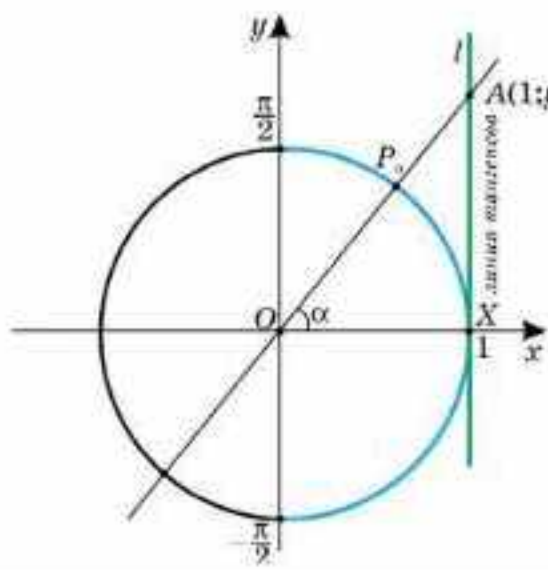
Продолжение

Вогнутая функция	Выпуклую вниз функцию часто называют *вогнутой*.
Вторая производная	*Второй производной функции* $y = f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$ и обозначают $f''(x)$.
Гармонические колебания	Движения, которые описываются законами, $f(t) = A\cos(\varpi t + \varphi)$ или $f(t) = A\sin(\varpi t + \varphi)$, называются *гармоническими колебаниями*. A называют *амплитудой колебаний*, ϖ — *частотой колебаний*, φ — *начальной фазой колебаний*. Период функций $f(t) = A\cos(\varpi t + \varphi)$ и $f(t) = A\sin(\varpi t + \varphi)$, равный $\frac{2\pi}{\varpi}$, называют *периодом гармонического колебания*.
Геометрический закон распределения дискретной случайной величины	*Геометрическим законом распределения дискретной случайной величины* называется распределение вероятностей, определяемое формулой $P(X = k) = q^{k-1}p$, где в каждом независимом опыте (испытании) событие A появится с вероятностью p, а с вероятностью q — не появится. Опыт (испытание) заканчивается, когда событие A появится в k-ом опыте (испытании).
Гипергеометрический закон распределения дискретной случайной величины	*Гипергеометрическим законом распределения дискретной случайной величины* называется распределение вероятностей, определяемое формулой $P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, где N — общее число элементов некоторой совокупности; M — число элементов этой совокупности, обладающих некоторым свойством; n — число элементов, выбранных наугад из N элементов; m — число элементов, обладающих некоторым свойством среди выбранных n элементов.
Гистограмма распределения	Ломаная линия, проходящая через точки (x_i, p_i), абсциссы которых являются значениями случайной величины: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, а ординаты — их вероятностями: $p_1, p_2, \ldots, p_n$, называется *многоугольником распределения*, а соответствующая гистограмма — *гистограммой распределения*.
Дискретная (прерывная) случайная величина	Случайные величины, принимающие только отдельные друг от друга значения, называются *дискретными* (*прерывными*) *случайными величинами*.
Дисперсия	*Дисперсией* $D(x)$ *дискретной случайной величины* X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т. е. $D(X) = M((X-M(X))^2)$.
Дифференцирование	Процесс вычисления производной называется *дифференцированием*.
Дифференцируемая функция в точке	Функцию, имеющую конечную производную в данной точке, называют *дифференцируемой в этой точке*.
Дифференцируемая функция на множестве	Если функция имеет конечную производную в каждой точке множества, то говорят, что она дифференцируема на множестве.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Продолжение

Дробно-линейная функция	*Дробно-линейной функцией* называется функция вида $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, $c \neq 0$, $ad = bc$.
Комбинаторика	Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называется *комбинаторикой*.
Комбинаторные задачи	Задачи, в которых из элементов некоторого конечного множества по некоторым правилам составляются различные комбинации этих элементов и подсчитывается их число, называются *комбинаторными задачами*.
Корень многочлена	Число x_0 называется *корнем многочлена* $P(x)$, если при $x = x_0$ значение многочлена $P(x)$ равно 0.
Кортеж длины	*Кортежами длины* k называются упорядоченные наборы из k элементов.
Критические точки	Точки x_0, в которых производная $f'(x_0)$ равна нулю или не существует, называются *критическими точками*.
Левый предел функции	Если число A_1 есть предел функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к числу a так, что x принимает только значения, меньшие числа a, то число A_1 называется *левым пределом функции* $y = f(x)$ в точке a.
Линия котангенсов	Прямую t называют *линией котангенсов*. 
Линия тангенсов	Прямую l называют *линией тангенсов*. 
Максимум функции	Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции*.
Математическое ожидание	Для случайной дискретной величины X, заданной значениями $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ и соответствующими этим значениям вероятностями $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_n$ математическим ожиданием $M(X)$, называется *значение суммы произведений значений случайной величины* X на соответствующие этим значениям вероятности, т. е. $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Продолжение

Минимум функции	Значение функции в точке минимума называется *минимумом функции.*
Многочлен	*Многочленом* называется сумма одночленов.
Многочлен стандартного вида	*Многочленом стандартного вида* называют многочлен, состоящий из одночленов стандартного вида, который не имеет подобных членов.
Многочлен степени n	*Многочленом степени n от переменного x* называется алгебраическое выражение вида: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, где n — целое неотрицательное число, $a_n, \ldots, a_1, a_0$ — любые числа, причем $a_n \neq 0$. Любое число называют *многочленом нулевой степени.*
Мода	*Модой дискретной случайной величины* называется значение дискретной случайной величины, вероятность которой наибольшая.
Наибольшее значение функции	*Наибольшим значением функции $y = f(x)$* на промежутке X называют такое значение $f(x_0)$, что для любого $x \in X$, $x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$.
Наименьшее значение функции	*Наименьшим значением функции $y = f(x)$* на промежутке X называют такое значение $f(x_0)$, что для любого $x \in X$, $x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.
Непрерывная случайная величина	Случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый интервал, называются *непрерывными случайными величинами.*
Непрерывность функции в точке	Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. В противном случае говорят, что функция $y = f(x)$ имеет разрыв в точке $x = x_0$.
Непрерывность функции	Если функция непрерывна во всех точках промежутка, то она называется *непрерывной на этом промежутке.*
Обратная функция	Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D, а E — множество ее значений. Обратная функция по отношению к функции $y = f(x)$ — это функция $x = g(y)$, которая определена на множестве E и каждому $y \in E$ ставит в соответствие такое значение $x \in D$, что $f(x) = y$.
Однородное тригонометрическое уравнение	Уравнение, у которого значение суммы показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ у всех членов в его левой части одинакова, а правая часть равна 0, называется *однородным тригонометрическим уравнением* относительно $\sin x$ и $\cos x$.
Однородный многочлен	*Однородным многочленом* называется многочлен, у всех членов которого значение суммы показателей степеней входящих в него переменных (неизвестных) одинакова.
Окрестность точки	*Окрестностью точки* называется любой интервал, содержащий эту точку.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Продолжение

Отклонение случайной величины	Разность между случайной величиной X и ее математическим ожиданием $X - M(X)$ называется *отклонением случайной величины*.
Перестановками из n элементов без повторений	Упорядоченные множества, содержащие все n элементов множества $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, называются *перестановками из n элементов без повторений*.
Правило произведения	Если элемент $x \in X$ можно выбрать m способами, а элемент $y \in Y$ можно выбрать k способами, то пару "x и y" можно выбрать $m \cdot k$ способами.
Правило суммы	Если множества X и Y не имеют общих элементов и множество X содержит a элементов, а множество Y содержит b элементов, то объединение множеств X и Y содержит $(a + b)$ элементов. Если множества X и Y имеют c общих элементов и множество X содержит a элементов, а множество Y содержит b элементов, то объединение множеств X и Y содержит $(a + b)$ — c элементов. Другая формулировка правила суммы: Если элемент $a \in A$ можно выбрать m способами, а элемент $b \in B$ можно выбрать n способами, причем множества A и B не имеют общих элементов, то выбрать один элемент "a или b" можно $m + n$ способами.
Предел функции	*Пределом функции $y = f(x)$* при x, стремящемся к числу a, называется такое число A, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого $x \neq a$, удовлетворяющего неравенство $0 < \lvert x - a \rvert < \delta$, выполняется неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$.
Приращение аргумента	*Приращением аргумента для функции $y = f(x)$* называется значение разности двух значений аргумента из области определения этой функции.
Приращение функции	*Приращением функции $y = f(x)$* называется значение разности соответствующих двух значений функции из ее области (множества) значений.
Производная функции в точке x_0	*Производной функции* в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если таковой предел существует: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
Произведение событий	*Произведением событий A и B* называется событие, состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих одновременно событиям A и B. Обозначается: AB.
Размещения без повторений	*Размещениями без повторений* из n элементов по k называются упорядоченные множества из k элементов, выбранных из множества, содержащего n элементов.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Продолжение

Размещения с повторениями	*Размещениями с повторениями* из n элементов по k называются кортежи длины k, составленные из элементов множества X, содержащего n элементов.
Раскрытие неопределенностей	Вычисление пределов функций, представляющих собой неопределенности вида $\infty-\infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to a$ или $x \to \infty$, называется *раскрытием неопределенностей.*
Распределение случайной величины	Перечисление возможных значений случайной величины и их вероятностей называется *распределением случайной величины.*
Растяжение вдоль оси Oy в a раз	Если координаты точек $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ и A_1 $(x_0; ay_0)$, B_1 $(x_1; ay_1)$, C_1 $(x_2; ay_2)$ связаны таким соотношением, то говорят, что точки $A(x_0; y_0)$, B $(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ переходят в точки $A_1(x_0; ay_0)$, B_1 $(x_1; ay_1)$, C_1 $(x_2; ay_2)$, где $a > 1$ в результате растяжения вдоль оси Oy в a раз.
Растяжение вдоль оси Ox	Если координаты точек $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, С $(x_2; y_2)$ и $A_1(ax_0; y_0)$, $B_1(ax_1; y_1)$, $C_1(ax_2; y_2)$ связаны таким соотношением, то говорят, что точки $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, C $(x_2; y_2)$ переходят в точки $A_1(ax_0; y_0)$, $B_1(ax_1; y_1)$, $C_1(ax_2; y_2)$, где $a >1$ в результате растяжения вдоль оси Ox в a раз. Если координаты точек $A_0(x_0; y_0)$ и $A_1(x_1; y_1)$ связаны соотношением $y_1 = y_0$; $x_1 = ax_0$, где $0 < a < 1$, то говорят, что точка $A_1(x_1; y_1)$ переходит в точку $A_0(x_0; y_0)$ в результате растяжения вдоль оси Оx в $\frac{1}{a}$ раз, где $0 < a < 1$.
Ряд распределения	Таблица, где перечислены возможные (различные) значения x_1, x_2, ..., x_n случайной величины X с соответствующими им вероятностями p_1, p_2, ..., p_n, называется *рядом распределения дискретной случайной величины X.*
Сжатие вдоль оси Ox	Если координаты точек $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ и $A_1(ax_0; y_0)$, $B_1(ax_1; y_1)$, $C_1(ax_2; y_2)$ связаны таким соотношением, то говорят, что точки $A_1(ax_0; y_0)$, $B_1(ax_1; y_1)$, $C_1(ax_2; y_1)$ переходят в точки $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ в результате сжатия вдоль оси Ox в a раз, где $a > 1$. Если координаты точек $A_0(x_0; y_0)$ и $A_1(x_1; y_1)$ связаны соотношением $y_1 = y_0$; $x_1 = ax_0$, где $0 < a < 1$, то говорят, что точка $A_0(x_0; y_0)$ переходит в точку $A_1(x_1; y_1)$ в результате сжатия вдоль оси Ox в $\frac{1}{a}$ раз.
Сжатие вдоль оси Oy в $\frac{1}{a}$ раз	Если координаты точек $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ и A_1 $(x_0; ay_0)$, B_1 $(x_1; ay_1)$, C_1 $(x_2; ay_2)$ связаны соотношением, то говорят, что точки A $(x_0; y_0)$, B $(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ переходят в точки A_1 $(x_0; ay_0)$, B_1 $(x_1; ay_1)$, C_1 $(x_2; ay_2)$, где $0 < a < 1$ в результате сжатия вдоль оси Oy в $\frac{1}{a}$ раз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Симметрический многочлен	Многочлен от x и y называется *симметрическим*, если при замене x на y, а y на x он становится тождественно равным данному многочлену.
Симметрический многочлен (возвратный)	Многочлен n-ой степени с одной переменной, в котором коэффициенты равноудаленных от концов членов равны, называется *симметрическим многочленом* (иногда такие многочлены называют *возвратными*).
Симметрическое уравнение	Уравнение n-ой степени с одной переменной, в котором коэффициенты равноудаленных от концов членов равны, называется *симметрическим уравнением*.
Синусоида	График функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ называется *синусоидой*
Сложная функция	*Сложной функцией* (или *композицией*, или *суперпозицией функций*) от x называется функция $y = f(g(x))$, где в функции $y = f(x)$ вместо аргумента x используется другая функция $\varphi = g(x)$.
Случайная величина	*Случайная величина* — это величина, которая принимает в результате опыта одно из множества значений, причем появление того или иного значения этой величины до ее измерения нельзя точно предсказать.
Сочетания без повторений	*Сочетанием без повторений из n* элементов по k называется подмножество, содержащее k элементов множества, состоящего из n элементов.
Сочетания с повторениями	*Сочетанием с повторением* из n элементов различных типов по k называются их неупорядоченные наборы из k элементов, отличающиеся друг от друга только количеством элементов хотя бы одного типа.
Стационарная точка	*Стационарной точкой* называется такая точка x_0, в которой производная равна нулю: $f'(x_0) = 0$.
Степень многочлена	*Степенью многочлена стандартного вида* называется наибольшая степень из степеней входящих в него одночленов.
Степень одночлена	*Степенью одночлена* называется значение суммы показателей степеней входящих в него переменных (неизвестных).
Сумма событий	*Суммой событий* A и B называется событие, состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих одному из событий A или B. Обозначается: $A + B$.
Тангенсоида	График функции $y = \operatorname{tg} x$ называется *тангенсоидой*.
Точка максимума функции	Точка a называется *точкой максимума функции* $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки $x=a$, что для всех x, $x \neq a$ из этой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) < f(a)$.
Точка минимума	Точка a называется *точкой минимума функции* $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки $x=a$, что для всех x, $x \neq a$ из этой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) > f(a)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Продолжение

Точка перегиба	Точка M графика функции называется *точкой перегиба*, если в достаточно малой окрестности точки M кривая расположена по обе стороны от касательной, проведенной к графику функции в этой точке.
Точки разрыва	Пусть функция $y = f(x)$ имеет разрыв в точке с абсциссой x_0. Тогда: — если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ бесконечен, то говорят, что x_0 есть *точка разрыва* II *рода*; — если оба эти предела конечны и различны, то x_0 называется *точкой разрыва* I *рода* (*скачок*).
Точка устранимого разрыва	Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$, либо $f(x_0) \neq b$, либо $f(x_0)$ не существует, то x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.
Точки экстремума функции	Точки максимума и минимума называются *точками экстремума функции*.
Тригонометрическое неравенство	*Тригонометрическим неравенством* называется неравенство, содержащее неизвестное (переменную) только под знаком тригонометрической функции.
Тригонометрическое уравнение	*Тригонометрическим уравнением* называется уравнение, содержащее неизвестное (переменную) только под знаком тригонометрических функций.
Условная вероятность	*Условная вероятность* — вероятность одного события при условии, что другое событие уже произошло. *Условной вероятностью A при условии B* (аналогично B при условии A) называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию AB, к числу элементарных событий, благоприятствующих событию B (аналогично событию A).
Формулы бинома Ньютона	Формулы (1) и (2) называются *формулами бинома Ньютона*. $(x + a)^n = x^n + n \cdot a \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} a^k x^{n-k} + \ldots + a^n$ (1) $(x + a)^n = C_n^0 \cdot a^0 \cdot x^n + C_n^1 \cdot a^1 \cdot x^{n-1} + C_n^2 \cdot a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot x^1 + C_n^n \cdot a^n \cdot x^0.$ (2)
Числовая функция	*Числовой функцией с областью определения D* называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу единственное число y, зависящее от x.
Члены многочлена	*Членами многочлена* называются все одночлены, входящие в многочлен.
Экстремумы	Значения функции в точках максимума и минимума функции называются ее *экстремумами*.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ОТВЕТЫ

Упражнения для повторения курса алгебры 7—9 классов

1. 1) $1\frac{1}{3}(p-5)^2q^5$; 2) $\frac{15bc^2}{d^3}$; 3) $\frac{2a^3x^2y^2}{y-2}$; 4) 0; 5) 3; 6) $4+2x$; 7) $x+6$; 8) 2. **2.** 1) $\{-2; 3\}$; 2) $\{-8; 2\}$; 3) $\left\{\frac{3\pm\sqrt{145}}{4}\right\}$; 4) $\{-3-\sqrt{17}; 4\}$; 5) $\left\{\frac{-1+\sqrt{35}}{2}; \frac{-4-\sqrt{14}}{2}\right\}$; 6) $\varnothing$. **3.** 5) $\{-4; -3; 1; 2\}$; 6) $\{-7; 2\}$. **4.** 1) $(-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -5] \cup \left[\frac{1}{3}; 1,5\right]$; 3) $(-\infty; -4] \cup \{2; 5\}$; 4) $(-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$; 5) $\left(\frac{1-\sqrt{113}}{4}; -2\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{113}}{4}\right)$; 6) $(-3; -1,8] \cup (-1; 3)$. **5.** 1) $(-\infty; -3] \cup [6; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3,4] \cup [1; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (2,5; +\infty)$.

6. 1) 2; 2) 11; 3) 4; 4) 8; 5) 15; 6) 10. **7.** 1) -3; 2) 3; 3) -4; 4) -11; 5) 0; 6) -5. **8.** 1) $\{(-5; 12), (4; 3)\}$; 2) $\{(-6; -22), (3; 5)\}$; 5) $\{(5; 2), (2; -1)\}$; 6) $\{(-7; 1), (-1; 7)\}$. **9.** 1) $\{(2; \pm\sqrt{3}), (-2; \pm\sqrt{3})\}$; 3) $\{(1; 3); (3; 1); (-1; -3); (-3; -1)\}$; 5) $\{(2; \sqrt{11}); (2; -\sqrt{11}); (-2; \sqrt{11}); (-2; -\sqrt{11})\}$; 6) $\{(1; 1)\}$. **11.** 1) (3; 4), (4; 3); 2) (2, -1), (-1, 2); 3) (-2; 3), (-18; -13), (2; -3), (18; 13). **12.** 1) $\{(4; 2); (-4; -2); (\sqrt{10}; \sqrt{10}); (-\sqrt{10}; -\sqrt{10})\}$; 2) $\{(-2; 1); (2; -1); (-0,5; 0,5); (0,5; -0,5)\}$; 3) $\{(1; -1); (-1; 1)\}$. **13.** 1) $\{(2; -1); (-2; -1)\}$; 2) $\{(1; 2); (-1; -2); (-1; 2); (1; -2)\}$; 3) $\{(1; 1); (-1; -1)\}$; 4) $\{(2; 3); (-2; 3); (2; -3); (-2; -3)\}$. **14.** 1) (3; 5); 2) $\varnothing$; 3) $(-2; 4]$. **17.** 1) 5; 2) 9. **18.** 1) 55 км/ч; 2) 50 км/ч; 3) 50 км/ч. **19.** 1) 6 км/ч и 4 км/ч; 2) 20 дней и 30 дней; 3) 4 м/с и 3 м/с. **20.** 1) 3 кг, 5 кг; 2) 10 кг и 8 кг. **21.** 1) 32; 2) 14. **26.** 2) а) $y=\frac{1}{x-3}$; б) $y=-2+\frac{1}{x}$; в) $y=3+\frac{1}{x+4}$; 3) а) $y=3\sqrt{x-3}$; б) $y=3\sqrt{x}-2$; в) $y=3\sqrt{x+4}-3$. **27.** 1) $f(x)=-x^2+2x+3$; 2) $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$; 3) $f(x)=\sqrt{x+2}-2$. **28.** 2) $f(x)=-x^2+3x$; $D(f)=R$; $E(f)=(-\infty; 2,25]$; функция возрастает на $(-\infty; 1,5]$, функция убывает на $[1,5; +\infty)$. **30.** 1) $a<0$; $b<0$; $c<0$; $D=0$; 2) $a<0$; $b=0$; $c<0$; $D<0$; **31.** 1) а), г); 2) а), в), д);

32. 1) $d=2$; $a_n=15,5$; 2) $d=5$; $a_n=4$; 3) $d=-4$; $a_n=7$; 4) $d=-2$; $a_n==-14,9$. **33.** 1) $a_1=8,5$; $d=2$; 2) $b_1=16,8$; $q=\pm\sqrt{\frac{27}{14}}$; 3) 8,5. **34.** 1) $n=5$; $S_m=-135$; 2) $n=2$; $S_m=-27$. **35.** 1) 105; 2) -40; 3) -43. **36.** 1) $q=2$; $b_n=22,4$; $S_n=44,1$; 2) $q=3$; $b_n=48,6$; $S_n=72,6$; 3) $q=-7$; $b_n=68,6$; $S_n=60$. **37.** 1) $b_1=2$ и $S_5=\frac{1267}{896}$; 2) $b_1=-81$ и $S_5=-211$. **38.** 1) $1,5\cdot(\sqrt{3}-1)$; 2) $\sqrt{2}+1$. **39.** 1) $2\frac{31}{99}$; 2) $\frac{103}{999}$; 3) $2\frac{338}{990}$; 4) $45\frac{23}{990}$. **40.** 1) $1-\sqrt{3}$; 2) $1-\sqrt{3}$; 3) 0; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $-2-\frac{\sqrt{3}}{6}$; 6) 0. **41.** 1) $1-3\sqrt{3}$; 2) 4; 3) $-8,5$; 4) $\frac{18-17\sqrt{3}}{6}$. **42.** 1) $-2\sqrt{0,21}$; $-1,6\sqrt{0,21}$; 0,68; 3) $-\frac{1}{3}$; $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $-\frac{7}{9}$. **43.** 1) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{9}$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{7}}{6}}$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{6}}$; $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{\frac{2}{7}}$. **44.** $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3\sqrt{105}-1}{32}$, $\sin(\alpha-\beta)=$ $=\frac{3\sqrt{7}-\sqrt{15}}{32}$; $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{3\sqrt{7}+\sqrt{15}}{3\sqrt{105}-1}$. **45.** $\cos(\alpha-\beta)=\frac{42+\sqrt{195}}{56}$, $\sin(\alpha+\beta)=\frac{6\sqrt{15}+7\sqrt{13}}{56}$, $\operatorname{tg}(\alpha-$ $-\beta)=\frac{6\sqrt{15}-7\sqrt{13}}{42+\sqrt{195}}$. **46.** 1) $\frac{2\sqrt{3}-6}{3}$; 2) 2; 3) $-\frac{5\sqrt{3}}{18}$; 4) 2. **47.** 1) $-\cos\alpha$; 2) $-\operatorname{ctg}2\alpha$; 3) $\sin\alpha$; 4) $\operatorname{tg}^6\alpha$.

49. 1) -1; 2) 3; 3) 4; 4) $-2\sin^2\alpha$. **51.** 1) 36 м/мин и 54 м/мин; 2) от 600 м до 1400 м; 3) любое значение от 18 м/мин до 90 м/мин; 4) ≈ 9 мин; 5) 21 шагов за 10 с.

Комментарии. При ответе на первый вопрос этого задания надо перейти от единицы длины шага в сантиметрах к метрам, затем — к измерению скорости в метрах в минуту, а также использовать знания по физике и логически оценивать жизненную ситуацию.

Для ответа на вопрос 2 следует обратить внимание на текст задания, особенно слово "возможно", т. е. представить, как могут проживать учащиеся относительно школы. Так, Олжас и Айгуль могут жить на одной улице по одну или разные стороны от школы, а, возможно, Айгуль живет и на другой улице, параллельной или перпендикулярной относительно улицы, где живет Олжас, т.е. в какой-то точке окружности радиуса 400 м и с центром в месте расположения школы.

Для ответа на вопрос 3 ученик должен знать, как вычисляется скорость сближения одного тела по отношению к другому, причем использовать знания из физики по теме "Векторы", а также понимать, как могут проживать Олжас и Айгуль.

Для ответа на вопрос 4 надо найти время, которое потребуется Айгуль и Олжасу, чтобы прийти в школу. Причем Айгуль затратит $11\frac{1}{9}$ мин, Олжас ≈ 19 мин. Значит, Айгуль всегда приходит в школу раньше Олжаса и, следовательно, время их встречи — ≈ 19мин.

Более сложный вопрос 5. Для ответа надо решить обратную задачу.

Олжас должен прийти в школу не менее чем через 11 мин после выхода из дома. Тогда его скорость должна быть не менее $11\frac{1}{9}$ м/мин, т. е. за 10 с он должен проходить расстояние $\frac{91}{6}$ ≈ 15,2 м, или $\frac{1520}{75}$ ≈ 21 шагов вместо 12. Следовательно, чтобы прийти в школу раньше Айгуль, Олжас должен пробежать это расстояние, делая 21 шаг за 10 с. **52.** 1) 3 км/ч; 2) 3 ч; 3) 1,5 км/ч. **53.** 1) 52,5 кг; 2) 3 кг; 3) 5 кг; 4) 24,375%. **54.** 1) в $1\frac{1}{3}$ раза; 2) 24 с; 3) скорость Марата должна быть в 2 раза больше скорости эскалатора. **55.** 3) $n=25$; $\overline{X}\approx 57{,}24$; 4) $D(X)\approx 1{,}7$. **56.** 60 %.

Глава 1. ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

1.1. 1) R; 2) R; 3) R; 4) R. **1.2.** 1) R; 2) R; 3) R; 4) R. **1.3.** 1) $(-\infty; 0)\cup(0; \infty)$ 2) $(-\infty; -2)\cup(-2; \infty)$ 3) $(-\infty; -2)\cup(-2; 0)\cup(0; +\infty)$. **1.4.** 1) $(-\infty; -2)\cup(-2; 0)\cup(0; +\infty)$; 2) $(-\infty; -\sqrt{7})\cup(-\sqrt{7}; \sqrt{7})\cup(\sqrt{7}; \infty)$; 3) $-R$. **1.5.** 1) $[-11; +\infty)$; 2) $[23; +\infty)$; 3) $[-19; +\infty)$; 4) $(-\infty; 10]$. **1.7.** 1) $E(y)=R$; 2) $E(y)=R$; 3) $E(y)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; 4) $E(y)=(-\infty; 0)\cup$ $\cup(0; +\infty)$. **1.8.** 1) $E(y)=[-20{,}25; +\infty)$; 3) $[-0{,}25; +\infty)$; 4) $(-\infty; 60{,}25]$. **1.9.** 1) $E(y)=[2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0]$; 3) $(-\infty; 10]$; 4) $(-\infty; -2{,}3]$. **1.10.** 1) $E(y)=[4; +\infty)$; 2) $E(y)=[-11; +\infty)$; 3) $E(y)=(-\infty; 6]$; 4) $E(y)=(-\infty; -2]$. **1.11.** 1) $D(y)=R$; $E(y)=(-\infty; 5]$; 2) $D(y)=(-\infty; 3]$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

$E(y)=(-\infty;1]$; 3) $D(y)=(-\infty;2]$; $E(y)=[-1;+\infty)$. **1.12.** 1) $(-19;+\infty)$; 2) $(17;+\infty)$; 4) $(-\infty;20)$. **1.13.** 1) $[-11;+\infty)$; 2) $[1,3;+\infty)$; 3) $(-4;12,5]$; 4) $(0,3;6]$. **1.14.** 4) $(-\infty;-0,7)\cup(-0,7;-\frac{2}{11})\cup$ $\cup(-\frac{2}{11};+\infty)$. **1.15.** 1) $(-\infty;2)\cup(2;4)\cup(4;6)\cup(6;+\infty)$. **1.16.** 1) $[9;+\infty)$; 2) $[-11;-2)\cup$ $\cup(-2;5)\cup(5;+\infty)$. **1.17.** 2) $\left[\frac{1}{9};2\frac{2}{3}\right)$; 3) $(-2;-1]\cup(2;+\infty)$; 4) $[-3;2)\cup(3;\infty)$. **1.18.** 1) $(10;+\infty)$; 2) $(-\infty;1,5)$; 4) $[-3;5)$. **1.19.** 1) $[5;+\infty)$; 2) $(-\infty;4]$; 4) $(-\infty;3]$; 5) R; 6) R; 7) R; 8) R. **1.20.** 1) $[1;5]$; 2) $[-1;3]$; 4) $(0;3)\cup\{4\}$. **1.21.** 1) $[-18;+\infty)$. **1.22.** 1) $(-\infty;-5]\cup$ $\cup[5;+\infty)$; 2) $[-6;-4]\cup[6;8)$. **1.23.** 1) $[12,25;+\infty)$; 2) $E(y)=\begin{cases}(-\infty;\frac{4}{a}] \text{ при } a>0,\\ R \text{ при } a=0,\\ \left[\frac{4}{a};+\infty\right) \text{ при } a<0.\end{cases}$ **1.24.** 1) $a\geqslant 0$; 2) $-1,8<a<0$; 3) $\varnothing$; 4) $a=-1,8$; 5) $a<-1,8$. **1.27.** 1) $\frac{7}{8}$. **1.28.** 1) -2 и 1. **2.1.** 1) График функции; 2) график функции; 4) график функции. **2.2.** 1) $y=\begin{cases}x+6 \text{ при } -5\leqslant x<-1,\\ 2-x \text{ при } -1\leqslant x<4,\\ -1 \text{ при } x=4;\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}|x+2| \text{ при } -2\leqslant x<3,\\ 2 \text{ при } x=3;\end{cases}$ 3) $y=\begin{cases}-(x-1)^2+5 \text{ при } x\neq 4;\\ 3 \text{ при } x=4;\end{cases}$ 4) $y=\sqrt{x+3}-2$. **2.5.** 1) $D(y)=R$; $E(y)=(-\infty;3,5]\cup\{5\}$; 2) $D(y)=R$; $E(y)=(-2;+\infty)$. **2.6.** 1) $y=x-2$; 2) $y=0,5x$; 3) $y=x^2-7$; 4) $y=x^2+1$. **2.7.** $\begin{cases}f(-x)=x^2+4x+3;\\ f(x+2)=x^2-1;\\ f(1-x)=x^2+2x;\end{cases}$ 1) $\begin{cases}E(f(-x))=[-1;+\infty);\\ E(f(x+2))=[-1;+\infty);\\ E(f(1-x))=[-1;+\infty);\end{cases}$

2) $\begin{cases}A(0;3);\\ A(0;-1);\\ A(0;0);\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x_1=-3;x_2=-1;\\ x_{1/2}=\pm1;\\ x_1=-2;x_2=0.\end{cases}$ **2.9.** 1) $y=x^2+2x-3$; 2) $y=||x-3|-1|$; 3) $y=3+\frac{1}{x-2}$; 4) $y=\begin{cases}-x \text{ при } x\leqslant 0,\\ -(x-1)^2+4 \text{ при } x>0.\end{cases}$ **2.12.** 1) $y-x=0$; 2) $y+x=0$; 3) $3y-2x=0$; 4) $2y+x=0$. **2.13.** 3) $x^2-y-x=0$; 4) $2x^2+3x-y=0$; **2.14.** 1) $y=\begin{cases}-x \text{ при } x\leqslant 0,\\ -(x-1)^2+4 \text{ при } x>0.\end{cases}$ 2) $y=|x^2-4|$; 3) $y=\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$;

4) $y=\begin{cases}-1 \text{ при } x<0,\\ 0 \text{ при } x=0,\\ 1 \text{ при } x>0.\end{cases}$ **2.16.** $d(5)=1$; $d(7,5)=1$; $d(-44)=1$; $d(1,9(3))=1$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

$d(\sqrt{10})=0$; $d(5\sqrt{5}-\sqrt{3})=0$; $d\left(\dfrac{\sqrt{180}-\sqrt{20}}{\sqrt{125}}\right)=d\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}\right)=d\left(\dfrac{4}{5}\right)=1$. **2.17.** $R(0,7)=\dfrac{1}{10}$; $R(0,(5))=\dfrac{1}{9}$; $R(0,63))=\dfrac{1}{11}$; $R(0,2(3))=\dfrac{1}{30}$; $R\left(\dfrac{1}{\pi}\right)=0$; $R\left(\dfrac{\sqrt{50}+\sqrt{2}}{\sqrt{200}}\right)=\dfrac{1}{5}$. **2.18.** $\dfrac{1}{x+2}$. **2.19.** 10 км/ч. **2.21.** 5; 6. **3.4.** 1) B_2 $(-2; -4)$; 2) B_2 $(-2; 2)$. **3.10.** 1) Парабола; 2) парабола; 3) гипербола; 4) гипербола. **3.18.** 1) $(-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$; 2) $[1,5; 2)$; 3) $[1\dfrac{1}{3}; 2)$. **3.19.** 2) (1; 4) и (–2,5; –1,25). **4.10.** 1) Три корня; 2) два корня; 3) один корень; 4) два корня. **4.11.** 1) $y=\sqrt{x-2}-1$; 2) $y=\sqrt{3-x}-2$. **4.16.** 1) – 0,5; 2) $[4; +\infty)$; 3) –1. **5.1.** 1) $A(2; 5)$; 2) $A(2\dfrac{2}{3}; 5)$; 3) $A(1; 5)$. **5.2.** 1) $C(4; 3)$; 2) $C(5; 3)$; 3) $C(-2\dfrac{2}{3}; 3)$. **5.3.** 1) $M(-8; 6)$; 2) $M(-6; 6)$; 3) $M(-5; 6)$. **5.4.** $y=(3x)^2-2=9x^2-2$. **5.5.** $y=(0,4x)^2+3(0,4x)=0,16x^2+1,2x$. **5.8.** 1) 2 точки; 2) 2 точки. **5.10*.** 1) 2 корня; 2) 3 корня. **5.13.** 1) $\varnothing$; 2) $\dfrac{2}{3}$. **5.14.** 1) $(-\infty; -2]$; 2) $(1; 2)$. **6.11.** 1) $(-2; 1,5] \cup (2;3) \cup (3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3) \cup [0,5; 1,5) \cup (1,5; 3)$. **7.8.** 1) $y_{наим.}=-10,5$, $y_{наиб.}=7,5$; 3) $y_{наим.}=-38$, $y_{наиб.}$ – нет; 4) $y_{наим.}=9,4$, $y_{наиб.}=14,4$; 10) $y_{наим.}$ – нет, $y_{наиб.}=10,6$. **7.40.** 1) $g(x)=4+x^2$; 2) $g(x)=-5+x^2$. **7.41.** 1) $f(x)=\operatorname{sign}x\cdot\sqrt{|x|}$; 2) $f(x)=\operatorname{sign}x\cdot(x^2-4|x|)$. 3) $f(x)=-\operatorname{sign}x\cdot(x^2-2|x|)$. **7.42.** 1) $x_{max}=2$, $x_{min}=0$, $x_{min}=4$; 2) $x_{max}=-1$, $x_{min}=-4$, $x_{min}=2$; 3) $x_{max}=-2$, $x_{min}=-6$, $x_{min}=2$. **7.48.** 1) $\dfrac{3+6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{12}$; 2) $\dfrac{1-2\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{4}$. **7.49.** 1) $[-2;+\infty)$; 2) $[-2,25;+\infty)$. **8.7.** 1) $f(x)=1-\dfrac{1}{x-2}$; 2) $f(x)=-2+\dfrac{1}{x+1}$. **8.11.** $f(x)=\left|\dfrac{2x-1}{x+1}\right|$. **8.15.** 1) $\cos\alpha$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\alpha$; 3) $\sqrt{2}\cos\alpha$; 4) $0,5\sin\alpha$. **8.16.** 1) 1; 2) $\sqrt{3}-1$; 3) 1; 4) $\sqrt{3}$; 5) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **9.1.** 1) Четная; 2) нечетная; 3) нечетная; 4) четная. **9.2.** 1) $D(f)=(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; $E(f)=\{-1; 1\}$; 2) $D(f)=(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; $E(f)=\{-1; 1\}$; 3) $D(f)=[0; 4) \cup (4; +\infty)$; $E(f)=(-\infty; -0,5] \cup (0; +\infty)$; 4) $D(f)=[2; 3) \cup (3; +\infty)$; $E(f)=(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$. **9.8.** 1) $y_{наим.}=-2,25$, $y_{наиб.}=-2$; 2) $y_{наим.}=-14$, $y_{наиб.}=2$. **9.14.** 1) $f(2x)=4x^2-2$; 2) $g(x^2)=\dfrac{1}{x^2+2}$. **9.16.** 1) $\sin\alpha$; 2) $-\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) 1. **9.17.** 1) В III или IV четвертях; 2) в I или IV четвертях; 3) в II или III четвертях. **10.2.** 1) $f(3x)=3x-1$; $f(2x-1)=2x-2$; $f(2x^2-1)=2x^2-2$; 2) $f(3x)=3-18x^2$; $f(2x-1)=3-2(2x-1)^2$; $f(2x^2-1)=3-2(2x^2-1)^2$; 3) $f(3x)=9x-9x^2$; $f(2x-1)=6x-3-(2x-1)^2$; $f(2x^2-1)=6x^2-3-(2x^2-1)^2$. **10.3.** 1) $x=\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$; 2) $x=-\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$. **10.5.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **10.7.** 1) $f(g(x))=\sqrt{3x-2}-1$, $f(f(x))=x-2$, $g(g(x))=\sqrt{3\sqrt{3x-2}-2}$; 2) $f(g(x))=3-\dfrac{2}{(x-2)^3}$, $f(f(x))=3-2(3-2x^3)^3$,

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

$g(g(x)) = \frac{x-2}{5-2x}$; 5) $f(g(x)) = \sin(3(x^2-1)) + 5\ (x^2-1)$, $f(f(x)) = \sin(3(\sin 3x + 5x)) + 5(\sin 3x + 5x)$, $g(g(x)) = (x^2-1)^2 - 1$. **10.8.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) да. **10.9.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет. **10.10.** 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) да. **10.12.** 1) Нет; 2) может; 3) нет; 4) может. **10.14.** 1) $y = \sqrt{x-1}$; 2) $y = -1-\sqrt{x}$; 3) $y = 1 + \sqrt{x}$; 4) $y = 2 - \sqrt{x}$. **10.15.** 1) $y = 1 + \sqrt{x+1}$; 2) $y = -1-\sqrt{x+1}$; 3) $y = 1{,}5 - \sqrt{2{,}25 + x}$; 4) $y = 2 + (x-2)^2$ при $x \geqslant 2$. **10.17.** 1) -1; 2) 0,5; 3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Глава 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

11.5. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) 6π. **11.6.** 1) 2π; 2) $0{,}5\pi$; 3) π; 4) π; 5) $0{,}25\pi$; 6) 3π. **11.7.** 1) Нет; 2) нет. **11.17.** 1) 1; 2) 1; 3) 0,5; 4) 3. **11.18.** 1) $-\frac{3\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{2}$; 2) 1. **11.19.** 1) $-\cos\alpha$; 2) $-\mathrm{ctg}\,4\alpha$. **12.5** 1) π; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) π; 4) $0{,}5\pi$; 5) $\frac{2\pi}{7}$ 6) 2π. **12.7.** 1) 2π; 2) $0{,}5\pi$; 3) π; 4) π; 5) $0{,}5\pi$; 6) 6π. **12.8.** Нет. **12.20.** 1) 2; 2) 2. **12.21.** 1) 1; 2) 1; 3) 0,25; 4) 4. **12.22.** 1) $\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta$; 2) $\mathrm{ctg}^6\alpha$; 3) $\frac{1}{\sin\beta}$. **13.6.** 1) 2π; 2) π; 3) π; 4) $0{,}5\pi$; 5) $0{,}5\pi$; 6) 3π. **13.7.** Нет. **13.9.** 1) $\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) > \mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{8}\right)$; 2) $\mathrm{ctg}\,\frac{4\pi}{9} < \mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{8}$. **13.18.** 1) Бесконечное множество; 2) бесконечное множество. **13.19.** 1) 1; 2) π; 3) 0,5; 4) 3. **13.20.** 1) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$; 2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **13.21.** 1) 0; 2) 0. **14.4.** 1) $D(f) = R$, $E(f) = [-3; 1]$; 2) $D(f) = R$, $E(f) = [1; 5]$; 3) $D(f) = R$, $E(f) = [1; 3]$; **14.11.** 1) $[-0{,}5; 0{,}5]$; 2) $[-1; 1]$; 3) $(0; 4]$; 4) $[-1; 1]$; 5) $(0; 3]$; 6) $[1; 2)$. **14.12.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) 2π; 4) 5π. **14.15.** 1) $A = 220$ в, $T = 0{,}1$, частота — 20π; 2) $A = 360$ в, $T = 0{,}2$, частота — 10π; 3) $A = 110$ в, $T = \frac{1}{15}$, частота — 30π; 4) $A=220$ в, $T = \frac{1}{30}$, частота — 60π. **14.16.** 1) $A = 5\ a$, $T = 0{,}1$, частота — 20π; 2) $A = 0{,}25\ a$, $T = 0{,}2$, частота — 10π; 3) $A=10\ a$, $T = \frac{1}{15}$, частота — 30π; 4) $A=0{,}8\ a$, $T = \frac{1}{30}$, частота — 60π. **14.17.** 1) $y = 3\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $y = -2\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$. **14.18.** 1) убывает на $[0; \frac{\pi}{6}]$, возрастает на $[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}]$; 2) возрастает; 3) убывает на $(-1; \frac{\pi}{6}]$, возрастает на) $[\frac{\pi}{6}; 1)$; 4) возрастает на $\left[-\frac{7\pi}{12}; -\frac{\pi}{3}\right]$, убывает на $[-\frac{\pi}{3}; 0]$. **14.19.** 2) $p = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in N$. **14.20.** 1) $-\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leqslant p \leqslant 4\pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leqslant p \leqslant \frac{13\pi}{6} + 4\pi n$, $n \in Z$. **14.21.** 1) cos 4, sin 3, cos 5, sin 2; 2) sin 4, sin 6, sin 3, sin 7. **14.23.** 1) $(0{,}5; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **14.24.** 1) 1; 2) 0. **14.25.** 1) Минус; 2) плюс; 3) плюс; 4) минус.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Глава 3. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

15.1. 1) 1; 2) 1; 3) 2; 4) 1; 5) 2; 6) 0. **15.2.** 1) $t=\frac{5\pi}{6}$; 2) $t=\frac{\pi}{3}$; 3) $t=\frac{\pi}{4}$; 4) $t=\pi$. **15.3.** 1) $t=-\frac{\pi}{3}$; 2) $t=\frac{\pi}{6}$; 3) $t=\frac{\pi}{4}$ и $t=\frac{3\pi}{4}$; 4) $t=\frac{\pi}{2}$. **15.4.** 1) $t=-\frac{\pi}{6}$; 2) $t=\frac{\pi}{3}$; 3) $t=\frac{\pi}{4}$; 4) $t=\frac{3\pi}{4}$. **15.5.** 1) $t=-\frac{\pi}{3}$; 2) $t=\frac{\pi}{6}$; 3) $t=\frac{\pi}{4}$; 4) $t=\frac{3\pi}{4}$. **15.6.** 1) $-\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) $-\frac{\pi}{6}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. **15.7.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$. **15.8.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 0; 3) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $-\frac{\pi}{6}$. **15.9.** 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) нет. **15.10.** 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) нет. **15.11.** 1) Да; 2) да; 3) да; 4) да. **15.12.** 1) Нет; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да; 6) да. **15.13.** 1) Больше; 2) больше; 3) меньше; 4) равны. **15.14.** 1) $\frac{7\pi}{12}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $-\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{5\pi}{12}$. **15.15.** 1) $\frac{5\pi}{12}$; 2) $-\frac{7\pi}{12}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$. **15.16.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $-\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{19\pi}{12}$. **15.17.** 1) $-\frac{5\pi}{6}$; 2) $\frac{7\pi}{3}$; 3) $\frac{17\pi}{6}$; 4) $\frac{\pi}{3}$. **15.20.** 1) $\arcsin\frac{\pi}{6}$, $\arcsin\frac{\pi}{9}$, $\arcsin(-0,1)$, $\arcsin(-0,3)$; 2) $\arccos(-1)$; $\arccos(-0,2)$; $\arccos\frac{\pi}{9}$; $\arccos\frac{\pi}{5}$. **15.21.** 1) $\mathrm{arctg}(-7,3)$; $\mathrm{arctg}(-0,3)$; $\mathrm{arctg}\frac{\pi}{6}$; $\mathrm{arctg}\frac{5\pi}{9}$; 2) $\mathrm{arcctg}\frac{5\pi}{9}$, $\mathrm{arcctg}\frac{2\pi}{5}$, $\mathrm{arcctg}(-2,2)$; $\mathrm{arcctg}(-111)$. **15.22.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 2) 0. **15.23.** 1) $\cos 2\alpha$; 2) $\sin\alpha$. **16.1.** 1) $[-0,5;\ 0,5]$; 2) $[0;\ 1]$; 3) $[-1;\ 0]$; 4) $[-3;\ -1]$. **16.2.** 1) $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$; 2) $[0;1]$; 3) $[-2;-1]$; 4) $[2;4]$. **16.5.** 1) $[-1;2\pi-1]$; 2) $\left[1-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}+1\right]$; 3) $[2-\pi;2]$; 4) $[2-\pi;\ 2+\pi]$. **16.6.** 1) $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 1]\cup[3;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;-4]\cup\cup[0;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ 0]\cup[2;\ +\infty)$. **16.7.** 1) $\arcsin(-0,2)$; $\arcsin\frac{\pi}{6}$; $\arcsin 0,8$; 2) $\arcsin(-\frac{\pi}{3})$; $\arccos(-0,1)$; $\arccos 0,9$; 3) $\arcsin(-0,8)$; $\arcsin\frac{\pi}{16}$; $\arcsin 0,3$. **16.8.** 1) $\arccos 0,8$; $\arccos\frac{\pi}{6}$; $\arccos(-0,2)$; 2) $\arccos 0,9$; $\arccos(-0,1)$; $\arccos(-\frac{\pi}{3})$; 3) $\arccos 0,3$; $\arccos 0$; $\arccos(-0,7)$; **16.9.** 1) Общего вида; 2) четная; 3) четная; 4) общего вида. **16.18.** 1) 0; 2) $2\cos^2\alpha$; **17.1.** 1) 0,2; 2) $-0,3$; 3) $-\frac{\sqrt{5}}{4}$; 4) 0,6; 5) $-0,4$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **17.3.** 1) $-\frac{5\pi}{12}$; 2) $-\frac{\pi}{12}$; 3) $\frac{5\pi}{4}$; 4) $-\frac{2\pi}{3}$. **17.4.** 1) Нет; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да; 6) нет. **17.5.** 3) $\frac{\sqrt{15}}{8}$; 4) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$. **17.6.** 1) 0,2; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $-\frac{7}{8}$; 4) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. **17.7.** 1) 1,5; 2) $-1,5$; 3) $\frac{6\sqrt{37}}{37}$; 4) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$. **17.8.** 1) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{21}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{15}}{15}$; 4) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$. **17.9.** 1) $20°$; 2) $-40°$; 3) $10°$; 4) $70°$. **17.10.** 1) Да; 2) да; 3) да; 4) нет; 5) нет; 6) да. **17.11.** 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) да; 6) да. **17.12.** 1) Да; 2) да; 3) да; 4) нет; 5) нет; 6) нет.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

17.13. 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) нет; 6) да. **17.14.** 1) [1; 3]; 2)[1; 2]; 3) $\sqrt{2} \leqslant |a| \leqslant 2$; 4) [–2,5; –1,5]; 5)[3; 4]; 6) $\sqrt{2} \leqslant |a| \leqslant \sqrt{3}$. **17.15.** 1) 1,2; 2) π–2 ; 3) 6–2π; 4) 20 – 6π . **17.16.** 1) 1,1; 2) 2; 3) 2π–6; 4) 20 – 6 π. **17.17.** 1) 1,2; 2) 5 – 2π; 3) 2π–6; 4) 10–3π. **17.18.** 1) $\frac{1+8\sqrt{3}}{15}$; 2) $\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{6}}{20}$; 3) $-\frac{6}{7}$; 4) $\frac{19}{9}$. **17.19.** 1) $\frac{120}{119}$; 2) – 0,75; 3) 0,8. **17.20.** 1) ∅; 2) {0}; 3) $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$; 4) R. **17.21.** 1) $\frac{7\sqrt{170}}{170}$; 2) $\frac{\sqrt{5}(1+4\sqrt{6})}{25}$; 3) $\frac{0,2+4\sqrt{0,96}}{\sqrt{0,96}-0,8}$; 4) $\frac{5\sqrt{0,84}+0,4}{2-\sqrt{0,84}}$. **17.24.** 1){$\pm\sqrt{2}$}; 2){±2}; 3) {$\pm\sqrt{2}$}; 4) {±3}. **17.25.** 1) $1\pm\sqrt{5}$; 2) $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$; 3) ± 2; 4) 4. **18.1.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; 3) $\frac{\sin 1}{2}$; 4) 0. **18.2.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$. **18.3.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 0. **18.4.** 1) 1; 2) $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 4; 4) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$. **18.5.** 1) ∅; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 4; 4) –1. **18.6.** 1) $\frac{9-\sqrt{3}}{12}$; 2) ∅; 3) $1\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{4}$. **18.7.** 1) 3 и $\frac{1}{3}$; 2) 0 и $1\frac{2}{3}$; 3) –2 и 2; 4) $\pm\sqrt{3}$. **18.8.** 1) 3; 2) –2 и 2; 3) 0 и 3; 4) 0; 3 и 5. **18.9.** 1) $\frac{-\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{3}$; 2) ±1; 3) 9 и –1; 4) 2 и 3. **18.10.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 0,5; 4) ∅. **18.11.** 1) 1; 2) 1; 3) 0; 4) –1. **18.12.** 1) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. **18.13.** 1) 0. **18.14.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) [0; 1]; 4) [–1; 1]. **18.17.** 1) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$. **18.18.** 1) $0,16\sqrt{21}$; 0,68; 2) 0,75; $-\frac{24}{7}$; 3) $-\frac{1}{3}$; $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **18.19.** 1) $\frac{1}{3}$; $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; 2) $-\frac{\sqrt{7}}{3}$; $-\frac{\sqrt{14}}{7}$.

Глава 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

19.1. 1) {$\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, где $n \in Z$}; 2) {$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, где $n \in Z$}; 3) {$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, где $n \in Z$}; 4) {$\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, где $n \in Z$}; 5) {$\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n \in Z$}; 6) {$2\pi n$, где $n \in Z$}. **19.2.** 1) {$(-1)^n \cdot \frac{\pi}{3}+\pi n$, где $n \in Z$}; 2) {$(-1)^n \cdot \frac{\pi}{4}+\pi n$, где $n \in Z$}; 3) {$(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6}+\pi n$, где $n \in Z$}; 4) {$(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3}+\pi n$, где $n \in Z$}; 5) {πn, где $n \in Z$}; 6) {$(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4}+\pi n$, где $n \in Z$}. **19.3.** 1) {arctg3+ πn, где $n \in Z$} {arctg(–2) + πn, где $n \in Z$}; 3) {$-\frac{\pi}{6}+\pi n$, где $n \in Z$}; 4) {$\frac{2\pi}{3}+\pi n$, где $n \in Z$}; 5) {$\frac{\pi}{2}+\pi n$, где $n \in Z$}; 6) {π – arcctg3 + πn, где $n \in Z$}. **19.4.** 1) {±(π–arccos0,7)+

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

$+2\pi n$, где $n\in Z\}$; 2) $\{(-1)^{n+1}\cdot\arcsin\frac{\sqrt{5}}{4}+\pi n$, где $n\in Z\}$; 3) $\{\pm\arccos 0{,}3+2\pi n$, где $n\in Z\}$; 4) $\{\pi-\operatorname{arcctg}5+\pi n$, где $n\in Z\}$; 5) $\{\pi n$, где $n\in Z\}$; 6) $\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n\in Z\}$. **19.5.** $\{(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\pi n$, где $n\in Z\}$; 2) $\{\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}\pi n$, где $n\in Z\}$; 3) $\{(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+0{,}5\pi n$, где $n\in Z\}$; 4) $\{-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in Z\}$; 5) $\{0{,}25\pi n$, где $n\in Z\}$; 6) $\{-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{3}\pi n$, где $n\in Z\}$. **19.6.** 1) $\varnothing$; 2) $\varnothing$; 3) $\{(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}+3\pi n$, где $n\in Z\}$; 4) $\{-\frac{\pi}{30}+0{,}2\pi n$, где $n\in Z\}$; 5) $\{\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\pi n$, где $n\in Z\}$; 6) $\{\frac{\pi}{12}+\frac{1}{3}\pi n$, где $n\in Z\}$; **19.7.** 1) $\{(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\pi n$, где $n\in Z\}$; 2) $\{\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}$, где $n\in Z\}$; 3) $\{(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+1+0{,}5\pi n$, где $n\in Z\}$; 4) $\{-\frac{\pi}{3}-4+2\pi n$, где $n\in Z\}$; 5) $\{0{,}25+0{,}25\pi n$, где $n\in Z\}$; 6) $\{\frac{\pi n}{2}$, где $n\in Z\}$; **19.8.** 1) $\{(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\pi n$, где $n\in Z\}$; 2) $\{\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}+\frac{2\pi n}{3}$, где $n\in Z\}$; 3) $\{(-1)^n\cdot\frac{\pi}{18}-1+\frac{1}{3}\pi n$, где $n\in Z\}$; 4) $\{-\frac{\pi}{15}+0{,}4+0{,}2\pi n$, где $n\in Z\}$; 5) $\{0{,}75-\frac{\pi}{8}+0{,}5\pi n$, где $n\in Z\}$; 6) $\{-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}$, где $n\in Z\}$. **19.9.** 1) $\{(-1)^n\cdot\frac{\pi}{21}+\frac{1}{7}\pi n$, где $n\in Z\}$; 2) $\{(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+0{,}5\pi n$, где $n\in Z\}$; 3) $\{\pm\frac{\pi}{6}+0{,}5\pi n$, где $n\in Z\}$; 4) $\{\pm\frac{\pi n}{21}+\frac{2\pi n}{7}$, где $n\in Z\}$. **19.10.** 1) $\{\frac{\pi n}{2}$, где $n\in Z\}$; 2) $\{\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$ где $n\in Z\}$; 3) $\{\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, где $n\in Z\}$. **19.11.** 1) $\{\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}$, где $n\in Z\}$; 2) $\{\pm\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$, где $n\in Z\}$; 4) $\{\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, где $n\in Z\}$. **19.12.** 1) $\{135^\circ, 165^\circ\}$; 2) $\{310^\circ, 350^\circ\}$; 3) $\{370^\circ, 410^\circ\}$; 4) $\{130^\circ, 170^\circ\}$. **19.13.** 1) 90^0; 2) 45°; 3) 40°, 80°; 4) 210°. **19.14.** 1) $\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ где $n\in Z\}$. 2) $\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, где $n\in Z\}$; 3) $\{\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}$, где $n\in Z\}$; 4) $\{\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$ где $n\in Z\}$. **19.15.** 1) $\{130^\circ; 126^\circ\}$; 2) $\{18^\circ; 162^\circ\}$; 3) $\{25^\circ; 27^\circ\}$; 4) $\{234^\circ\}$. **19.16.** 1) $\varnothing$; 2) 2; 3)2; 4) бесконечное множество. **19.17.** 1) $\pm\sqrt{\frac{6}{2n-1}}$, $n\in N$; 2) $\frac{1}{2}+n$, $n\in Z$; 3) 180°. **19.18.** 1) 0; 2) 1; 3) 1. **19.19.** 1) Бесконечное число; 2) бесконечное число; 3) 2; 4) 2. **19.20.** 1) $\left[0;\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6};6\right]$; 2) $[2;\pi)\cup(\pi;2\pi)\cup[2\pi;7]$. **19.22.** 1) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n, n\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$.

20.1. 1) $\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, где $n\in Z\}$; 2) $\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, где $n\in Z\}$; 3) $\{\frac{\pi n}{3}, \pm\frac{\pi}{8}+\pi n$, где $n\in Z\}$; 4) $\{\frac{\pi n}{2}$, где $n\in Z\}$. **20.2.** 1) $\{-25^\circ+180^\circ\cdot n, n\in Z\}$; 2) $\{95^\circ+180^\circ\cdot n, n\in Z\}$; **20.3.** 1) $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{6};\frac{\pi}{2}+\pi n$, где $n\in Z$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z\}$. 3) $\frac{\pi n}{8}$, где $n\in Z\}$; 4) $\frac{\pi n}{7}$; $\frac{\pi n}{5}$; где $n\in Z$; **20.4.** 1) $\{-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z\}$; 2) $\{\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; $\operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in Z\}$; 3) $\{\frac{\pi}{4}+\pi n$; $n\in Z$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

$-\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\pi n,\ n\in Z\}$; 4) $\{\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in Z\}$; **20.5.** 1) $\{-\frac{\pi}{4}\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z\}$; 2) $\{\frac{\pi}{8}\pm\frac{3\pi}{8}+\pi n,\ n\in Z\}$; 3) $\{\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\}$; 4) $\{\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{12}+\pi n$, где $n\in Z\}$. **20.6.** 1) 90°; 2) 720°; 3) 486°; 4) 780°. **20.7.** 1) $\frac{\pi n}{3}$, $n\neq 3m$, где $n,\ m\in Z$; 2) $\varnothing$. **20.8.** 1) $\{\frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi n}{2},\ n\in Z\}$; 3) $\{\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\}$; 5) $\{\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\}$; 6) $\{\frac{9\pi n}{2};\ \frac{9\pi}{2}+9\pi n,\ n\in Z\}$; **20.9.** 1) $\frac{\pi n}{8}$, где $n\in Z$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$; $\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; 4) $\frac{\pi n}{14},\ n\in Z$; 6) $\frac{2\pi n}{15},\ n\in Z$; $\frac{\pi}{17}+\frac{2\pi n}{17},\ n\in Z$; **20.10.** 1) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; $-\frac{\pi n}{12}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $\frac{\pi n}{12}+\pi n,\ n\in Z$; $\frac{7\pi}{48}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$; 4) $\pi n,\ n\in Z$; $\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z\}$. **20.11.** 1) $\{\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z\}$; 2) $\{-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z\}$; 3) $\{-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z\}$. **20.12.** 1) $\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right), n\in Z$; 2) $\left(\frac{7\pi}{6}+\pi n;-\frac{\pi}{6}+\pi n\right), n\in Z$; 3) $(-\frac{\pi}{6}+\pi n,-\pi n), (-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}-\pi n), n\in Z$. **20.13.** 1) $\{\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z;\ \frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z\}$; 2) $\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z; (-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z\}$; 3) $\{-\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z\}$; 4) $\{\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z\}$. **20.14.** 1) $\{\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z\}$; $\{\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z\}$; 2) $\{-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z\}$; 3) $\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z\}$; 4) $\{\pi n,\ n\in Z\}$. **20.15.** 1) $\{\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\}$; 2) $\{\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z\}$; 3) $\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \pm\frac{4\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z\}$; 4) $\{\frac{9\pi n}{2},\ n\in Z;\ \frac{9\pi}{2}+9\pi n,\ n\in Z\}$; **20.16.** 1) $\{\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z\}$; 2) $\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z\}$; 3) $\{\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z\}$; 4) $\{-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z\}$. **20.17.** 1) $(2\pi n\pm\frac{\pi}{3};\ 2\pi k)$; $(2\pi n\pm\frac{2\pi}{3};\ 2\pi k+\pi)$; $k,\ n\in Z$; 2) $(\frac{\pi}{2}+\pi m;\ 2\pi k)$; $(\pi m;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k)$; $k,\ m\in Z$; 3) $(\frac{\pi}{2}-k-\frac{1}{4};\ \frac{\pi}{2}+k+\frac{1}{4})$, $k\in Z$. **20.18.** 1) $(0,5;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;-1)\cup(1;\ +\infty)$. **20.19.** 1) Плюс; 2) минус; 3) минус; 4) плюс. **20.20.** 1) $(-\infty;-3]\cup\{2\}\cup[4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;-6]\cup[\frac{2}{3};1,5]$; 3) $(-3;\ -1,8]\cup(-1;\ 3)$. **20.21.** 1) $(-\infty;-6]\cup[3;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -3,4]\cup[1;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -\frac{1}{3})\cup(2,5;+\infty)$. **20.22.** 1) $\cos 4<\sin 3<\cos 5<\sin 2$; 2) $\sin 4<\sin 6<\sin 3<\sin 7$. **21.1.** 1) $(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n)$, $n\in Z$; 2) $(-\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n)$, $n\in Z$; 3) $[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n]$, $n\in Z$; 4) $(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n)$,

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

$n\in Z$; **21.2.** 1) $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; 3) $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi\right]$, $n\in Z$; 4) $(-\pi+2\pi n;\pi+2\pi n)$, $n\in Z$. **21.3.** 1) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$; 2) $(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{6}+\pi n)$, $n\in Z$; 3) $[\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n)$, $n\in Z$; 4) $[-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n)$, $n\in Z$.

21.4. 1) $(\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n)$, $n\in Z$; 2) $(\frac{2\pi}{3}+\pi n;\pi+\pi n)$, $n\in Z$); 3) $(\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n)$, $n\in Z$; 4) $[\frac{3\pi}{4}+\pi n;\pi+\pi n)$, $n\in Z$.

21.5. 1) $\left[\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{5\pi}{12}+\pi n\right]$, $n\in Z$; 2) $[\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n]$, $n\in Z$; 3) $\left[-\frac{7\pi}{24}+0{,}5\pi n;\frac{\pi}{24}+0{,}5\pi n\right]$, $n\in Z$; 4) $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$ $n\in Z$. **21.6.** 1) $[\pi n;+\frac{2\pi}{4}\pi n]$, $n\in Z$; 2) $\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$; 3) $[4\pi n;\ \pi+4\pi n]$, $n\in Z$. **21.7.** 1) $[-\pi+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n]$, $n\in Z$; 2) $(-\frac{5\pi}{12}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{12}+2\pi n)$, $n\in Z$. **21.8** 1) $[-\frac{\pi}{4}+\pi n;+\frac{\pi}{4}+\pi n]$, $n\in Z$; 2) $[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n]$, $n\in Z$; 3) $\{\frac{\pi}{4}+\pi n\}$, $n\in Z$; 4) $(\pi n,\ \pi+\pi n)$, $n\in Z$. **21.9.** 1) $(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$, $n\in Z$; 2) $[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n]$, $n\in Z$; 3) $[\pi n\ \frac{\pi}{2}+\pi n$; $n\in Z$. **21.10.** 1) $(-\frac{2\pi}{3}+\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n)$, $n\in Z$; 2) $\left(-\frac{5\pi}{12}+2\pi n;\frac{\pi}{12}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; 3) $[\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n]$, $n\in Z$; **21.11.** 1) $[-\frac{\pi}{4};\ 0)$; 2) $(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4}]$. **21.12.** 1) $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]\cup$ $\cup[\frac{13\pi}{6};\ 7]$; 2) $[0;\ \frac{\pi}{6})\cup(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}]$; 3) $(2;\ \frac{2\pi}{3}]$; 4) $[\frac{\pi}{3};\ 4]$. **21.13.** 1) $\left(\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6};\pi\right)$; 2) $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{4}\right]$. **21.14.** 1) $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)\cup$ $\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; 2) $[\frac{\pi}{8}+0{,}5\pi n;\ \frac{3\pi}{8}+0{,}5\pi n]$, $n\in Z$; **21.15.** 1) $(\frac{\pi}{6}+$ $+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi)\cup(-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k)$; $k\in Z$; 2) $\left[\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)$ $\cup$ $\cup\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3};-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}\right]$; $k\in Z$; 3) $[\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+\pi k]\cup[\pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi k]$, $k\in Z$.

21.16. 1) $\varnothing$; 2) $(-2;\ 2]$. **21.17.** $(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n)\cup\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$ $n\in Z$. **21.18.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 2) $x\neq(-1)^{k+1}\cdot$ $\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$. **21.19.** 1) $(2\pi k;\ 2\frac{\pi}{6}+\pi k)\cup(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\pi+2\pi k)$, $k\in Z$; 2) $(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;$ $-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\cup(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n)$, $n\in Z$. **21.22.** 1) 0,5; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) 1; 4) 3.

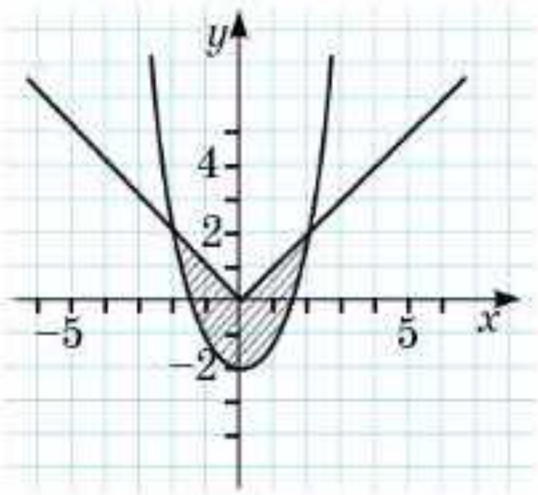
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

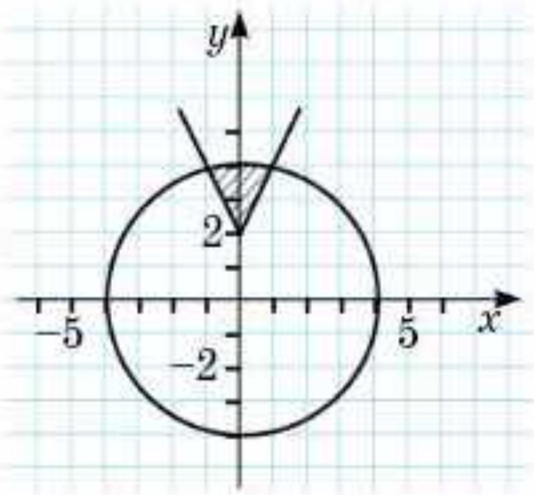
Глава 5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

22.1. 12. **22.3.** 3. **22.4.** 13. **22.5.** 25. **22.6.** 60. **22.7.** 3. **22.8.** 20. **22.9.** 2. **22.10.** 24. **22.11.** 21. **22.12.** 10. **22.13.** 10. **22.14.** 5. **22.15.** 1) π; 2) 4π; 3) 2π; 4) 2π. **22.16.** 1) ∅; 2) $[-\sqrt{5};\ -2) \cup (2;\ \sqrt{5}]$; 3) $(-4;\ 0)\cup(0;4)$. **22.17.** 1) $\{\pm 2\sqrt{2}\}$; 2) ∅; 3) ∅. **23.1.** 1) $n!$; 2) $\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}$. **23.2.** 1) 24; 2) 720; 3) 42; 4) $\dfrac{1}{56}$; 5) $8\dfrac{1}{6}$; 6) 30. **23.3.** 1) 4; 2) 4; 3) 16. **23.4.** 1) 24; 2) 27; 3) 5040. **23.5.** 1) 840; 2) 7^4; 3) 120; 4) 5^4. **23.6.** 1) 2; 2) ∅; 3) 3; 4) 4. **23.7.** 1) 380; 2) 9. **23.8.** 1) 125; 2) 14. **23.9.** 1) 2; 2) 2; 3) 3. **23.10.** 1) 3; 2) 4; 3) 5. **23.11.** 1) 180 м; 2) 20 ч и 30 ч.

23.12.



1)



2)

23.13. 19. **23.14.** 1) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; 2) $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. **24.1.** 1) 5; 2) 10; 3) 15; 4) 330. **24.2.** 1) 30; 2) 4200; 3) 3990. **24.4.** 1) $n=8$; 2) $n=6$; 3) $n=2$, или 28. **24.5.** $7\cdot9\cdot4=252$. **24.6.** 1) 7; 3) Корней нет. **24.7.** 1) 293 930; 2) 24 310; 3) 45. **24.8.** 55. **24.9.** 1) $C_{12}^2=66$; 2) $C_{12}^2=220$; 3) $C_{12}^4=495$. **24.10.** 1) $8\cdot C_{11}^2+11\cdot C_8^2=748$; 2) $C_8^2\cdot C_{11}^2=1540$; 3) $C_{11}^2=55$. **24.11.** $6(C_5^2+C_5^2+5)=150$. **24.12.** 1) Возрастает на $(-\infty;\ -1)$ и $(-1;\ +\infty)$, убывает — ∅; 2) возрастает — ∅, убывает на $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ 3)$ и $(3;\ +\infty)$; 3) возрастает на $(-\infty;\ -5)$, $(-5;\ 5)$ и $(5;\ +\infty)$, убывает — ∅; 4) убывает — $(-\infty;\ -2)$ и $(-2;\ 0]$, возрастает — $[0;2)$ и $(2;\ +\infty)$. **24.13.** 1) $\left[\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; 2) $\left[-\dfrac{\pi}{6}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in Z$; 3) $\left[-\dfrac{\pi}{3}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n\in Z$; 4) $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in Z$. **24.14.** Неверные утверждения — 1); 2); 4); 5). **25.2.** 1) $128\cdot C_{10}^7$; 2) $16\cdot C_7^4=560$; 3) 1792. **25.3.** $2^{11}=2048$. **25.5.** 5. **25.6.** 1) ≈1,22; 2) ≈1,33; 3) ≈0,84; 4) ≈0,64. **25.7.** 240; третье слагаемое. **25.8.** $A_{12}^2=132$. **25.10.** 1) $[-5;\ 2]$; 2) $(-1;\ 1{,}5)$; 3) $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$; 4) $[0;\ 1]$. **25.11.** 1) 4; 2) 4; 3) 13—15 ц/га. **25.12.** 1) $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$; $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 2) корней нет. **25.13.** 15 матчей. **25.14.** 1) $A_{27}^3=17\,550$; 2) $C_{27}^3=2925$. **26.1.** 1) $\dfrac{1}{6}$; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) $\dfrac{1}{2}$. **26.2.** а) 1) $\dfrac{2}{7}$; 2) $\dfrac{5}{7}$; 3) 0; б) 1) 1; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) $\dfrac{3}{4}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

26.3. 1) Неверное; 2) верное; 3) верное; 4) верное; 5) верное. **26.4.** 1) $\frac{17}{25}$; 2) $\frac{1}{5}$. **26.5.** 1) $\frac{3}{20}$ 2) $\frac{17}{20}$. **26.6.** 1) $\frac{1}{18}$; 2) $\frac{1}{9}$. **26.7.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{3}{8}$. **26.8.** 1) $\frac{445}{2225}=\frac{89}{445}$; 2) $\frac{734}{2225}$; 3) $\frac{896}{2225}$. **26.9.** 1) $\frac{9}{25}$; 2) $\frac{16}{25}$. **26.10.** 1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{14}{15}$. **26.11.** 1) $P(A)=\frac{C_{90}^{3}\cdot C_{10}^{2}}{C_{100}^{5}}=\frac{5!95!}{100!}\times$ $\times\frac{90!}{3!87!}\cdot\frac{10!}{2!8!}=\frac{15\cdot 89}{98\cdot 87\cdot 2}=\frac{1305}{19012}\approx 0{,}069$. **26.13.** 1) $\varnothing$; 2) 0,5. **26.14.** 90 игр. **26.15.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{5}{9}$. **27.1.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$. **27.2.** $\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99}=\frac{1}{110}$; 2) $\frac{10}{100}\cdot\frac{90}{99}+\frac{90}{100}\cdot\frac{10}{99}=\frac{1}{11}+\frac{1}{11}=\frac{2}{11}$.

27.3. 1) $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$. **27.4.** 1) $P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10}=\frac{11}{20}$; 2) $P(A_2/A)=$ $=\frac{P(A_2)\cdot P(A/A_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10}}{\frac{11}{20}}=\frac{5}{11}$. **27.5.** 0,94. *Указание*. Так как события попадания в мишень первым или вторым стрелком независимы, то $P(A+B)=P(A)+$ $+P(B)-P(AB)=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94$. **27.6.** $\frac{90}{100}\cdot\frac{89}{99}\cdot\frac{10}{98}=\frac{89}{11\cdot 98}\approx 0{,}083$. **27.7.** 1) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$. **27.8.** $0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9=0{,}999$.

27.9. 0,448. **27.10.** $p=p(\bar{A}_1)\cdot p(\bar{A}_2)\cdot p(\bar{A}_3)=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}5=0{,}21$. **27.11.** 1) 0,38; 2) $p=p(A)+p(B)-p(AB)=0{,}9+0{,}8-0{,}9\cdot 0{,}8=0{,}98$. **27.12.** 1) $\frac{20}{100}\cdot\frac{19}{99}\cdot\frac{18}{98}=\frac{19}{2695}\approx$ $\approx 0{,}0097$; 2) $\frac{20}{100}\cdot\frac{80}{99}+\frac{80}{100}\cdot\frac{20}{99}+\frac{20}{100}\cdot\frac{19}{99}=\frac{179}{495}$. **27.13.** 1) $\approx 0{,}0278$; 2) $\approx 0{,}0556$. **27.14.** $\approx 0{,}66$. **27.15.** 1) $\frac{4}{5}$; 2) 0,5. **27.16.** 1) $\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{7}{10}$; 2) $p(ABC)=p(A)\times$ $\times p(B/A)\cdot p(C/AB)=\frac{5}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{14}{28}\approx 0{,}029$. **27.17.** $\approx 0{,}96$. *Решение*. Пусть A и B — события, что студент знает ответ на первый и второй вопросы билета. Тогда события $\bar{A}$ и $\bar{B}$ означают, что студент не знает ответы на эти вопросы. Событие C — студент сдал экзамен, т. е. ответил хотя бы на один вопрос билета. Следовательно, $\bar{C}$ означает, что студент не ответил на оба вопроса билета. Тогда $p(\bar{C})=p(\bar{A}\,\bar{B})=p(\bar{A})=p(\bar{B}/\bar{A})=$ $=\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{39}\approx 0{,}04$. Отсюда $p(C)=1-p(\bar{C})=1-0{,}04\approx 0{,}96$. **27.18.** $\frac{13}{14}$. **27.19.** 0,712.

27.20. 1) $\frac{1}{120}$; 2) $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{210}$. **27.21.** $\frac{3}{1100}$. **27.23.** 1) Случайное; 2) невозможное; 3) случайное; 4) достоверное. **27.24.** 1) Случайное; 2) невозможное.

27.26. 1) $(x-1)^2(x+3)$; 2) $(x+2)(x+3)(x-3)$; 3) $(x^2+2)(x-3)$. **27.27.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{7}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

28.1. 1) $P(A)\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{11}{21}$; 2) $P(A_2/A)=\frac{P(A_2)\cdot P(A/A_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}}{\frac{11}{21}}=\frac{5}{11}$.

28.2. $\frac{5}{16}$. **28.3.** 1) 0,576; 2) $P(\overline{A})=1-0{,}1\cdot0{,}2\cdot0{,}2=0{,}996$. **28.4.** 1) $P(A)=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$;

2) $P(A)=\frac{4}{5}$. *Решение.* Если ученик зашел на экзамен вторым, то все зависит от того, какой билет достался первому ученику: "легкий" или "тяжелый" для второго ученика. Пусть событие B — первому ученику достался "легкий" билет, а событие С — "тяжелый". Тогда вероятность наступления события A (ученик сдал экзамен) вычислим по формуле $P(A)=P(B)\cdot P(A/B)+P(C)\cdot P(A/C)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}+\frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}=$ $=\frac{4}{5}$. **28.5.** $P(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}=0{,}0039$. **28.6.** $P(A)=\frac{0{,}7\cdot0{,}9}{0{,}7\cdot0{,}9+0{,}3\cdot0{,}8}=\frac{0{,}63}{0{,}87}\approx0{,}724$.

28.7. $P(A)=0{,}03\cdot\frac{100}{550}+0{,}02\cdot\frac{200}{550}+0{,}04\cdot\frac{250}{550}=\frac{34}{1100}\approx0{,}03$. **28.8.** 0,358. **28.9.** $\frac{0{,}2}{0{,}38}=\frac{10}{19}$. *Решение.* $P(A)=\frac{0{,}4+0{,}5}{0{,}4\cdot0{,}5+0{,}6\cdot0{,}3}=\frac{0{,}63}{0{,}87}\approx0{,}724$. **28.10.** 1) $\frac{1707}{4400}$; 2) $\frac{2693}{4400}$. *Решение.* 1) Из условия следует, что $P(A/A_1)=\frac{1}{2}$ (условная вероятность извлечения белого альчика из первой коробки), $P(A/A_2)=\frac{2}{5}$, $P(A/A_4)=\frac{3}{8}$, $P(A/A_4)=\frac{4}{11}$. Вероятность извлечения белого альчика находим по формуле полной вероятности: $P(A)=P(A_1)\cdot P(A/A_1)+P(A_2)\cdot$ $\cdot P(A/A_2)+P(A_3)\cdot P(A/A_3)+P(A_4)\cdot P(A/A_4)$. Тогда $P(A)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{11}=$ $=\frac{1707}{4400}$. 2) $P(A)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{7}{11}=\frac{2693}{4400}$. **28.12.** 1) $f(4)=12$; 2) $f(5)=\frac{50}{3}$; 3) $f(7)=\frac{49}{8}$. **28.13.** 1) $(x-2a)^3$; 2) $(y-3a)^3$; 3) $(x+2a)^4$. **28.14.** 1) $y^5+10y^4a+40y^3a^3+$ $+80y^2a^3+80ya^4+32a^5$. **29.1.** $\frac{1}{720}$. **29.2.** 1) $\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=0{,}6$; 2) $\frac{C_3^2}{C_5^2}=0{,}3$; 3) 0,9. **29.3.** 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{4}$. **29.4.** 1) $\frac{4\cdot3}{4\cdot5}=0{,}6$; 2) $\frac{4\cdot2}{4\cdot5}=0{,}4$; 3) $\frac{4\cdot1}{4\cdot5}=0{,}2$; 4) $\frac{6}{4\cdot5}=0{,}3$. **29.5.** $P(C)=$ $=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}03\cdot0{,}04=0{,}0012$. **29.6.** 3. *Решение.* Вероятность выхода из строя всех n приборов равна $(1-0{,}8)^n$. Следовательно, вероятность безотказной работы равна $1-(0{,}2)^n$. Так как по условию надежность должна быть $\geqslant0{,}98$, то $1-(0{,}2)^n\geqslant$ $\geqslant0{,}98$. Подбором находим, что при $n=3$ получим $1-0{,}008=0{,}992$. Значит, достаточно соединить параллельно три прибора, чтобы вероятность надежности была $\geqslant0{,}98$.

29.7. $P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}99\cdot0{,}98\cdot0{,}99=0{,}960498$. **29.8.** $P(A)=P_{10}(7)=$ $=C_{10}^7(0{,}1)^7\cdot(0{,}9)^3$. **29.9.** $P_{200}(125)=C_{200}^{125}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{125}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{75}$. **29.10.** $C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$.

29.11. 1) 0,87; 2) $\approx$0,993. *Решение.* Пусть A — изделие пройдет контроль, B_1 — взятое изделие стандартное, B_2 — изделие нестандартное. $P(B_1)=0{,}9$, $P(B_2)=0{,}1$. Найдем $P(A/B_1)=0{,}96$; $P(A/B_1)=0{,}06$. Следовательно, 1) $P(A)=0{,}9\cdot0{,}96+0{,}1\cdot0{,}06=$ $=0{,}87$; 2) $P(B_1/A)=\frac{0{,}9\cdot0{,}96}{0{,}87}=\approx0{,}993$. **29.12.** $P_{30}(2)=C_{30}^2\cdot(0{,}04)^2\cdot(0{,}96)^{28}=0{,}202$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

29.13. $P_5(4) + P_5(5) = 0{,}74$. **29.14.** 60 деталей. **29.15.** 25 партий. **29.16.** 1) 0,27 869; 2) 0,62 489; 3) 0,653 309. *Решение*. Так как наблюдения являются независимыми событиями, то вероятность, что в городе N дождливый день, равна $P = \frac{12}{30} = 0{,}4$, а вероятность, что дождя не будет, $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Вероятность того, что в n наблюдениях событие наступит k раз, находим по формуле Бернулли: $P_{n,\,k}(A) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = 0{,}27869$. 1) По условию задачи $n = 8$, $k = 3$, $p = 0{,}4$ и $q = 0{,}6$. Тогда $P_{8,3}(A) = C_8^3 \cdot p^3 \cdot q^{8-3}$. 2) Так как $n = 8$; $3 \leqslant k \leqslant 8$; $p = 0{,}4$ и $q = 0{,}6$, то $P_8(3 \leqslant k \leqslant 8) = P_8(3) + P_8(4) + P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) = 1 - P_8(0) - P_8(1) - P_8(2) = 1 - (0{,}6)^8 - 8 \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}6)^7 - 28 \cdot (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^7 = 0{,}62\,489$. 3) Так как $n = 8$; $0 \leqslant k \leqslant 3$; $p = 0{,}4$ и $q = 0{,}6$, то $P_8(0 \leqslant k \leqslant 3) = P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) + P_8(3) = 0{,}016\,796 + 0{,}149\,292 + 0{,}209\,019 + 0{,}27\,869 = 0{,}653\,309$. **29.18.** 1) $(x - 1)(x^2 + x + 4)$; 2) $(x + 2)\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$; 3) $(x + 3)(x^2 + 3)$. **29.19.** 1) $\pm\sqrt{6}$; 2) $\pm\sqrt{5}$; 3) $\{-4;\ 8\}$; 4) $\{7\}$; 5) $\{-3;\ 0\}$; 6) $\{-3;\ 1\}$. **29.20.** 1) $x^3 - 3x^2 + 8x$; 2) $x^3 - 11x^2 + x - 2$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

СОДЕРЖАНИЕ

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Кучер Татьяна Павловна
Корчевский Владимир Евгеньевич
Жумагулова Зауре Абдыкеновна

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Часть 1

Учебник для 10 класса естественно-математического направления общеобразовательных школ

Редактор *С. Родионова*
Худож. редактор *А. Сланова*
Техн. редактор *И. Тарапунец*
Компьютерная верстка *Ж. Бекбосыновой*

Государственная лицензия № 0000001 выдана издательству Министерством образования и науки Республики Казахстан 7 июля 2003 года

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

ИБ № 5998

Подписано в печать 18.06.19. Формат $70 \cdot 100^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Гарнитура “SchoolBook Kza”. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,35 + 0,32 форзац.
Усл. кр.-отт. 78,69. Уч.-изд. л. 12,1 + 0,54 форзац.
Тираж 50 000 экз. Заказ №

Издательство “Мектеп”, 050009, г. Алматы, пр. Абая, 143
Факс: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана на OKULYK.KZ

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217