Қостанай облысы әкімдігі білім басқармасының
«Қостанай жоғары политехникалық колледжі» КМҚК
КГКП «Костанайский политехнический высший колледж»
Управления образования акимата Костанайской области

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ПРОФЕССИОНАЛЬНОМУ МОДУЛЮ

«ПМ 03 ПМ 13 «Выполнение расчетов деталей на прочность»
Специальности 0911000 «Техническая эксплуатация, обслуживание и ремонт электрического и электромеханического оборудования» (по видам)»

Костанай, 2021 г

Умаров М.С.

«Выполнение расчетов деталей на прочность»Учебно-методический комплекс / Умаров М.С. – Костанай. – КГКП Костанайский политехнический высший колледж -Костанай,2021 г-233 с.

Введение

Настоящий учебно-методический комплекс по профессиональному модулю «Выбор количественных и качественных характеристик режимов работы электрических машин и трансформаторов для производственных условий» предназначен для аудиторной и самостоятельной работы обучающихся с русским языком обучения по специальности 0902000 «Электроснабжение» (по отраслям). Основная цель учебно-методического комплекса – получить навыки и знания, необходимые для выполнения работ по техническому обслуживанию электрических машин и трансформаторов.

В процессе изучения данного модуля студент должен:

знать:

- Определять реакции плоской и пространственной системы сил.классификация Демонстрирует знания основных положений сопротивления материалов;
- Определяет геометрические характеристики плоских сечений.;
- Выполняет проверочный, проектировочный и расчёт допустимой нагрузки при различных видах деформации;
- Понимает основные понятия статикиуравнения ЭДС и моментов для генератора;
- Определяет реакции стержневой и балочной системы.;
- Определяет центр тяжести плоских геометрических фигур и стандартных профилей
- Даёт основные определения кинематики и динамики;
- Определяет основные параметры механического движения.;
- Определяет силу инерции, используя метод кинетостатики и основные теоремы динамики.
- Определяет основные положения деталей машин
- Выполняет расчёты на прочность разъёмных и неразъёмных соединений. понятие о катушке (секции), полюсном делении, шаге обмотки по пазам; Выполняет проектные расчёты передач и валов.

Выполняет расчёты на прочность, передач

Учебно-методический комплекс включает в себя теоретический материал, лабораторные и практические работы, что способствует формированию коммуникативной компетенции студентов в учебном процессе.

Кроме теоретического материала в учебно-методический комплекс, включены тестовые и контрольные задания.

СОДЕРЖАНИЕ

5. Рациональный выбор координатных осей
6. Пара сил и ее характеристики
7. Эквивалентные пары
8. Условие равновесия
9. Моменты сил относительно точки
10. Плоская система произвольно расположенных сил
11. Главный вектор и главный момент системы
12. Уравнения равновесия
13. Определение главного вектора и главного момента
14. Центр тяжести
15. Центр параллельных сил

Раздел 2 Основы сопротивления материалов

16. Основные сведения о трансформаторах. Устройство и рабочий процесс трансформаторов
17. Работа трансформатора под нагрузкой и несимметричной нагрузкой
18. Автотрансформаторы и трехобмоточные трансформаторы
19. Трансформаторы специального назначения
20. Введение. Бесколлекторные машины переменного тока
21. Принцип действия бесколлекторных машин переменного тока
22.Принцип действия асинхронных машин переменного тока. Режимы работы и устройство асинхронной машины
23. Рабочий процесс трехфазного асинхронного двигателя
24. Электромагнитный момент и рабочие характеристики трехфазных асинхронных двигателей
25. Пуск и регулирование частоты вращения трехфазных асинхронных двигателей
26. Асинхронные машины специального назначения
27. Устройство синхронных машин
28. Магнитное поле и характеристики синхронных генераторов
29. Основные параметры синхронных двигателей и синхронных компенсаторов
30. Синхронные машины специального назначения
31. Основные сведения о трансформаторах. Устройство и рабочий процесс трансформаторов

Раздел 3 Элементы кинематики и динамики

32. Основные понятия: механическое движение; параметры движения и способы его задания: классификация видов движения точки и тела
33. Виды движения точки в зависимости от ускорения
34. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси
35. Трение. Механический КПД

Раздел 4 Детали машин и механизмов

36. Машина, механизм, классификация машин и механизмов..
37. Кинематическая пара, звено, цепь.
38. Основные критерии работоспособности машин и их деталей
39. Механизмы передачи вращательного движения
40. Основные кинематические и силовые соотношения для одно- и многоступенчатых передач; классификация..
41. Зубчатые передачи: устройство, принцип работы, область применения, классификация
42. Виды разрушений зубьев, материалы зубчатых колес.
43. Расчет зубчатых передач на прочность и изгиб
44. Фрикционные передачи: устройство, принцип работы, классификация..
45. Определение требуемой силы прижатия. Понятие о вариаторах.
46. Ременные и цепные передачи: устройство, принцип работы классификация, сравнительная оценка.
47. Червячные передачи: устройство, принцип работы, область применения, классификация, сравнительная оценка.
48. Основные критерии работоспособности машин и их деталей
49. Механизмы передачи вращательного движения
50. Основные кинематические и силовые соотношения для одно- и многоступенчатых передач; классификация..
51. Зубчатые передачи: устройство, принцип работы, область применения, классификация

52. Виды разрушений зубьев, материалы зубчатых колес
53. Составление и расчет кинематических схем механизмов..
54. Определение модуля зацепления зубчатых колес
55. Направляющие вращательного движения.
56. Валы и оси: назначение, конструкция, материалы
57. Опоры осей и валов..
58. Опоры качения: устройство, классификация, понятие о расчете на долговечность..
59. Изучение конструкции подшипниковых узлов
60 Изучение конструкции цилиндрического зубчатого редуктора

Раздел 1 Статика.

1. Основные понятия и аксиомы статики

1.1. Основные понятия статики

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия тел, находящихся под действием сил.

Силой называется физическая величина, являющаяся мерой механического взаимодействия тел. Сила – величина векторная. Она характеризуется величиной (модулем), направлением и точкой приложения. Основной единицей измерения силы является Ньютон [Н].

В статике все тела считаются *абсолютно твёрдыми*, то есть под действием сил их форма и размеры остаются неизменными. Совокупность сил, приложенных к телу, называется *системой сил*. Если все силы лежат в одной плоскости, то такая система сил называется *плоской*. Если силы не лежат в одной плоскости, то они образуют *пространственную систему сил*.

Тело, которое из данного положения может переместиться в любое положение в пространстве, называется *свободным телом*.

Две системы сил называют *эквивалентными* одна другой, если каждая из них, действуя по отдельности, может сообщить покоящемуся телу одно и то же движение $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\right) \infty \left(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2\right)$.

Система сил, под действием которой покоящееся тело не изменяет своего состояния покоя, называется *уравновешенной* или *эквивалентной нулю* – $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\right) \infty 0$.

Сила, которая одна заменяет действие системы сил на твёрдое тело, называется *равнодействующей* – $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\right) \infty \overline{R}$.

Силы могут быть *сосредоточенные* (рис. 1.1, а) и *распределенные* (рис. 1.1, б). Сила, приложенная к какой-нибудь одной точке тела, называется *сосредоточенной*.

Система *распределенных сил* характеризуется интенсивностью *q*, т.е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. Измеряется интенсивность в Ньютонах, деленных на метры (Н/м).

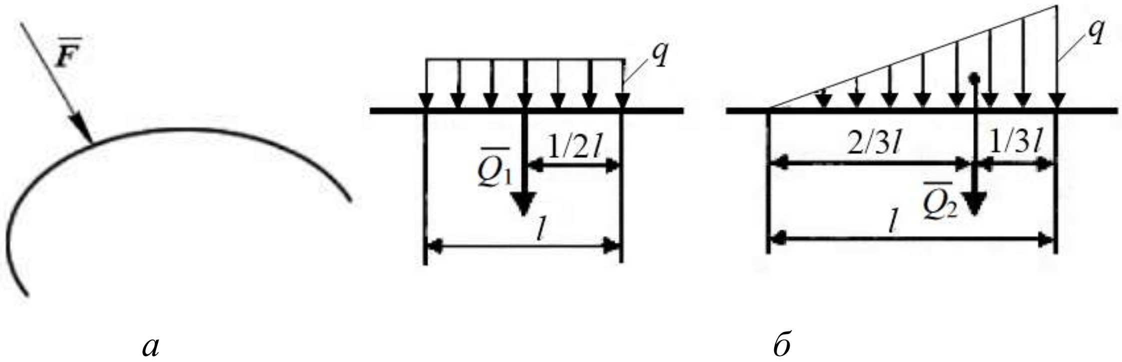


Рис. 1.1

Распределенную нагрузку в виде прямоугольника (равномерно распределенная нагрузка) или треугольника заменяют одной силой (равнодействующей), которую прикладывают в центре тяжести площади распределения (рис. 1.1, б). Величина равнодействующей численно равна площади фигуры, образованной распределенной нагрузкой: $Q_1 = ql$, $Q_2 = \frac{1}{2}ql$.

1.2. Аксиомы статики

В основе статики лежат некоторые основные положения (*аксиомы*), которые являются обобщением многовекового производственного опыта человечества и теоретических исследований.

Аксиома 1. Если на свободное абсолютно твёрдое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис.1.2).

$$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2 \text{ и } \left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right) \infty 0$$

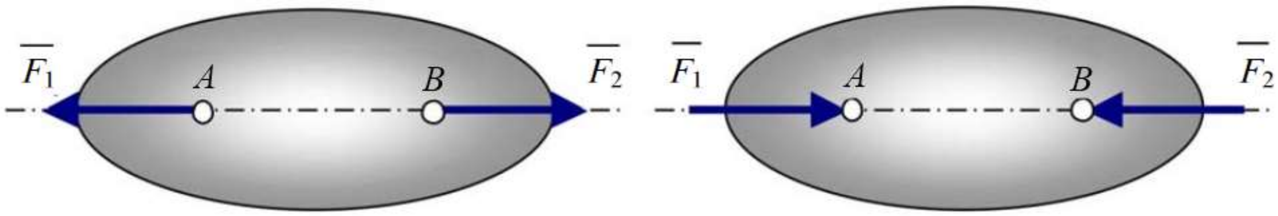


Рис.1.2

Аксиома 2. Действие данной системы сил на абсолютно твёрдое тело не изменится, если к ней прибавить или от неё отнять уравновешенную систему сил. Если $(\overline{Q}_1,\overline{Q}_2)\infty 0$, то $(\overline{P}_1,\overline{P}_2,\overline{P}_3)\infty(\overline{P}_1,\overline{P}_2,\overline{P}_3,\overline{Q}_1,\overline{Q}_2)$.

Следствие: действие силы на абсолютно твёрдое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль её линии действия в любую другую точку тела.

Пусть на тело действует приложенная в точке A сила $\overline{F}$. Выберем на линии действия этой силы произвольную точку B, и приложим к ней уравновешенные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, причём $\overline{F}_1=\overline{F}$, $\overline{F}_2=-\overline{F}$. Так как силы $\overline{F}_2$ и $\overline{F}$ образуют уравновешенную систему сил, то согласно второй аксиоме статики их можно отбросить. В результате на тело будет действовать только одна сила $\overline{F}_1$, равная $\overline{F}$, но приложенная в точке B (рис.1.3).

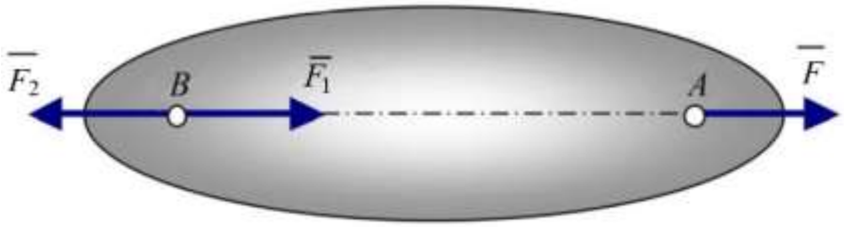


Рис.1.3

Аксиома 3. Две силы, приложенные к твёрдому телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах. Вектор $\overline{R}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, называется геометрической суммой векторов $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ (рис.1.4).

$$\overline{F}_1+\overline{F}_2=\overline{R}$$

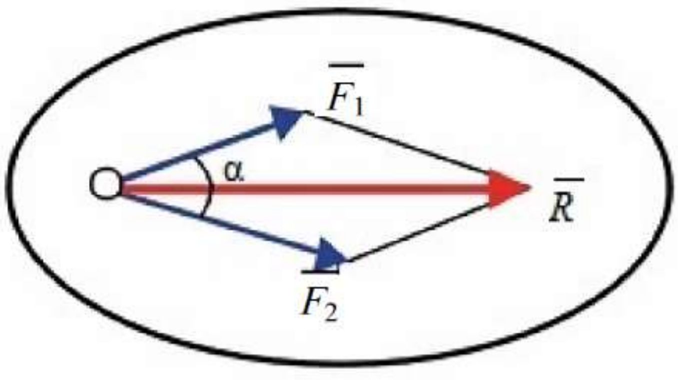


Рис.1.4

Аксиома 4. Закон равенства действия и противодействия. При всяком действии одного тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие (рис.1.5).

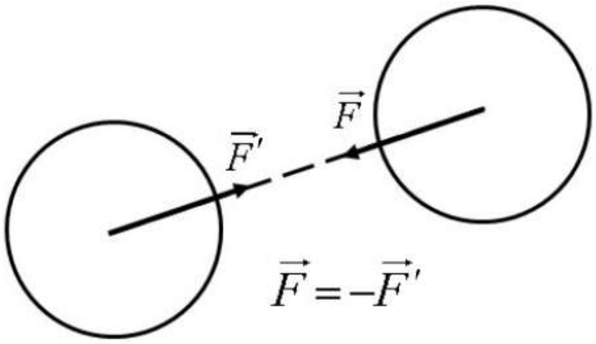


Рис.1.5

Аксиома 5. Принцип отвердевания. Равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действи-ем данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим, т.е. абсолютно твёрдым.

1.3. Виды связей и их реакции

Связями называются любые ограничения, препятствующие перемещению тела в пространстве.

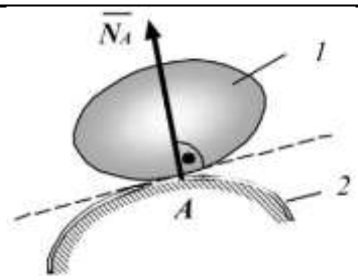
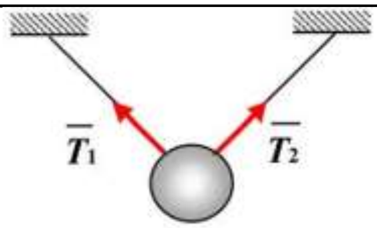
Тело, стремясь под действием приложенных сил осуществить переме-щение, которому препятствует связь, будет действовать на нее с некоторой силой, называемой *силой давления на связь*. По закону о равенстве действия и противодействия, связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой.

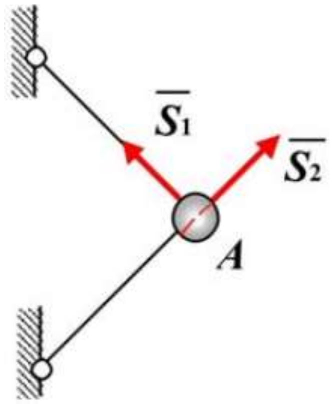
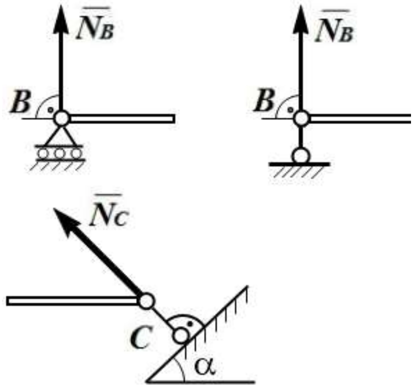
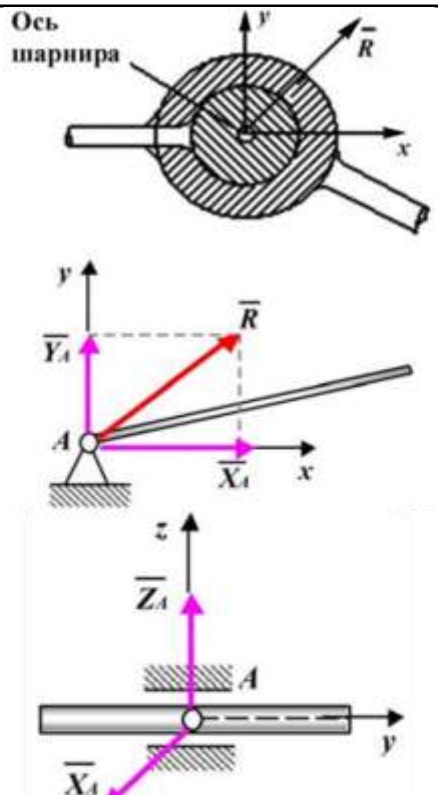
Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным перемещениям, называется *силой реакции (реакцией) связи*.

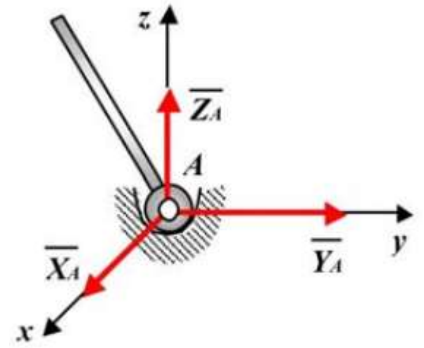
Одним из основных положений механики является *принцип освобождаемости от связей*: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями связей. Реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Основные виды связей и их реакции приведены в таблице 1.1.

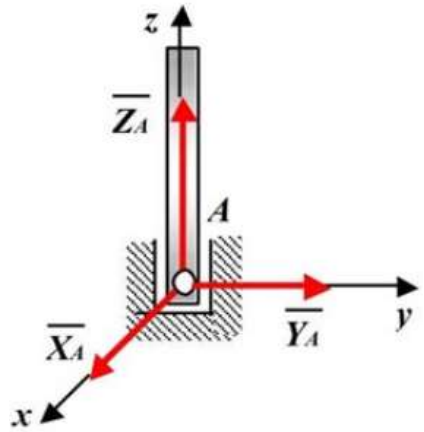
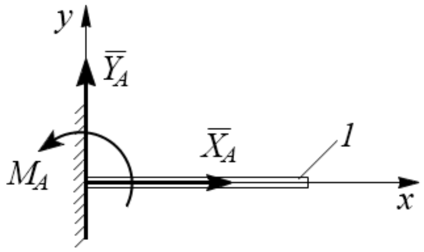
Таблица 1.1

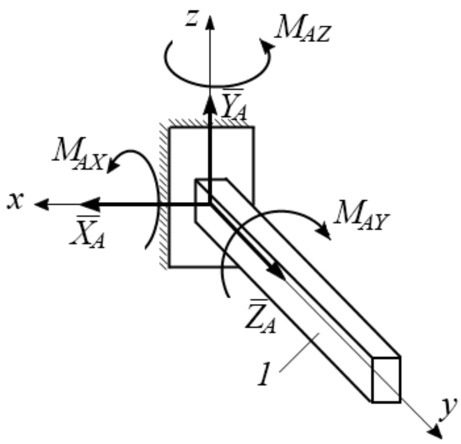
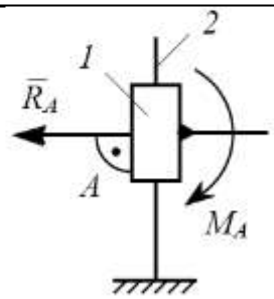
Виды связей и их реакции

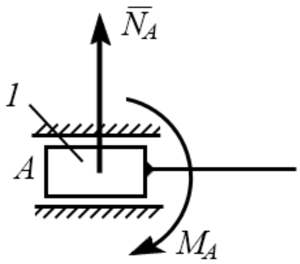
№	Наименование связи	Условное обозначение
1	**Гладкая поверхность (опора)** – поверхность (опора), трением о которую данного тела можно пренебречь. При свободном опирании реакция $\vec{N}_A$ направляется перпендикулярно касательной, проведенной через точку *A* контакта тела *1* с опорной поверхностью *2*.	
2	**Нить (гибкая, нерастяжимая).** Связь, осуществлённая в виде нерастяжимой нити, не позволяет телу удаляться от точки подвеса. Поэтому реакция нити направлена вдоль нити к точке её подвеса.	

3	**Невесомый стержень** – стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой нагрузкой можно пренебречь. Реакция невесомого шарнирно прикрепленного прямолинейного стержня направлена вдоль оси стержня.	
4	**Подвижный шарнир, шарнирно-подвижная опора.** Реакция направлена по нормали к опорной поверхности.	
5	**Цилиндрический шарнир (подшипник, шарнирно-неподвижная опора).** При осуществлении связи в виде цилиндрического шарнира одно тело может поворачиваться относительно другого вокруг общей оси, называемой *осью шарнира*. Реакция $\overline{R}$ цилиндрического шарнира заранее не известна ни по величине, ни по на-правлению; может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Модуль и направление полной реакции определяют две составляющие реакции в этой плоскости.	

<table>
<tr>
<td>6</td>
<td>Сферический (шаровый) шарнир, подпятник. Тела, соединённые с помощью сферического шарнира, могут как угодно поворачиваться относительно центра шарнира. Реакция сферического шарнира $\overline{R}$ может иметь любое направление в пространстве. Реакция сферического шарнира и подпятника (подшипника с упором) может иметь любое направление в пространстве. Три составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$ реакции определяют модуль и направление полной реакции.</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>Жесткая заделка. В плоскости жесткой заделки будут две составляющие реакции $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и момент пары сил M_A, который препятствует повороту балки 1 относительно точки A. Жесткая заделка в пространстве отнимает у тела 1 все шесть степеней свободы – три переме-щения вдоль осей координат и три поворота отно-сительно этих осей. В пространственной жесткой заделке будут три составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$ и три момента пар сил $M_{Ax}; M_{Ay}; M_{Az}$.</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>Ползун 1 на стержне 2. Рекция $\overline{R}$ направлена перпендикулярно стержню 2, момент пары сил M_A препятствует повороту ползуна 1 относительно точки A.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

9	**Ползун *1* в направляющих.** Рекция $\vec{N}_A$ направлена перпендикулярно направляющим, момент пары сил M_A препятствует повороту ползуна *1* относительно точки *A*.	

Контрольные вопросы

1. Что называется Статикой?
2. Что называется силой?
3. Что называется свободным телом?
4. Какие виды связей бывают?
5. Зарисовать Невесомый стержень

Лекция №2

Геометрический способ определения равнодействующей плоской системы

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется сходящейся (рис. 2.1).
Необходимо определить равнодействующую системы сходящихся сил (F1; F2; F3; …; Fn), n — число сил, входящих в систему
По следствию из аксиом статики, все силы системы можно переместить вдоль линии действия, и все силы окажутся приложенными в одной точке.

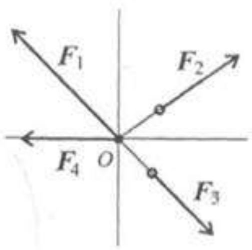


Рис. 2.1
Равнодействующая сходящихся сил
Равнодействующую двух пересекающихся сил можно определить с помощью параллелограмма или треугольника сил (4-я аксиома) (рис. 2.2).

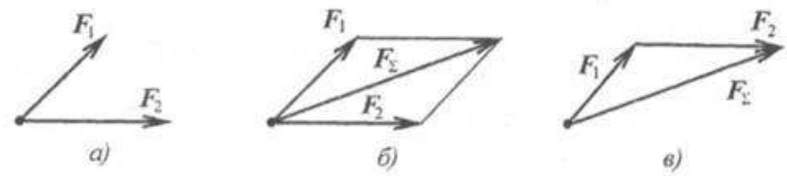


Рис. 2.2

Используя свойства векторной суммы сил, можно получить равнодействующую любой сходящейся системы сил, складывая последовательно силы, входящие в систему. Образуется многоугольник сил (рис. 2.3). Вектор равнодействующей силы соединит начало первого вектора с концом последнего.

При графическом способе определения равнодействующей векторы сил можно вычерчивать в любом порядке, результат (величина и направление равнодействующей) при этом не изменится.

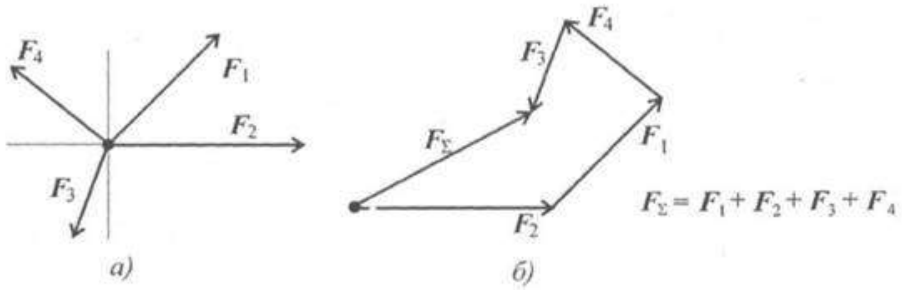


Рис. 2.3

Вектор равнодействующей направлен навстречу векторам сил-слагаемых. Такой способ получения равнодействующей называют геометрическим.

7. Геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил.

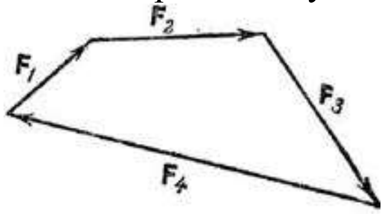


Рис. 2.3

$(F_1, F_2, ..., F_n)\sim R$ => для равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы их равнодействующая равнялась нулю: $R = 0$. Следовательно, в силовом многоугольнике уравновешенной системы сходящихся сил конец последней силы должен совпадать с началом первой силы; в этом случае говорят, что силовой многоугольник замкнут (рис. 2.3). Это условие используется при графическом решении задач для плоских систем сил. Векторное равенство $R=0$ эквивалентно трем скалярным равенствам: $R_x=\text{å}F_{kx}=F_{1x}+F_{2x}+\ldots+F_{nx}=0$; $R_y=\text{å}F_{ky}=F_{1y}+F_{2y}+\ldots+F_{ny}=0$; $R_z=\text{å}F_{kz}=F_{1z}+F_{2z}+\ldots+F_{nz}=0$; где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}– проекции силы F_k на оси, а R_x, R_y, R_z– проекции равнодействующей на те же оси. Т. е. для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно равенства нулю алгебраических сумм проекций всех сил данной системы на каждую из координатных осей. Для плоской системы сил пропадает условие, связанное с осью Z. Условия равновесия позволяют проконтролировать, находится ли в равновесии заданная система сил.

Задание для самоконтроля

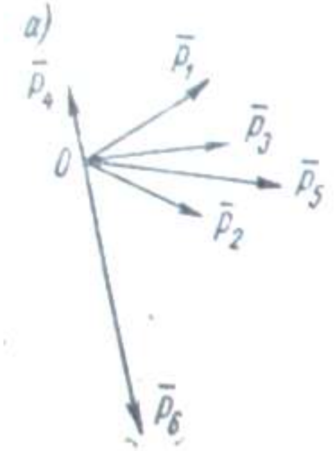
1) Равнодействующая сходящихся сил (начертить)?
2) Равнодействующую двух пересекающихся сил (начертить)?

3) Вектор равнодействующей направлен навстречу векторам сил-слагаемых (начертить)?
4) Геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил. (начертить)?

Лекция №3

Проекция векторной суммы на ось. Теорема о проекции векторной суммы

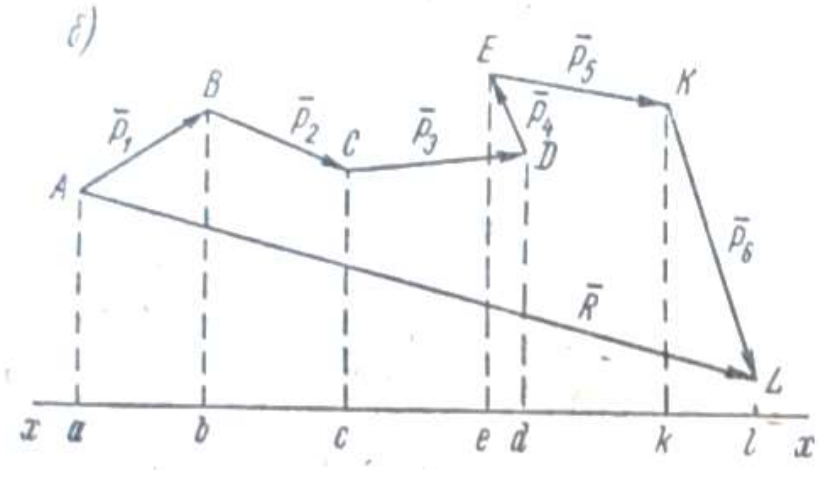
Заданы сходящиеся силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5, \bar{P}_6$ (рис. а).



Геометрическая сумма, или равнодействующая, этих сил

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_4 + \bar{P}_5 + \bar{P}_6$$

определяется замыкающей стороной $\bar{AL} = \bar{R}$ силового многоугольника (рис. б).



Спроектируем все вершины силового многоугольника ABCDEKL на ось x и обозначим их проекции соответственно a, b, c, d, e, k, l.
Проекции сил на ось x изобразятся отрезками:
P1x = ab; P2x = bc; P3x = cd;
P4x =—de; P5x = ek; P6x = kl.
Сумму проекций можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{P}_{ix} = \bar{P}_{1x} + \bar{P}_{2x} + \bar{P}_{3x} + \ldots + \bar{P}_6 = ab + bc + cd - de + ek + rl = al$$

Так как al есть проекция равнодействующей силы $\bar{R}$ на ось x, т.е. al = Rx , то

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \ldots + P_{6x}$$

или

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix},$$

где n — число слагаемых векторов.

Следовательно, проекция векторной суммы на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

В плоскости геометрическую сумму сил можно спроектировать на две координатные оси, а в пространстве соответственно на три.

Лекция№4

Аналитический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил

Величина равнодействующей равна векторной (геометрической) сумме векторов системы сил. Определяем равнодействующую геометрическим способом. Выберем систему координат, определим проекции всех заданных векторов на эти оси (рис. 3.4а). Складываем проекции всех векторов на оси x и y.

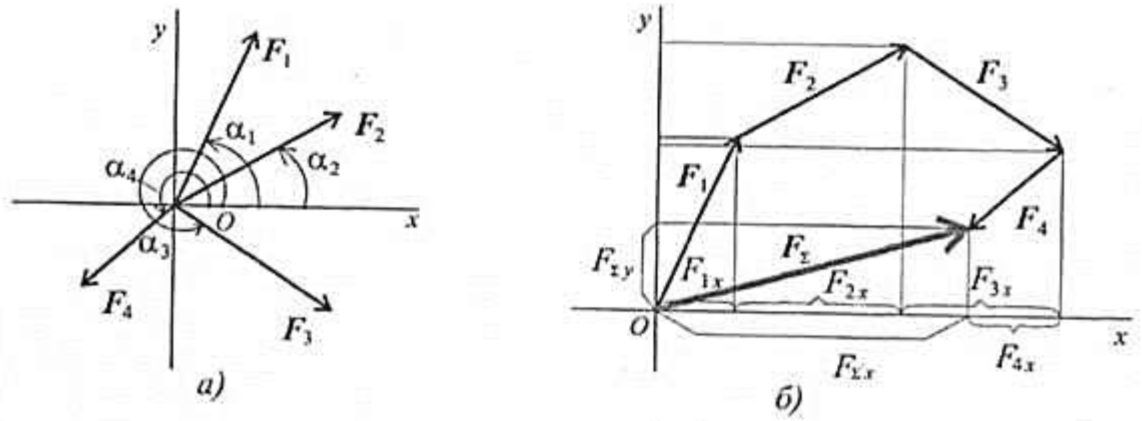


Рис.3.4

FΣч = Flx + F2x + F3x + F4x; FΣн = Fly + F2y + F3y + F4y;

Модуль (величину) равнодействующей можно найти по известным проекциям:

Направление вектора равнодействующей можно определить по величинам и знакам косинусов углов, образуемых равнодействующей с осями координат (рис. 3.5). Растяжение сжатие Продольные силы и определение напряжений

$$\cos\alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_\Sigma}; \quad \cos\alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_\Sigma}$$

Рис.3.5

Рис.3.5

Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме

Исходя из того, что равнодействующая равна нулю, получим:

FΣ = 0.

Условия равновесия в аналитической форме можно сформулировать следующим образом:

Плоская система сходящихся сил находится в равновесии, если алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равна нулю.

Система уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил:
В задачах координатные оси выбирают так, чтобы решение было наиболее простым. Желательно, чтобы хотя бы одна неизвестная сила совпадала с осью координат.
Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства механического движение тел, без учета их масс и действующих на них сил

Контрольные вопросы
1)Что называется Кинематикой?
2) Определение аналитический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил?
3)Как найти модуль величину равнодействующей?

Лекция 5

Рациональный выбор координатных осей.

Перейдем к рассмотрению аналитического (численного) метода решения задач статики. Этот метод основывается на понятии о проекции силы на ось. Как и для всякого другого вектора, проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы. Проекция имеет знак плюс, если перемещение от ее начала к концу происходит в положительном направлении оси, и знак минус - если в отрицательном. Из определения следует, что проекции данной силы на любые параллельные и одинаково направленные оси равны друг другу. Этим удобно пользоваться при вычислении проекции силы на ось, не лежащую в одной плоскости с силой.

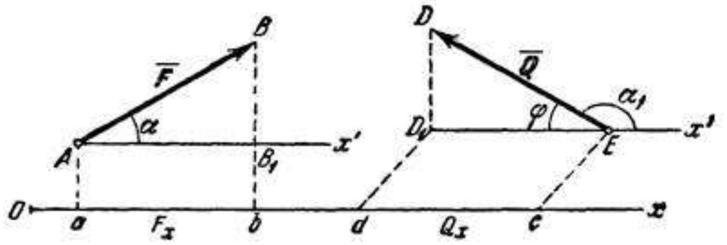


Рис. 1

Обозначать проекцию силы $\bar{F}$ на ось Ox будем символом Fx. Тогда для сил, изображенных на рис.1, получим:
$F_x = AB_1 = ab,\ \ Q_x = -ED_1 = -ed.$
Но из чертежа видно, что $AB_1 = F\cos\alpha,\ \ ED_1 = Q\cos\beta = -Q\cos\alpha_1.$
Следовательно,
$F_x = F\cos\alpha,\ \ Q_x = -Q\cos\varphi = Q\cos\alpha_1,$
т. е. проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси. При этом проекция будет положительной, если угол между направлением силы и положительным направлением оси - острый, и отрицательной, если этот угол - тупой; если сила перпендикулярна к оси, то ее проекция на ось равна нулю.

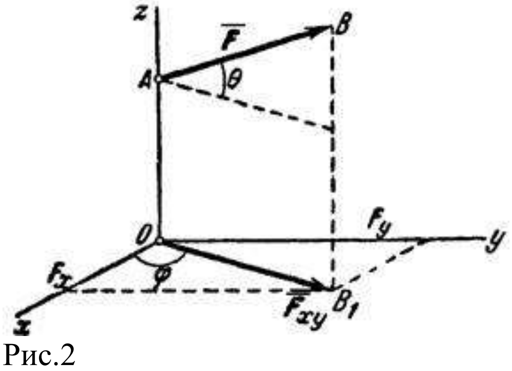


Рис.2

Проекцией силы $\bar{F}$ на плоскость Oxy называется вектор $F_{xy} = OB_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\bar{F}$ на эту плоскость (рис. 2). Таким образом, в отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости Oxy. По модулю $F_{xy} = F\cos\theta$, где θ — угол между направлением силы $\bar{F}$ и ее проекции F_{xy}.
В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось бывает удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось.
Например, в случае, изображенном на рис. 2, найдем таким способом, что
$F_x = F_{xy} \cdot \cos\varphi = F \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi,$
$F_y = F_{xy} \cdot \sin\varphi = F \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi$

Геометрический способ сложения сил.
Решение многих задач механики связано с известной из векторной алгебры операцией сложения векторов и, в частности, сил. Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, будем называть главным вектором этой системы сил. Понятие о геометрической сумме сил не следует смешивать с понятием о равнодействующей, для многих систем сил, как мы увидим в дальнейшем, равнодействующей вообще не существует, геометрическую же сумму (главный вектор) можно вычислить для любой системы сил.
Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \ldots, \bar{F}_n$ (рис. 3, а), откладываем от произвольной точки O (рис. 3, б) вектор Oa, изображающий в выбранном масштабе силу F1, от точки a откладываем вектор $\overline{ab}$, изображающий силу F2, от точки b откладываем вектор bc, изображающий силу F3 и т. д.; от конца m предпоследнего вектора откладываем вектор mn, изображающий силу Fn. Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\overline{On} = \bar{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:
$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \cdots + \bar{F}_n$ или $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$.
От порядка, в котором будут откладываться векторы сил, модуль и направление $\bar{R}$ не зависят. Легко видеть, что проделанное построение представляет собою результат последовательного применения правила силового треугольника.

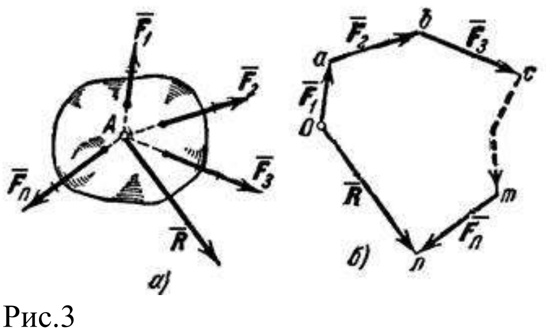


Рис.3

Фигура, построенная на рис. 3,б, называется силовым (в общем случае векторным) многоугольником. Таким образом, геометрическая сумма или главный вектор нескольких сил изображается замыкающей стороной силового многоугольника, построенного из этих сил (правило силового многоугольника). При построении векторного многоугольника следует помнить, что у всех слагаемых векторов стрелки должны быть направлены в одну сторону (по обводу многоугольника), а у вектора $\bar{R}$ - в сторону противоположную.
Равнодействующая сходящихся сил. При изучении статики мы будем последовательно переходить от рассмотрения более простых систем сил к более сложным. Начнем с рассмотрения системы сходящихся сил.
Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называемой центром системы (см. рис. 3, а).

По следствию из первых двух аксиом статики система сходящихся сил, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (на рис. 3, а в точке А).

Последовательно применяя аксиому параллелограмма сил, приходим к выводу, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке их пересечения. Следовательно, если силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ сходятся в точке А (рис. 3, а), то сила, равная главному вектору $\bar{R}$, найденному построением силового многоугольника, и приложенная в точке А, будет равнодействующей этой системы сил.

Примечания.

1. Результат графического определения равнодействующей не изменится, если силы суммировать в другой последовательности, хотя при этом мы получим другой силовой многоугольник - отличный от первого.
2. Фактически силовой многоугольник, составленный из векторов сил заданной системы, является ломаной линией, а не многоугольником в привычном смысле этого слова.
3. Отметим, что в общем случае этот многоугольник будет пространственной фигурой, поэтому графический метод определения равнодействующей удобен только для плоской системы сил.

Лекция 6,7

Эквивалентные пары.

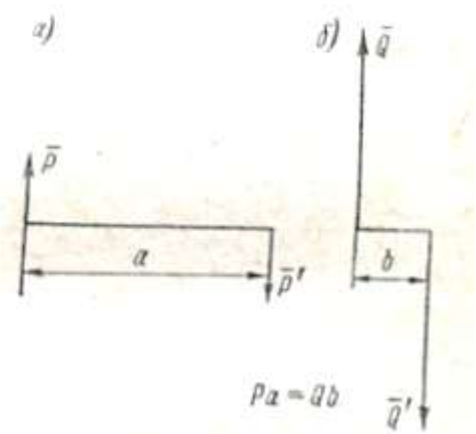
В соответствии с определением **эквивалентных** систем сил (см. — здесь), две пары сил считают **эквивалентными** в том случае, если после **замены** одной пары другой парой **механическое состояние тела не изменяется**, т. е. **не изменяется движение** тела или **не нарушается его равновесие**.

Эффект действия пары сил на твердое тело **не зависит от ее положения в плоскости**. Таким образом, пару сил **можно переносить в плоскости ее действия в любое положение**.

Рассмотрим еще одно **свойство** пары сил, которое является **основой** для **сложения** пар.

Не нарушая состояния тела, **можно как угодно изменять величины сил и плечо пары**, только бы **момент пары** оставался **неизменным**.

Рассмотрим **пару** сил ***PP'*** плечом ***a*** (рис. ***a***).



Заменим эту пару **новой** парой ***QQ'*** с плечом ***b*** (рис. ***б***) так, чтобы **момент пары остался тем же.**

Момент **заданной** пары сил $\boldsymbol{M_1 = Pa}$. Момент **новой** пары сил $\boldsymbol{M_2 = Qb}$. По определению пары сил **эквивалентны**, т. е. производят **одинаковые** действия, если их моменты **равны**.

Если, **изменив величину сил и плечо новой пары**, мы **сохраним равенство их моментов *M_1 = M_2*** или ***Pa* = *Qb***, то состояние тела от такой замены **не нарушится**.

Итак, вместо заданной пары ***PP'*** с плечом ***a*** мы получили **эквивалентную** пару ***QQ'*** с плечом ***b***.

Лекция 8

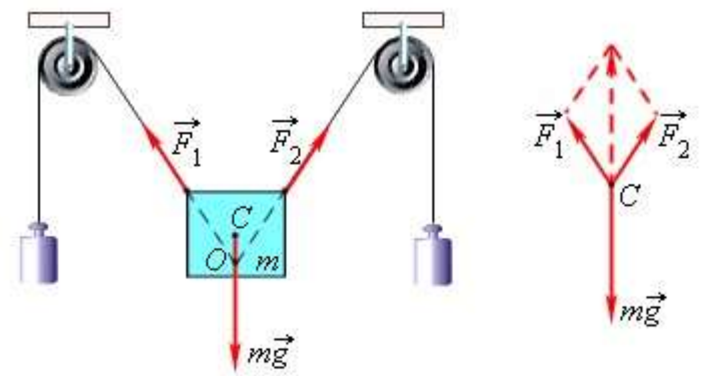
Условие равновесия

Тело находится в состоянии покоя (или движется равномерно и прямолинейно), если векторная сумма всех сил, действующих на него, равна нулю. Говорят, что силы уравновешивают друг друга. Когда мы имеем дело с телом определенной геометрической формы, при вычислении равнодействующей силы можно все силы прикладывать к центру масс тела.

Условие равновесия тел

Чтобы тело, которое не вращается, находилось в равновесии, необходимо, чтобы равнодействующая всех сил, действующий на него, была равна нулю.

→F=−→F1+−→F2+..+−→Fn=0F→=F1→+F2→+..+Fn→=0.



На рисунке выше изображено равновесие твердого тела. Брусок находится в состоянии равновесия под действием трех действующих не него сил. Линии действия сил −→F1F1→ и −→F2F2→ пересекаются в точке OO. Точка приложения силы тяжести - центр масс тела CC. Данные точки лежат на одной прямой, и при вычислении равнодействующей силы −→F1F1→, −→F2F2→ и m→gmg→ приводятся к точке CC.

Равновесие вращающегося тела. Правило моментов

Условия равенства нулю равнодействующей всех сил недостаточно, если тело может вращаться вокруг некоторой оси.

Плечом силы dd называется длина перпендикуляра, проведенного от линии действия силы к точке ее приложения. Момент силы MM - произведение плеча силы на ее модуль.

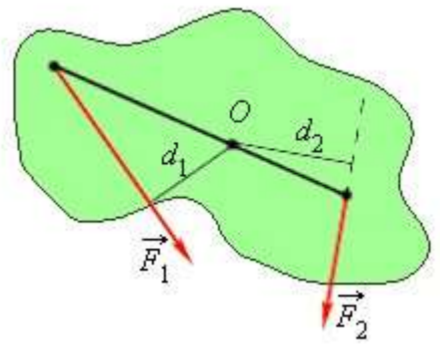
M=d·FM=d·F.

Момент силы стремится повернуть тело вокруг оси. Те моменты, которые поворачивают тело против часовой стрелки, считаются положительными. Единица измерения момента силы в международной системе СИ - 1 *Ньютон*/*метр*1 Ньютонметр.

Определение. Правило моментов

Если алгебраическая сумма всех моментов, приложенных к телу относительно неподвижной оси вращения, равна нулю, то тело находится в состоянии равновесия.

M1+M2+..+Mn=0M1+M2+..+Mn=0



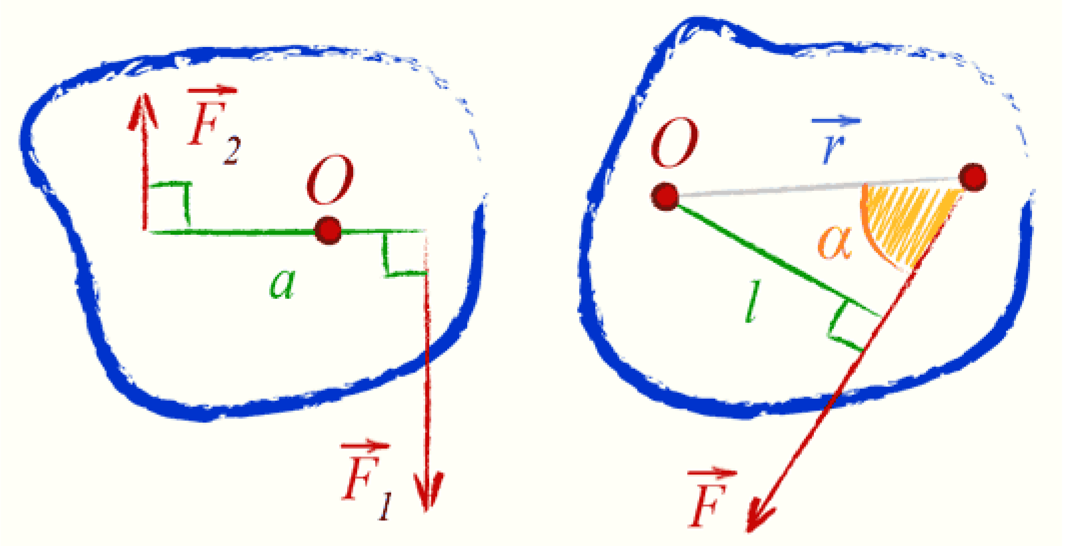
Важно!

В общем случае для равновесия тел необходимо выполнение двух условий: равенство нулю равнодействующей силы и соблюдение правила моментов.

Лекция 9

Моменты сил относительно точки.

Сила приложенная к твердому телу, которое может вращаться вокруг некоторой точки, создает момент силы. Действие момента силы аналогично действию пары сил.



Момент силы относительно некоторой точки — это векторное произведение *силы* на *кратчайшее расстояние* от этой точки до линии действия силы.
Единица СИ момента силы:

1. $[M]=$ *Ньютон · метр*

Если:
M — момент силы (Ньютон · метр),
F — Приложенная сила (Ньютон),
r — расстояние от центра вращения до места приложения силы (метр),
l — длина перпендикуляра, опущенного из центра вращения на линию действия силы (метр),

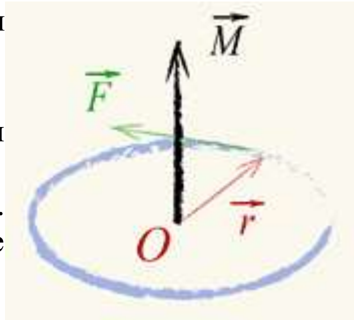
α — угол, между вектором силы F и вектором положения r, То

2. $M= F\cdot l= F\cdot r\cdot sin(\alpha)$

или в виде векторного произведения

3. $\vec{M} = \vec{F} \cdot \vec{r}$

Момент силы — *аксиальный вектор*. Он направлен вдоль оси вращения.



Направление вектора момента силы определяется правилом буравчика, а величина его равна M.
Аксиальные векторы не связаны с определенной линией действия. Их можно перемещать в пространстве параллельно самим себе (свободные векторы).

Лекция 10

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ
ПРИВЕДЕНИЕ СИЛЫ К ТОЧКЕ

Плоская система произвольно расположенных сил — это система сил, линии действия которых расположены в одной плоскости произвольным образом.
Рассмотрим случай переноса силы в произвольную точку, не лежащую на линии действия силы.
Теорема. Действие силы на тело не изменится, если ее перенести параллельно самой себе в любую точку тела, присоединяя при этом некоторую пару сил.
Доказательство. Пусть к телу в некоторой точке K приложена сила F (рис. 1). Перенесем в произвольную точку O того же тела силу $F = F'$ параллельно данной силе. Но чтобы равновесие не изменилось, к точке O надо приложить равную по величиной противоположно направленную силу F'' (см. рис. 1).

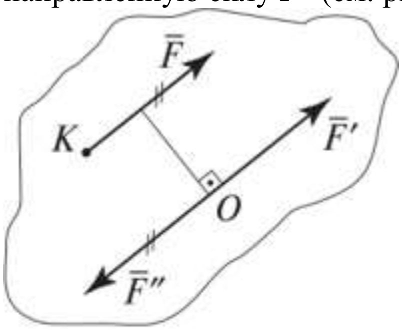


Рис. 1

Силы F' и F'' взаимно уравновешиваются, и поэтому действие на тело одной данной силы F эквивалентно действию на него системы трех сил F, F' и F''. При этом сила F' может рассматриваться как сила F, перенесенная параллельно своему начальному направлению в точку O, а силы F'' и F образуют пару, которую мы должны присоединить при параллельном переносе силы из точки K в точку O, чтобы сохранить действие силы при этом переносе. Теорема доказана.
Пару *(F'' F)*, образующуюся при переносе точки приложения силы F, называют присоединенной парой.

ПРИВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ОДНОМУ ЦЕНТРУ. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ

Рассмотрим систему нескольких сил *F*p *F2, ..., F* , расположенных как угодно на плоскости. Возьмем в плоскости действия сил произвольную точку *O* (рис. 1.4.2, *а),* назовем ее центром приведения. Перенесем все_ данные силы в эту точку. Мы получим систему сил *F[, F'2, ..., F'n,* приложенных в этой точке, и систему пар сил *(Fy, F"), (F2, F2), ..., (Fn, F").* Приложенные в точке *O* силы *F, F2,..., F'n* можно сложить по правилу многоугольника и, следовательно, заменить одной эквивалентной им равнодействующей силой *F y* равной их геометрической сумме. Так как силы *F*j, *F2,..., F'n* геометрически равны данным силам *F*p *Fv ..., Fn,* то

$$\bar{F}_{\text{гл}} = \bar{F}_1' + \bar{F}_2' + \ldots + \bar{F}_n' = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k.$$

Вектор *F y* равный геометрической сумме всех сил данной системы, является главным вектором этой системы (рис. 2, *б),*

$$\bar{F}_{\text{гл}} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k.$$

Модуль и направление главного вектора можно найти по формуле равнодействующей

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_{\text{гл}\,x}^2 + F_{\text{гл}\,y}^2}.$$

системы сходящихся сил:

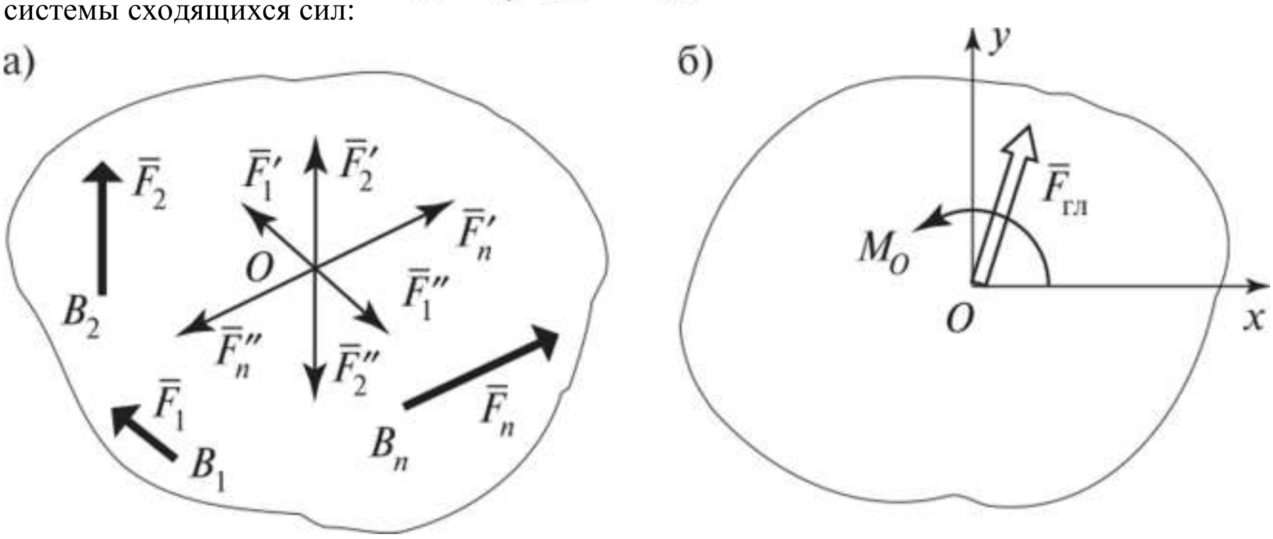


Рис. 2

Все присоединенные пары *(Fv F"), (F2, F2), ..., (Fn, F")* можно сложить по правилу сложения пар сил, лежащих в одной плоскости, и, следовательно, заменить их одной результирующей парой. Моменты этих пар равны моментам данных сил *F*p *F2, ..., Fn* относительно центра приведения *O,* т.е.

$$M(\bar{F}_1, \bar{F}_1'') = M_O(\bar{F}_1),$$
$$M(\bar{F}_2, \bar{F}_2'') = M_O(\bar{F}_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M(\bar{F}_n, \bar{F}_n'') = M_O(\bar{F}_n).$$

Отсюда найдем момент результирующей пары M_n*:*

$$M_O = M_O(\bar{F}_1) + M_O(\bar{F}_2) + \ldots + M_O(\bar{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} M_O(\bar{F}_k).$$

Алгебраическая сумма моментов относительно какой-то точки *O* всех данных сил, расположенных произвольным образом на плоскости, называется главным моментом данной плоской системы относительно этой точки (см. рис. 2, *б):*

$$M_O = \sum_{k=1}^{n} M_O(\bar{F}_k).$$

Произвольная точка тела, в которую переносятся параллельно все силы системы, называется точкой (или центром) приведения. Итак, полученный результат можно сформулировать следующим образом: всякую плоскую систему сил всегда можно заменить одной силой, равной главному вектору системы, приложенной в произвольной точке *O*, и парой, момент которой равен главному моменту данной системы сил относительно этой точки.

Главный вектор системы не является равнодействующей силой для данной системы сил, так как он заменяет данную систему сил вместе с присоединенной парой. Модуль и направление главного вектора не зависят от выбора точки приведения, так как все силы переносятся параллельно их начальному направлению и силовой многоугольник во всех случаях будет одним и тем же.

Величина и знак главного момента зависят от центра приведения, так как с изменением центра приведения изменяются моменты сил относительно этого центра, а следовательно, и их алгебраическая сумма. Поэтому, задавая главный момент, нужно указывать, относительно какой точки он вычислен.

Лекция 11

Главный вектор и главный момент плоской системы сил

В *аналитическом методе* для вычисления главного вектора и главного момента используются проекции сил F_{ix}, F_{iy} и координаты x_i, y_i точек их приложения.

Модуль R главного вектора плоской системы сил и его направляющие косинусы e_x, e_y вычисляются по следующим формулам:

$$R = (R_x + R_y)^{1/2}\ ;\ e_x = R_x / R;\ e_y = R_y / R;\ R_x = \sum F_{ix};\ R_y = \sum F_{iy}.$$

Здесь в суммировании проекций можно не включать силы, образующие пары сил ($\mathbf{F}_k$, $\mathbf{F}'_k$), $\mathbf{F}_k = -\mathbf{F}'_k$, поскольку суммы проекций таких двух сил на любую ось равны нулю.

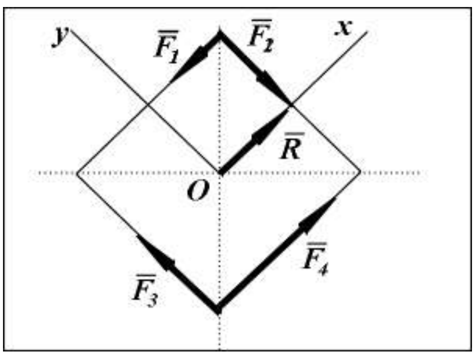
Алгебраический главный момент L_O плоской системы сил относительно центра O (начала координатных осей) вычисляется по формуле:

$$L_O = \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) + \sum M_k.$$

Здесь во вторую сумму выделены алгебраические моменты M_k пар сил ($\mathbf{F}_k$, $\mathbf{F}'_k$).

В случаях, когда плечи h_i всех сил определяются достатосно просто (например, если силы параллельны координатным осям Ox и Oy), величина L_O может быть вычислена по формуле:

$$L_O = \sum \pm F_i h_i + \sum M_k.$$



. К вершинам квадрата со стороной $a = 0.5$(м) приложены силы: $F_1 = 4$(Н); $F_2 = F_3 = 8$(Н); $F_4 = 12$(Н). Определить главный вектор этой системы сил и ее алгебраический главный момент относительно центра квадрата O.

Решение. Введем координатную систему Oxy, оси которой параллельны сторонам квадрата (в такой системе координат расчеты проводятся наиболее простым образом).

Силы $\mathbf{F}_2$,$\mathbf{F}_3$ образуют пару сил с моментом $M_{23} = -F_2 \cdot a = -4$(Н·м) и их можно не учитывать при вычислении проекций главного вектора $\mathbf{R}$:

$$R_x = F_{1x} + F_{4x} = -F_1 + F_4 = -4 + 12 = 8(\text{Н});$$

$$R_y = F_{1y} + F_{4y} = 0.$$

Вычисление алгебраического главного момента L_O проведем с использованием плеч сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_4$, равных половине длины стороны квадрата (a/2):

$$L_O = F_1 \cdot a/2 - F_4 \cdot a/2 + M_{23} = 1 - 4 + 3 = 0.$$

Таким образом, для заданной системы сил ее главный вектор равен по модулю $R = 8$(Н) и направлен вдоль оси Ox, а ее алгебраический главный момент $L_O = 0$.

Замечание. В случае, когда $L_O = 0$, главный вектор $\mathbf{R}$ является *равнодействующей силой* заданной системы сил.

Лекция 12

Уравнения равновесия

Проекция силы на ось - характеризует действие этой силы вдоль этой оси.

То есть Проекция силы на ось Ox (Px=∑Xi) характеризует действие этой силы вдоль оси Ox.

А проекция силы на ось Oy (Py=∑Yi) характеризует действие этой силы вдоль оси Oy.

И если сумма проекций всех сил на ось Ox равна нулю (∑Xi=0)– значит действие этих сил вдоль этой оси Ox нет , силы вдоль этой оси друг друга уравновешивают.

И если сумма проекций всех сил на ось Oy равна нулю (∑Yi=0)- значит действие этих сил вдоль этой оси Oy нет , силы друг друга вдоль этой оси Oy уравновешивают.

Вращательное действие силы относительно точки O характеризует момент этой силы относительно этой точки O (M0(P)=0) .

И если сумма моментов всех сил относительно точки O равно нулю (∑MO=0), то вращательного действия всех этих сил на тело относительно точки O нет, они его не производят, или их вращательные действия их взаимно уравновешены.

Теперь - если проекции всех сил на оси Ox и Oy равны нулю , и сумма моментов всех сил относительно любой - какой угодно - точки равны нулю, то тело находится в равновесии.

∑X=0∑Y=0∑MA=0

Это и есть условия равновесия тела под действием произвольной плоской системы тел:

Система сил, действующих на тело, называется сходящейся, если линии действия этих сил пересекается в одной точке.

Условие равновесия системы сходящихся сил

Для того, чтобы система сходящихся сил была уравновешенной, то есть под действием ее тело будет находится в равновесии - условие равновесия системы сходящихся сил, может быть записано :

∑Xi=0∑Yi=0

Или другими словами - для плоской системы сходящихся сил, лежащих в плоскости Oxy, соответствующие уравнения равновесия примут вид:

∑Xi=0∑Yi=0

Проекция силы на ось

Определение. Проекцией силы PP→ на ось Ox называется взятая с знаком ± длина отрезка этой оси, заключенная между проекциями на неё начала и конца вектора силы.

Эту проекцию обычно обозначают как Px или X. В соответствии с определением она равна:

PPPx=X=|P→|·cos(P→,i→)=P·cosα

PPPy=Y=|P→|·cos(P→,j→)=P·sinα

, где i→ – единичный вектор оси /Ox/, а α – угол между ним и силой PP→ (Рис.1).

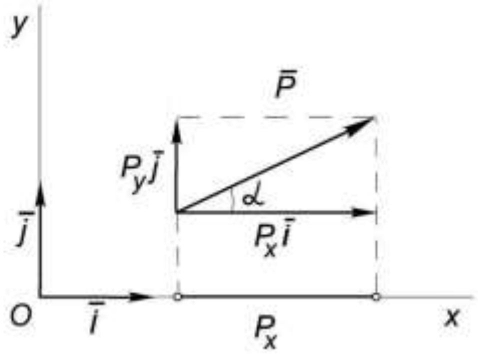


Рис.1

Таким образом:

если$Px>0$, если $0≤α<π2$

если$Px=0$, если $α=π2$

если$Px<0$, если $π2<α≤π$

Проекция силы на ось равна нулю, если сила перпендикулярно оси.

Аналогично находится проекция силы P на ось Oy.

Вектор $PP\to$ может быть выражен:

$PP\to=Px\cdot i\to+Py\cdot j\to=X\cdot i\to+Y\cdot j\to$

А равнодействующая плоской системы двух сходящихся сил равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

Модуль и направление искомого вектора силы P можно найти по формулам:

$PPP=X2+Y2\cos(P\to,i\to)=XP\cos(P\to,j\to)=YP$

Момент силы относительно центра

Приложим в точке A силу P и выясним - чем определяется момент силы относительно точки O, который характеризует вращательное действие этой силы относительно точки O (Рис.2).

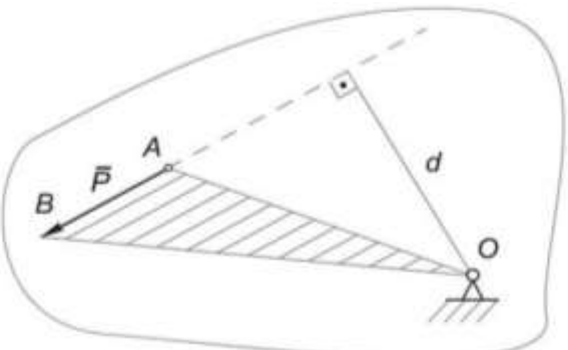


Рис.2

Очевидно, что воздействие силы на тело будет зависеть не только от ее величины, но и от того, как она направлена, и в конечном итоге будет определяться ее моментом относительно центра O.

Рассмотренное определение момента силы подходит только для плоской системы сил.

Определение 1. Моментом силы P относительно центра O называется взятое со знаком ± произведение модуля силы на ее плечо – то есть длину перпендикуляра, опущенного из моментной точки на линию действия силы.

Правило знаков: момент силы считается положительным, если сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки и отрицательным, если она вращает тело по ходу часовой стрелки.

В соответствии с данным определением момент силы численно равен удвоенной площади треугольника OAB, построенного на векторе силы P с вершиной в моментной точке: $M0(P)=P\cdot d=2S\Delta OAB$.

Отметим, что момент силы относительно точки O равен нулю, если линия действия силы проходит через моментную точку.

Уравнения равновесия плоской системы сил

Уравнения равновесия плоской системы сил, которые можно записать в трех различных формах:

Первая форма:

$\sum X=0\sum Y=0\sum MA=0$

Вторая форма:
$\sum MA=0 \sum MB=0 \sum Y=0$, где ось Oy не перпендикулярна отрезку AB
Третья форма:
$\sum MA=0 \sum MB=0 \sum MC=0$, где точки A, B и C не лежат на одной прямой.
Таким образом, любая из этих трех форм эквивалентна условию равновесия плоской системы сил и наоборот.
Центр тяжести
Центр тяжести - точка, через которую проходит равнодействующая сил тяжести при любом пространственном расположении тела.
Если тело имеет ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит там.
Центр тяжести квадрата и прямоугольника - точка пересечения его диагоналей.
Центр тяжести круга - в его центре.
Центр тяжести треугольника - в точке пересечения медиан.

Лекция 13
Определение главного вектора и главного момента

Можно сказать, что главный вектор – это вектор, представляющий собой геометрическую сумму всех заданных сил, перенесенных параллельно самим себе в точку О, называемую центром приведения.
Модуль главного вектора можно определить по его проекциям Rx и Ry на оси координат Ох и Оу по формуле:
Ro = Rx + R y
где на основании теоремы о проекции равнодействующей на ось:
Rx = F1x + F2x +…+ Fnx;
Ry = F1y + F2y +…+ Fny.
Направление главного вектора определяется из выражений $\sin \alpha = Ry/R$ и $\cos \alpha = Rx/R$, где α – угол между главным вектором и положительным направлением оси x. Модуль главного момента системы получим, используя уравнения:
M = M1 + M2 + M3 +…+ Mn = Mo(F1) + Mo(F2) + Mo(F3) +…+ Mo(Ffi).
Отсюда модуль главного момента системы равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения. Если за центр приведения принять другую точку, то нетрудно убедиться, что модуль и направление главного вектора будут такими же, т. е. они не зависят от выбора центра приведения. Что же касается главного момента системы, то его модуль и направление зависят от выбора центра приведения, так как при изменении положения центра приведения изменяются плечи сил заданной системы, а значит, и их моменты. Следует также отметить, что главный вектор не является равнодействующей системы, хотя по модулю и направлению совпадает с ней. Рассмотренный случай приведения системы, когда $Ro \neq 0$ и $M \neq 0$, является общим. Возможны следующие частные случаи приведения:
а) главный вектор оказался равным нулю, а главный момент не равен нулю ($Ro = 0$, $M \neq 0$), т. е. система эквивалентна одной только паре);
б) главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю ($Ro \neq 0$, $M = 0$), т. е. система сводится к одной силе, и очевидно, что главный вектор есть равнодействующая этой системы;
в) главный вектор и главный момент системы равны нулю ($Ro = 0$ и $M = 0$) – система находится в равновесии.
Равнодействующая плоской системы сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей
Рассмотрим более подробно общий случай приведения системы, когда $Ro \neq 0$ и $M \neq 0$. Можно убедиться, что в этом случае система имеет равнодействующую, приложенную в некоторой точке, не совпадающей с центром приведения. Пусть данная система сил приведена к главному вектору Ro , приложенному в точке O, и главному моменту системы M (пара RR'). Представим последний в виде пары сил, у которых модуль равен модулю главного вектора системы. Одну из сил пары R' приложим в центре приведения O и направим противоположно главному вектору системы. Тогда точку приложения второй силы пары R найдем, если вычислим плечо пары:

Силы Ro и R', равные и противоположно направленные, взаимно уравновешиваются, их можно отбросить согласно II аксиоме статики. Остается одна сила R = Ro, заменившая собой заданную систему сил. Она и является равнодействующей этой системы. Таким образом, мы доказали, что в общем случае, когда главный вектор и главный момент системы не равны нулю, система имеет равнодействующую, равную по модулю и направленную параллельно главному вектору в ту же сторону. Модуль момента равнодействующей R относительно центра приведения О:

Mo(R) = Ra, но произведение Ra выражает модуль главного момента системы:

Mo(R) = M = ∑Mo(Fi).

Следовательно, момент равнодействующей произвольной плоской системы сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно этого же центра (теорема Вариньона). Плоскую систему сходящихся сил и плоскую систему параллельных сил следует рассматривать как частные случаи произвольной системы. Для них также справедлива теорема Вариньона. Теоремой Вариньона широко пользуются при решении различных задач статики. В частности, ее применяют при определении равнодействующей системы параллельных сил.

Лекция 14
Центр тяжести тела

Как известно, сила тяжести тела равна векторной сумме сил тяжести, которые действуют на все материальные точки, на которые можно разбить рассматриваемое тело. Точку, к которой приложена результирующая сила тяжести, называют центром тяжести. Если известно положение центра тяжести, то можно считать, что на тело действует только одна сила тяжести, приложенная к центру тяжести.

Следует учитывать, что силы тяжести, действующие на отдельные элементы тела, направлены к центру Земли и не являются строго параллельными. Но так как размеры большинства тел на Земле много меньше ее радиуса, поэтому эти силы считают параллельными.

Определение центра тяжести тела

Центром тяжести называют точку, через которую проходит равнодействующая всех сил тяжести, действующих на материальные точки, на которые разбито рассматриваемое тело, при любом положении тела в пространстве.

Центр тяжести - это точка, относительно которой суммарный момент сил тяжести равен нулю при любом положении тела.

От положения центра тяжести зависит устойчивость всех конструкций.

Для нахождения центра тяжести тела сложной формы необходимо мысленно разбить тело на части простой формы и определить место нахождения центров тяжести для них. У тел простой формы центр тяжести определяют, используя их симметрию. Так, центр тяжести однородных диска и шара расположен в их центре, однородного цилиндра в точке на середине его оси; однородного параллелепипеда на пересечении его диагоналей и т, д. У всех однородных тел центр тяжести совпадает с центром симметрии. Центр тяжести может находиться вне тела, например, у кольца.

Определив, где расположены центры тяжести отдельных частей тела, переходят к поиску места расположения центра тяжести тела в целом. Тело представляют в виде системы материальных точек. При этом каждая точка имеет массу своей части тела и располагается в ее центре тяжести.

Центр тяжести, центр масс и центр инерции тела

Считают, что центр тяжести тела совпадают с центром масс тела, если его размеры малы в сравнении с расстоянием до центра Земли. В основной массе задач центр тяжести принимают совпадающим с центром масс тела.

Сила инерции в неинерциальных системах отсчета, движущихся поступательно, приложена к центру тяжести тела.

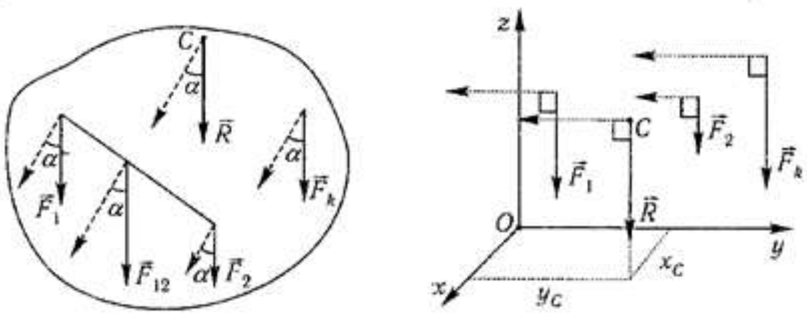
Но центробежная сила инерции (в общем случае) не приложена к центру тяжести, поскольку в неинерциальной системе отсчета на элементы тела действуют разные центробежные силы инерции (даже если массы элементов равны), так как расстояния до оси вращения разные.

Лекция 15
ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Рассмотрим систему параллельных сил {F1, F2, …, Fn}. При повороте всех сил системы на один и тот же угол линия действия равнодействующей системы параллельных сил повернется в ту же сторону на тот же угол вокруг некоторой точки (рисунок 1, а).

Эта точка называется центром параллельных сил.

Согласно теореме Вариньона, если система сил имеет равнодействующую, то ее момент относительно любого центра (оси) равен сумме моментов всех сил системы относительно того же центра (оси).



а б

Рисунок 1.

Для определения координат центра параллельных сил воспользуемся этой теоремой.

Относительно оси x

$M_x(R) = \Sigma M_x(F_k)$,

$— y_C R = \Sigma y_k F_k$,

$y_C = \Sigma y_k F_k / \Sigma F_k$.

Относительно оси y

$M_y(R) = \Sigma M_y(F_k)$,

$— x_C R = \Sigma x_k F_k$,

$x_C = \Sigma x_k F_k / \Sigma F_k$.

Чтобы определить координату z_C, повернем все силы на 90° так, чтобы они стали параллельны оси y (рисунок 1.5, б). Тогда

$M_z(R) = \Sigma M_z(F_k)$,

$-z_C R = \Sigma z_k F_k$,

$z_C \Sigma z_k F_k / \Sigma F_k$.

Следовательно, формула для определения радиус-вектора центра параллельных сил принимает вид

$r_C = \Sigma r_k F_k / \Sigma F_k$.

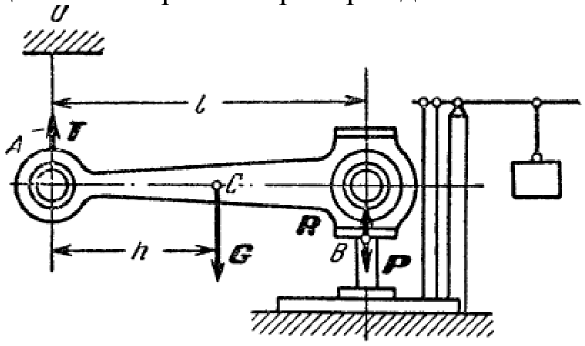
Свойства центра параллельных сил:

Сумма моментов всех сил Fk относительно точки C равна нулю $\Sigma M_C(F_k) = 0$.

Если все силы повернуть на некоторый угол α, не меняя точек приложения сил, то центр новой системы параллельных сил будет той же точкой C.

Лекция 16
Определение центра тяжести сложной фигуры.

Для определения положения центра тяжести фигур и тел сложной геометрической формы их мысленно разбивают на такие части простейшей формы (если, конечно, это возможно), для которых положения центров тяжести известны. Затем определяют положение центра тяжести всей фигуры или тела, понимая в этих формулах под v_k, F_k и l_k объемы, площади и длины частей, на которые разбито данное тело, фигура или линия, а под x_k, y_k и z_k — координаты центров тяжести этих частей.
Если рассматриваемые фигуры или тела неоднородны, то, разделив их па однородные части, умножают входящие в объемы, площади и длины этих частей на соответствующий каждой части удельный вес. Если в данном теле или фигуре имеются полости или отверстия, то для определения центра тяжести такого тела или фигуры пользуются теми же приемами и формулами, считая при этом объемы и площади вырезанных частей отрицательными.
В тех случаях, когда данное тело нельзя разбить на такие части, для которых было бы известно положение их центров тяжести, для вычисления координат центра тяжести тела приходится пользоваться методами интегрального исчисления.
Экспериментальный способ
Для определения центра тяжести неоднородных тел сложной формы существуют различные экспериментальные методы. Рассмотрим на примерах два из них.

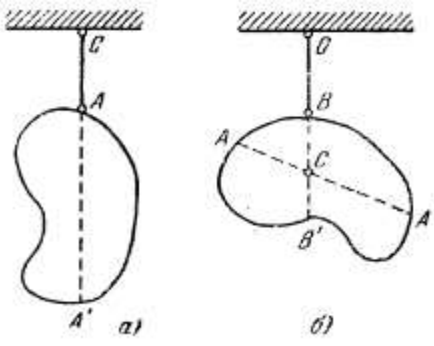


I. Метод взвешивания. Для определения положения центра тяжести шатун AB подвешиваем в точке A и опираем точкой B на платформу десятичных весов, так чтобы он занял горизонтальное положение. Сила давления шатуна на платформу, найденная путем взвешивания, оказалась равной по модулю P. К находящемуся в равновесии шатуну приложены силы: сила G тяжести шатуна, проходящая через его центр C тяжести, вертикальная реакция R платформы, проходящая через точку B и равная по модулю силе P давления шатуна на платформу, и сила T натяжения нити OA.
Зная вес G шатуна и расстояние L между его точками A и B, теперь нетрудно найти и расстояние H от точки A до центра C тяжести шатуна. Одним из уравнений равновесия шатуна будет:

$$\sum m_A(\boldsymbol{P}_k) = -\,Gh + Rl = 0,$$

$$h = \frac{Rl}{G} = \frac{Pl}{G}.$$

Метод подвешивания. Тело подвешивают на нити за какую-либо его точку A к неподвижной точке O. После того как тело придет в равновесие, проводят вертикальную линию AA, составляющую продолжение направления нити OA. При равновесии центр тяжести тела должен находиться на одной вертикали с неподвижной точкой O и, следовательно, будет лежать на линии AA. Вновь подвесив тело к другой его точке B, мы точно так же найдем, что его центр тяжести лежит на линии BB, являющейся продолжением направления нити OB. Точка C пересечения линий AA и BB и будет являться центром тяжести тела. Способ подвешивания удобен для определения положения центра тяжести тонких пластинок.



Лекция 17
Прочность, жесткость, устойчивость. Деформируемое тело: упругость и пластичность.

Прочность, жесткость, устойчивость, – как понятия определяющие надёжность конструкций в их сопротивлении внешним воздействиям. Расчётные схемы (модели): твёрдого деформируемого тела, геометрических форм элементов конструкций. Внутренние силы в деформируемых телах и их количественные меры. Метод сечений. Напряжённое состояние. Перемещения и деформации. Понятия упругости и пластичности. Линейная упругость (закон Гука). Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции).

Основные понятия. Сопротивление материалов, наука о прочности (способности сопротивляться разрушению при действии сил) и деформируемости (изменении формы и размеров) элементов конструкций сооружений и деталей машин. Таким образом, данный раздел механики дает теоретические основы расчета прочности, жесткости и устойчивости инженерных конструкций.

Под нарушением прочности понимается не только разрушение конструкции, но и возникновение в ней больших пластических деформаций. Пластическая деформация – это часть деформации, которая не исчезает при разгрузке, а пластичность – способность материала сохранять деформацию.Возникновение пластических деформаций связано с нарушением нормальной работы конструкции и поэтому пластические деформации считаются недопустимым.

Жесткость – это способность конструкции (или материала) сопротивляться деформированию. Иногда деформация конструкции, отвечающей условию прочности, может воспрепятствовать нормальной ее эксплуатации. В таком случае конструкция имеет недостаточную жесткость.

Устойчивость – это способность конструкции сохранять положение равновесия, отвечающее действующей на нее нагрузке.

Конструкции, как правило, имеют сложную форму, отдельные элементы которой можно свести к простейшим типам, являющимисяосновными объектами изучения сопротивления материалов: стержни, пластинки, оболочки, массивы, для которых устанавливаются соответствующие методы расчёта на прочность, жёсткость и устойчивость при действии статических и динамических нагрузок, т.е. расчет реальной конструкции начинается с выбора расчетной схемы. Выбор расчетной схемы начинается со схематизации свойств материала и характера деформирования твердого тела, затем выполняется схематизация геометрической.Стержень – тело, у которого один размер (длина) значительно превышает два других размера.

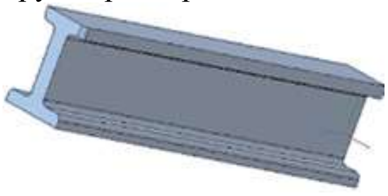


Рис. 1. Стержень

Оболочка – это тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, у которого один размер (толщина) много меньше двух других размеров. Пластина – это тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями.

Рис. 2. Оболочка

Массив – тело, у которого все три размера имеют один порядок.

Рис. 3. Массив

Базируясь на законах и выводах теоретической механики, сопротивление материалов, помимо этого, учитывает способность реальных материалов деформироваться под действием внешних сил.

При выполнении расчетов принимаются допущения, связанные со свойствами материалов и с деформацией тела.

Основные допущения.

1. Материал считается однородным (независимо от его микроструктуры физико-механические свойства считаются одинаковыми во всех точках).
2. Материал полностью заполняет весь объем тела, без каких-либо пустот (тело рассматривается как сплошная среда).
3. Обычно сплошная среда принимается изотропной, т.е. предполагается, что свойства тела, выделенного из нее, не зависят от его ориентации в пределах этой среды. Материалы, имеющие различные свойства в разных направлениях, называют анизотропными (например, дерево).
4. Материал является идеально упругим (после снятия нагрузки все деформации полностью исчезают, т.е. геометрические размеры тела полностью или частично восстанавливаются). Свойство тела восстанавливать свои первоначальные размеры после разгрузки называется упругостью.
5. Деформации тела считаются малыми по сравнению с его размерами. Это допущение называется принципом начальных размеров. Допущение позволяет при составлении уравнений равновесия пренебречь изменениями формы и размеров конструкции.
6. Перемещения точек тела пропорциональны нагрузкам, вызывающим эти перемещения (до определенной величины деформации материалов подчиняются закону Гука). Для линейно деформируемых конструкций справедлив принцип независимости действия сил (или принцип суперпозиции): результат действия группы сил не зависит от последовательности нагружения ими конструкции и равен сумме результатов действия каждой из этих сил в отдельности.
7. Предполагается, что в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки, характер распределения напряжений не зависит от конкретного способа нагружения. Основанием для такого утверждения служит принцип Сен-Венана.
8. Принимается гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли): плоские поперечные сечения стержня до деформации остаются плоскими и после деформации.

Внутри любого материала имеются внутренние межатомные силы. При деформации тела изменяются расстояния между его частицами, что в свою очередь приводит к изменению сил взаимного притяжения между ними. Отсюда, как следствие, возникают внутренние усилия. Для определения внутренних усилий используют метод сечения. Для этого тело мысленно рассекают плоскостью и рассматривают равновесие одной из его частей (рис. 4).

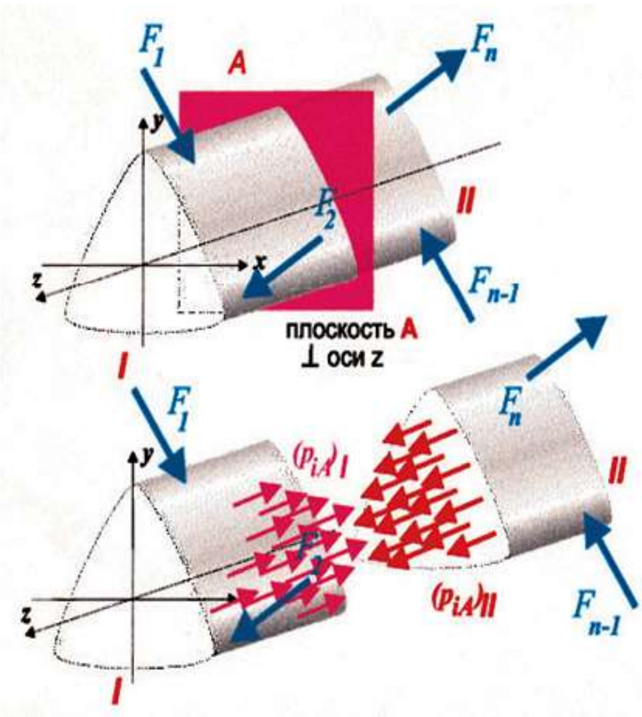


Рис. 4. Выявление внутренних усилий по методу сечений
Метод заключается в следующем:
1 Разрезаем систему (на части).
2. Отбрасываем одну часть.
3. Заменяем действие отброшенной части на оставшуюся внутренними силами упругости (приложим в сечении усилия, способные уравновесить внешние силы, действующие на отсеченную часть).
4. Составляем уравнения равновесия, составленное для отсеченной части и находим значения усилий.
Используем метод сечений и приведем внутренние силы к центру тяжести поперечного сечения стержня. В результате приведения мы получим результирующую силу R, равную главному вектору и пару сил с моментом M, равным главному моменту системы.
Проектируя R и M на координатные оси, получаем в общем случае 6 алгебраических величин – 6 внутренних силовых факторов:
N – нормальная сила;
Qy или Qz – поперечные силы;
My или Mz – изгибающие моменты;
T – крутящий момент.

Лекция 18
Продольные силы и эпюры продольных сил.

Если продольные силы, возникающие в различных поперечных сечениях стержня, неодинаковы, закон их изменения по длине стержня представляется в виде графика N(z), называемого эпюрой продольных сил. Эпюра продольных сил необходима для оценки прочности стержня и строится для того, чтобы найти опасное сечение (поперечное сечение, в котором продольная сила принимает наибольшее значение N_{max}).
Для построении эпюры N используется метод сечений. Продемонстрируем его применение на примере (рис. 2.1).

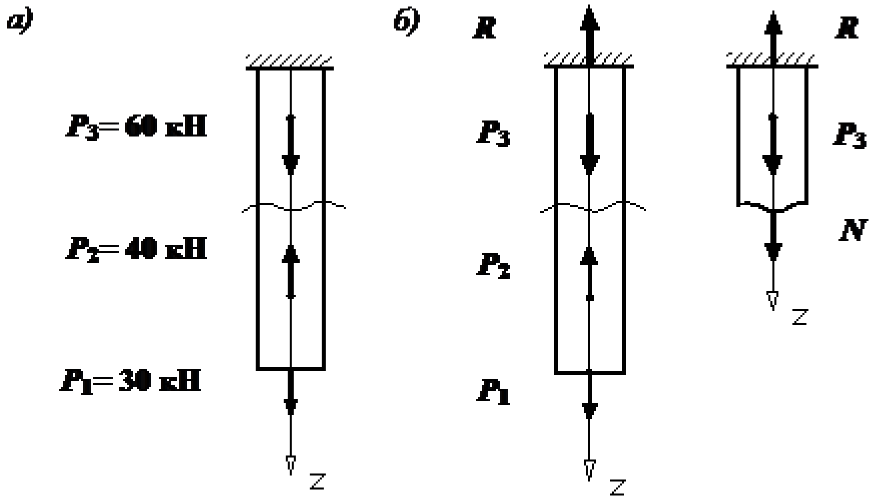


Рис. 2.1. Определение продольного усилия (N) в стержне при растяжении (сжатии)

Определим продольную силу N, возникающую в намеченном нами поперечном сечении стержня.

Разрежем стержень в этом месте и мысленно отбросим нижнюю его часть (рис. 2.1, а). Далее мы должны заменить действие отброшенной части на верхнюю часть стержня внутренней продольной силой N.

Для удобства вычисления ее значения закроем рассматриваемую нами верхнюю часть стержня листком бумаги. Напомним, что продольное усилие N, возникающее в поперечном сечении, можно определить как алгебраическую сумму всех продольных сил, действующих на отброшенную часть стержня, то есть на ту часть стержня, которую мы видим.

При этом применяем следующее правило знаков: силы, вызывающие растяжение оставленной части стержня (закрытой нами листком бумаги) входят в упомянутую алгебраическую сумму со знаком «плюс», а силы, вызывающие сжатие – со знаком «минус».

Итак, для определения продольной силы N в намеченном нами поперечном сечении необходимо просто сложить все внешние силы, которые мы видим. Так как сила $P_1 = 30$ кН растягивает верхнюю часть, а сила $P_2 = 40$ кН ее сжимает, то $N = +P_1 - P_2 = +30 - 40 = -10$ кН. Знак «минус» означает, что в этом сечении стержень испытывает сжатие.

Можно найти опорную реакцию R (рис. 2.1, б) и составить уравнение равновесия для всего стержня, чтобы проверить результат:

$$\sum Z = 0$$

или

$$\sum Z = -R + P_3 - P_2 + P_1 = 0;$$

$$R = P_3 - P_2 + P_1 = 60 - 40 + 30 = 50 \text{ кН}$$

Теперь заменим действие отброшенной нижней части неизвестным внутренним усилием N, направив его, например, от сечения, что соответствует растяжению.

Уравновешиваем оставленную нами верхнюю часть стержня:

$$\sum Z = +N + P_3 - R = 0;$$

$$N = -P_3 + R = -60 + 50 = -10 \text{ кН.}$$

Знак «минус» сигнализирует, что мы не угадали направление продольного усилия N. Оно будет не растягивающим, как мы предполагали, а сжимающим.

Лекция 19

Напряжения в плоских сечениях.

От поперечной силы Q_y в поперечном сечении возникают касательные напряжения τ_y. Для их определения приняты следующие гипотезы.

- Касательные напряжения τ_y параллельны поперечной силе Q_y и соответственно оси $0y$.
- Касательные напряжения равномерно распределены по ширине поперечного сечения на любом уровне их определения, задаваемом ординатой y.
- Для определения нормальных напряжений используют выражения, выведенные для случая чистого изгиба.

Д. И. Журавским предложена формула

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S'_z}{b \cdot I_z}, \tag{7.12}$$

где Q_y – поперечная сила в рассматриваемом сечении;

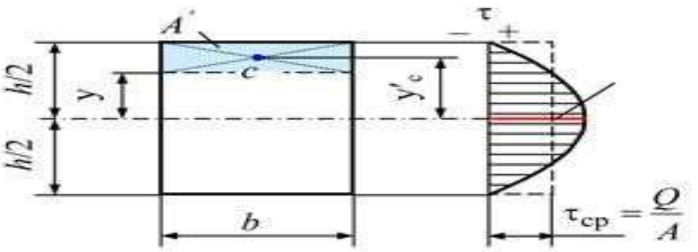
S'_z – статический момент площади отсеченной части сечения относительно центральной оси;

b – ширина сечения на уровне исследуемой точки;

I_z – момент инерции сечения относительно центральной оси.

Знак касательных напряжений τ_y определяется *знаком* поперечной силы Q_y.

Пример 7.3. *Построить эпюру τ для прямоугольного сечения.*



Момент инерции сечения

$$I_z = \frac{bh^3}{12};$$

Статический момент площади отсеченной части сечения

$$S'_z = A' \cdot y'_C.$$

$$A' = b\left(\frac{h}{2} - y\right); \quad y'_C = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right);$$

$$S'_z = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4}{h^2}y^2\right)$$

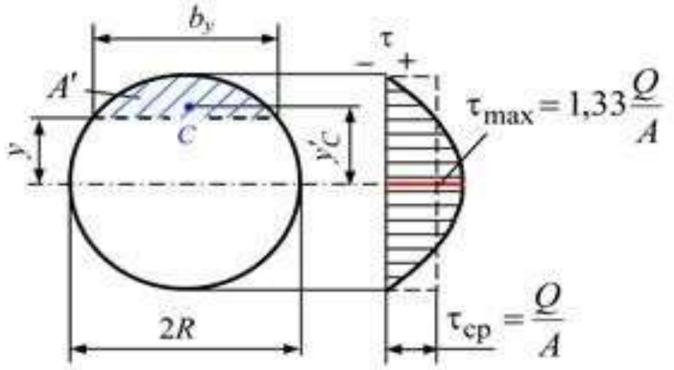
S'_z изменяется по параболической зависимости (координата y во второй степени) и определяет характер изменения напряжения τ:

$$\tau = \frac{Q \cdot S^*_z}{b \cdot I_z} = \frac{Q}{b}\frac{12}{bh^3}\frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4}{h^2}y^2\right) = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}\left(1 - \frac{4}{h^2}y^2\right).$$

При $y = 0$ (на нейтральной оси) $\tau = \tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A}$.

При $y = h/2$ (на периферии) $\tau = 0$.

Пример 7.4. *Построить эпюру τ для круглого сечения.*



$$\tau = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi R^2}\left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right);$$

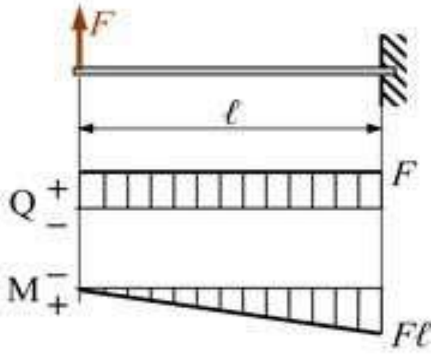
$$\tau_{\max} = 1{,}333\frac{Q}{\pi R^2}.$$

О влиянии касательных напряжений

Касательные напряжения переменны по высоте, вызывают искривление поперечного сечения, причем в тем большей степени, чем больше τ, то есть в центральной части сечения больше, на периферии – меньше. Следовательно, ***гипотеза плоских сечений***, на которой основывался вывод формулы нормальных напряжений, ***неприменима***. Однако это искривление почти не отражается на продольных деформациях волокон, что позволяет пользоваться формулой $\sigma = \frac{M_z}{I_z}y$ и при наличии поперечной силы.

Пример 7.5. *Оценить соотношение нормальных и касательных напряжений при поперечном изгибе.*

Для консольной балки прямоугольного сечения максимальные нормальные напряжения



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{F\ell}{bh^2/6} = \frac{6F\ell}{bh^2},$$

а максимальные касательные

$$\tau_{\max} \frac{3}{2}\frac{Q}{bh} = \frac{3}{2}\frac{F}{bh}.$$

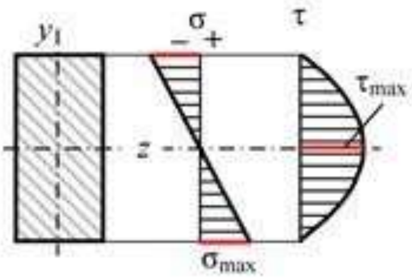
Сопоставив эти напряжения, получим

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{6F\ell}{bh^2}\frac{2bh}{3F} = 4\frac{\ell}{h}.$$

Аналогичное соотношение для круглого поперечного сечения:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{32F\ell}{\pi d^3}\frac{3}{4}\frac{\pi d^2}{F4} = 6\frac{\ell}{d}.$$

Вывод: касательные напряжения в длинных ($\ell > 5h$) балках существенно меньше нормальных.



Отметим, что σ_{max} и τ_{max} действуют в разных точках сечения: σ_{max} на периферии, в точках наиболее удаленных от нейтральной оси, где $\tau = 0$; τ_{max} – в центре, на нейтральной оси, где $\sigma = 0$. Для приведенного выше примера в опасном сечении (в защемлении) эпюры распределения нормальных и касательных напряжений показаны на рисунке.

По мере укорочения длины пролета или участка балки роль момента, а, следовательно, и нормальных напряжений, снижается (в рассмотренном примере M зависит от длины, а Q – постоянна). Превалирующими в этом случае могут оказаться касательные напряжения. В сложившейся практике подбор размеров поперечного сечения выполняют по максимальным нормальным напряжениям (как при чистом изгибе), а проверку прочности проводят по максимальным касательным. В двутавровом сечении балки опасным может оказаться точка K в сопряжении стойки с полкой, где действуют достаточно большие и нормальные, и касательные напряжения:

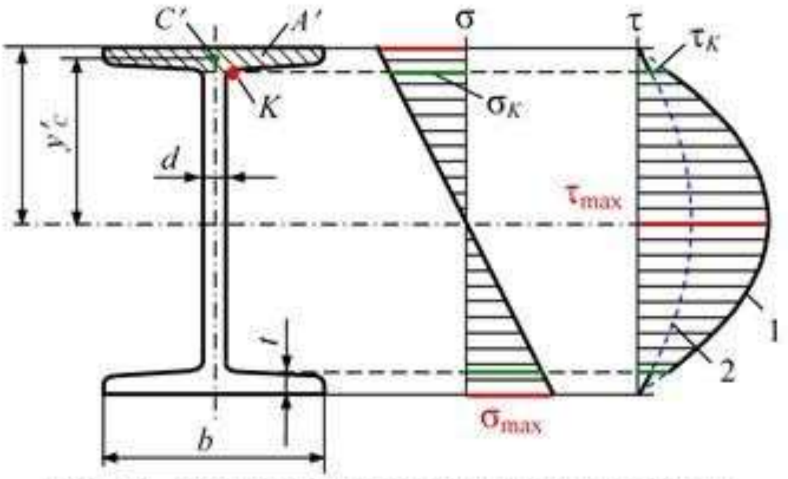


Рис. 7.6. Особенности проверки прочности балки двутаврового сечения

$$\sigma_K = \frac{M_z}{I_z} y_K;$$

$$\tau_K = \frac{Q \cdot S'_z}{d \cdot I_z}.$$

Здесь координату точки K и статический момент отсеченной части площади A' (на рис. 7. 6 заштрихована) находят как

$$y_K = \frac{h}{2} - t; \quad S'_z = A' \cdot y'_c = b \cdot t\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

Эквивалентные напряжения в точке K вычисляют по теориям прочности. Линия 1 на эпюре касательных напряжений отражает закон распределения τ, рассчитанных для ширины сечения d, а линия 2 – ширины сечения b. Размеры отличаются примерно в 20 раз, чем и обусловлен скачок напряжений τ в окрестности точки K.

Лекция 20

Закон Гука

Формулировка этого закона выглядит следующим образом: сила упругости, которая появляется в момент деформации тела, пропорциональна удлинению тела и направлена противоположно движению частиц этого тела относительно других частиц при деформации.

Математическая запись закона выглядит так:

Рис. 1. Формула закона Гука

где **Fупр** – соответственно сила упругости, **x** – удлинение тела (расстояние, на которое изменяется исходная длина тела), а **k** – коэффициент пропорциональности, называемый жесткостью тела. Сила измеряется в Ньютонах, а удлинение тела – в метрах.

Для раскрытия физического смысла жесткости, нужно в формулу для закона Гука подставить единицу, в которой измеряется удлинение – 1 м, заранее получив выражение для k.

$$k = \frac{mg}{\Delta l}$$

Рис. 2. Формула жесткости тела

Эта формула показывает, что жесткость тела численно равна силе упругости, которая возникает в теле (пружине), когда оно деформируется на 1 м. Известно, что жесткость пружины зависит от ее формы, размера и материала, из которого произведено данное тело.

Сила упругости

Теперь, когда известно, какая формула выражает закон Гука, необходимо разобраться в его основной величине. Основной величиной является сила упругости. Она появляется в определенный момент, когда тело начинает деформироваться, например, когда пружина сжимается или растягивается. Она направлена в обратную сторону от силы тяжести. Когда сила упругости и сила тяжести, действующие на тело, становятся равными, опора и тело останавливаются.

Деформация – это необратимые изменения, происходящие с размерами тела и его формой. Они связанны с перемещением частиц относительно друг друга. Если человек сядет в мягкое кресло, то с креслом произойдет деформация, то есть изменятся его характеристики. Она бывает разных типов: изгиб, растяжение, сжатие, сдвиг, кручение.

Так как сила упругости относится по своему происхождению к электромагнитным силам, следует знать, что возникает она из-за того, что молекулы и атомы – наименьшие частицы, из которых состоят все тела, притягиваются друг другу и отталкиваются друг от друга. Если расстояние между частицами очень мало, значит, на них влияет сила отталкивания. Если же это расстояние увеличить, то на них будет действовать сила притяжения. Таким образом, разность сил притяжения и сил отталкивания проявляется в силах упругости.

Сила упругости включает в себя силу реакции опоры и вес тела. Сила реакции представляет особый интерес. Это такая сила, которая действует на тело, когда его кладут на какую-либо поверхность. Если же тело подвешено, то силу, действующую на него, называют, силой натяжения нити.

Особенности сил упругости

Как мы уже выяснили, сила упругости возникает при деформации, и направлена она на восстановление первоначальных форм и размеров строго перпендикулярно к деформируемой поверхности. У сил упругости также есть ряд особенностей.

- они возникают во время деформации;
- они появляются у двух деформируемых тел одновременно;
- они находятся перпендикулярно поверхности, по отношению к которой тело деформируется.
- они противоположны по направлению смещению частиц тела.

Применение закона на практике

Закон Гука применяется как в технических и высокотехнологичных устройствах, так и в самой природе. Например, силы упругости встречаются в часовых механизмах, в амортизаторах на транспорте, в канатах, резинках и даже в человеческих костях. Принцип закона Гука лежит в основе динамометра – прибора, с помощью которого измеряют силу.

Рис. 3. Динамометр

Контрольные вопросы

1)Назвать особенности сил упругости?
2)Формула закона Гука?
3)Формула жесткости тела?
4) Привести пример закона Гука на практике

Лекция 21

Модуль продольной упругости

Модуль упругости — общее название нескольких физических величин, характеризующих способность твёрдого тела (материала, вещества) упруго деформироваться (то есть не постоянно) при приложении к нему силы. В области упругой деформации модуль упругости тела в общем случае зависит от напряжения и определяется производной (градиентом) зависимости напряжения от деформации, то есть тангенсом угла наклона начального линейного участка диаграммы напряжений-деформаций:

$$E = \frac{d_\sigma}{\mathrm{d}_\varepsilon}$$

E — модуль упругости;

σ — напряжение, вызываемое в образце действующей силой (равно силе, делённой на площадь приложения силы);
ϵ — упругая деформация образца, вызванная напряжением (равна отношению изменения размера образца после деформации к его первоначальному размеру).
В наиболее распространенном случае зависимость напряжения и деформации линейная (закон Гука):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Если напряжение измеряется в паскалях, то, поскольку деформация является безразмерной величиной, единицей измерения E также будет паскаль. Альтернативным определением является определение, что модуль упругости — это напряжение, достаточное для того, чтобы вызвать увеличение длины образца в два раза. Такое определение не является точным для большинства материалов, потому что это значение намного больше чем предел текучести материала или значения, при котором удлинение становится нелинейным, однако оно может оказаться более интуитивным.
Разнообразие способов, которыми могут быть изменены напряжения и деформации, включая различные направления действия силы, позволяют определить множество типов модулей упругости. Здесь даны три основных модуля:

- Модуль Юнга (E) характеризует сопротивление материала растяжению/сжатию при упругой деформации, или свойство объекта деформироваться вдоль оси при воздействии силы вдоль этой оси; определяется как отношение напряжения к деформации сжатия (удлинения). Часто модуль Юнга называют просто модулем упругости.
- Модуль сдвига или модуль жесткости (G или μ) характеризует способность материала сопротивляться изменению формы при сохранении его объёма; он определяется как отношение напряжения сдвига к деформации сдвига, определяемой как изменение прямого угла между плоскостями, по которым действуют касательные напряжения. Модуль сдвига является одной из составляющих явления вязкости.
- Модуль объёмной упругости или Модуль объёмного сжатия (K) характеризует способность объекта изменять свой объём под воздействием всестороннего нормального напряжения (объёмного напряжения), одинакового по всем направлениям (возникающего, например, при гидростатическом давлении). Он равен отношению величины объёмного напряжения к величине относительного объёмного сжатия. В отличие от двух предыдущих величин, модуль объёмной упругости невязкой жидкости отличен от нуля (для несжимаемой жидкости — бесконечен).

Существуют и другие модули упругости: коэффициент Пуассона, параметры Ламе.
Гомогенные и изотропные материалы (твердые), обладающие линейными упругими свойствами, полностью описываются двумя модулями упругости, представляющими собой пару любых модулей. Если дана пара модулей упругости, все другие модули могут быть получены по формулам, представленным в таблице ниже.
В невязких течениях не существует сдвигового напряжения, поэтому сдвиговый модуль всегда равен нулю. Это влечёт также и равенство нулю модуля Юнга.

Вопросы для самоконтроля

1) Модуль Юнга (E) характеризует?
2) Модуль сдвига или модуль жесткости (G или μ) характеризует?
3) Модуль объёмной упругости или Модуль объёмного сжатия (K) характеризует?

Лекция 22

Определение расчетов на прочность.

1. Расчет на статическую прочность

1.1 При расчете на статическую прочность необходимо учитывать расчетные нагрузки, кроме вибрационных и ударных нагрузок, и все эксплуатационные режимы.

1.2 Условия обеспечения статической прочности должны ограничивать уровень напряжении, вызывающих:

- вязкое или хрупкое разрушение;
- возникновение пластического течения по всему сечению элемента конструкции;
- смятие поверхности элемента конструкции;
- срез;
- изменение формы.

1.3 Условия прочности устанавливают ограничением уровня соответствующих категорий напряжений относительно значений $R^T{}_m$, $R^T{}_{p0,2}$ или $[\sigma]$.

1.4 Суммарный уровень напряжений, входящих в группу категорий напряжений, вызывающих возникновение однородной пластической деформации в сечении элемента конструкции под действием механических нагрузок, должен быть не более:

- $[\sigma]$ при НЭ;
- 1,2 $[\sigma]$ при ННЭ.

1.5 Суммарный уровень напряжений, входящих в группу категорий напряжений, вызывающих возникновение пластического шарнира в сечении элемента конструкции (кроме болтов и шпилек) под действием механических нагрузок, должен быть не более:

- 1,3 $[\sigma]$ при НЭ;
- 1,6 $[\sigma]$ при ННЭ.

1.6 Конкретные зависимости, используемые для проверки статической прочности различных групп категорий напряжений, устанавливаются в соответствующих нормативных документах.

2. Расчет на устойчивость

2.1 Расчет на устойчивость выполняют применительно к статическому нагружению элементов конструкций оборудования и трубопроводов.

2.2 Проверку на устойчивость следует выполнять для элементов сосудов (обечаек, выпуклых днищ) при совместном или раздельном действии наружного давления, превышающего внутреннее, и сжимающих усилий.

2.3 По условиям прочности следует определять допускаемые значения наружного давления и сжимающих усилий.

2.4 Методики расчета и условия прочности устанавливают в соответствующих нормативных документах.

3. Расчет на циклическую прочность

3.1 Определение допускаемого числа циклов по заданным амплитудам напряжений или допускаемых амплитуд напряжений для заданного числа циклов следует проводить:

1) по расчетным кривым усталости, характеризующим в пределах их применения зависимость между допускаемыми амплитудами условных упругих напряжений и допускаемыми числами циклов;

2) по уравнениям, связывающим допускаемые амплитуды условных упругих напряжений и допускаемые числа циклов.

3.2 В расчете необходимо учитывать влияние на циклическую прочность характеристик материала (включая сварные соединения), асимметрии цикла условных упругих приведенных напряжений (в том числе вызванной действием остаточных напряжений), температуры, флюенса нейтронов, воздействия теплоносителя.

При расчете деталей из титановых сплавов следует принимать во внимание влияние эффектов ползучести.

3.3 Условие прочности при наличии различных циклических нагрузок должно определяться накоплением усталостного повреждения вплоть до допускаемого значения.

3.4 В тех случаях, когда низкочастотные циклические напряжения, вызываемые пуском, остановом, изменением мощности, функционированием аварийной защиты или другими режимами, сопровождаются наложением высокочастотных напряжений, например, вызванных вибрацией, пульсацией температур при перемешивании потоков теплоносителя с различной температурой, расчет на циклическую прочность следует проводить с учетом многочастотного характера нагружения.

3.5 Допускается оценивать циклическую прочность на основе кривых усталости, полученных экспериментальным путем для рассматриваемых условий нагружения и состояния металла конструкции, или по результатам испытаний натурных элементов или их моделей, спроектированных и изготовленных в соответствии с требованиями, предъявляемыми к штатным конструкциям.

4. Расчет на сопротивление хрупкому разрушению

4.1 Расчет на сопротивление хрупкому разрушению следует проводить для всех режимов НЭ, ННЭ и гидравлических испытаний.

4.2 Анализу подлежат зоны, в которых можно ожидать наибольшие значения коэффициентов интенсивности напряжений K_I, для расчетного дефекта, или наименьшие значения вязкости разрушения K_{IC}, или наименьшее отношение K_{IC}/K_I.

4.3 При расчете элементов, изготовленных из титановых сплавов, следует учитывать вязкий характер их разрушения, а в качестве характеристик прочности использовать $R^T_{p0,2}$ и величину критического раскрытия трещины сплава.

4.4 Выбор расчетного дефекта, расчетных характеристик вязкости разрушения, критической температуры хрупкости, значений величин остаточных напряжений и последующий анализ прочности следует проводить согласно положениям одобренных Федеральной службой по атомному надзору документов организаций, занимающихся проектированием и изготовлением оборудования и трубопроводов.

4.5 Расчет на сопротивление хрупкому разрушению допускается не проводить для элементов конструкций, не подвергающихся облучению (или подвергающихся облучению при температурах 523 - 623 К до флюенса не более 10^{22} н/м^2 при энергии нейтронов $\geq 0,5$ МэВ), в следующих случаях:

1) материалы элементов конструкций (включая сварные соединения) имеют предел текучести при температуре 293 К менее 300 МПа, а толщина стенки элемента конструкции составляет не более 25 мм;

2) материалы элементов конструкций (включая сварные соединения) имеют предел текучести при температуре 293 К менее 600 МПа, а толщина стенки элемента конструкции составляет не более 16 мм;

5. Расчет на ударостойкость

5.1 В основу расчета на ударостойкость положено требование надежной эксплуатации оборудования в условиях воздействия ударных нагрузок. Конкретные параметры ударных нагрузок определяются проектом ППУ и (или) техническим заданием на выполнение расчета на прочность.

5.2 Проверку ударостойкости следует выполнять по допускаемым напряжениям и допускаемым перемещениям.

5.3 При определении допускаемых напряжений следует учитывать:

- влияние на динамический предел текучести скорости деформации и расчетной температуры,
- допустимость ограниченной пластической деформации в наиболее нагруженных участках элемента при кратковременном внешнем воздействии;
- повышенную склонность материалов к хрупкому разрушению

5.4 Допускаемое перемещение следует устанавливать из условий невозможности соударений рассчитываемого оборудования с соседними или с корпусными конструкциями, или недопустимых повреждений.

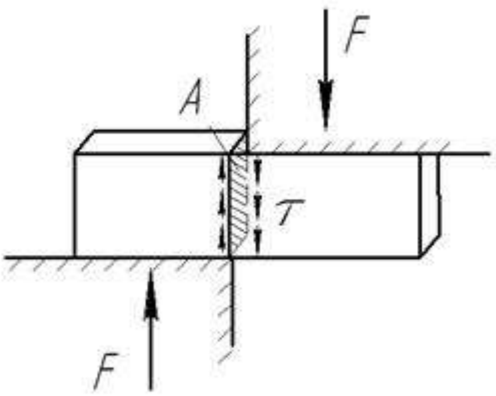
5.5 Расчет следует проводить для режимов НЭ.

5.6 В расчете напряжения от эксплуатационных нагрузок следует суммировать с динамическими только тогда, когда они превышают последние более чем на 10 % (в противном случае они могут не учитываться).

5.7 Определение допускаемых напряжений, перемещений и последующий анализ прочности оборудования следует проводить согласно соответствующим нормативным документам.

Лекция 23

Деформация срез и смятие.



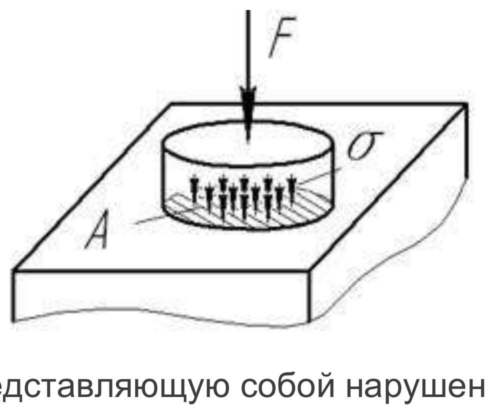
Срезом называют деформацию, представляющую собой смещение поперечных плоскостей тела под действием силы параллельной этой плоскости.

Касательные напряжения при срезе (напряжения среза) определяются по формуле

$$\tau_{ср} = \frac{F}{A} \le [\tau_{ср}] = \frac{\sigma_T}{s}$$

где $\tau_{ср}$ - действительные напряжения среза;

$[\tau_{ср}]$ - допускаемые напряжения растяжения (сжатия);



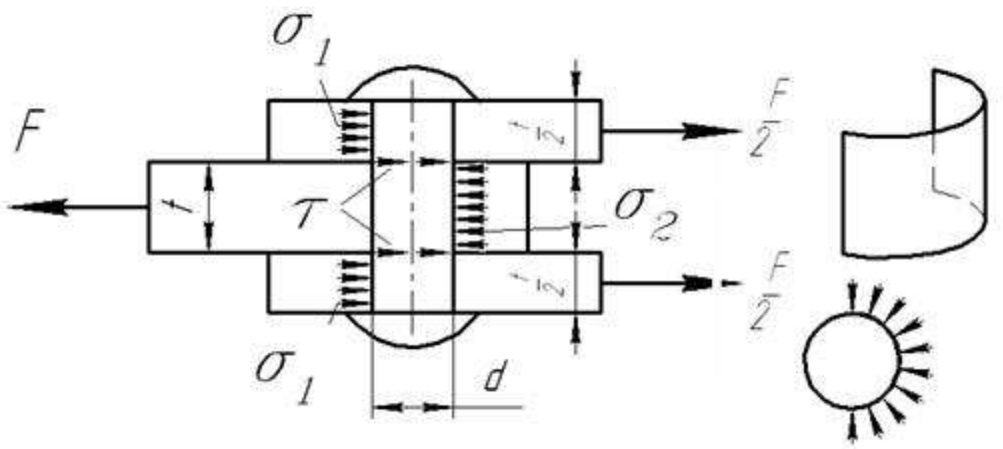
Смятием называют деформацию, представляющую собой нарушение первоначальной формы поверхности под действием силы перпендикулярной к этой поверхности.

Нормальные напряжения при смятии (напряжения смятия) определяются по формуле

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A} \le [\sigma_{см}] = \frac{\sigma_T}{s}$$

Пример

Определить напряжения среза и смятия для заклепки соединяющей три детали. Известны диаметр заклепки d , усилие действующее на соединение F



Запишем условие прочности на срез для заклепки

$$\tau_{ср} = \frac{F}{A}$$

В соединении 3-х деталей напряжения среза возникают в двух сечениях круглой формы.

Площадь круга $A_{KP} = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$, подставляем ее в условие прочности, получим.

$$\tau_{ср} = \frac{F}{2 \cdot A_{KP}} = \frac{4 \cdot F}{2 \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$$

Запишем условие прочности на смятие для заклепки

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A}$$

В соединении 3-х деталей напряжения смятия возникают на боковых поверхностях заклепки площадь которых будет определяться:

Для верхней и нижней поверхностей: $A_{CM1} = \frac{\pi \cdot d}{2} \cdot t_1$

Для средней поверхности: $A_{CM1} = \frac{\pi \cdot d}{2} \cdot t_2$

Тогда напряжения смятия

Для верхней и нижней поверхностей: $\sigma_{см} = \frac{F}{\pi \cdot d \cdot t_1}$

Для средней поверхности: $\sigma_{см} = \dfrac{2 \cdot F}{\pi \cdot d \cdot t_2}$

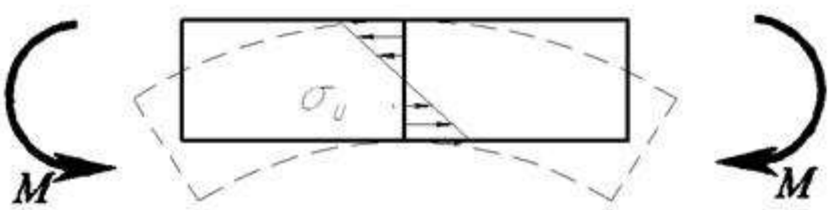
Изгиб

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны кривого бруса.

Изгиб называют *чистым* если изгибающий момент является единственным внутренним усилием, возникающим в поперечном сечении бруса (балки).

Изгиб называют *поперечным,* если в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы.

При изгибе в сечении деталей возникают нормальные напряжения $\sigma_и$, которые распределяются по закону треугольника, причем в нижних волокнах – напряжения сжатия, а в верхних – напряжения растяжения (для схемы показанной на рисунке).



Напряжения изгиба определяются по формуле

$$\sigma_и = \frac{M}{W} \le [\sigma_и]$$

На практике изгиб тела вызывает не только внешние изгибающие моменты, но и поперечные силы, действующие на тело. Для нахождения наиболее нагруженного поперечного сечения строят эпюры изгибающих моментов.

При построении эпюр изгибающих моментов используются следующие правила:

1 Тело разбивается на участки, границами которых служат точки приложения внешних сил и моментов и реакции опор;

2 Построение ведется последовательно, по участкам, путем проведения сечений, проходящих через середину участка и отбрасывания части тела лежащей за сечением. Для не отброшенной части тела составляется

зависимость по которой изменяется изгибающий момент и определяется его значение в начале и конце участка;

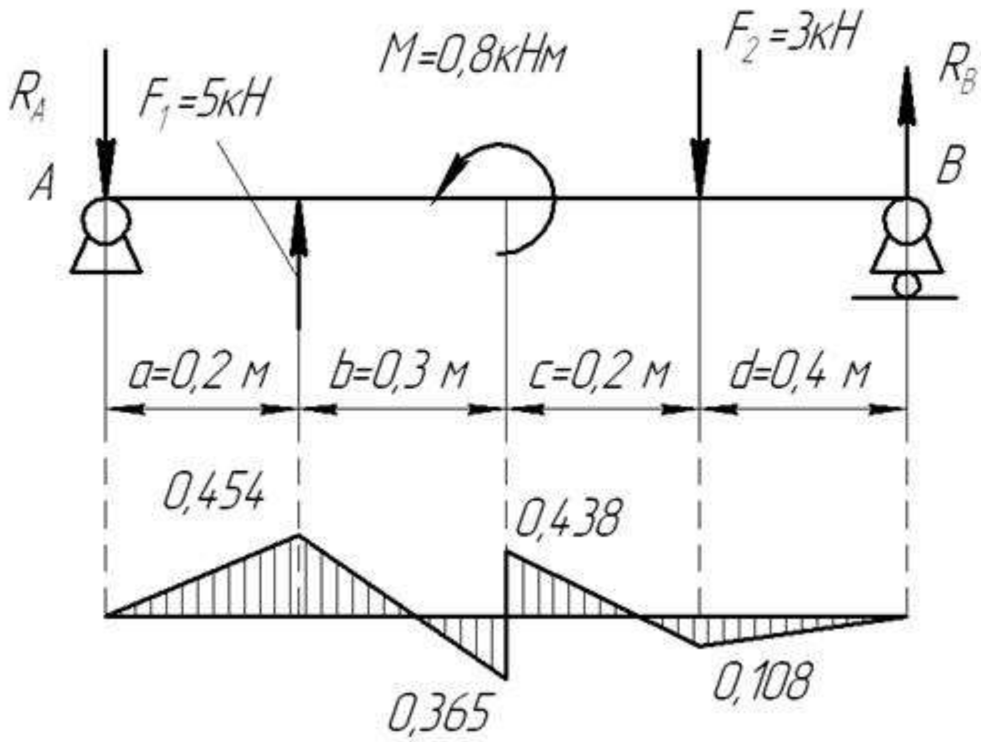
4 Построение эпюры ведется о стороны растянутых волокон;

5 Если в рассматриваемом сечении приложен внешний момент, то на эпюре наблюдается скачек на величину этого момента.

Построение эпюр изгибающих моментов рассмотрим на примере.

Пример

Проверить на прочность балку постоянного сечения, показанную на рисунке, если известно, что осевой момент сопротивления ее сечения $W = 0{,}4 \cdot 10^{-5}$ м^3, а допускаемые напряжения изгиба $[\sigma_и] = 120$ МПа.



1 Определяем реакции опор

$\sum M_A = 0$: $R_B \cdot (a+b+c+d) - F_2 \cdot (a+b+c) + M + F_1 \cdot a = 0$

$$R_B = \frac{F_2 \cdot (a+b+c) - M - F_1 \cdot a}{(a+b+c+d)} = \frac{3 \cdot 0{,}7 - 0{,}8 - 5 \cdot 0{,}2}{1{,}1} = 0{,}27$$ кН

$\sum M_B = 0$: $R_A \cdot (a+b+c+d) - F_1 \cdot (b+c+d) + M + F_2 \cdot d = 0$

$$R_A = \frac{F_1 \cdot (b+c+d) - M - F_2 \cdot d}{(a+b+c+d)} = \frac{5 \cdot 0{,}9 - 0{,}8 - 3 \cdot 0{,}4}{1{,}1} = 2{,}27$$ кН

Проверка $F_1 + R_B - F_2 - R_A = 5 + 0{,}27 - 3 - 2{,}27 = 0$

2 Разбиваем эпюру на участки

Участок 1

$$M_1 = R_a \cdot z_1 \left| \begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix} \right. = \begin{matrix} R_a \cdot a = 2{,}27 \cdot 0{,}2 = 0{,}454 \\ R_a \cdot 0 = 0 \end{matrix}$$

Участок 2

$$M_2 = R_a \cdot (a + z_2) - F_1 \cdot z_2 \left| \begin{matrix} b \\ 0 \end{matrix} \right. = \begin{matrix} R_a \cdot (a+b) - F_1 \cdot b = 2{,}27 \cdot 0{,}5 - 5 \cdot 0{,}3 = -0{,}365 \\ R_a \cdot (a+0) - F_1 \cdot 0 = 2{,}27 \cdot 0{,}2 = 0{,}454 \end{matrix}$$

Участок 3

$$M_3 = R_b \cdot z_3 \left| \begin{matrix} d \\ 0 \end{matrix} \right. = \begin{matrix} R_b \cdot d = 0{,}27 \cdot 0{,}4 = 0{,}108 \\ R_b \cdot 0 = 0 \end{matrix}$$

Участок 4

$$M_4 = R_b \cdot (d + z_4) - F_2 \cdot z_4 \left| \begin{matrix} c \\ 0 \end{matrix} \right. = \begin{matrix} R_b \cdot (d+c) - F_2 \cdot c = 0{,}27 \cdot 0{,}6 - 3 \cdot 0{,}2 = -0{,}438 \\ R_b \cdot (d+0) - F_2 \cdot 0 = 0{,}27 \cdot 0{,}4 = 0{,}108 \end{matrix}$$

Проверка $0{,}438 + 0{,}365 = 0{,}803 \approx 0{,}8$

Наибольший момент $M = 0{,}454$ Н·м

Определяем напряжения изгиба $\sigma_u = \dfrac{0{,}454}{0{,}4 \cdot 10^{-8}} = 113 МПа \le [\sigma_u] = 120 МПа$

Кручение

Кручением называют деформацию, возникающую при действии на стержень пары сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной к его оси. Стержни круглого или кольцевого сечения, работающие на кручение, называют *валами*.

При кручении в сечении деталей возникают касательные напряжения $\tau_{кр}$, которые направлены по касательной к окружности вала

Напряжения кручения определяются по формуле

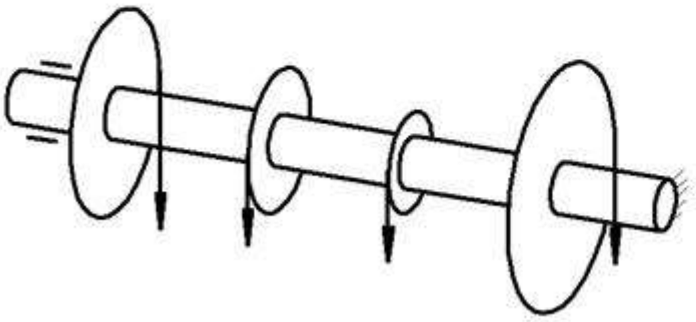
$$\tau_{кр} = \frac{T}{W_p} \le [\tau_{кр}]$$

Если вал нагружен несколькими крутящими моментами, то для нахождения наиболее нагруженного поперечного сечения строят эпюры крутящих моментов.

При построении эпюр крутящих моментов принимают следующее правило знаков: если при взгляде в торец отсеченной части вала действующий в этом сечении момент оказывается направленным против хода часовой стрелки, то он считается положительным, а если по ходу часовой стрелки - отрицательным.

Пример

На валу установлено 4 диска, к которым подвешены грузы.



Проверить на прочность вал показанный на рисунке. Известен диаметр вала d = 75 мм, диаметры дисков d_1 = 200 мм, d_2 = 150 мм, d_3 = 100 мм, d_4 = 250 мм и вес грузов F_1 = 20кН, F_1 = 40кН, F_1 = 35кН, F_1 = 40 кН допускаемое напряжение не кручение $[\tau_{кр}]$ = 25 МПа

Определим крутящие моменты на валах $T_i = F_i \cdot \frac{d_i}{2}$

$T_1 = F_1 \cdot \frac{d_1}{2} = 20 \cdot \frac{0{,}2}{2} = 2$ кН·м

$T_2 = F_2 \cdot \frac{d_2}{2} = 40 \cdot \frac{0{,}15}{2} = 3$ кН·м

$T_3 = F_3 \cdot \frac{d_3}{2} = 35 \cdot \frac{0{,}1}{2} = 1{,}75$ кН·м

$T_4 = F_4 \cdot \frac{d_4}{2} = 40 \cdot \frac{0{,}25}{2} = 5$ кН·м

Строим расчетную схему и эпюру крутящих моментов

Разбиваем вал на участки

Рассматриваем участок I: Проводим сечение I-I и отсекаем правую часть

$T_I = 0$

Рассматриваем участок II: Проводим сечение II-II и отсекаем правую часть

$T_{II} = -T_1 = -2$ кН·м

Рассматриваем участок III: Проводим сечение III-III и отсекаем правую часть

$T_{III} = -T_1 + T_2 = -2 + 3 = 1$ кН·м

Рассматриваем участок IV: Проводим сечение IV - IV и отсекаем правую часть

$T_{IV} = -T_1 + T_2 + T_3 = -2 + 3 + 1{,}75 = 2{,}75$ кН·м

Рассматриваем участок V: Проводим сечение V - V и отсекаем правую часть

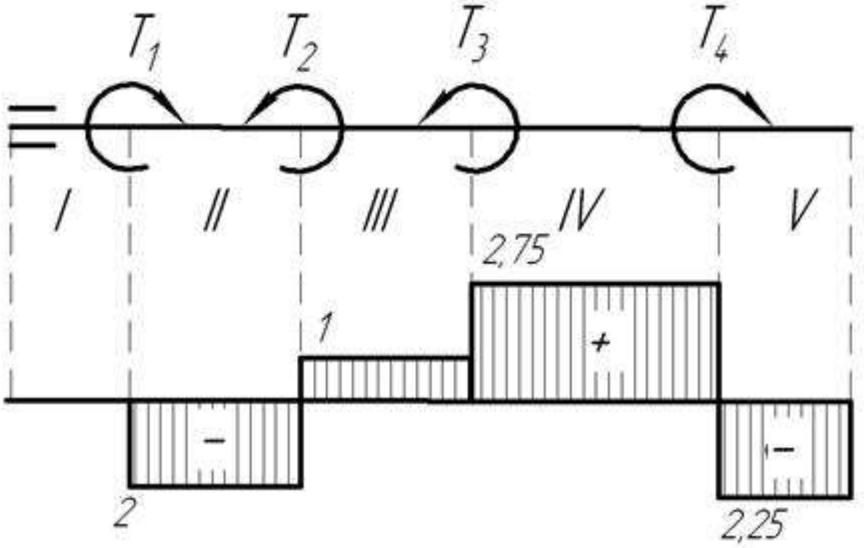
$T_V = -T_1 + T_2 + T_3 - T_4 = -2 + 3 + 1{,}75 - 5 = -2{,}25$ кН·м

По эпюре определяем наибольший момент $T_{max} = T_{IV} = 2{,}75$ кН·м

Записываем условие прочности

$$\tau_{кр} = \frac{T_{max}}{W_p} = \frac{T_{max}}{0{,}2 \cdot d^3} = \frac{2{,}75 \cdot 10^3}{0{,}2 \cdot 0{,}075^3} = 35{,}59 \cdot 10^6\ Па = 35{,}59 \cdot 10^6\ МПа$$

$$\tau_{кр} = 35{.}59\ МПа > [\tau_{кр}] = 25\ МПа$$



Лекция 24

Расчеты заклепочных соединений.

Заклепка представляет собой сплошной или полый стержень круглого сечения с головками на концах, одну из которых, называемую закладкой, выполняют на заготовке заранее, а вторую, называемую замыкающей, формируют при клепке (осадке).

Заклепочные соединения образуют постановкой заклепок в совмещенные отверстия соединяемых элементов и расклепкой с осаживанием стержня.

Основными материалами склепываемых деталей являются малоуглеродистые стали Ст.0, Ст.2, Ст.3, цветные металлы и их сплавы. Требования к материалу заклепки:

1. Высокая пластичность для облегчения процесса клепки;

2. Одинаковый коэффициент температурного расширения с материалом деталей во избежание дополнительных температурных напряжений в соединении при колебаниях температуры.
3. Однородность с материалом склепываемых деталей для предотвращения появления гальванических токов, сильно разрушающих соединения.

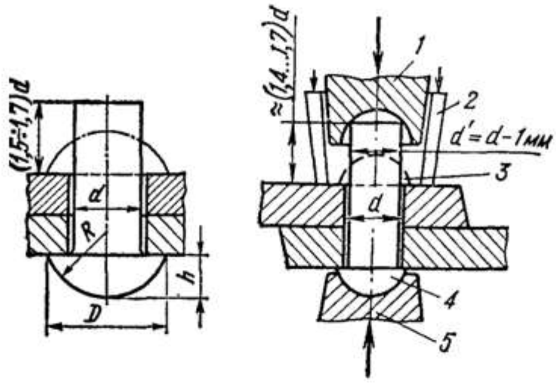


Рисунок 1

Расчет на прочность основан на следующих допущениях:

- силы трения на стыке деталей не учитывают, считая, что вся нагрузка передается только заклепками;
- расчетный диаметр заклепки равен диаметру отверстия d_0;
- нагрузки между заклепками распределяются равномерно.

Рассмотрим простейший заклепочный шов — однородный односрезный внахлестку. При нагружении соединения силами F, листы стремятся сдвинуться относительно друг друга. Запишем условие прочности заклепки на срез (разрушение стержня заклепки нахлесточного соединения происходит по сечению, лежащему в плоскости стыка соединяемых деталей)

$$\tau_{cp} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d_0^2}{4}} \le [\tau]_{cp},$$

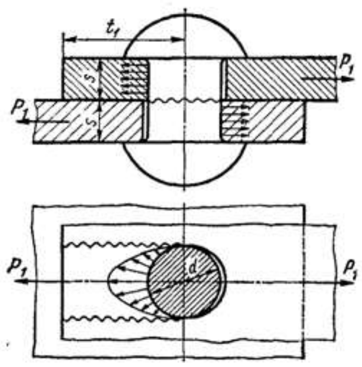


Рисунок 2

отсюда требуемый диаметр заклёпки:

$$d \ge \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau]_{cp}}}$$

В зонах контакта боковых поверхностей заклепки с листами происходит сжатие материалов. Давление в зоне контакта называют напряжением смятия.

Считая, что эти напряжения равномерно распределены по площади смятия, запишем условие прочности

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} = \frac{F}{h \cdot d} \le [\sigma]_{см}$$

Здесь $A_{см}$ — площадь смятия, условно равная площади проекции поверхности контакта на плоскость, перпендикулярную действующей силе;

$[\sigma]'_{см}$ — допускаемое напряжение на смятие для менее прочного из контактирующих материалов.

Рассмотрим многорядное двухсрезное заклепочное соединение с двумя накладками.

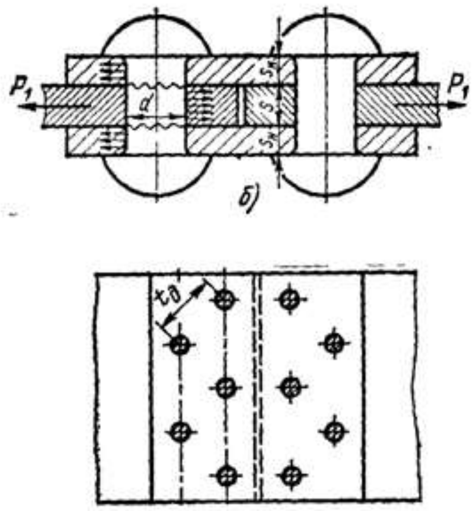


Рисунок 3

$$\tau_{ср} = \frac{F}{i \cdot \frac{\pi \cdot d_0^2}{4} \cdot z} \le [\tau]_{ср}$$

где i — число плоскостей среза одной заклепки; z — число заклепок.

Лекция 25

Практические расчеты заклепочных соединений.

Заклепка представляет собой сплошной или полый стержень круглого сечения с головками на концах, одну из которых, называемую закладкой, выполняют на заготовке заранее, а вторую, называемую замыкающей, формируют при клепке (осадке).

Заклепочные соединения образуют постановкой заклепок в совмещенные отверстия соединяемых элементов и расклепкой с осаживанием стержня.

Основными материалами склепываемых деталей являются малоуглеродистые стали Ст.0, Ст.2, Ст.3, цветные металлы и их сплавы. Требования к материалу заклепки:

4. Высокая пластичность для облегчения процесса клепки;
5. Одинаковый коэффициент температурного расширения с материалом деталей во избежание дополнительных температурных напряжений в соединении при колебаниях температуры.
6. Однородность с материалом склепываемых деталей для предотвращения появления гальванических токов, сильно разрушающих соединения.

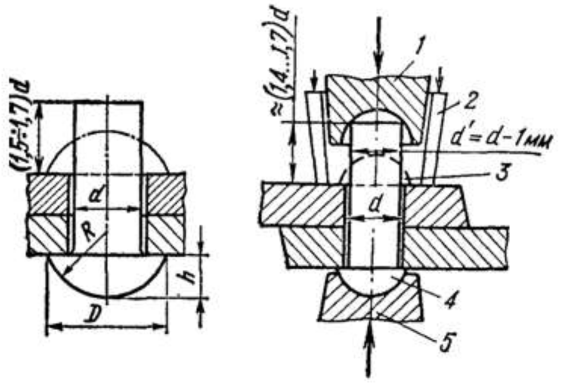


Рисунок 1

Расчет на прочность основан на следующих допущениях:

- силы трения на стыке деталей не учитывают, считая, что вся нагрузка передается только заклепками;
- расчетный диаметр заклепки равен диаметру отверстия d_0;
- нагрузки между заклепками распределяются равномерно.

Рассмотрим простейший заклепочный шов — однородный односрезный внахлестку. При нагружении соединения силами F, листы стремятся сдвинуться относительно друг друга. Запишем условие прочности заклепки на срез (разрушение стержня заклепки нахлесточного соединения происходит по сечению, лежащему в плоскости стыка соединяемых деталей)

$$\tau_{cp} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d_0^2}{4}} \le [\tau]_{cp},$$

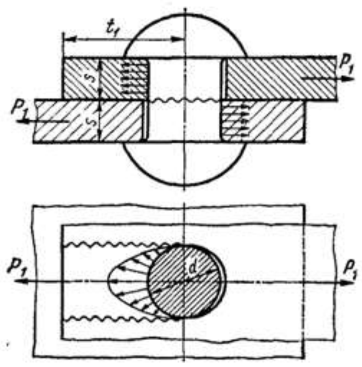


Рисунок 2

отсюда требуемый диаметр заклёпки:

$$d \ge \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau]_{cp}}}$$

В зонах контакта боковых поверхностей заклепки с листами происходит сжатие материалов. Давление в зоне контакта называют напряжением смятия.

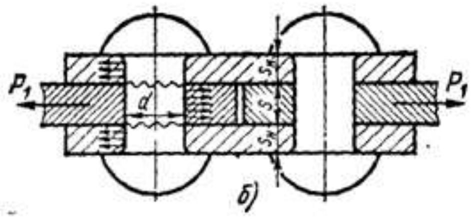
Считая, что эти напряжения равномерно распределены по площади смятия, запишем условие прочности

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} = \frac{F}{h \cdot d} \le [\sigma]_{см}$$

Здесь $A_{см}$ — площадь смятия, условно равная площади проекции поверхности контакта на плоскость, перпендикулярную действующей силе;

$[\sigma]'_{см}$ — допускаемое напряжение на смятие для менее прочного из контактирующих материалов.

Рассмотрим многорядное двух срезное заклепочное соединение с двумя накладками.



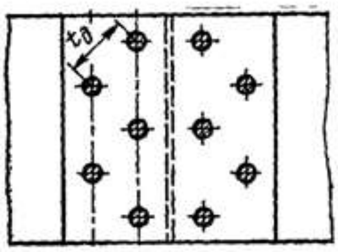


Рисунок 3

$$\tau_{cp} = \frac{F}{i \cdot \frac{\pi \cdot d_0^2}{4} \cdot z} \le [\tau]_{cp}$$

где i — число плоскостей среза одной заклепки;
z — число заклепок.

Лекция 26

1. Основные понятия и аксиомы статики

1.1. Основные понятия статики

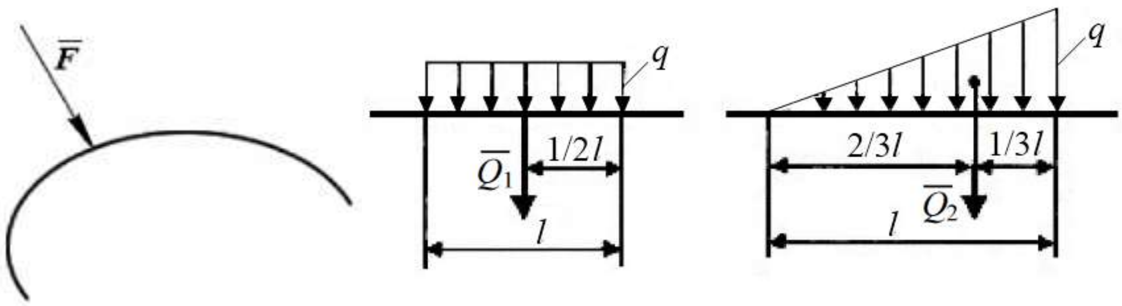
Статикой называется раздел теоретической механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия тел, находящихся под действием сил.
Силой называется физическая величина, являющаяся мерой механического взаимодействия тел. Сила – величина векторная. Она характеризуется величиной (модулем), направлением и точкой приложения. Основной единицей измерения силы является Ньютон [Н].
В статике все тела считаются *абсолютно твёрдыми*, то есть под действием сил их форма и размеры остаются неизменными.
Совокупность сил, приложенных к телу, называется *системой сил*. Если все силы лежат в одной плоскости, то такая система сил называется *плоской*. Если силы не лежат в одной плоскости, то они образуют *пространственную систему сил*.
Тело, которое из данного положения может переместиться в любое положение в пространстве, называется *свободным телом*.
Две системы сил называют *эквивалентными* одна другой, если каждая из них, действуя по отдельности, может сообщить покоящемуся телу одно и то же движение $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\right) \infty \left(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2\right)$.
Система сил, под действием которой покоящееся тело не изменяет своего состояния покоя, называется *уравновешенной* или *эквивалентной нулю* –

$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n) \infty 0$.

Сила, которая одна заменяет действие системы сил на твёрдое тело, называется *равнодействующей* – $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n) \infty \overline{R}$.

Силы могут быть *сосредоточенные* (рис. 1.1, а) и *распределенные* (рис. 1.1, б). Сила, приложенная к какой-нибудь одной точке тела, называется *сосредоточенной*.

Система *распределенных сил* характеризуется интенсивностью q, т.е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. Измеряется интенсивность в Ньютонах, деленных на метры (Н/м).



а *б*

Рис. 1.1

Распределенную нагрузку в виде прямоугольника (равномерно распределенная нагрузка) или треугольника заменяют одной силой (равнодействующей), которую прикладывают в центре тяжести площади распределения (рис. 1.1, б). Величина равнодействующей численно равна площади фигуры, образованной распределенной нагрузкой: $Q_1 = ql$, $Q_2 = \frac{1}{2}ql$.

1.2. Аксиомы статики

В основе статики лежат некоторые основные положения (*аксиомы*), которые являются обобщением многовекового производственного опыта человечества и теоретических исследований.

Аксиома 1. Если на свободное абсолютно твёрдое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис.1.2).

$$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2 \text{ и } (\overline{F}_1, \overline{F}_2) \infty 0$$

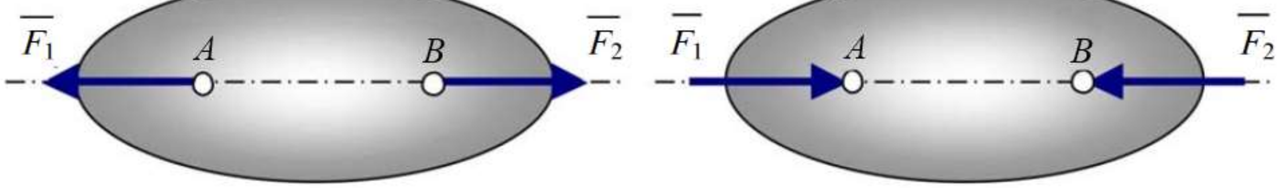


Рис.1.2

Аксиома 2. Действие данной системы сил на абсолютно твёрдое тело не изменится, если к ней прибавить или от неё отнять уравновешенную систему сил. Если $(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2) \infty 0$, то $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3) \infty (\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{Q}_1, \overline{Q}_2)$.

Следствие: действие силы на абсолютно твёрдое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль её линии действия в любую другую

точку тела.
Пусть на тело действует приложенная в точке A сила $\overline{F}$. Выберем на линии действия этой силы произвольную точку B, и приложим к ней уравновешенные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, причём $\overline{F}_1 = \overline{F}$, $\overline{F}_2 = -\overline{F}$. Так как силы $\overline{F}_2$ и $\overline{F}$ образуют уравновешенную систему сил, то согласно второй аксиоме статики их можно отбросить. В результате на тело будет действовать только одна сила $\overline{F}_1$, равная $\overline{F}$, но приложенная в точке B (рис.1.3).

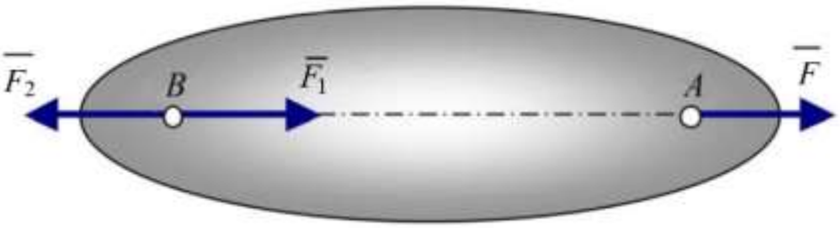


Рис.1.3

Аксиома 3. Две силы, приложенные к твёрдому телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах. Вектор $\overline{R}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, называется геометрической суммой векторов $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ (рис.1.4).

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{R}$$

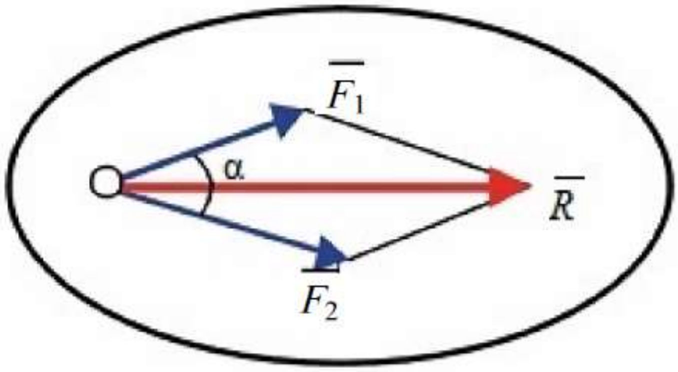


Рис.1.4

Аксиома 4. Закон равенства действия и противодействия. При всяком действии одного тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие (рис.1.5).

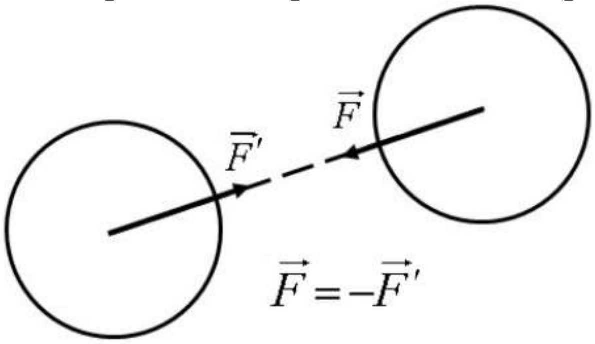


Рис.1.5

Аксиома 5. Принцип отвердевания. Равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действи-ем данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим, т.е. абсолютно твёрдым.

1.3. Виды связей и их реакции

Связями называются любые ограничения, препятствующие перемещению тела в пространстве.

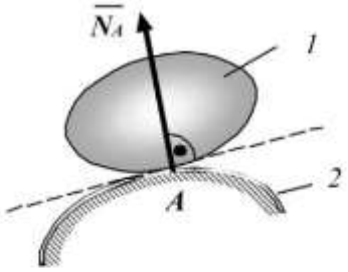
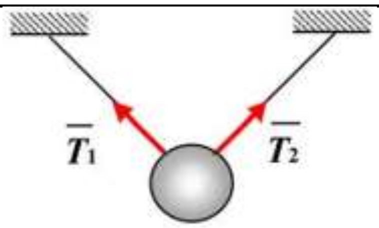
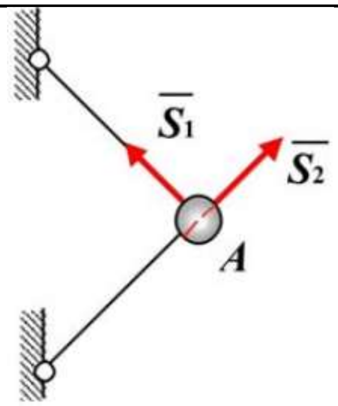
Тело, стремясь под действием приложенных сил осуществить переме-щение, которому препятствует связь, будет действовать на нее с некоторой силой, называемой *силой давления на связь*. По закону о равенстве действия и противодействия, связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой.

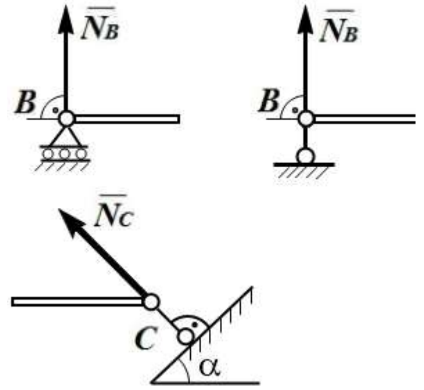
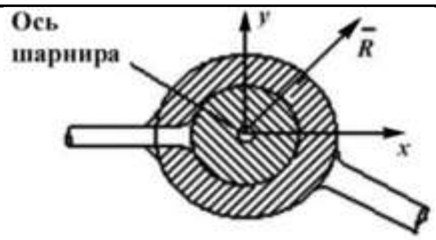
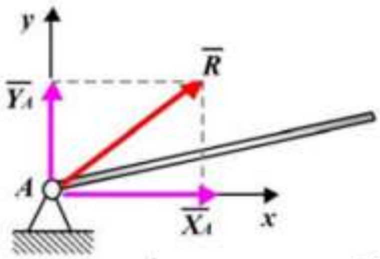
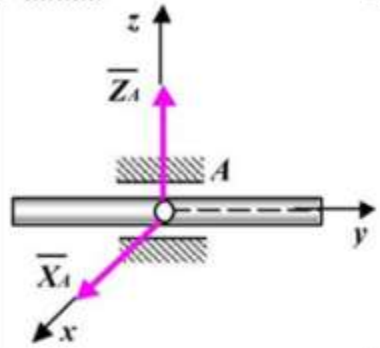
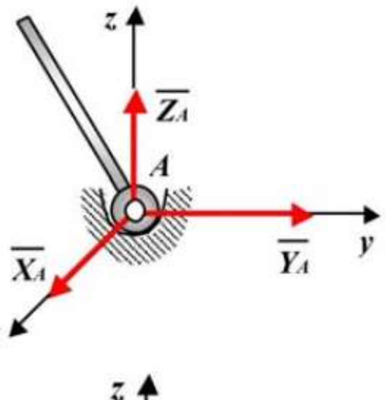
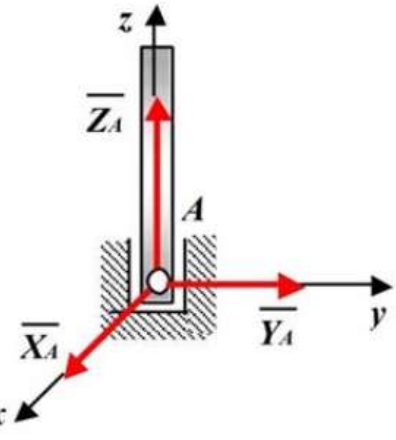
Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным перемещениям, называется *силой реакции (реакцией) связи*.

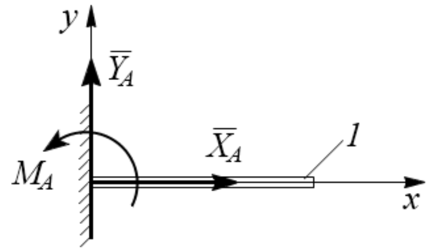
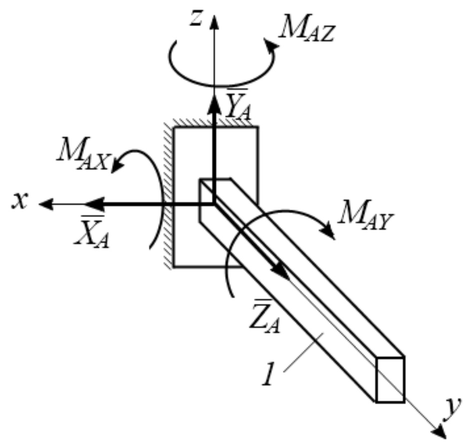
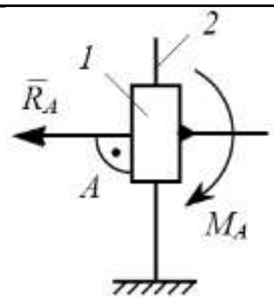
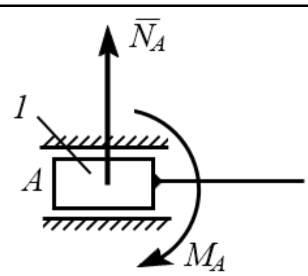
Одним из основных положений механики является *принцип освобождаемости от связей*: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями связей. Реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Основные виды связей и их реакции приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Виды связей и их реакции

№	Наименование связи	Условное обозначение
1	**Гладкая поверхность (опора)** – поверхность (опора), трением о которую данного тела можно пренебречь. При свободном опирании реакция $\vec{N}_A$ направляется перпендикулярно касательной, проведенной через точку *A* контакта тела *1* с опорной поверхностью *2*.	
2	**Нить (гибкая, нерастяжимая).** Связь, осуществлённая в виде нерастяжимой нити, не позволяет телу удаляться от точки подвеса. Поэтому реакция нити направлена вдоль нити к точке её подвеса.	
3	**Невесомый стержень** – стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой нагрузкой можно пренебречь. Реакция невесомого шарнирно прикрепленного прямолинейного стержня направлена вдоль оси стержня.	

4	**Подвижный шарнир, шарнирно-подвижная опора.** Реакция направлена по нормали к опорной поверхности.	
5	**Цилиндрический шарнир (подшипник, шарнирно-неподвижная опора).** При осуществлении связи в виде цилиндрического шарнира одно тело может поворачиваться относительно другого вокруг общей оси, называемой *осью шарнира*. Реакция $\overline{R}$ цилиндрического шарнира заранее не известна ни по величине, ни по на-правлению; может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Модуль и направление полной реакции определяют две составляющие реакции в этой плоскости.	  
6	**Сферический (шаровый) шарнир, подпятник.** Тела, соединённые с помощью сферического шарнира, могут как угодно поворачиваться относительно центра шарнира. Реакция сферического шарнира $\overline{R}$ может иметь любое направление в пространстве. Реакция сферического шарнира и подпятника (подшипника с упором) может иметь любое направление в пространстве. Три составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$ реакции определяют модуль и направление полной реакции.	 

7	**Жесткая заделка.** В плоскости жесткой заделки будут две составляющие реакции $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и момент пары сил M_A, который препятствует повороту балки *1* относительно точки *A*. Жесткая заделка в пространстве отнимает у тела 1 все шесть степеней свободы – три переме-щения вдоль осей координат и три поворота отно-сительно этих осей. В пространственной жесткой заделке будут три составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$ и три момента пар сил $M_{Ax}; M_{Ay}; M_{Az}$.	 
8	**Ползун *1* на стержне *2*.** Рекция $\overline{R}$ направлена перпендикулярно стержню *2*, момент пары сил M_A препятствует повороту ползуна *1* относительно точки *A*.	
9	**Ползун *1* в направляющих.** Рекция $\overline{N}_A$ направлена перпендикулярно направляющим, момент пары сил M_A препятствует повороту ползуна *1* относительно точки *A*.	

Контрольные вопросы

6. Что называется Статикой?
7. Что называется силой?
8. Что называется свободным телом?
9. Какие виды связей бывают?
10. Зарисовать Невесомый стержень

Лекция №27

Геометрический способ определения равнодействующей плоской системы

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется сходящейся (рис. 2.1).
Необходимо определить равнодействующую системы сходящихся сил (F1; F2; F3; …; Fn), n — число сил, входящих в систему
По следствию из аксиом статики, все силы системы можно переместить вдоль линии действия, и все силы окажутся приложенными в одной точке.

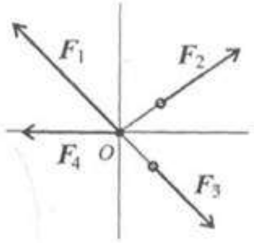


Рис. 2.1
Равнодействующая сходящихся сил
Равнодействующую двух пересекающихся сил можно определить с помощью параллелограмма или треугольника сил (4-я аксиома) (рис. 2.2).

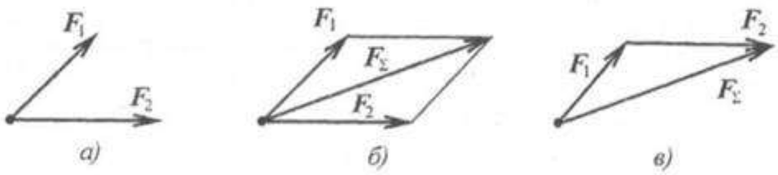


Рис. 2.2
Используя свойства векторной суммы сил, можно получить равнодействующую любой сходящейся системы сил, складывая последовательно силы, входящие в систему. Образуется многоугольник сил (рис. 2.3). Вектор равнодействующей силы соединит начало первого вектора с концом последнего.
При графическом способе определения равнодействующей векторы сил можно вычерчивать в любом порядке, результат (величина и направление равнодействующей) при этом не изменится.

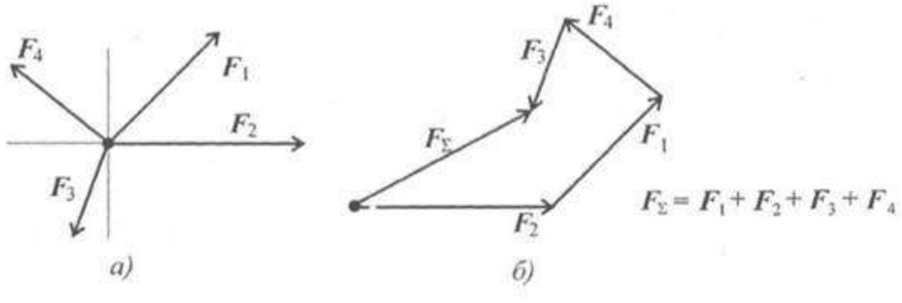


Рис. 2.3
Вектор равнодействующей направлен навстречу векторам сил-слагаемых. Такой способ получения равнодействующей называют геометрическим.
7. Геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил.

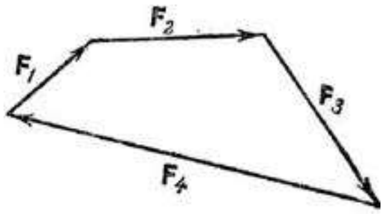


Рис. 2.3

$(F_1, F_2, \ldots, F_n) \sim R$ => для равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы их равнодействующая равнялась нулю: R = 0. Следовательно, в силовом многоугольнике уравновешенной системы сходящихся сил конец последней силы должен совпадать с началом первой силы; в этом случае говорят, что силовой многоугольник замкнут (рис. 2.3). Это условие используется при графическом решении задач для плоских систем сил. Векторное равенство R=0 эквивалентно трем скалярным равенствам: $R_x=\sum F_{kx}=F_{1x}+F_{2x}+\ldots+F_{nx}=0$; $R_y=\sum F_{ky}=F_{1y}+F_{2y}+\ldots+F_{ny}=0$; $R_z=\sum F_{kz}=F_{1z}+F_{2z}+\ldots+F_{nz}=0$; где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}– проекции силы F_k на оси, а R_x, R_y, R_z– проекции равнодействующей на те же оси. Т. е. для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно равенства нулю алгебраических сумм проекций всех сил данной системы на каждую из координатных осей. Для плоской системы сил пропадает условие, связанное с осью Z. Условия равновесия позволяют проконтролировать, находится ли в равновесии заданная система сил.

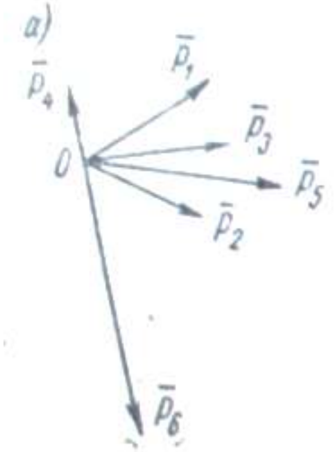
Задание для самоконтроля

5) Равнодействующая сходящихся сил (начертить)?
6) Равнодействующую двух пересекающихся сил (начертить)?
7) Вектор равнодействующей направлен навстречу векторам сил-слагаемых (начертить)?
8) Геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил. (начертить)?

Лекция №3

Проекция векторной суммы на ось. Теорема о проекции векторной суммы

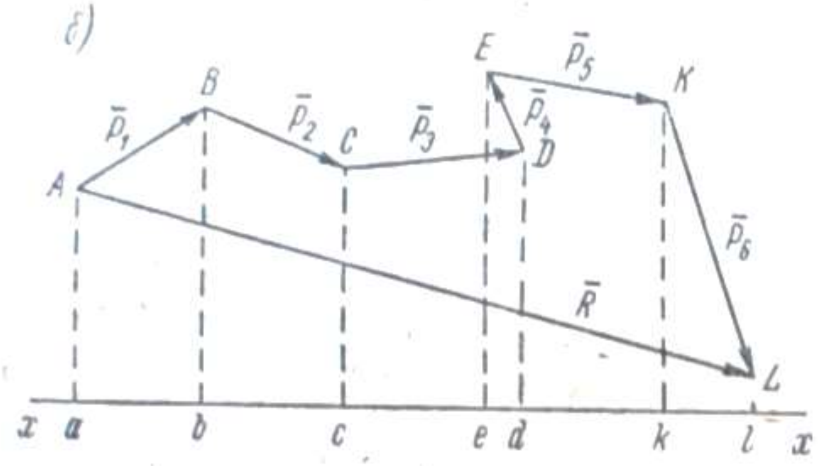
Заданы сходящиеся силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5, \bar{P}_6$ (рис. а).



Геометрическая сумма, или равнодействующая, этих сил

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_4 + \bar{P}_5 + \bar{P}_6$$

определяется замыкающей стороной $\bar{A}L = \bar{R}$ силового многоугольника (рис. б).



Спроектируем все вершины силового многоугольника ABCDEKL на ось x и обозначим их проекции соответственно a, b, c, d, e, k, l.

Проекции сил на ось x изобразятся отрезками:

P1x = ab; P2x = bc; P3x = cd;

P4x =—de; P5x = ek; P6x = kl.

Сумму проекций можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{P}_{ix} = \bar{P}_{1x} + \bar{P}_{2x} + \bar{P}_{3x} + \ldots + \bar{P}_{6} = ab + bc + cd - de + ek + rl = al$$

Так как al есть проекция равнодействующей силы $\bar{R}$ на ось x, т.е. al = Rx , то

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \ldots + P_{6x}$$

или

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix},$$

где n — число слагаемых векторов.

Следовательно, проекция векторной суммы на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

В плоскости геометрическую сумму сил можно спроектировать на две координатные оси, а в пространстве соответственно на три.

Лекция№28

Аналитический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил

Величина равнодействующей равна векторной (геометрической) сумме векторов системы сил. Определяем равнодействующую геометрическим способом. Выберем систему координат, определим проекции всех заданных векторов на эти оси (рис. 3.4а). Складываем проекции всех векторов на оси x и y.

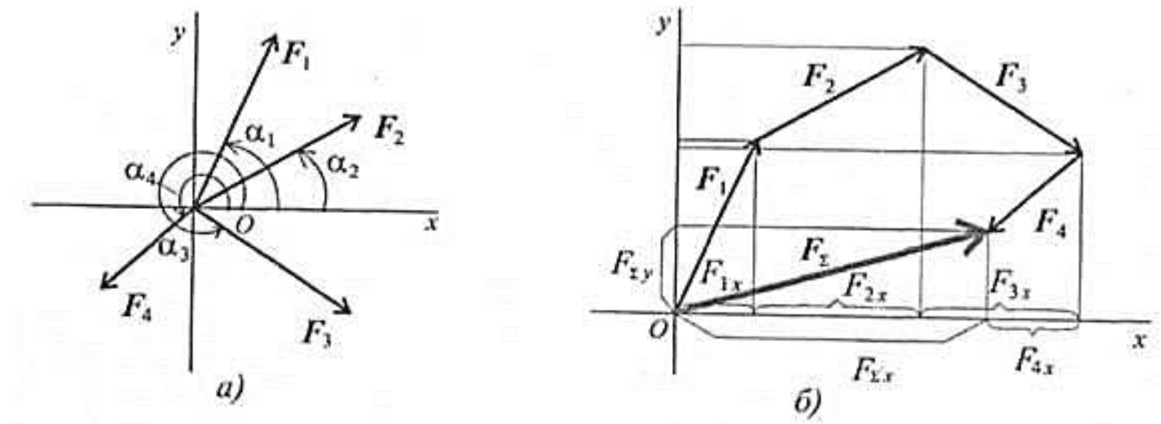


Рис.3.4

FΣч = Flx + F2x + F3x + F4x; FΣн = Fly + F2y + F3y + F4y;

Модуль (величину) равнодействующей можно найти по известным проекциям:

Направление вектора равнодействующей можно определить по величинам и знакам косинусов углов, образуемых равнодействующей с осями координат (рис. 3.5). Растяжение сжатие Продольные силы и определение напряжений

$$\cos\alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_{\Sigma}}; \quad \cos\alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_{\Sigma}}$$

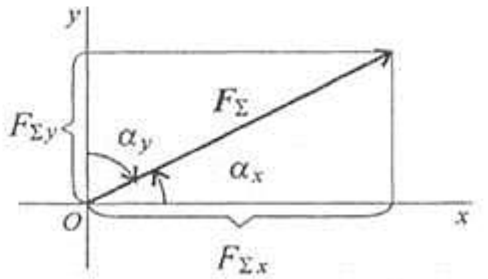


Рис.3.5

Рис.3.5

Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме

Исходя из того, что равнодействующая равна нулю, получим:

FΣ = 0.

Условия равновесия в аналитической форме можно сформулировать следующим образом:

Плоская система сходящихся сил находится в равновесии, если алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равна нулю.

Система уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил:

В задачах координатные оси выбирают так, чтобы решение было наиболее простым. Желательно, чтобы хотя бы одна неизвестная сила совпадала с осью координат.

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства механического движение тел, без учета их масс и действующих на них сил

Контрольные вопросы

1)Что называется Кинематикой?

2) Определение аналитический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил?

3)Как найти модуль величину равнодействующей?

Лекция 5

Рациональный выбор координатных осей.

Перейдем к рассмотрению аналитического (численного) метода решения задач статики. Этот метод основывается на понятии о проекции силы на ось. Как и для всякого другого вектора, проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы. Проекция имеет знак плюс, если перемещение от ее начала к концу происходит в положительном направлении оси, и знак минус - если в отрицательном. Из определения следует, что проекции данной силы на любые параллельные и одинаково направленные оси равны друг другу. Этим удобно пользоваться при вычислении проекции силы на ось, не лежащую в одной плоскости с силой.

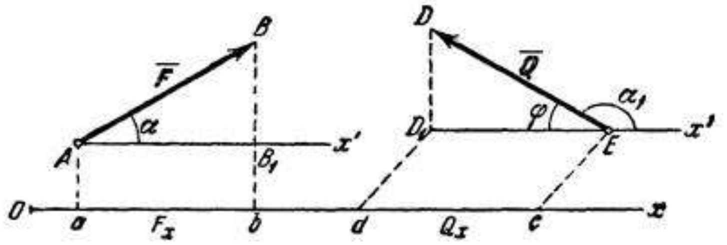


Рис. 1

Обозначать проекцию силы $\bar{F}$ на ось Ох будем символом Fx. Тогда для сил, изображенных на рис.1, получим:
$F_x = AB_1 = ab, \;\; Q_x = -ED_1 = -ed.$
Но из чертежа видно, что $AB_1 = Fcos\alpha, \;\; ED_1 = Qcos\beta = -Qcos\alpha_1.$
Следовательно,
$F_x = Fcos\alpha, \;\; Q_x = -Qcos\varphi = Qcos\alpha_1,$
т. е. проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси. При этом проекция будет положительной, если угол между направлением силы и положительным направлением оси - острый, и отрицательной, если этот угол - тупой; если сила перпендикулярна к оси, то ее проекция на ось равна нулю.

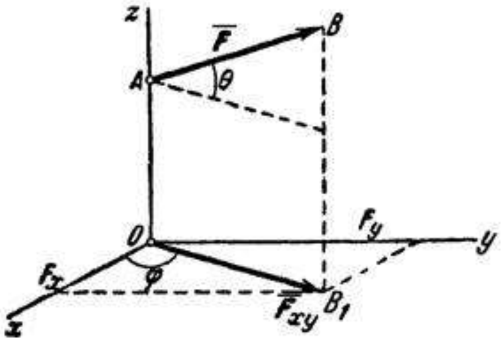


Рис.2

Проекцией силы $\bar{F}$ на плоскость Оху называется вектор $F_{xy} = OB_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\bar{F}$ на эту плоскость (рис. 2). Таким образом, в отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости Оху. По модулю $F_{xy} = Fcos\theta$, где θ — угол между направлением силы $\bar{F}$ и ее проекции F_{xy}.
В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось бывает удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось.
Например, в случае, изображенном на рис. 2, найдем таким способом, что
$F_x = F_{xy} \cdot cos\varphi = F \cdot cos\theta \cdot cos\varphi,$
$F_y = F_{xy} \cdot sin\varphi = F \cdot cos\theta \cdot sin\varphi$

Геометрический способ сложения сил.
Решение многих задач механики связано с известной из векторной алгебры операцией сложения векторов и, в частности, сил. Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, будем называть главным вектором этой системы сил. Понятие о

геометрической сумме сил не следует смешивать с понятием о равнодействующей, для многих систем сил, как мы увидим в дальнейшем, равнодействующей вообще не существует, геометрическую же сумму (главный вектор) можно вычислить для любой системы сил.

Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ (рис. 3, а), откладываем от произвольной точки O (рис. 3, б) вектор Oa, изображающий в выбранном масштабе силу F1, от точки a откладываем вектор $\overline{ab}$, изображающий силу F2, от точки b откладываем вектор bc, изображающий силу F3 и т. д.; от конца m предпоследнего вектора откладываем вектор mn, изображающий силу Fn. Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\overline{On} = \bar{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:
$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n$ или $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$.

От порядка, в котором будут откладываться векторы сил, модуль и направление $\bar{R}$ не зависят. Легко видеть, что проделанное построение представляет собою результат последовательного применения правила силового треугольника.

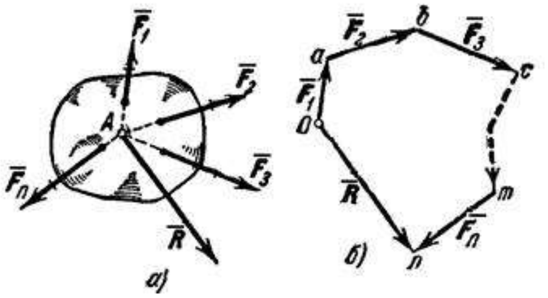


Рис.3

Фигура, построенная на рис. 3,б, называется силовым (в общем случае векторным) многоугольником. Таким образом, геометрическая сумма или главный вектор нескольких сил изображается замыкающей стороной силового многоугольника, построенного из этих сил (правило силового многоугольника). При построении векторного многоугольника следует помнить, что у всех слагаемых векторов стрелки должны быть направлены в одну сторону (по обводу многоугольника), а у вектора $\bar{R}$ - в сторону противоположную.

Равнодействующая сходящихся сил. При изучении статики мы будем последовательно переходить от рассмотрения более простых систем сил к более сложным. Начнем с рассмотрения системы сходящихся сил.

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называемой центром системы (см. рис. 3, а).

По следствию из первых двух аксиом статики система сходящихся сил, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (на рис. 3, а в точке A).

Последовательно применяя аксиому параллелограмма сил, приходим к выводу, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке их пересечения. Следовательно, если силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ сходятся в точке A (рис. 3, а), то сила, равная главному вектору $\bar{R}$, найденному построением силового многоугольника, и приложенная в точке A, будет равнодействующей этой системы сил.

Примечания.

1. Результат графического определения равнодействующей не изменится, если силы суммировать в другой последовательности, хотя при этом мы получим другой силовой многоугольник - отличный от первого.

2. Фактически силовой многоугольник, составленный из векторов сил заданной системы, является ломаной линией, а не многоугольником в привычном смысле этого слова.

3. Отметим, что в общем случае этот многоугольник будет пространственной фигурой, поэтому графический метод определения равнодействующей удобен только для плоской системы сил.

Лекция 28.29

Эквивалентные пары.

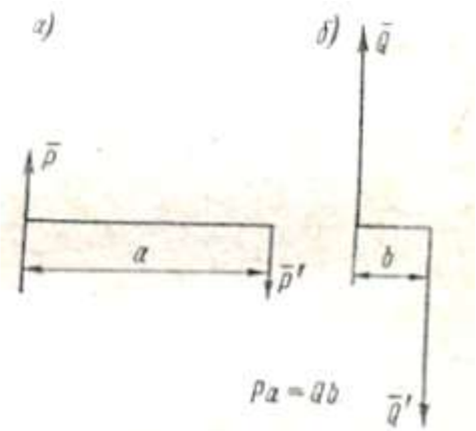
В соответствии с определением **эквивалентных** систем сил (см. — здесь), две пары сил считают **эквивалентными** в том случае, если после **замены** одной пары другой парой **механическое состояние тела не изменяется**, т. е. **не изменяется движение** тела или **не нарушается его равновесие**.

Эффект действия пары сил на твердое тело **не зависит от ее положения в плоскости**. Таким образом, пару сил **можно переносить в плоскости ее действия в любое положение**.

Рассмотрим еще одно **свойство** пары сил, которое является **основой** для **сложения** пар.

Не нарушая состояния тела, **можно как угодно изменять величины сил и плечо пары**, только бы **момент пары** оставался **неизменным**.

Рассмотрим **пару** сил ***PP'*** плечом ***a*** (рис. ***a***).



Заменим эту пару **новой** парой ***QQ'*** с плечом ***b*** (рис. ***б***) так, чтобы **момент пары остался тем же.**

Момент **заданной** пары сил $M_1 = Pa$. Момент **новой** пары сил $M_2 = Qb$. По определению пары сил **эквивалентны**, т. е. производят **одинаковые** действия, если их моменты **равны**.

Если, **изменив величину сил и плечо новой пары**, мы **сохраним равенство их моментов** $M_1 = M_2$ или $Pa = Qb$, то состояние тела от такой замены **не нарушится**.

Итак, вместо заданной пары ***PP'*** с плечом ***a*** мы получили **эквивалентную** пару ***QQ'*** с плечом ***b***.

Лекция 30

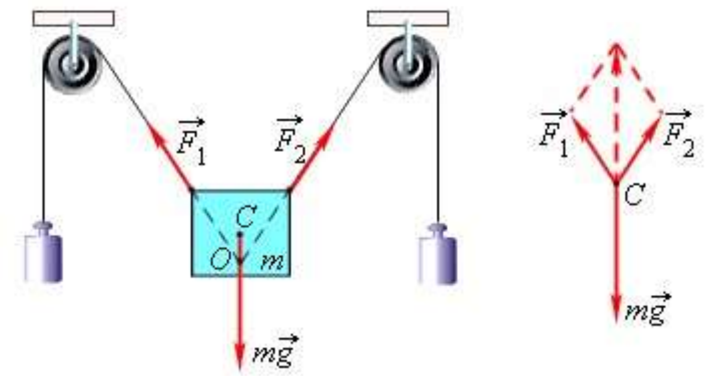
Условие равновесия

Тело находится в состоянии покоя (или движется равномерно и прямолинейно), если векторная сумма всех сил, действующих на него, равна нулю. Говорят, что силы уравновешивают друг друга. Когда мы имеем дело с телом определенной геометрической формы, при вычислении равнодействующей силы можно все силы прикладывать к центру масс тела.

Условие равновесия тел

Чтобы тело, которое не вращается, находилось в равновесии, необходимо, чтобы равнодействующая всех сил, действующий на него, была равна нулю.

→F=−→F1+−→F2+..+−→Fn=0F→=F1→+F2→+..+Fn→=0.



На рисунке выше изображено равновесие твердого тела. Брусок находится в состоянии равновесия под действием трех действующих не него сил. Линии действия сил −→F1F1→ и −→F2F2→ пересекаются в точке OO. Точка приложения силы тяжести - центр масс тела CC. Данные точки лежат на одной прямой, и при вычислении равнодействующей силы −→F1F1→, −→F2F2→ и m→gmg→ приводятся к точке CC.

Равновесие вращающегося тела. Правило моментов

Условия равенства нулю равнодействующей всех сил недостаточно, если тело может вращаться вокруг некоторой оси.

Плечом силы dd называется длина перпендикуляра, проведенного от линии действия силы к точке ее приложения. Момент силы MM - произведение плеча силы на ее модуль.

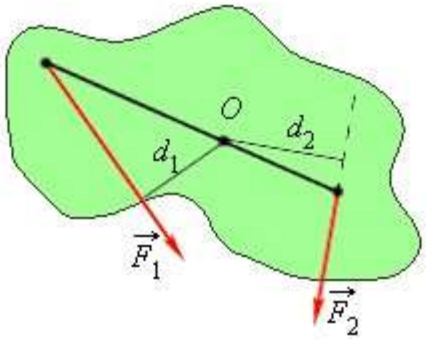
M=d·FM=d·F.

Момент силы стремится повернуть тело вокруг оси. Те моменты, которые поворачивают тело против часовой стрелки, считаются положительными. Единица измерения момента силы в международной системе СИ - 1 *Ньютон*/*метр*1 Ньютонметр.

Определение. Правило моментов

Если алгебраическая сумма всех моментов, приложенных к телу относительно неподвижной оси вращения, равна нулю, то тело находится в состоянии равновесия.

M1+M2+..+Mn=0M1+M2+..+Mn=0



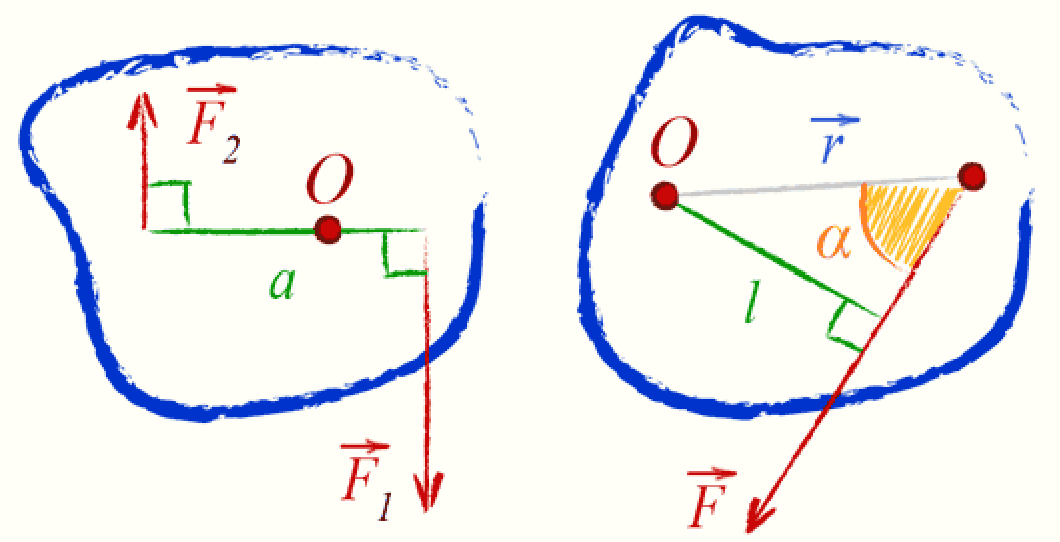
Важно!

В общем случае для равновесия тел необходимо выполнение двух условий: равенство нулю равнодействующей силы и соблюдение правила моментов.

Лекция 31

Моменты сил относительно точки.

Сила приложенная к твердому телу, которое может вращаться вокруг некоторой точки, создает момент силы. Действие момента силы аналогично действию пары сил.



Момент силы относительно некоторой точки — это векторное произведение *силы* на *кратчайшее расстояние* от этой точки до линии действия силы.
Единица СИ момента силы:

1. $[M]$= *Ньютон · метр*

Если:
M — момент силы (Ньютон · метр),
F — Приложенная сила (Ньютон),
r — расстояние от центра вращения до места приложения силы (метр),
l — длина перпендикуляра, опущенного из центра вращения на линию действия силы (метр),
α — угол, между вектором силы *F* и вектором положения *r*,
То

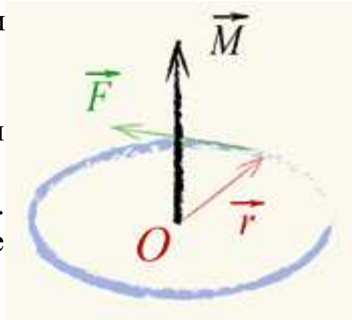
2. $M = F \cdot l = F \cdot r \cdot sin(\alpha)$

или в виде векторного произведения

3. $\vec{M}$
=

→
F
·
→
r

Момент силы — *аксиальный вектор*. Он направлен вдоль оси вращения.



Направление вектора момента силы определяется правилом буравчика, а величина его равна *М*.
Аксиальные векторы не связаны с определенной линией действия. Их можно перемещать в пространстве параллельно самим себе (свободные векторы).

Лекция 32

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ ПРИВЕДЕНИЕ СИЛЫ К ТОЧКЕ

Плоская система произвольно расположенных сил — это система сил, линии действия которых расположены в одной плоскости произвольным образом.
Рассмотрим случай переноса силы в произвольную точку, не лежащую на линии действия силы.
Теорема. Действие силы на тело не изменится, если ее перенести параллельно самой себе в любую точку тела, присоединяя при этом некоторую пару сил.
Доказательство. Пусть к телу в некоторой точке *К* приложена сила *F* (рис. 1). Перенесем в произвольную точку *О* того же тела силу *F = F'* параллельно данной силе. Но чтобы равновесие не изменилось, к точке *О* надо приложить равную по величиной противоположно направленную силу *F''* (см. рис. 1).

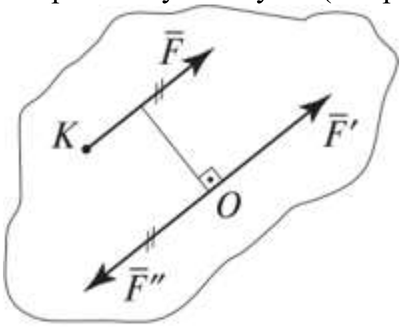


Рис. 1

Силы *F'* и *F''* взаимно уравновешиваются, и поэтому действие на тело одной данной силы *F* эквивалентно действию на него системы трех сил *F, F'* и *F''*. При этом сила *F'* может рассматриваться как сила *F,* перенесенная параллельно своему начальному направлению в точку *О,* а силы *F''* и *F* образуют пару, которую мы должны присоединить при параллельном переносе силы из точки *К* в точку *О,* чтобы сохранить действие силы при этом переносе. Теорема доказана.
Пару *(F'' F),* образующуюся при переносе точки приложения силы *F,* называют присоединенной парой.

ПРИВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ОДНОМУ ЦЕНТРУ. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ

Рассмотрим систему нескольких сил *F*р *F*2, ..., *F* , расположенных как угодно на плоскости. Возьмем в плоскости действия сил произвольную точку *О* (рис. 1.4.2, *а),* назовем ее центром приведения. Перенесем все_ данные силы в эту точку. Мы получим систему сил *F[, F'*2, ..., *F'n,* приложенных в этой точке, и систему пар сил *(Fy, F''), (F*2*, F*2*), ..., (Fn, F'').* Приложенные в точке *О* силы *F, F*2,..., *F'n* можно сложить по правилу многоугольника и, следовательно, заменить одной эквивалентной им равнодействующей силой *F у* равной их геометрической сумме. Так как силы Fj, F_2,..., F'_n геометрически равны данным силам Fр F_v ..., F_n, то

$$\bar{F}_{\text{гл}} = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2 + \ldots + \bar{F}'_n = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k.$$

Вектор F $у$ равный геометрической сумме всех сил данной системы, является главным вектором этой системы (рис. 2, *б),*

$$\bar{F}_{\text{гл}} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k.$$

Модуль и направление главного вектора можно найти по формуле равнодействующей

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_{\text{гл}\,x}^2 + F_{\text{гл}\,y}^2}.$$

системы сходящихся сил:

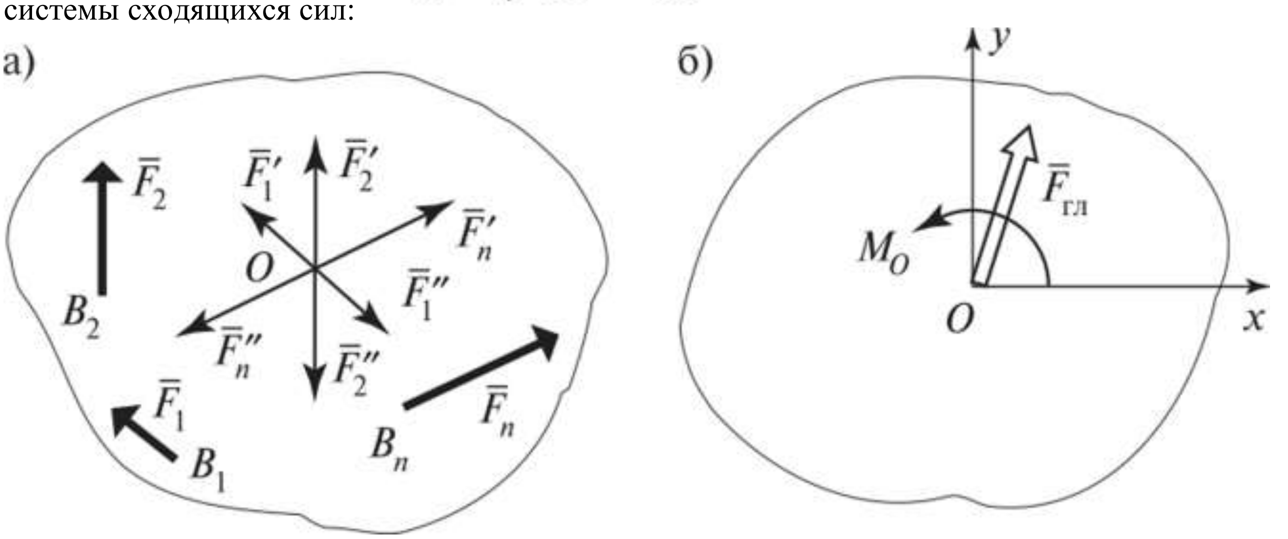


Рис. 2

Все присоединенные пары *(F_v F''), (F_2, F_2), ..., (F_n, F'')* можно сложить по правилу сложения пар сил, лежащих в одной плоскости, и, следовательно, заменить их одной результирующей парой. Моменты этих пар равны моментам данных сил Fр F_2, ..., F_n относительно центра приведения *O,* т.е.

$$M(\bar{F}_1, \bar{F}''_1) = M_O(\bar{F}_1),$$
$$M(\bar{F}_2, \bar{F}''_2) = M_O(\bar{F}_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M(\bar{F}_n, \bar{F}''_n) = M_O(\bar{F}_n).$$

Отсюда найдем момент результирующей пары M_n*:*

$$M_O = M_O(\bar{F}_1) + M_O(\bar{F}_2) + \ldots + M_O(\bar{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} M_O(\bar{F}_k).$$

Алгебраическая сумма моментов относительно какой-то точки *O* всех данных сил, расположенных произвольным образом на плоскости, называется главным моментом данной плоской системы относительно этой точки (см. рис. 2, *б):*

$$M_O = \sum_{k=1}^{n} M_O(\bar{F}_k).$$

Произвольная точка тела, в которую переносятся параллельно все силы системы, называется точкой (или центром) приведения. Итак, полученный результат можно сформулировать

следующим образом: всякую плоскую систему сил всегда можно заменить одной силой, равной главному вектору системы, приложенной в произвольной точке *O*, и парой, момент которой равен главному моменту данной системы сил относительно этой точки.
Главный вектор системы не является равнодействующей силой для данной системы сил, так как он заменяет данную систему сил вместе с присоединенной парой. Модуль и направление главного вектора не зависят от выбора точки приведения, так как все силы переносятся параллельно их начальному направлению и силовой многоугольник во всех случаях будет одним и тем же.

Величина и знак главного момента зависят от центра приведения, так как с изменением центра приведения изменяются моменты сил относительно этого центра, а следовательно, и их алгебраическая сумма. Поэтому, задавая главный момент, нужно указывать, относительно какой точки он вычислен.

Лекция 33

Главный вектор и главный момент плоской системы сил

В *аналитическом методе* для вычисления главного вектора и главного момента используются проекции сил F_{ix}, F_{iy} и координаты x_i, y_i точек их приложения.
Модуль R главного вектора плоской системы сил и его направляющие косинусы e_x, e_y вычисляются по следующим формулам:

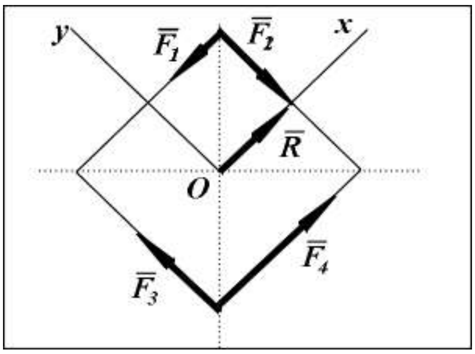
$$R = (R_x + R_y)^{1/2};\ e_x = R_x / R;\ e_y = R_y / R;\ R_x = \sum F_{ix};\ R_y = \sum F_{iy}.$$

Здесь в суммировании проекций можно не включать силы, образующие пары сил ($\mathbf{F}_k$, $\mathbf{F}'_k$), $\mathbf{F}_k = -\mathbf{F}'_k$, поскольку суммы проекций таких двух сил на любую ось равны нулю.
Алгебраический главный момент L_O плоской системы сил относительно центра O (начала координатных осей) вычисляется по формуле:

$$L_O = \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) + \sum M_k.$$

Здесь во вторую сумму выделены алгебраические моменты M_k пар сил ($\mathbf{F}_k$, $\mathbf{F}'_k$).
В случаях, когда плечи h_i всех сил определяются достатосно просто (например, если силы параллельны координатным осям Ox и Oy), величина L_O может быть вычислена по формуле:

$$L_O = \sum \pm F_i h_i + \sum M_k.$$



. К вершинам квадрата со стороной a = 0.5(м) приложены силы: $F_1 = 4$(Н); $F_2 = F_3 = 8$(Н); $F_4 = 12$(Н). Определить главный вектор этой системы сил и ее алгебраический главный момент относительно центра квадрата O.
Решение. Введем координатную систему Oxy, оси которой параллельны сторонам квадрата (в такой системе координат расчеты проводятся наиболее простым образом).
Силы $\mathbf{F}_2$,$\mathbf{F}_3$ образуют пару сил с моментом $M_{23} = -F_2 \cdot a = -4$(Н·м) и их можно не учитывать при вычислении проекций главного вектора $\mathbf{R}$:

$$R_x = F_{1x} + F_{4x} = -F_1 + F_4 = -4 + 12 = 8(\text{Н});$$

$$R_y = F_{1y} + F_{4y} = 0.$$

Вычисление алгебраического главного момента L_O проведем с использованием плеч сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_4$, равных половине длины стороны квадрата (a/2):

$L_O = F_1 \cdot a/2 - F_4 \cdot a/2 + M_{23} = 1 - 4 + 3 = 0$.

Таким образом, для заданной системы сил ее главный вектор равен по модулю R = 8(Н) и направлен вдоль оси Ох, а ее алгебраический главный момент $L_O = 0$.

Замечание. В случае, когда $L_O = 0$, главный вектор **R** является *равнодействующей силой* заданной системы сил.

Лекция 34

Уравнения равновесия

Проекция силы на ось - характеризует действие этой силы вдоль этой оси.

То есть Проекция силы на ось Ох (Px=∑Xi) характеризует действие этой силы вдоль оси Ох.

А проекция силы на ось Оу (Py=∑Yi) характеризует действие этой силы вдоль оси Оу.

И если сумма проекций всех сил на ось Ох равна нулю (∑Xi=0)– значит действие этих сил вдоль этой оси Ох нет , силы вдоль этой оси друг друга уравновешивают.

И если сумма проекций всех сил на ось Оу равна нулю (∑Yi=0)- значит действие этих сил вдоль этой оси Оу нет , силы друг друга вдоль этой оси Оу уравновешивают.

Вращательное действие силы относительно точки О характеризует момент этой силы относительно этой точки О (M0(P)=0) .

И если сумма моментов всех сил относительно точки О равно нулю (∑MO=0), то вращательного действия всех этих сил на тело относительно точки О нет, они его не производят, или их вращательные действия их взаимно уравновешены.

Теперь - если проекции всех сил на оси Ох и Оу равны нулю , и сумма моментов всех сил относительно любой - какой угодно - точки равны нулю, то тело находится в равновесии.

∑X=0∑Y=0∑MA=0

Это и есть условия равновесия тела под действием произвольной плоской системы тел:

Система сил, действующих на тело, называется сходящейся, если линии действия этих сил пересекается в одной точке.

Условие равновесия системы сходящихся сил

Для того, чтобы система сходящихся сил была уравновешенной, то есть под действием ее тело будет находится в равновесии - условие равновесия системы сходящихся сил, может быть записано :

∑Xi=0∑Yi=0

Или другими словами - для плоской системы сходящихся сил, лежащих в плоскости Oxy, соответствующие уравнения равновесия примут вид:

∑Xi=0∑Yi=0

Проекция силы на ось

Определение. Проекцией силы PP→ на ось Ox называется взятая с знаком ± длина отрезка этой оси, заключенная между проекциями на неё начала и конца вектора силы.

Эту проекцию обычно обозначают как Px или X. В соответствии с определением она равна:

PPPx=X=|P→|·cos(P→,i→)=P·cosα

PPPy=Y=|P→|·cos(P→,j→)=P·sinα

, где i→ – единичный вектор оси /Ox/, а α – угол между ним и силой PP→ (Рис.1).

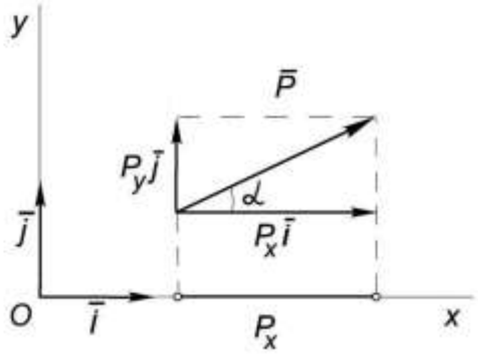


Рис.1

Таким образом:

еслиPx>0, если 0≤α<π2

еслиPx=0, если α=π2

еслиPx<0, если π2<α≤π

Проекция силы на ось равна нулю, если сила перпендикулярно оси.
Аналогично находится проекция силы P на ось Oy.
Вектор $PP\rightarrow$ может быть выражен:
$PP\rightarrow=Px\cdot i\rightarrow+Py\cdot j\rightarrow=X\cdot i\rightarrow+Y\cdot j\rightarrow$
А равнодействующая плоской системы двух сходящихся сил равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.
Модуль и направление искомого вектора силы P можно найти по формулам:
$PPP=X2+Y2\cos(P\rightarrow,i\rightarrow)=XP\cos(P\rightarrow,j\rightarrow)=YP$
Момент силы относительно центра
Приложим в точке A силу P и выясним - чем определяется момент силы относительно точки O, который характеризует вращательное действие этой силы относительно точки O (Рис.2).

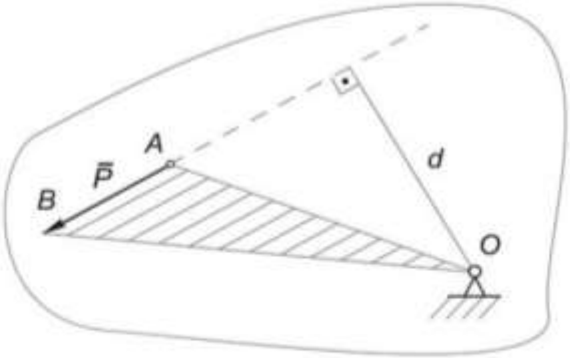


Рис.2
Очевидно, что воздействие силы на тело будет зависеть не только от ее величины, но и от того, как она направлена, и в конечном итоге будет определяться ее моментом относительно центра O.
Рассмотренное определение момента силы подходит только для плоской системы сил.
Определение 1. Моментом силы P относительно центра O называется взятое со знаком ± произведение модуля силы на ее плечо – то есть длину перпендикуляра, опущенного из моментной точки на линию действия силы.
Правило знаков: момент силы считается положительным, если сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки и отрицательным, если она вращает тело по ходу часовой стрелки.
В соответствии с данным определением момент силы численно равен удвоенной площади треугольника OAB, построенного на векторе силы P с вершиной в моментной точке: $M0(P)=P\cdot d=2S\Delta OAB$.
Отметим, что момент силы относительно точки O равен нулю, если линия действия силы проходит через моментную точку.
Уравнения равновесия плоской системы сил
Уравнения равновесия плоской системы сил, которые можно записать в трех различных формах:
Первая форма:
$\sum X=0\sum Y=0\sum MA=0$
Вторая форма:
$\sum MA=0\sum MB=0\sum Y=0$, где ось Oy не перпендикулярна отрезку AB
Третья форма:
$\sum MA=0\sum MB=0\sum MC=0$, где точки A, B и C не лежат на одной прямой.
Таким образом, любая из этих трех форм эквивалентна условию равновесия плоской системы сил и наоборот.
Центр тяжести
Центр тяжести - точка, через которую проходит равнодействующая сил тяжести при любом пространственном расположении тела.
Если тело имеет ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит там.
Центр тяжести квадрата и прямоугольника - точка пересечения его диагоналей.
Центр тяжести круга - в его центре.
Центр тяжести треугольника - в точке пересечения медиан.

Лекция 35

Определение главного вектора и главного момента

Можно сказать, что главный вектор – это вектор, представляющий собой геометрическую сумму всех заданных сил, перенесенных параллельно самим себе в точку О, называемую центром приведения.

Модуль главного вектора можно определить по его проекциям Rx и Ry на оси координат Ох и Оу по формуле:

Ro = Rx + R y

где на основании теоремы о проекции равнодействующей на ось:

Rx = F1x + F2x +…+ Fnx;

Ry = F1y + F2y +…+ Fny.

Направление главного вектора определяется из выражений sin α = Ry/R и cos α = Rx/R, где α – угол между главным вектором и положительным направлением оси x. Модуль главного момента системы получим, используя уравнения:

M = M1 + M2 + M3 +…+ Mn = Mo(F1) + Mo(F2) + Mo(F3) +…+ Mo(Ffi).

Отсюда модуль главного момента системы равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения. Если за центр приведения принять другую точку, то нетрудно убедиться, что модуль и направление главного вектора будут такими же, т. е. они не зависят от выбора центра приведения. Что же касается главного момента системы, то его модуль и направление зависят от выбора центра приведения, так как при изменении положения центра приведения изменяются плечи сил заданной системы, а значит, и их моменты. Следует также отметить, что главный вектор не является равнодействующей системы, хотя по модулю и направлению совпадает с ней. Рассмотренный случай приведения системы, когда Ro ≠ 0 и M ≠ 0, является общим. Возможны следующие частные случаи приведения:

а) главный вектор оказался равным нулю, а главный момент не равен нулю (Ro = 0, M ≠ 0), т. е. система эквивалентна одной только паре);

б) главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю (Ro ≠ 0, M = 0), т. е. система сводится к одной силе, и очевидно, что главный вектор есть равнодействующая этой системы;

в) главный вектор и главный момент системы равны нулю (Ro = 0 и M = 0) – система находится в равновесии.

Равнодействующая плоской системы сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей

Рассмотрим более подробно общий случай приведения системы, когда Ro ≠0 и M ≠ 0. Можно убедиться, что в этом случае система имеет равнодействующую, приложенную в некоторой точке, не совпадающей с центром приведения. Пусть данная система сил приведена к главному вектору Ro , приложенному в точке О, и главному моменту системы M (пара RR'). Представим последний в виде пары сил, у которых модуль равен модулю главного вектора системы. Одну из сил пары R' приложим в центре приведения О и направим противоположно главному вектору системы. Тогда точку приложения второй силы пары R найдем, если вычислим плечо пары:

Силы Ro и R', равные и противоположно направленные, взаимно уравновешиваются, их можно отбросить согласно II аксиоме статики. Остается одна сила R = Ro, заменившая собой заданную систему сил. Она и является равнодействующей этой системы. Таким образом, мы доказали, что в общем случае, когда главный вектор и главный момент системы не равны нулю, система имеет равнодействующую, равную по модулю и направленную параллельно главному вектору в ту же сторону. Модуль момента равнодействующей R относительно центра приведения О:

Mo(R) = Ra, но произведение Ra выражает модуль главного момента системы:

Mo(R) = M = ∑Mo(Fi).

Следовательно, момент равнодействующей произвольной плоской системы сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно этого же центра (теорема Вариньона). Плоскую систему сходящихся сил и плоскую систему параллельных сил следует рассматривать как частные случаи произвольной системы. Для них также справедлива теорема Вариньона. Теоремой Вариньона широко пользуются при решении различных задач статики. В частности, ее применяют при определении равнодействующей системы параллельных сил.

Лекция 36
Центр тяжести тела

Как известно, сила тяжести тела равна векторной сумме сил тяжести, которые действуют на все материальные точки, на которые можно разбить рассматриваемое тело. Точку, к которой приложена результирующая сила тяжести, называют центром тяжести. Если известно положение центра тяжести, то можно считать, что на тело действует только одна сила тяжести, приложенная к центру тяжести.

Следует учитывать, что силы тяжести, действующие на отдельные элементы тела, направлены к центру Земли и не являются строго параллельными. Но так как размеры большинства тел на Земле много меньше ее радиуса, поэтому эти силы считают параллельными.

Определение центра тяжести тела

Центром тяжести называют точку, через которую проходит равнодействующая всех сил тяжести, действующих на материальные точки, на которые разбито рассматриваемое тело, при любом положении тела в пространстве.

Центр тяжести - это точка, относительно которой суммарный момент сил тяжести равен нулю при любом положении тела.

От положения центра тяжести зависит устойчивость всех конструкций.

Для нахождения центра тяжести тела сложной формы необходимо мысленно разбить тело на части простой формы и определить место нахождения центров тяжести для них. У тел простой формы центр тяжести определяют, используя их симметрию. Так, центр тяжести однородных диска и шара расположен в их центре, однородного цилиндра в точке на середине его оси; однородного параллелепипеда на пересечении его диагоналей и т, д. У всех однородных тел центр тяжести совпадает с центром симметрии. Центр тяжести может находиться вне тела, например, у кольца.

Определив, где расположены центры тяжести отдельных частей тела, переходят к поиску места расположения центра тяжести тела в целом. Тело представляют в виде системы материальных точек. При этом каждая точка имеет массу своей части тела и располагается в ее центре тяжести.

Центр тяжести, центр масс и центр инерции тела

Считают, что центр тяжести тела совпадают с центром масс тела, если его размеры малы в сравнении с расстоянием до центра Земли. В основной массе задач центр тяжести принимают совпадающим с центром масс тела.

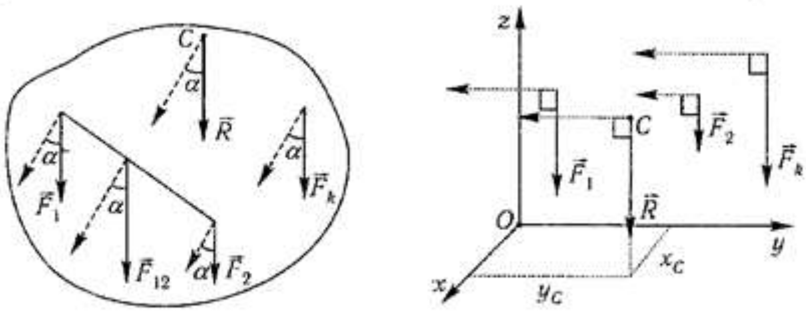
Сила инерции в неинерциальных системах отсчета, движущихся поступательно, приложена к центру тяжести тела.

Но центробежная сила инерции (в общем случае) не приложена к центру тяжести, поскольку в неинерциальной системе отсчета на элементы тела действуют разные центробежные силы инерции (даже если массы элементов равны), так как расстояния до оси вращения разные.

Лекция 37
ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Рассмотрим систему параллельных сил {F1, F2, …, Fn}. При повороте всех сил системы на один и тот же угол линия действия равнодействующей системы параллельных сил повернется в ту же сторону на тот же угол вокруг некоторой точки (рисунок 1, а).

Эта точка называется центром параллельных сил.
Согласно теореме Вариньона, если система сил имеет равнодействующую, то ее момент относительно любого центра (оси) равен сумме моментов всех сил системы относительно того же центра (оси).



а б

Рисунок 1.

Для определения координат центра параллельных сил воспользуемся этой теоремой.
Относительно оси x
$M_x(R) = \Sigma M_x(F_k)$,
$-y_C R = \Sigma y_k F_k$,
$y_C = \Sigma y_k F_k/\Sigma F_k$.
Относительно оси y
$M_y(R) = \Sigma M_y(F_k)$,
$-x_C R = \Sigma x_k F_k$,
$x_C = \Sigma x_k F_k/\Sigma F_k$.
Чтобы определить координату z_C, повернем все силы на 90° так, чтобы они стали параллельны оси y (рисунок 1.5, б). Тогда
$M_z(R) = \Sigma M_z(F_k)$,
$-z_C R = \Sigma z_k F_k$,
$z_C \Sigma z_k F_k/\Sigma F_k$.
Следовательно, формула для определения радиус-вектора центра параллельных сил принимает вид
$r_C= \Sigma r_k F_k/\Sigma F_k$.
Свойства центра параллельных сил:
Сумма моментов всех сил Fk относительно точки C равна нулю $\Sigma M_C(F_k) = 0$.
Если все силы повернуть на некоторый угол α, не меняя точек приложения сил, то центр новой системы параллельных сил будет той же точкой C.

Лекция 38
Определение центра тяжести сложной фигуры.

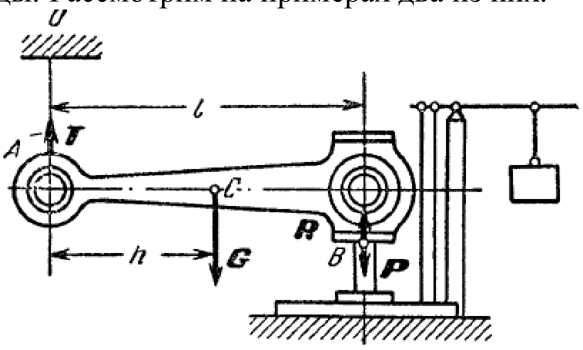
Для определения положения центра тяжести фигур и тел сложной геометрической формы их мысленно разбивают на такие части простейшей формы (если, конечно, это возможно), для которых положения центров тяжести известны. Затем определяют положение центра тяжести всей фигуры или тела, понимая в этих формулах под v_k, F_k и l_k объемы, площади и длины частей, на которые разбито данное тело, фигура или линия, а под x_k, y_k и z_k — координаты центров тяжести этих частей.

Если рассматриваемые фигуры или тела неоднородны, то, разделив их па однородные части, умножают входящие в объемы, площади и длины этих частей на соответствующий каждой части удельный вес. Если в данном теле или фигуре имеются полости или отверстия, то для определения центра тяжести такого тела или фигуры пользуются теми же приемами и формулами, считая при этом объемы и площади вырезанных частей отрицательными.

В тех случаях, когда данное тело нельзя разбить на такие части, для которых было бы известно положение их центров тяжести, для вычисления координат центра тяжести тела приходится пользоваться методами интегрального исчисления.

Экспериментальный способ

Для определения центра тяжести неоднородных тел сложной формы существуют различные экспериментальные методы. Рассмотрим на примерах два из них.



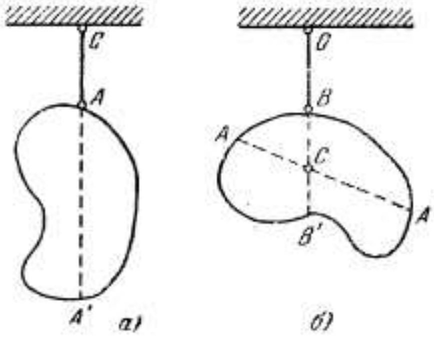
I. Метод взвешивания. Для определения положения центра тяжести шатун AB подвешиваем в точке A и опираем точкой B на платформу десятичных весов, так чтобы он занял горизонтальное положение. Сила давления шатуна на платформу, найденная путем взвешивания, оказалась равной по модулю P. К находящемуся в равновесии шатуну приложены силы: сила G тяжести шатуна, проходящая через его центр C тяжести, вертикальная реакция R платформы, проходящая через точку B и равная по модулю силе P давления шатуна на платформу, и сила T натяжения нити OA.

Зная вес G шатуна и расстояние L между его точками A и B, теперь нетрудно найти и расстояние H от точки A до центра C тяжести шатуна. Одним из уравнений равновесия шатуна будет:

$$\sum m_A(\boldsymbol{P}_k) = -\,Gh + Rl = 0,$$

$$h = \frac{Rl}{G} = \frac{Pl}{G}.$$

Метод подвешивания. Тело подвешивают на нити за какую-либо его точку A к неподвижной точке O. После того как тело придет в равновесие, проводят вертикальную линию AA, составляющую продолжение направления нити OA. При равновесии центр тяжести тела должен находиться на одной вертикали с неподвижной точкой O и, следовательно, будет лежать на линии AA. Вновь подвесив тело к другой его точке B, мы точно так же найдем, что его центр тяжести лежит на линии BB, являющейся продолжением направления нити OB. Точка C пересечения линий AA и BB и будет являться центром тяжести тела. Способ подвешивания удобен для определения положения центра тяжести тонких пластинок.



Лекция 38
Прочность, жесткость, устойчивость. Деформируемое тело: упругость и пластичность.

Прочность, жесткость, устойчивость, – как понятия определяющие надёжность конструкций в их сопротивлении внешним воздействиям. Расчётные схемы (модели): твёрдого деформируемого тела, геометрических форм элементов конструкций. Внутренние силы в деформируемых телах и их количественные меры. Метод сечений. Напряжённое состояние. Перемещения и деформации. Понятия упругости и пластичности. Линейная упругость (закон Гука). Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции).

Основные понятия. Сопротивление материалов, наука о прочности (способности сопротивляться разрушению при действии сил) и деформируемости (изменении формы и размеров) элементов конструкций сооружений и деталей машин. Таким образом, данный раздел механики дает теоретические основы расчета прочности, жесткости и устойчивости инженерных конструкций.

Под нарушением прочности понимается не только разрушение конструкции, но и возникновение в ней больших пластических деформаций. Пластическая деформация – это часть деформации, которая не исчезает при разгрузке, а пластичность – способность материала сохранять деформацию.Возникновение пластических деформаций связано с нарушением нормальной работы конструкции и поэтому пластические деформации считаются недопустимым.

Жесткость – это способность конструкции (или материала) сопротивляться деформированию. Иногда деформация конструкции, отвечающей условию прочности, может воспрепятствовать нормальной ее эксплуатации. В таком случае конструкция имеет недостаточную жесткость.

Устойчивость – это способность конструкции сохранять положение равновесия, отвечающее действующей на нее нагрузке.

Конструкции, как правило, имеют сложную форму, отдельные элементы которой можно свести к простейшим типам, являющимисяосновными объектами изучения сопротивления материалов: стержни, пластинки, оболочки, массивы, для которых устанавливаются соответствующие методы расчёта на прочность, жёсткость и устойчивость при действии статических и динамических нагрузок, т.е. расчет реальной конструкции начинается с выбора расчетной схемы. Выбор расчетной схемы начинается со схематизации свойств материала и характера деформирования твердого тела, затем выполняется схематизация геометрической.Стержень – тело, у которого один размер (длина) значительно превышает два других размера.

Рис. 1. Стержень

Оболочка – это тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, у которого один размер (толщина) много меньше двух других размеров. Пластина – это тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями.

Рис. 2. Оболочка

Массив – тело, у которого все три размера имеют один порядок.

Рис. 3. Массив

Базируясь на законах и выводах теоретической механики, сопротивление материалов, помимо этого, учитывает способность реальных материалов деформироваться под действием внешних сил.

При выполнении расчетов принимаются допущения, связанные со свойствами материалов и с деформацией тела.

Основные допущения.

1. Материал считается однородным (независимо от его микроструктуры физико-механические свойства считаются одинаковыми во всех точках).
2. Материал полностью заполняет весь объем тела, без каких-либо пустот (тело рассматривается как сплошная среда).
3. Обычно сплошная среда принимается изотропной, т.е. предполагается, что свойства тела, выделенного из нее, не зависят от его ориентации в пределах этой среды. Материалы, имеющие различные свойства в разных направлениях, называют анизотропными (например, дерево).
4. Материал является идеально упругим (после снятия нагрузки все деформации полностью исчезают, т.е. геометрические размеры тела полностью или частично восстанавливаются). Свойство тела восстанавливать свои первоначальные размеры после разгрузки называется упругостью.
5. Деформации тела считаются малыми по сравнению с его размерами. Это допущение называется принципом начальных размеров. Допущение позволяет при составлении уравнений равновесия пренебречь изменениями формы и размеров конструкции.
6. Перемещения точек тела пропорциональны нагрузкам, вызывающим эти перемещения (до определенной величины деформации материалов подчиняются закону Гука). Для линейно деформируемых конструкций справедлив принцип независимости действия сил (или принцип суперпозиции): результат действия группы сил не зависит от последовательности нагружения ими конструкции и равен сумме результатов действия каждой из этих сил в отдельности.
7. Предполагается, что в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки, характер распределения напряжений не зависит от конкретного способа нагружения. Основанием для такого утверждения служит принцип Сен-Венана.
8. Принимается гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли): плоские поперечные сечения стержня до деформации остаются плоскими и после деформации.

Внутри любого материала имеются внутренние межатомные силы. При деформации тела изменяются расстояния между его частицами, что в свою очередь приводит к изменению сил взаимного притяжения между ними. Отсюда, как следствие, возникают внутренние усилия. Для определения внутренних усилий используют метод сечения. Для этого тело мысленно рассекают плоскостью и рассматривают равновесие одной из его частей (рис. 4).

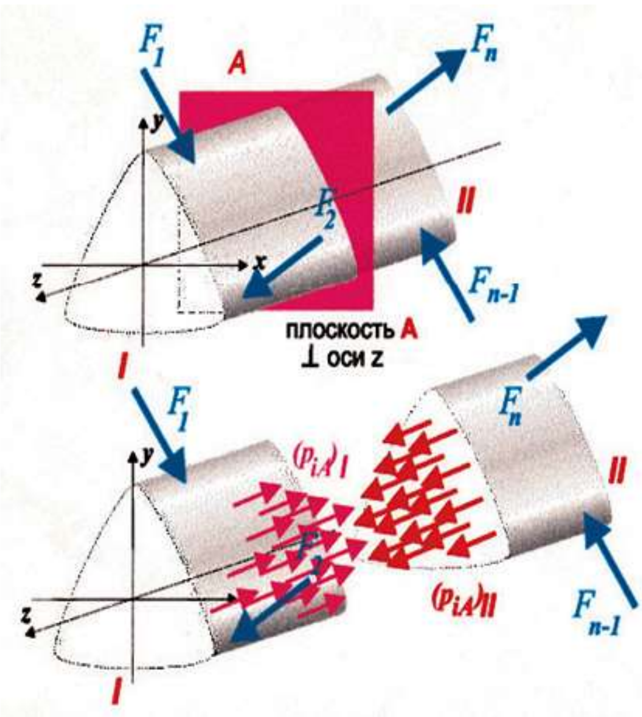


Рис. 4. Выявление внутренних усилий по методу сечений
Метод заключается в следующем:
1 Разрезаем систему (на части).
2. Отбрасываем одну часть.
3. Заменяем действие отброшенной части на оставшуюся внутренними силами упругости (приложим в сечении усилия, способные уравновесить внешние силы, действующие на отсеченную часть).
4. Составляем уравнения равновесия, составленное для отсеченной части и находим значения усилий.
Используем метод сечений и приведем внутренние силы к центру тяжести поперечного сечения стержня. В результате приведения мы получим результирующую силу R, равную главному вектору и пару сил с моментом M, равным главному моменту системы.
Проектируя R и M на координатные оси, получаем в общем случае 6 алгебраических величин – 6 внутренних силовых факторов:
N – нормальная сила;
Qy или Qz – поперечные силы;
My или Mz – изгибающие моменты;
T – крутящий момент.

Лекция 39
Продольные силы и эпюры продольных сил.

Если продольные силы, возникающие в различных поперечных сечениях стержня, неодинаковы, закон их изменения по длине стержня представляется в виде графика N(z), называемого эпюрой продольных сил. Эпюра продольных сил необходима для оценки прочности стержня и строится для того, чтобы найти опасное сечение (поперечное сечение, в котором продольная сила принимает наибольшее значение N_{max}).
Для построении эпюры N используется метод сечений. Продемонстрируем его применение на примере (рис. 2.1).

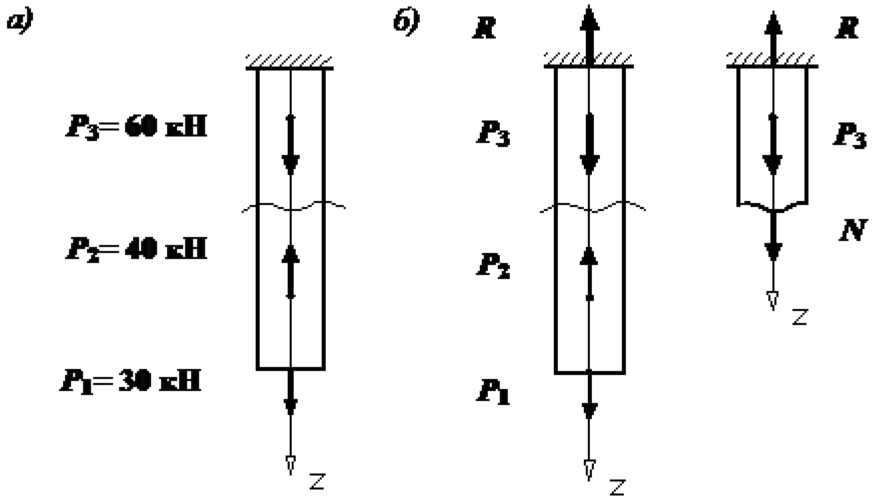


Рис. 2.1. Определение продольного усилия (N) в стержне при растяжении (сжатии)

Определим продольную силу N, возникающую в намеченном нами поперечном сечении стержня.

Разрежем стержень в этом месте и мысленно отбросим нижнюю его часть (рис. 2.1, а). Далее мы должны заменить действие отброшенной части на верхнюю часть стержня внутренней продольной силой N.

Для удобства вычисления ее значения закроем рассматриваемую нами верхнюю часть стержня листком бумаги. Напомним, что продольное усилие N, возникающее в поперечном сечении, можно определить как алгебраическую сумму всех продольных сил, действующих на отброшенную часть стержня, то есть на ту часть стержня, которую мы видим.

При этом применяем следующее правило знаков: силы, вызывающие растяжение оставленной части стержня (закрытой нами листком бумаги) входят в упомянутую алгебраическую сумму со знаком «плюс», а силы, вызывающие сжатие – со знаком «минус».

Итак, для определения продольной силы N в намеченном нами поперечном сечении необходимо просто сложить все внешние силы, которые мы видим. Так как сила $P_1 = 30$ кН растягивает верхнюю часть, а сила $P_2 = 40$ кН ее сжимает, то $N = +P_1 - P_2 = +30 - 40 = -10$ кН. Знак «минус» означает, что в этом сечении стержень испытывает сжатие.

Можно найти опорную реакцию R (рис. 2.1, б) и составить уравнение равновесия для всего стержня, чтобы проверить результат:

$$\sum Z = 0$$

или

$$\sum Z = -R + P_3 - P_2 + P_1 = 0;$$

$$R = P_3 - P_2 + P_1 = 60 - 40 + 30 = 50 \text{ кН}$$

Теперь заменим действие отброшенной нижней части неизвестным внутренним усилием N, направив его, например, от сечения, что соответствует растяжению.

Уравновешиваем оставленную нами верхнюю часть стержня:

$$\sum Z = +N + P_3 - R = 0;$$

$$N = -P_3 + R = -60 + 50 = -10 \text{ кН.}$$

Знак «минус» сигнализирует, что мы не угадали направление продольного усилия N. Оно будет не растягивающим, как мы предполагали, а сжимающим.

Лекция 40

Напряжения в плоских сечениях.

От поперечной силы Q_y в поперечном сечении возникают касательные напряжения τ_y. Для их определения приняты следующие гипотезы.

- Касательные напряжения τ_y параллельны поперечной силе Q_y и соответственно оси $0y$.
- Касательные напряжения равномерно распределены по ширине поперечного сечения на любом уровне их определения, задаваемом ординатой y.
- Для определения нормальных напряжений используют выражения, выведенные для случая чистого изгиба.

Д. И. Журавским предложена формула

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S'_z}{b \cdot I_z}, \tag{7.12}$$

где Q_y – поперечная сила в рассматриваемом сечении;

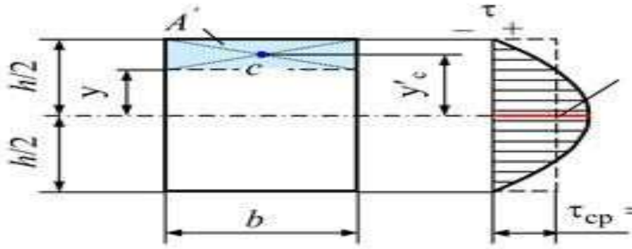
S'_z – статический момент площади отсеченной части сечения относительно центральной оси;

b – ширина сечения на уровне исследуемой точки;

I_z – момент инерции сечения относительно центральной оси.

Знак касательных напряжений τ_y определяется *знаком* поперечной силы Q_y.

Пример 7.3. *Построить эпюру τ для прямоугольного сечения.*



Момент инерции сечения

$$I_z = \frac{bh^3}{12};$$

Статический момент площади отсеченной части сечения

$$S'_z = A' \cdot y'_C.$$

$$\tau_{ср} = \frac{Q}{A} \qquad A' = b\left(\frac{h}{2} - y\right); \quad y'_C = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right);$$

$$S'_z = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4}{h^2}y^2\right)$$

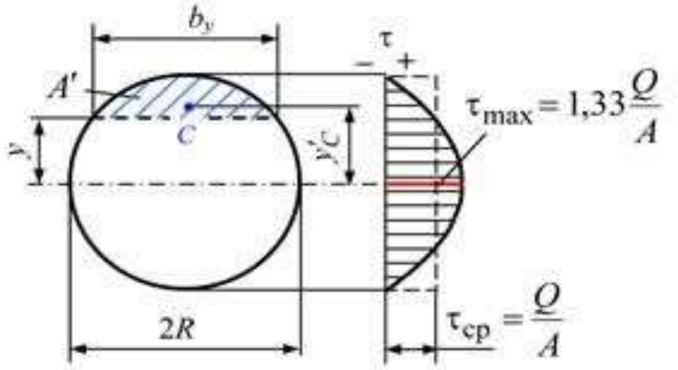
S'_z изменяется по параболической зависимости (координата y во второй степени) и определяет характер изменения напряжения τ:

$$\tau = \frac{Q \cdot S^*_z}{b \cdot I_z} = \frac{Q}{b}\frac{12}{bh^3}\frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4}{h^2}y^2\right) = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}\left(1 - \frac{4}{h^2}y^2\right).$$

При $y = 0$ (на нейтральной оси) $\tau = \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A}$.

При $y = h/2$ (на периферии) $\tau = 0$.

Пример 7.4. *Построить эпюру τ для круглого сечения.*



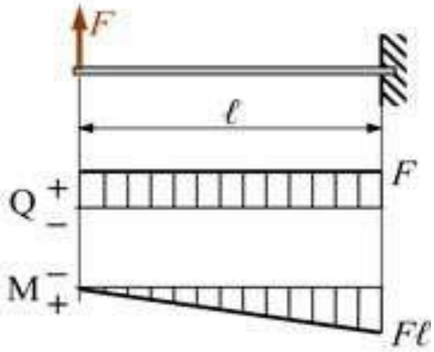
$$\tau = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi R^2}\left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right);$$

$$\tau_{max} = 1{,}333\frac{Q}{\pi R^2}.$$

О влиянии касательных напряжений

Касательные напряжения переменны по высоте, вызывают искривление поперечного сечения, причем в тем большей степени, чем больше τ, то есть в центральной части сечения больше, на периферии – меньше. Следовательно, ***гипотеза плоских сечений***, на которой основывался вывод формулы нормальных напряжений, ***неприменима***. Однако это искривление почти не отражается на продольных деформациях волокон, что позволяет пользоваться формулой $\sigma = \frac{M_z}{I_z}y$ и при наличии поперечной силы.

Пример 7.5. *Оценить соотношение нормальных и касательных напряжений при поперечном изгибе.*



Для консольной балки прямоугольного сечения максимальные нормальные напряжения

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{F\ell}{bh^2/6} = \frac{6F\ell}{bh^2},$$

а максимальные касательные

$$\tau_{max} \frac{3}{2}\frac{Q}{bh} = \frac{3}{2}\frac{F}{bh}.$$

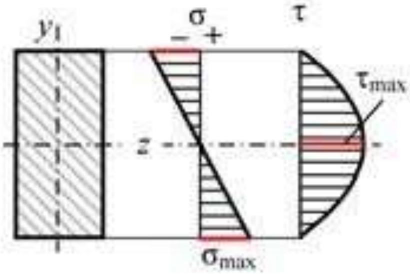
Сопоставив эти напряжения, получим

$$\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = \frac{6F\ell}{bh^2}\frac{2bh}{3F} = 4\frac{\ell}{h}.$$

Аналогичное соотношение для круглого поперечного сечения:

$$\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = \frac{32F\ell}{\pi d^3}\frac{3}{4}\frac{\pi d^2}{F4} = 6\frac{\ell}{d}.$$

Вывод: касательные напряжения в длинных ($\ell > 5h$) балках существенно меньше нормальных.



Отметим, что σ_{max} и τ_{max} действуют в разных точках сечения: σ_{max} на периферии, в точках наиболее удаленных от нейтральной оси, где $\tau = 0$; τ_{max} – в центре, на нейтральной оси, где $\sigma = 0$. Для приведенного выше примера в опасном сечении (в защемлении) эпюры распределения нормальных и касательных напряжений показаны на рисунке.

По мере укорочения длины пролета или участка балки роль момента, а, следовательно, и нормальных напряжений, снижается (в рассмотренном примере M зависит от длины, а Q – постоянна). Превалирующими в этом случае могут оказаться касательные напряжения. В сложившейся практике подбор размеров поперечного сечения выполняют по максимальным нормальным напряжениям (как при чистом изгибе), а проверку прочности проводят по максимальным касательным. В двутавровом сечении балки опасным может оказаться точка K в сопряжении стойки с полкой, где действуют достаточно большие и нормальные, и касательные напряжения:

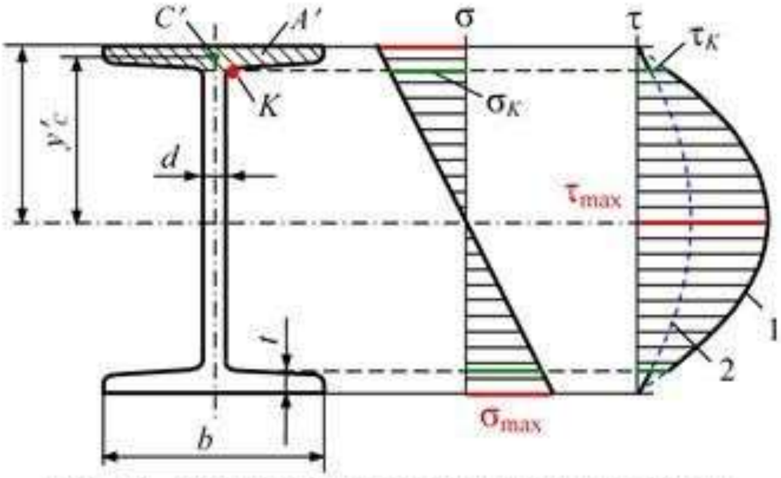


Рис. 7.6. Особенности проверки прочности балки двутаврового сечения

$$\sigma_K = \frac{M_z}{I_z} y_K;$$

$$\tau_K = \frac{Q \cdot S'_z}{d \cdot I_z}.$$

Здесь координату точки K и статический момент отсеченной части площади A' (на рис. 7. 6 заштрихована) находят как

$$y_K = \frac{h}{2} - t; \quad S'_z = A' \cdot y'_c = b \cdot t\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

Эквивалентные напряжения в точке K вычисляют по теориям прочности. Линия 1 на эпюре касательных напряжений отражает закон распределения τ, рассчитанных для ширины сечения d, а линия 2 – ширины сечения b. Размеры отличаются примерно в 20 раз, чем и обусловлен скачок напряжений τ в окрестности точки K.

Лекция 41

Закон Гука

Формулировка этого закона выглядит следующим образом: сила упругости, которая появляется в момент деформации тела, пропорциональна удлинению тела и направлена противоположно движению частиц этого тела относительно других частиц при деформации.

Математическая запись закона выглядит так:

Рис. 1. Формула закона Гука

где **Fупр** – соответственно сила упругости, **x** – удлинение тела (расстояние, на которое изменяется исходная длина тела), а **k** – коэффициент пропорциональности, называемый жесткостью тела. Сила измеряется в Ньютонах, а удлинение тела – в метрах.

Для раскрытия физического смысла жесткости, нужно в формулу для закона Гука подставить единицу, в которой измеряется удлинение – 1 м, заранее получив выражение для k.

$$k = \frac{mg}{\Delta l}$$

Рис. 2. Формула жесткости тела

Эта формула показывает, что жесткость тела численно равна силе упругости, которая возникает в теле (пружине), когда оно деформируется на 1 м. Известно, что жесткость пружины зависит от ее формы, размера и материала, из которого произведено данное тело.

Сила упругости

Теперь, когда известно, какая формула выражает закон Гука, необходимо разобраться в его основной величине. Основной величиной является сила упругости. Она появляется в определенный момент, когда тело начинает деформироваться, например, когда пружина сжимается или растягивается. Она направлена в обратную сторону от силы тяжести. Когда сила упругости и сила тяжести, действующие на тело, становятся равными, опора и тело останавливаются.

Деформация – это необратимые изменения, происходящие с размерами тела и его формой. Они связанны с перемещением частиц относительно друг друга. Если

человек сядет в мягкое кресло, то с креслом произойдет деформация, то есть изменятся его характеристики. Она бывает разных типов: изгиб, растяжение, сжатие, сдвиг, кручение.
Так как сила упругости относится по своему происхождению к электромагнитным силам, следует знать, что возникает она из-за того, что молекулы и атомы – наименьшие частицы, из которых состоят все тела, притягиваются друг другу и отталкиваются друг от друга. Если расстояние между частицами очень мало, значит, на них влияет сила отталкивания. Если же это расстояние увеличить, то на них будет действовать сила притяжения. Таким образом, разность сил притяжения и сил отталкивания проявляется в силах упругости.
Сила упругости включает в себя силу реакции опоры и вес тела. Сила реакции представляет особый интерес. Это такая сила, которая действует на тело, когда его кладут на какую-либо поверхность. Если же тело подвешено, то силу, действующую на него, называют, силой натяжения нити.

Особенности сил упругости

Как мы уже выяснили, сила упругости возникает при деформации, и направлена она на восстановление первоначальных форм и размеров строго перпендикулярно к деформируемой поверхности. У сил упругости также есть ряд особенностей.

- они возникают во время деформации;
- они появляются у двух деформируемых тел одновременно;
- они находятся перпендикулярно поверхности, по отношению к которой тело деформируется.
- они противоположны по направлению смещению частиц тела.

Применение закона на практике

Закон Гука применяется как в технических и высокотехнологичных устройствах, так и в самой природе. Например, силы упругости встречаются в часовых механизмах, в амортизаторах на транспорте, в канатах, резинках и даже в человеческих костях. Принцип закона Гука лежит в основе динамометра – прибора, с помощью которого измеряют силу.

Рис. 3. Динамометр

Контрольные вопросы

1)Назвать особенности сил упругости?
2)Формула закона Гука?
3)Формула жесткости тела?
4) Привести пример закона Гука на практике

Лекция 42

Модуль продольной упругости

Модуль упругости — общее название нескольких физических величин, характеризующих способность твёрдого тела (материала, вещества) упруго деформироваться (то есть не постоянно) при приложении к нему силы. В области упругой деформации модуль упругости тела в общем случае зависит от напряжения и определяется производной (градиентом) зависимости напряжения от деформации, то есть тангенсом угла наклона начального линейного участка диаграммы напряжений-деформаций:

$$E = \frac{d_\sigma}{\mathrm{d}_\varepsilon}$$

E — модуль упругости;

σ — напряжение, вызываемое в образце действующей силой (равно силе, делённой на площадь приложения силы);

ϵ — упругая деформация образца, вызванная напряжением (равна отношению изменения размера образца после деформации к его первоначальному размеру).

В наиболее распространенном случае зависимость напряжения и деформации линейная (закон Гука):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Если напряжение измеряется в паскалях, то, поскольку деформация является безразмерной величиной, единицей измерения E также будет паскаль. Альтернативным определением является определение, что модуль упругости — это напряжение, достаточное для того, чтобы вызвать увеличение длины образца в два раза. Такое определение не является точным для большинства материалов, потому что это значение намного больше чем предел текучести материала или значения, при котором удлинение становится нелинейным, однако оно может оказаться более интуитивным.

Разнообразие способов, которыми могут быть изменены напряжения и деформации, включая различные направления действия силы, позволяют определить множество типов модулей упругости. Здесь даны три основных модуля:

- Модуль Юнга (E) характеризует сопротивление материала растяжению/сжатию при упругой деформации, или свойство объекта деформироваться вдоль оси при воздействии силы вдоль этой оси; определяется как отношение напряжения к деформации сжатия (удлинения). Часто модуль Юнга называют просто модулем упругости.
- Модуль сдвига или модуль жесткости (G или μ) характеризует способность материала сопротивляться изменению формы при сохранении его объёма; он определяется как отношение напряжения сдвига к деформации сдвига, определяемой как изменение прямого угла между плоскостями, по которым действуют касательные напряжения. Модуль сдвига является одной из составляющих явления вязкости.

• Модуль объёмной упругости или Модуль объёмного сжатия (K) характеризует способность объекта изменять свой объём под воздействием всестороннего нормального напряжения (объёмного напряжения), одинакового по всем направлениям (возникающего, например, при гидростатическом давлении). Он равен отношению величины объёмного напряжения к величине относительного объёмного сжатия. В отличие от двух предыдущих величин, модуль объёмной упругости невязкой жидкости отличен от нуля (для несжимаемой жидкости — бесконечен).

Существуют и другие модули упругости: коэффициент Пуассона, параметры Ламе.

Гомогенные и изотропные материалы (твердые), обладающие линейными упругими свойствами, полностью описываются двумя модулями упругости, представляющими собой пару любых модулей. Если дана пара модулей упругости, все другие модули могут быть получены по формулам, представленным в таблице ниже.

В невязких течениях не существует сдвигового напряжения, поэтому сдвиговый модуль всегда равен нулю. Это влечёт также и равенство нулю модуля Юнга.

Вопросы для самоконтроля

4) Модуль Юнга (E) характеризует?
5) Модуль сдвига или модуль жесткости (G или μ) характеризует?
6) Модуль объёмной упругости или Модуль объёмного сжатия (K) характеризует?

Лекция 43

Определение расчетов на прочность.

1. Расчет на статическую прочность

1.1 При расчете на статическую прочность необходимо учитывать расчетные нагрузки, кроме вибрационных и ударных нагрузок, и все эксплуатационные режимы.

1.2 Условия обеспечения статической прочности должны ограничивать уровень напряжении, вызывающих:

- вязкое или хрупкое разрушение;
- возникновение пластического течения по всему сечению элемента конструкции;
- смятие поверхности элемента конструкции;
- срез;
- изменение формы.

1.3 Условия прочности устанавливают ограничением уровня соответствующих категорий напряжений относительно значений $R^T{}_m$, $R^T{}_{p0,2}$ или $[\sigma]$.

1.4 Суммарный уровень напряжений, входящих в группу категорий напряжений, вызывающих возникновение однородной пластической деформации в сечении элемента конструкции под действием механических нагрузок, должен быть не более:

- $[\sigma]$ при НЭ;
- 1,2 $[\sigma]$ при ННЭ.

1.5 Суммарный уровень напряжений, входящих в группу категорий напряжений, вызывающих возникновение пластического шарнира в сечении элемента конструкции (кроме болтов и шпилек) под действием механических нагрузок, должен быть не более:

- 1,3 $[\sigma]$ при НЭ;
- 1,6 $[\sigma]$ при ННЭ.

1.6 Конкретные зависимости, используемые для проверки статической прочности различных групп категорий напряжений, устанавливаются в соответствующих нормативных документах.

2. Расчет на устойчивость

2.1 Расчет на устойчивость выполняют применительно к статическому нагружению элементов конструкций оборудования и трубопроводов.

2.2 Проверку на устойчивость следует выполнять для элементов сосудов (обечаек, выпуклых днищ) при совместном или раздельном действии наружного давления, превышающего внутреннее, и сжимающих усилий.

2.3 По условиям прочности следует определять допускаемые значения наружного давления и сжимающих усилий.

2.4 Методики расчета и условия прочности устанавливают в соответствующих нормативных документах.

3. Расчет на циклическую прочность

3.1 Определение допускаемого числа циклов по заданным амплитудам напряжений или допускаемых амплитуд напряжений для заданного числа циклов следует проводить:

1) по расчетным кривым усталости, характеризующим в пределах их применения зависимость между допускаемыми амплитудами условных упругих напряжений и допускаемыми числами циклов;

2) по уравнениям, связывающим допускаемые амплитуды условных упругих напряжений и допускаемые числа циклов.

3.2 В расчете необходимо учитывать влияние на циклическую прочность характеристик материала (включая сварные соединения), асимметрии цикла условных упругих приведенных напряжений (в том числе вызванной действием остаточных напряжений), температуры, флюенса нейтронов, воздействия теплоносителя.

При расчете деталей из титановых сплавов следует принимать во внимание влияние эффектов ползучести.

3.3 Условие прочности при наличии различных циклических нагрузок должно определяться накоплением усталостного повреждения вплоть до допускаемого значения.

3.4 В тех случаях, когда низкочастотные циклические напряжения, вызываемые пуском, остановом, изменением мощности, функционированием аварийной защиты или другими режимами, сопровождаются наложением высокочастотных напряжений, например, вызванных вибрацией, пульсацией температур при перемешивании потоков теплоносителя с различной температурой, расчет на циклическую прочность следует проводить с учетом многочастотного характера нагружения.

3.5 Допускается оценивать циклическую прочность на основе кривых усталости, полученных экспериментальным путем для рассматриваемых условий нагружения и состояния металла конструкции, или по результатам испытаний натурных элементов или их моделей, спроектированных и изготовленных в соответствии с требованиями, предъявляемыми к штатным конструкциям.

4. Расчет на сопротивление хрупкому разрушению

4.1 Расчет на сопротивление хрупкому разрушению следует проводить для всех режимов НЭ, ННЭ и гидравлических испытаний.

4.2 Анализу подлежат зоны, в которых можно ожидать наибольшие значения коэффициентов интенсивности напряжений K_I, для расчетного дефекта, или наименьшие значения вязкости разрушения K_{IC}, или наименьшее отношение K_{IC}/K_I.

4.3 При расчете элементов, изготовленных из титановых сплавов, следует учитывать вязкий характер их разрушения, а в качестве характеристик прочности использовать $R^T_{p0,2}$ и величину критического раскрытия трещины сплава.

4.4 Выбор расчетного дефекта, расчетных характеристик вязкости разрушения, критической температуры хрупкости, значений величин остаточных напряжений и последующий анализ прочности следует проводить согласно положениям одобренных Федеральной службой по атомному надзору документов организаций, занимающихся проектированием и изготовлением оборудования и трубопроводов.

4.5 Расчет на сопротивление хрупкому разрушению допускается не проводить для элементов конструкций, не подвергающихся облучению (или подвергающихся облучению при температурах 523 - 623 К до флюенса не более 10^{22} н/м^2 при энергии нейтронов $\geq 0{,}5$ МэВ), в следующих случаях:

1) материалы элементов конструкций (включая сварные соединения) имеют предел текучести при температуре 293 К менее 300 МПа, а толщина стенки элемента конструкции составляет не более 25 мм;

2) материалы элементов конструкций (включая сварные соединения) имеют предел текучести при температуре 293 К менее 600 МПа, а толщина стенки элемента конструкции составляет не более 16 мм;

5. Расчет на ударостойкость

5.1 В основу расчета на ударостойкость положено требование надежной эксплуатации оборудования в условиях воздействия ударных нагрузок. Конкретные параметры ударных нагрузок определяются проектом ППУ и (или) техническим заданием на выполнение расчета на прочность.

5.2 Проверку ударостойкости следует выполнять по допускаемым напряжениям и допускаемым перемещениям.

5.3 При определении допускаемых напряжений следует учитывать:

- влияние на динамический предел текучести скорости деформации и расчетной температуры,
- допустимость ограниченной пластической деформации в наиболее нагруженных участках элемента при кратковременном внешнем воздействии;
- повышенную склонность материалов к хрупкому разрушению

5.4 Допускаемое перемещение следует устанавливать из условий невозможности соударений рассчитываемого оборудования с соседними или с корпусными конструкциями, или недопустимых повреждений.

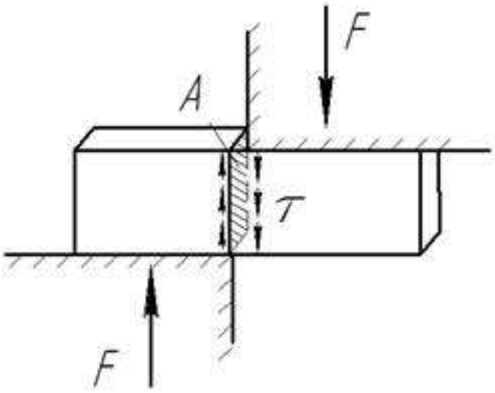
5.5 Расчет следует проводить для режимов НЭ.

5.6 В расчете напряжения от эксплуатационных нагрузок следует суммировать с динамическими только тогда, когда они превышают последние более чем на 10 % (в противном случае они могут не учитываться).

5.7 Определение допускаемых напряжений, перемещений и последующий анализ прочности оборудования следует проводить согласно соответствующим нормативным документам.

Лекция 44

Деформация срез и смятие.



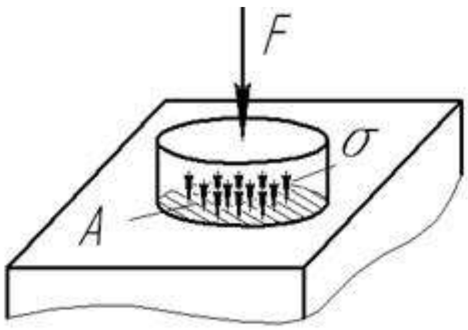
Срезом называют деформацию, представляющую собой смещение поперечных плоскостей тела под действием силы параллельной этой плоскости.

Касательные напряжения при срезе (напряжения среза) определяются по формуле

$$\tau_{ср} = \frac{F}{A} \le \left[\tau_{ср}\right] = \frac{\sigma_T}{s}$$

где $\tau_{ср}$ - действительные напряжения среза;

$\left[\tau_{ср}\right]$ - допускаемые напряжения растяжения (сжатия);



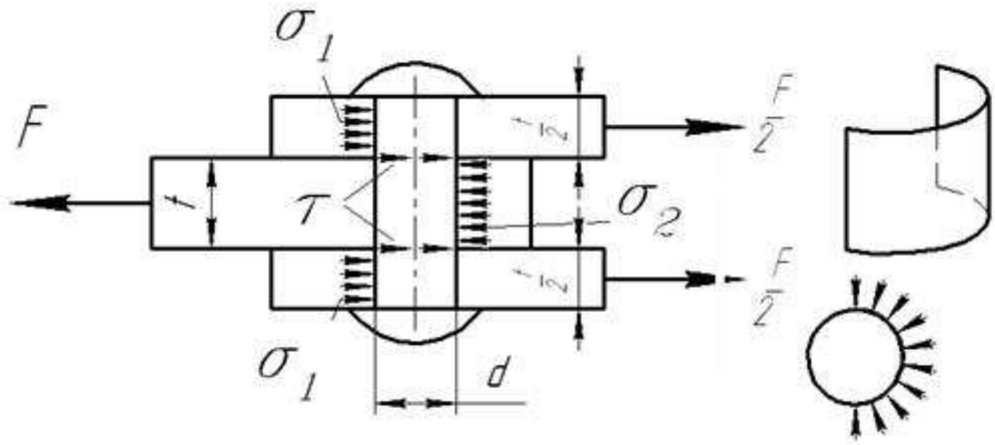
Смятием называют деформацию, представляющую собой нарушение первоначальной формы поверхности под действием силы перпендикулярной к этой поверхности.

Нормальные напряжения при смятии (напряжения смятия) определяются по формуле

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A} \le \left[\sigma_{см}\right] = \frac{\sigma_T}{s}$$

Пример

Определить напряжения среза и смятия для заклепки соединяющей три детали. Известны диаметр заклепки d , усилие действующее на соединение F



Запишем условие прочности на срез для заклепки

$$\tau_{ср} = \frac{F}{A}$$

В соединении 3-х деталей напряжения среза возникают в двух сечениях круглой формы.

Площадь круга $A_{КР} = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$, подставляем ее в условие прочности, получим.

$$\tau_{ср} = \frac{F}{2 \cdot A_{КР}} = \frac{4 \cdot F}{2 \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$$

Запишем условие прочности на смятие для заклепки

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A}$$

В соединении 3-х деталей напряжения смятия возникают на боковых поверхностях заклепки площадь которых будет определяться:

Для верхней и нижней поверхностей: $A_{СМ1} = \frac{\pi \cdot d}{2} \cdot t_1$

Для средней поверхности: $A_{СМ1} = \frac{\pi \cdot d}{2} \cdot t_2$

Тогда напряжения смятия

Для верхней и нижней поверхностей: $\sigma_{см} = \frac{F}{\pi \cdot d \cdot t_1}$

Для средней поверхности: $\sigma_{см} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d \cdot t_2}$

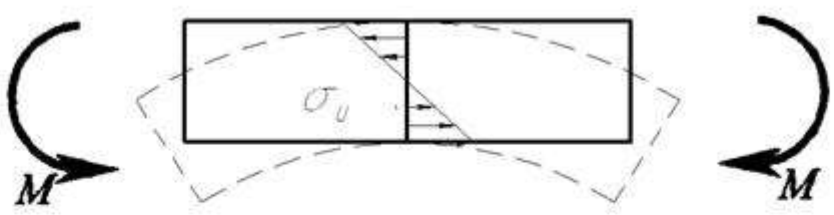
Изгиб

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны кривого бруса.

Изгиб называют *чистым* если изгибающий момент является единственным внутренним усилием, возникающим в поперечном сечении бруса (балки).

Изгиб называют *поперечным,* если в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы.

При изгибе в сечении деталей возникают нормальные напряжения $\sigma_и$, которые распределяются по закону треугольника, причем в нижних волокнах – напряжения сжатия, а в верхних – напряжения растяжения (для схемы показанной на рисунке).



Напряжения изгиба определяются по формуле

$$\sigma_и = \frac{M}{W} \le [\sigma_и]$$

На практике изгиб тела вызывает не только внешние изгибающие моменты, но и поперечные силы, действующие на тело. Для нахождения наиболее нагруженного поперечного сечения строят эпюры изгибающих моментов.

При построении эпюр изгибающих моментов используются следующие правила:

1 Тело разбивается на участки, границами которых служат точки приложения внешних сил и моментов и реакции опор;

2 Построение ведется последовательно, по участкам, путем проведения сечений, проходящих через середину участка и отбрасывания части тела лежащей за сечением. Для не отброшенной части тела составляется зависимость по которой изменяется изгибающий момент и определяется его значение в начале и конце участка;

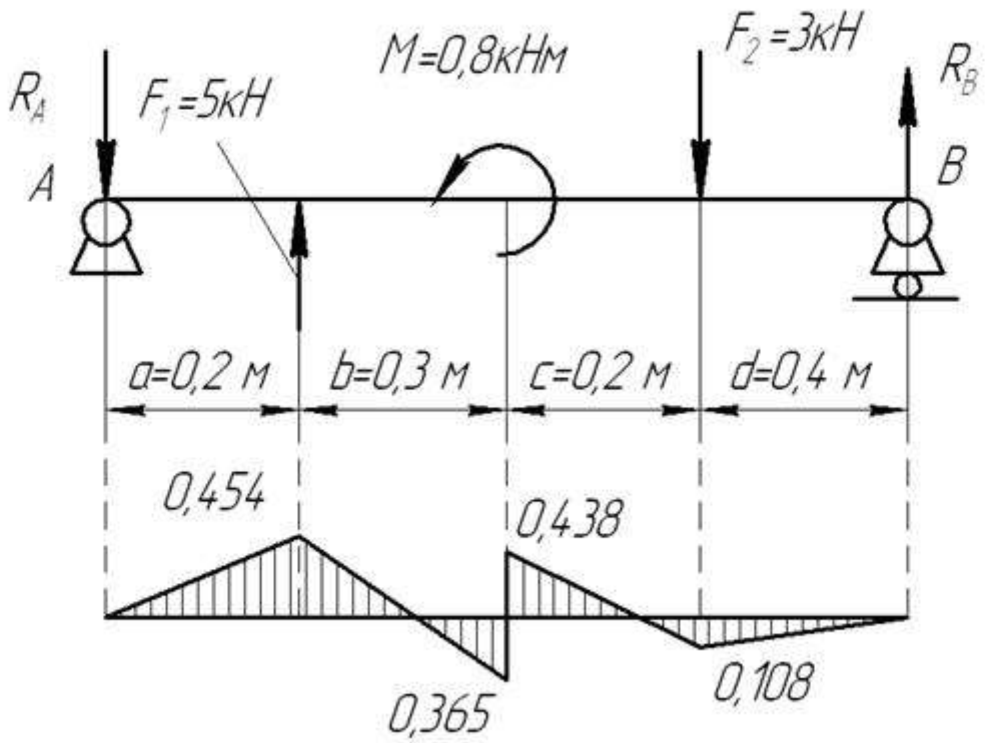
4 Построение эпюры ведется о стороны растянутых волокон;

5 Если в рассматриваемом сечении приложен внешний момент, то на эпюре наблюдается скачек на величину этого момента.

Построение эпюр изгибающих моментов рассмотрим на примере.

Пример

Проверить на прочность балку постоянного сечения, показанную на рисунке, если известно, что осевой момент сопротивления ее сечения $W = 0,4 \cdot 10^{-5}$ м³, а допускаемые напряжения изгиба $[\sigma_u] = 120$ МПа.



1 Определяем реакции опор

$\sum M_A = 0$; $R_B \cdot (a+b+c+d) - F_2 \cdot (a+b+c) + M + F_1 \cdot a = 0$

$$R_B = \frac{F_2 \cdot (a+b+c) - M - F_1 \cdot a}{(a+b+c+d)} = \frac{3 \cdot 0,7 - 0,8 - 5 \cdot 0,2}{1,1} = 0,27$$ кН

$\sum M_B = 0$; $R_A \cdot (a+b+c+d) - F_1 \cdot (b+c+d) + M + F_2 \cdot d = 0$

$$R_A = \frac{F_1 \cdot (b+c+d) - M - F_2 \cdot d}{(a+b+c+d)} = \frac{5 \cdot 0,9 - 0,8 - 3 \cdot 0,4}{1,1} = 2,27$$ кН

Проверка $F_1 + R_B - F_2 - R_A = 5 + 0,27 - 3 - 2,27 = 0$

2 Разбиваем эпюру на участки

Участок 1

$$M_1 = R_a \cdot z_1 \left|\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right. = \begin{matrix} R_a \cdot a = 2{,}27 \cdot 0{,}2 = 0{,}454 \\ R_a \cdot 0 = 0 \end{matrix}$$

Участок 2

$$M_2 = R_a \cdot (a + z_2) - F_1 \cdot z_2 \left|\begin{matrix} b \\ 0 \end{matrix}\right. = \begin{matrix} R_a \cdot (a + b) - F_1 \cdot b = 2{,}27 \cdot 0{,}5 - 5 \cdot 0{,}3 = -0{,}365 \\ R_a \cdot (a + 0) - F_1 \cdot 0 = 2{,}27 \cdot 0{,}2 = 0{,}454 \end{matrix}$$

Участок 3

$$M_3 = R_b \cdot z_3 \left|\begin{matrix} d \\ 0 \end{matrix}\right. = \begin{matrix} R_b \cdot d = 0{,}27 \cdot 0{,}4 = 0{,}108 \\ R_b \cdot 0 = 0 \end{matrix}$$

Участок 4

$$M_4 = R_b \cdot (d + z_4) - F_2 \cdot z_4 \left|\begin{matrix} c \\ 0 \end{matrix}\right. = \begin{matrix} R_b \cdot (d + c) - F_2 \cdot c = 0{,}27 \cdot 0{,}6 - 3 \cdot 0{,}2 = -0{,}438 \\ R_b \cdot (d + 0) - F_2 \cdot 0 = 0{,}27 \cdot 0{,}4 = 0{,}108 \end{matrix}$$

Проверка $0{,}438 + 0{,}365 = 0{,}803 \approx 0{,}8$

Наибольший момент $M = 0{,}454$ Н·м

Определяем напряжения изгиба $\sigma_u = \dfrac{0{,}454}{0{,}4 \cdot 10^{-8}} = 113 МПа \le [\sigma_u] = 120 МПа$

Кручение

Кручением называют деформацию, возникающую при действии на стержень пары сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной к его оси. Стержни круглого или кольцевого сечения, работающие на кручение, называют *валами*.

При кручении в сечении деталей возникают касательные напряжения $\tau_{кр}$, которые направлены по касательной к окружности вала

Напряжения кручения определяются по формуле

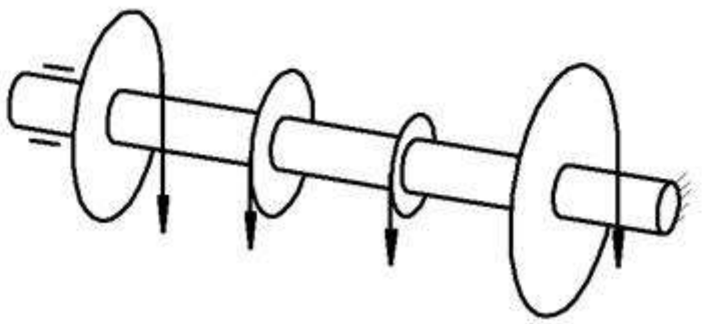
$$\tau_{кр} = \frac{T}{W_p} \le [\tau_{кр}]$$

Если вал нагружен несколькими крутящими моментами, то для нахождения наиболее нагруженного поперечного сечения строят эпюры крутящих моментов.

При построении эпюр крутящих моментов принимают следующее правило знаков: если при взгляде в торец отсеченной части вала действующий в этом сечении момент оказывается направленным против хода часовой стрелки, то он считается положительным, а если по ходу часовой стрелки - отрицательным.

Пример

На валу установлено 4 диска, к которым подвешены грузы.



Проверить на прочность вал показанный на рисунке. Известен диаметр вала d = 75 мм, диаметры дисков d_1 = 200 мм, d_2 = 150 мм, d_3 = 100 мм, d_4 = 250 мм и вес грузов F_1 = 20кН, F_1 = 40кН, F_1 = 35кН, F_1 = 40 кН допускаемое напряжение не кручение $[\tau_{кр}]$ = 25 МПа

Определим крутящие моменты на валах $T_i = F_i \cdot \frac{d_i}{2}$

$T_1 = F_1 \cdot \frac{d_1}{2} = 20 \cdot \frac{0,2}{2} = 2$ кН·м

$T_2 = F_2 \cdot \frac{d_2}{2} = 40 \cdot \frac{0,15}{2} = 3$ кН·м

$T_3 = F_3 \cdot \frac{d_3}{2} = 35 \cdot \frac{0,1}{2} = 1,75$ кН·м

$T_4 = F_4 \cdot \frac{d_4}{2} = 40 \cdot \frac{0,25}{2} = 5$ кН·м

Строим расчетную схему и эпюру крутящих моментов

Разбиваем вал на участки

Рассматриваем участок I: Проводим сечение I-I и отсекаем правую часть

$T_I = 0$

Рассматриваем участок II: Проводим сечение II-II и отсекаем правую часть

$T_{II} = -T_1 = -2$ кН·м

Рассматриваем участок III: Проводим сечение III-III и отсекаем правую часть

$T_{III} = -T_1 + T_2 = -2 + 3 = 1$ кН·м

Рассматриваем участок IV: Проводим сечение IV - IV и отсекаем правую часть

$T_{IV} = -T_1 + T_2 + T_3 = -2 + 3 + 1{,}75 = 2{,}75$ кН·м

Рассматриваем участок V: Проводим сечение V - V и отсекаем правую часть

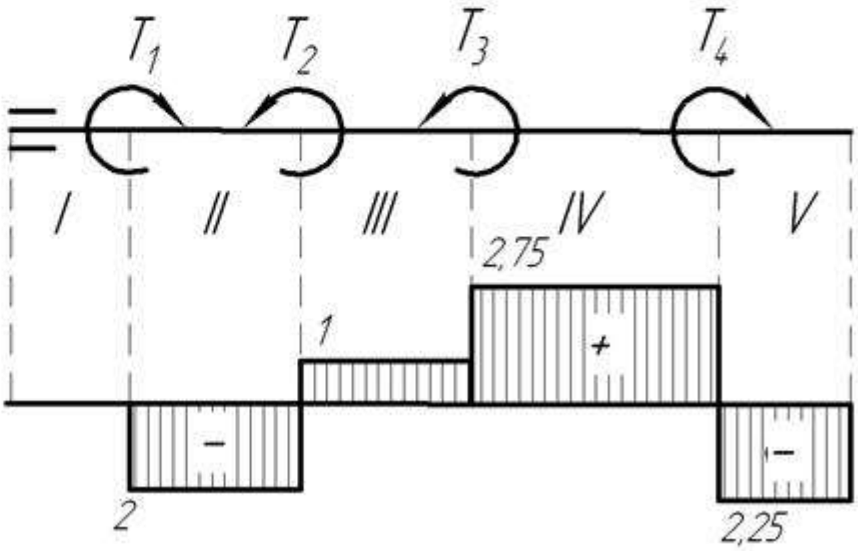
$T_V = -T_1 + T_2 + T_3 - T_4 = -2 + 3 + 1{,}75 - 5 = -2{,}25$ кН·м

По эпюре определяем наибольший момент $T_{max} = T_{IV} = 2{,}75$ кН·м

Записываем условие прочности

$$\tau_{кр} = \frac{T_{max}}{W_p} = \frac{T_{max}}{0{,}2 \cdot d^3} = \frac{2{,}75 \cdot 10^3}{0{,}2 \cdot 0{,}075^3} = 35{,}59 \cdot 10^6\ Па = 35{,}59 \cdot 10^6\ МПа$$

$$\tau_{кр} = 35{,}59\ МПа > [\tau_{кр}] = 25\ МПа$$



Лекция 45

Расчеты заклепочных соединений.

Заклепка представляет собой сплошной или полый стержень круглого сечения с головками на концах, одну из которых, называемую закладкой, выполняют на заготовке заранее, а вторую, называемую замыкающей, формируют при клепке (осадке).

Заклепочные соединения образуют постановкой заклепок в совмещенные отверстия соединяемых элементов и расклепкой с осаживанием стержня.

Основными материалами склепываемых деталей являются малоуглеродистые стали Ст.0, Ст.2, Ст.3, цветные металлы и их сплавы. Требования к материалу заклепки:

7. Высокая пластичность для облегчения процесса клепки;
8. Одинаковый коэффициент температурного расширения с материалом деталей во избежание дополнительных температурных напряжений в соединении при колебаниях температуры.
9. Однородность с материалом склепываемых деталей для предотвращения появления гальванических токов, сильно разрушающих соединения.

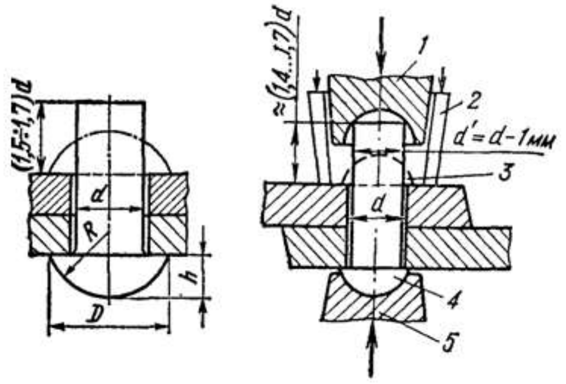


Рисунок 1

Расчет на прочность основан на следующих допущениях:

- силы трения на стыке деталей не учитывают, считая, что вся нагрузка передается только заклепками;
- расчетный диаметр заклепки равен диаметру отверстия d_0;
- нагрузки между заклепками распределяются равномерно.

Рассмотрим простейший заклепочный шов — однородный односрезный внахлестку. При нагружении соединения силами F, листы стремятся сдвинуться относительно друг друга. Запишем условие прочности заклепки на срез (разрушение стержня заклепки нахлесточного соединения происходит по сечению, лежащему в плоскости стыка соединяемых деталей)

$$\tau_{cp} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d_0^2}{4}} \leq [\tau]_{cp}.$$

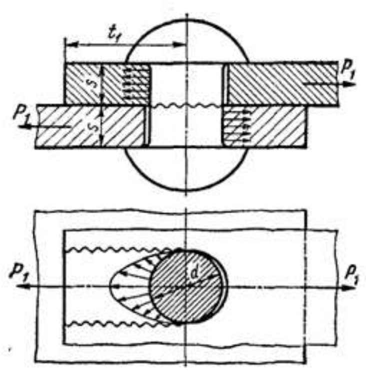


Рисунок 2

отсюда требуемый диаметр заклёпки:

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau]_{cp}}}$$

В зонах контакта боковых поверхностей заклепки с листами происходит сжатие материалов. Давление в зоне контакта называют напряжением смятия.
Считая, что эти напряжения равномерно распределены по площади смятия, запишем условие прочности

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} = \frac{F}{h \cdot d} \leq [\sigma]'_{см}$$

Здесь $A_{см}$ — площадь смятия, условно равная площади проекции поверхности контакта на плоскость, перпендикулярную действующей силе;
$[\sigma]'_{см}$ — допускаемое напряжение на смятие для менее прочного из контактирующих материалов.
Рассмотрим многорядное двухсрезное заклепочное соединение с двумя накладками.

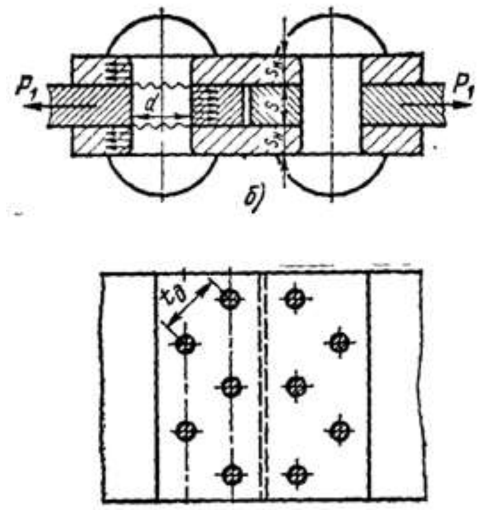


Рисунок 3

$$\tau_{ср} = \frac{F}{i \cdot \frac{\pi \cdot d_0^2}{4} \cdot z} \leq [\tau]_{ср}$$

где i — число плоскостей среза одной заклепки;
z — число заклепок.

Лекция 46

Практические расчеты заклепочных соединений.

Заклепка представляет собой сплошной или полый стержень круглого сечения с головками на концах, одну из которых, называемую закладкой, выполняют на заготовке заранее, а вторую, называемую замыкающей, формируют при клепке (осадке).
Заклепочные соединения образуют постановкой заклепок в совмещенные отверстия соединяемых элементов и расклепкой с осаживанием стержня.
Основными материалами склепываемых деталей являются малоуглеродистые стали Ст.0, Ст.2, Ст.3, цветные металлы и их сплавы. Требования к материалу заклепки:
10. Высокая пластичность для облегчения процесса клепки;

11.	Одинаковый коэффициент температурного расширения с материалом деталей во избежание дополнительных температурных напряжений в соединении при колебаниях температуры.
12.	Однородность с материалом склепываемых деталей для предотвращения появления гальванических токов, сильно разрушающих соединения.

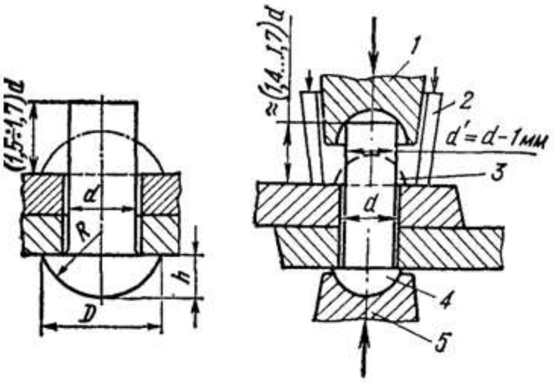


Рисунок 1

Расчет на прочность основан на следующих допущениях:

- силы трения на стыке деталей не учитывают, считая, что

вся нагрузка передается только заклепками;

- расчетный диаметр заклепки равен диаметру отверстия d_0;
- нагрузки между заклепками распределяются равномерно.

Рассмотрим простейший заклепочный шов — однородный односрезный внахлестку. При нагружении соединения силами F, листы стремятся сдвинуться относительно друг друга. Запишем условие прочности заклепки на срез (разрушение стержня заклепки нахлесточного соединения происходит по сечению, лежащему в плоскости стыка соединяемых деталей)

$$\tau_{cp} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d_0^2}{4}} \le [\tau]_{cp},$$

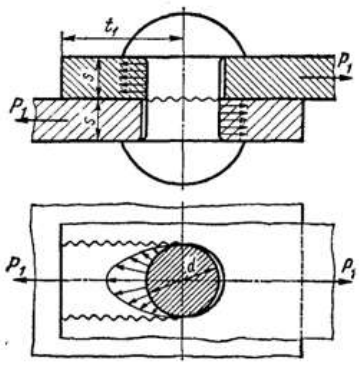


Рисунок 2

отсюда требуемый диаметр заклёпки:

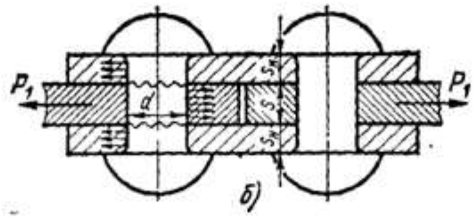
$$d \ge \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau]_{cp}}}$$

В зонах контакта боковых поверхностей заклепки с листами происходит сжатие материалов. Давление в зоне контакта называют напряжением смятия.

Считая, что эти напряжения равномерно распределены по площади смятия, запишем условие прочности

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} = \frac{F}{h \cdot d} \le [\sigma]'_{см}$$

Здесь $A_{см}$ — площадь смятия, условно равная площади проекции поверхности контакта на плоскость, перпендикулярную действующей силе;
$[\sigma]'_{см}$ — допускаемое напряжение на смятие для менее прочного из контактирующих материалов.
Рассмотрим многорядное двух срезное заклепочное соединение с двумя накладками.



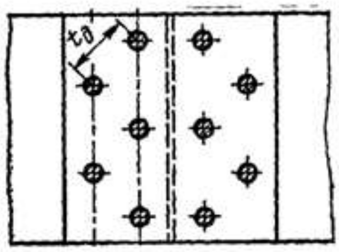


Рисунок 3

$$\tau_{ср} = \frac{F}{i \cdot \dfrac{\pi \cdot d_0^2}{4} \cdot z} \le [\tau]_{ср}$$

где i — число плоскостей среза одной заклепки;
z — число заклепок.

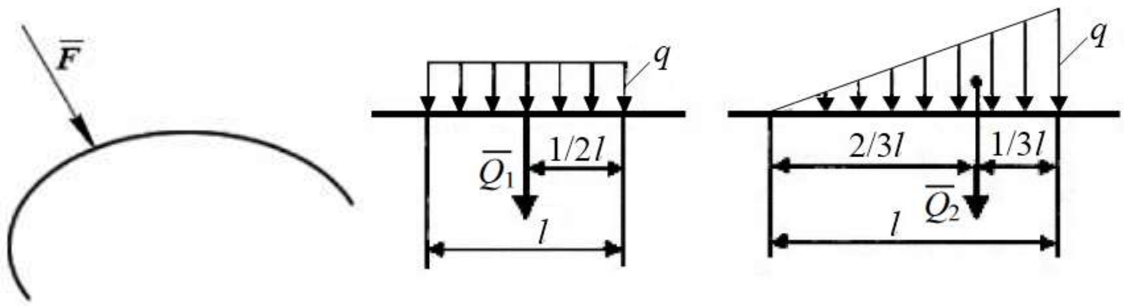
Лекция 47

1. Основные понятия и аксиомы статики

1.1. Основные понятия статики

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия тел, находящихся под действием сил.
Силой называется физическая величина, являющаяся мерой механического взаимодействия тел. Сила – величина векторная. Она характеризуется величиной (модулем), направлением и точкой приложения. Основной единицей измерения силы является Ньютон [Н].
В статике все тела считаются *абсолютно твёрдыми*, то есть под действием сил их форма и размеры остаются неизменными.
Совокупность сил, приложенных к телу, называется *системой сил*. Если все силы лежат в одной плоскости, то такая система сил называется *плоской*. Если силы не

лежат в одной плоскости, то они образуют *пространственную систему сил*. Тело, которое из данного положения может переместиться в любое положение в пространстве, называется *свободным телом*.
Две системы сил называют *эквивалентными* одна другой, если каждая из них, действуя по отдельности, может сообщить покоящемуся телу одно и то же движение $\left(\overline{F}_1,\overline{F}_2,\overline{F}_3\right)\infty\left(\overline{Q}_1,\overline{Q}_2\right)$.
Система сил, под действием которой покоящееся тело не изменяет своего состояния покоя, называется *уравновешенной* или *эквивалентной нулю* – $\left(\overline{F}_1,\overline{F}_2,\ldots,\overline{F}_n\right)\infty 0$.
Сила, которая одна заменяет действие системы сил на твёрдое тело, называется *равнодействующей* – $\left(\overline{F}_1,\overline{F}_2,\ldots,\overline{F}_n\right)\infty \overline{R}$.
Силы могут быть *сосредоточенные* (рис. 1.1, а) и *распределенные* (рис. 1.1, б). Сила, приложенная к какой-нибудь одной точке тела, называется *сосредоточенной*. Система *распределенных сил* характеризуется интенсивностью q, т.е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. Измеряется интенсивность в Ньютонах, деленных на метры (Н/м).



а *б*

Рис. 1.1

Распределенную нагрузку в виде прямоугольника (равномерно распределенная нагрузка) или треугольника заменяют одной силой (равнодействующей), которую прикладывают в центре тяжести площади распределения (рис. 1.1, б). Величина равнодействующей численно равна площади фигуры, образованной распределенной нагрузкой: $Q_1 = ql$, $Q_2 = \frac{1}{2}ql$.

1.2. Аксиомы статики

В основе статики лежат некоторые основные положения (*аксиомы*), которые являются обобщением многовекового производственного опыта человечества и теоретических исследований.
Аксиома 1. Если на свободное абсолютно твёрдое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис.1.2).

$$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2 \text{ и } \left(\overline{F}_1,\overline{F}_2\right)\infty 0$$

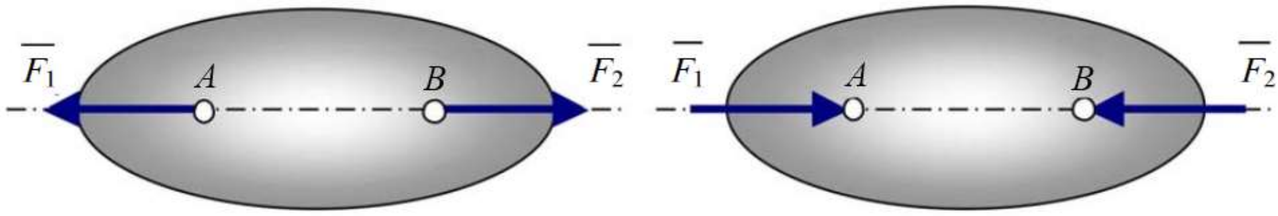


Рис.1.2

Аксиома 2. Действие данной системы сил на абсолютно твёрдое тело не изменится, если к ней прибавить или от неё отнять уравновешенную систему сил. Если $(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2) \infty 0$, то $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3) \infty (\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{Q}_1, \overline{Q}_2)$.

Следствие: действие силы на абсолютно твёрдое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль её линии действия в любую другую точку тела. Пусть на тело действует приложенная в точке *A* сила $\overline{F}$. Выберем на линии действия этой силы произвольную точку *B*, и приложим к ней уравновешенные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, причём $\overline{F}_1 = \overline{F}$, $\overline{F}_2 = -\overline{F}$. Так как силы $\overline{F}_2$ и $\overline{F}$ образуют уравновешенную систему сил, то согласно второй аксиоме статики их можно отбросить. В результате на тело будет действовать только одна сила $\overline{F}_1$, равная $\overline{F}$, но приложенная в точке *B* (рис.1.3).

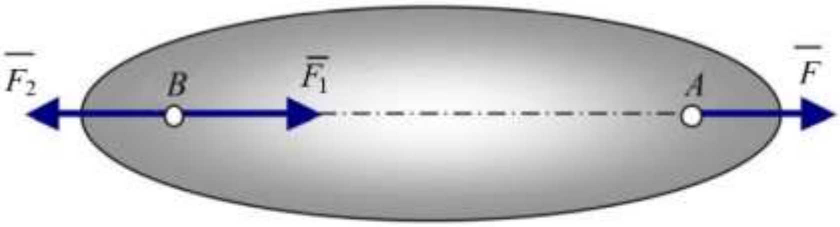


Рис.1.3

Аксиома 3. Две силы, приложенные к твёрдому телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах. Вектор $\overline{R}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, называется геометрической суммой векторов $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ (рис.1.4).

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{R}$$

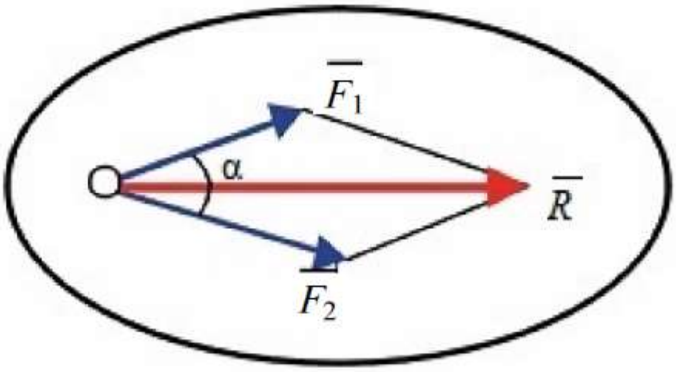


Рис.1.4

Аксиома 4. Закон равенства действия и противодействия. При всяком действии одного тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие (рис.1.5).

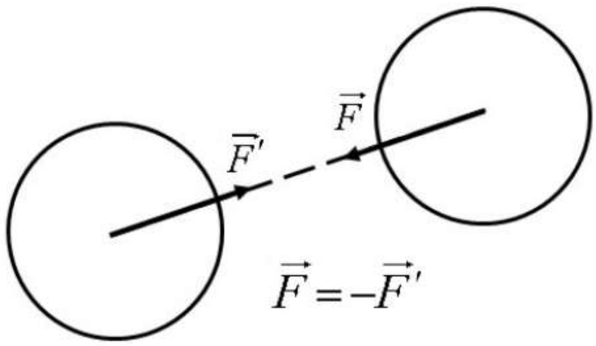


Рис.1.5

Аксиома 5. Принцип отвердевания. Равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действи-ем данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим, т.е. абсолютно твёрдым.

1.3. Виды связей и их реакции

Связями называются любые ограничения, препятствующие перемещению тела в пространстве.

Тело, стремясь под действием приложенных сил осуществить переме-щение, которому препятствует связь, будет действовать на нее с некоторой силой, называемой *силой давления на связь*. По закону о равенстве действия и противодействия, связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой.

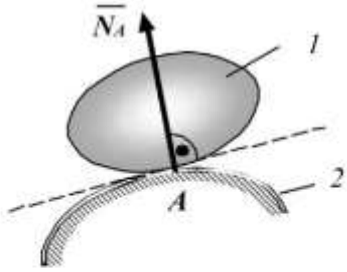
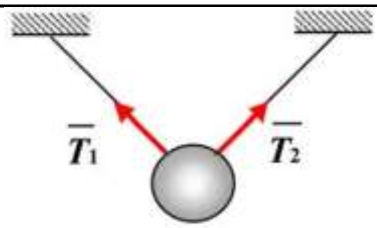
Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным перемещениям, называется *силой реакции (реакцией) связи*.

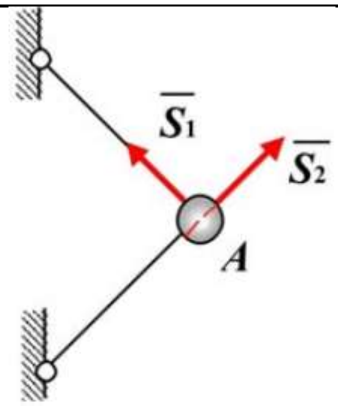
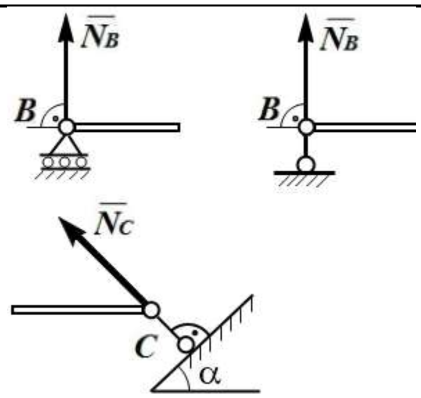
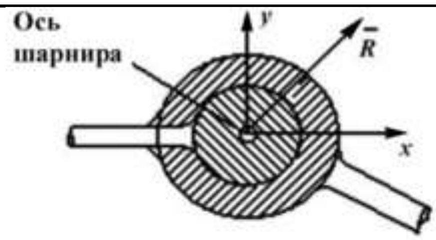
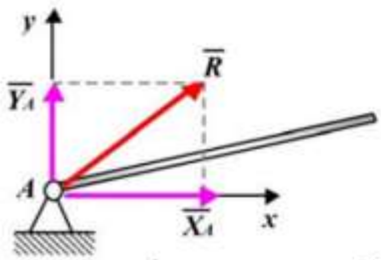
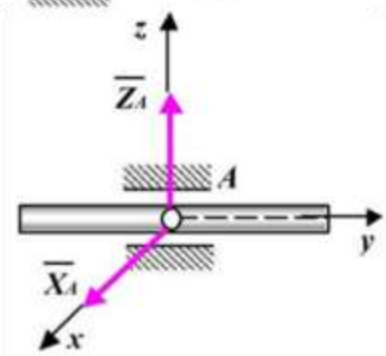
Одним из основных положений механики является *принцип освобождаемости от связей*: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями связей. Реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

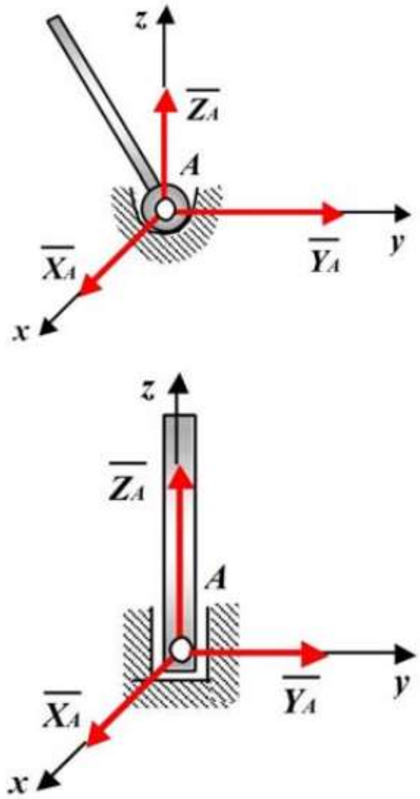
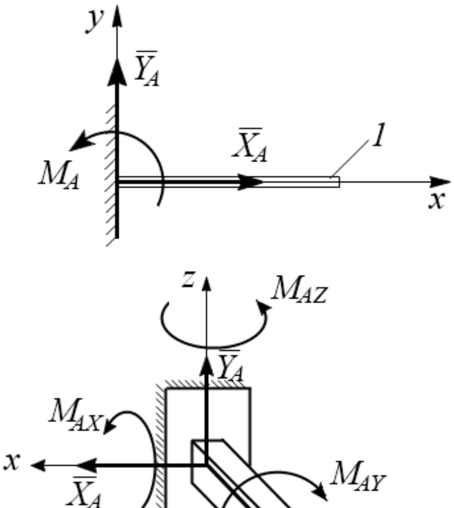
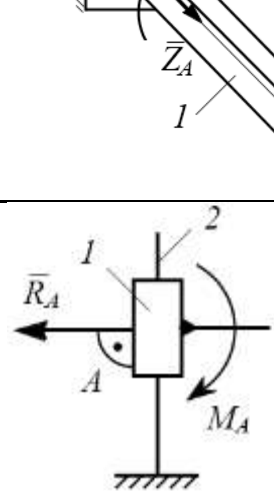
Основные виды связей и их реакции приведены в таблице 1.1.

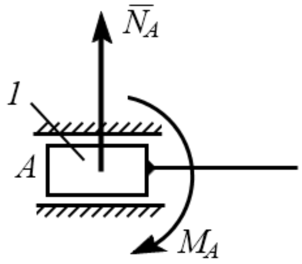
Таблица 1.1

Виды связей и их реакции

№	Наименование связи	Условное обозначение
1	**Гладкая поверхность (опора)** – поверхность (опора), трением о которую данного тела можно пренебречь. При свободном опирании реакция $\vec{N}_A$ направляется перпендикулярно касательной, проведенной через точку *A* контакта тела *1* с опорной поверхностью *2*.	
2	**Нить (гибкая, нерастяжимая).** Связь, осуществлённая в виде нерастяжимой нити, не позволяет телу удаляться от точки подвеса. Поэтому реакция нити направлена вдоль нити к точке её	

	подвеса.	
3	**Невесомый стержень** – стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой нагрузкой можно пренебречь. Реакция невесомого шарнирно прикрепленного прямолинейного стержня направлена вдоль оси стержня.	
4	**Подвижный шарнир, шарнирно-подвижная опора.** Реакция направлена по нормали к опорной поверхности.	
5	**Цилиндрический шарнир (подшипник, шарнирно-неподвижная опора).** При осуществлении связи в виде цилиндрического шарнира одно тело может поворачиваться относительно другого вокруг общей оси, называемой *осью шарнира*. Реакция $\overline{R}$ цилиндрического шарнира заранее не известна ни по величине, ни по на-правлению; может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Модуль и направление полной реакции определяют две составляющие реакции в этой плоскости.	

6	**Сферический (шаровый) шарнир, подпятник.** Тела, соединённые с помощью сферического шарнира, могут как угодно поворачиваться относительно центра шарнира. Реакция сферического шарнира $\overline{R}$ может иметь любое направление в пространстве. Реакция сферического шарнира и подпятника (подшипника с упором) может иметь любое направление в пространстве. Три составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$ реакции определяют модуль и направление полной реакции.	
7	**Жесткая заделка.** В плоскости жесткой заделки будут две составляющие реакции $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и момент пары сил M_A, который препятствует повороту балки *1* относительно точки *A*. Жесткая заделка в пространстве отнимает у тела 1 все шесть степеней свободы – три переме-щения вдоль осей координат и три поворота относительно этих осей. В пространственной жесткой заделке будут три составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$ и три момента пар сил M_{Ax}; M_{Ay}; M_{Az}.	
8	**Ползун *1* на стержне *2*.** Рекция $\overline{R}$ направлена перпендикулярно стержню *2*, момент пары сил M_A препятствует повороту ползуна *1* относительно точки *A*.	

9	**Ползун *1* в направляющих.** Рекция $\vec{N}_A$ направлена перпендикулярно направляющим, момент пары сил M_A препятствует повороту ползуна *1* относительно точки *A*.	

Контрольные вопросы

11. Что называется Статикой?
12. Что называется силой?
13. Что называется свободным телом?
14. Какие виды связей бывают?
15. Зарисовать Невесомый стержень

Лекция 48

Геометрический способ определения равнодействующей плоской системы

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется сходящейся (рис. 2.1).
Необходимо определить равнодействующую системы сходящихся сил (F1; F2; F3; …; Fn), n — число сил, входящих в систему
По следствию из аксиом статики, все силы системы можно переместить вдоль линии действия, и все силы окажутся приложенными в одной точке.

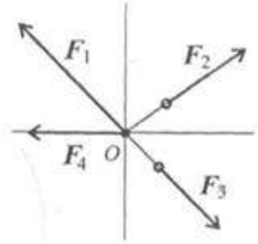


Рис. 2.1
Равнодействующая сходящихся сил

Равнодействующую двух пересекающихся сил можно определить с помощью параллелограмма или треугольника сил (4-я аксиома) (рис. 2.2).

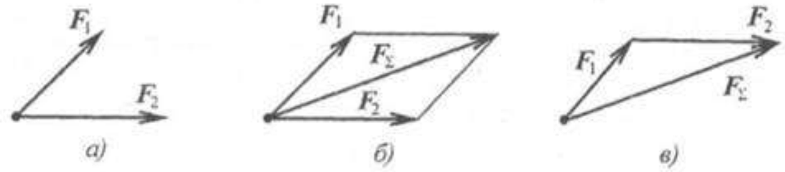


Рис. 2.2

Используя свойства векторной суммы сил, можно получить равнодействующую любой сходящейся системы сил, складывая последовательно силы, входящие в систему. Образуется многоугольник сил (рис. 2.3). Вектор равнодействующей силы соединит начало первого вектора с концом последнего.

При графическом способе определения равнодействующей векторы сил можно вычерчивать в любом порядке, результат (величина и направление равнодействующей) при этом не изменится.

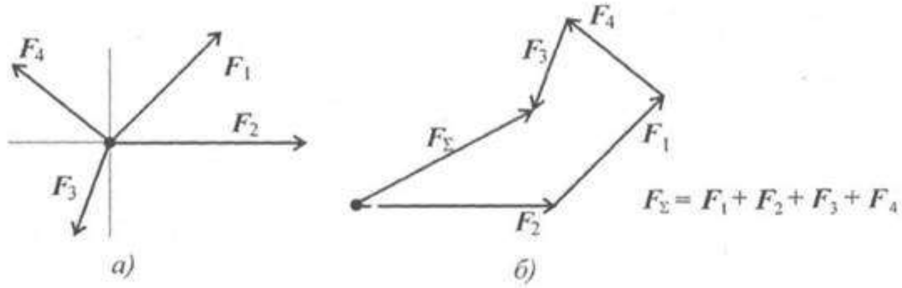


Рис. 2.3

Вектор равнодействующей направлен навстречу векторам сил-слагаемых. Такой способ получения равнодействующей называют геометрическим.

7. Геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил.

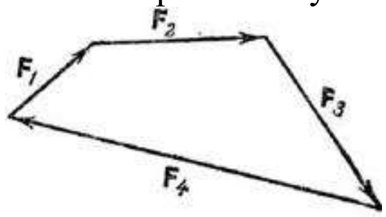


Рис. 2.3

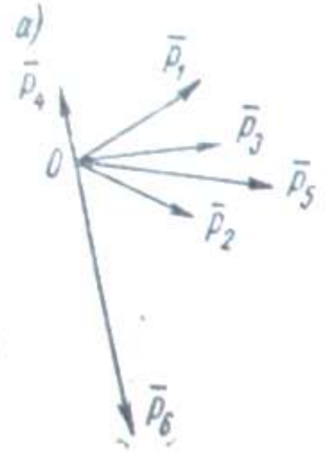
(F_1, F_2, ... ,F_n)~R => для равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы их равнодействующая равнялась нулю: R = 0. Следовательно, в силовом многоугольнике уравновешенной системы сходящихся сил конец последней силы должен совпадать с началом первой силы; в этом случае говорят, что силовой многоугольник замкнут (рис. 2.3). Это условие используется при графическом решении задач для плоских систем сил. Векторное равенство R=0 эквивалентно трем скалярным равенствам: $R_x=\sum F_{kx}=F_{1x}+F_{2x}+\ldots+F_{nx}=0$; $R_y=\sum F_{ky}=F_{1y}+F_{2y}+\ldots+F_{ny}=0$; $R_z=\sum F_{kz}=F_{1z}+F_{2z}+\ldots+F_{nz}=0$; где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}– проекции силы F_k на оси, а R_x, R_y, R_z– проекции равнодействующей на те же оси. Т. е. для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно равенства нулю алгебраических сумм проекций всех сил данной системы на каждую из координатных осей. Для плоской системы сил пропадает условие, связанное с осью Z. Условия равновесия позволяют проконтролировать, находится ли в равновесии заданная система сил.

9) Равнодействующая сходящихся сил (начертить)?
10) Равнодействующую двух пересекающихся сил (начертить)?
11) Вектор равнодействующей направлен навстречу векторам сил-слагаемых (начертить)?
12) Геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил. (начертить)?

Лекция №3

Проекция векторной суммы на ось. Теорема о проекции векторной суммы

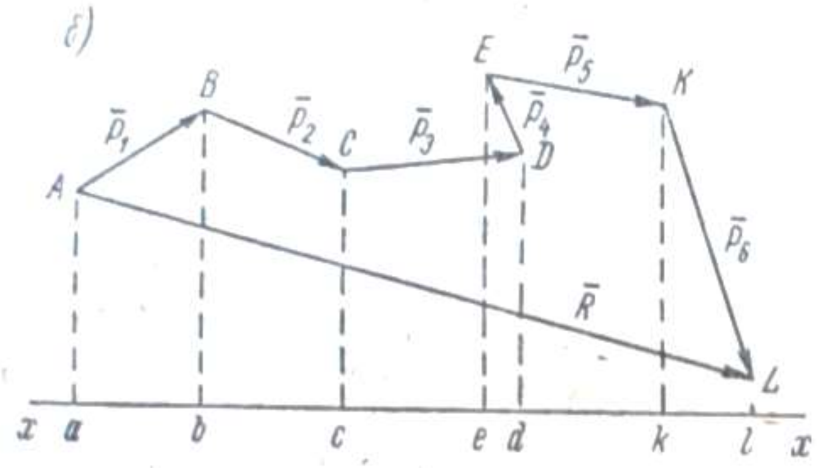
Заданы сходящиеся силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5, \bar{P}_6$ (рис. а).



Геометрическая сумма, или равнодействующая, этих сил

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_4 + \bar{P}_5 + \bar{P}_6$$

определяется замыкающей стороной $\bar{AL} = \bar{R}$ силового многоугольника (рис. б).



Спроектируем все вершины силового многоугольника ABCDEKL на ось x и обозначим их проекции соответственно a, b, c, d, e, k, l.
Проекции сил на ось x изобразятся отрезками:
P1x = ab; P2x = bc; P3x = cd;
P4x =—de; P5x = ek; P6x = kl.
Сумму проекций можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{P}_{ix} = \bar{P}_{1x} + \bar{P}_{2x} + \bar{P}_{3x} + \ldots + \bar{P}_{6} = ab + bc + cd - de + ek + rl = al$$

Так как al есть проекция равнодействующей силы $\bar{R}$ на ось x, т.е. al = Rx , то

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \ldots + P_{6x}$$

или

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix},$$

где n — число слагаемых векторов.

Следовательно, проекция векторной суммы на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

В плоскости геометрическую сумму сил можно спроектировать на две координатные оси, а в пространстве соответственно на три.

Лекция№49

Аналитический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил

Величина равнодействующей равна векторной (геометрической) сумме векторов системы сил. Определяем равнодействующую геометрическим способом. Выберем систему координат, определим проекции всех заданных векторов на эти оси (рис. 3.4а). Складываем проекции всех векторов на оси x и y.

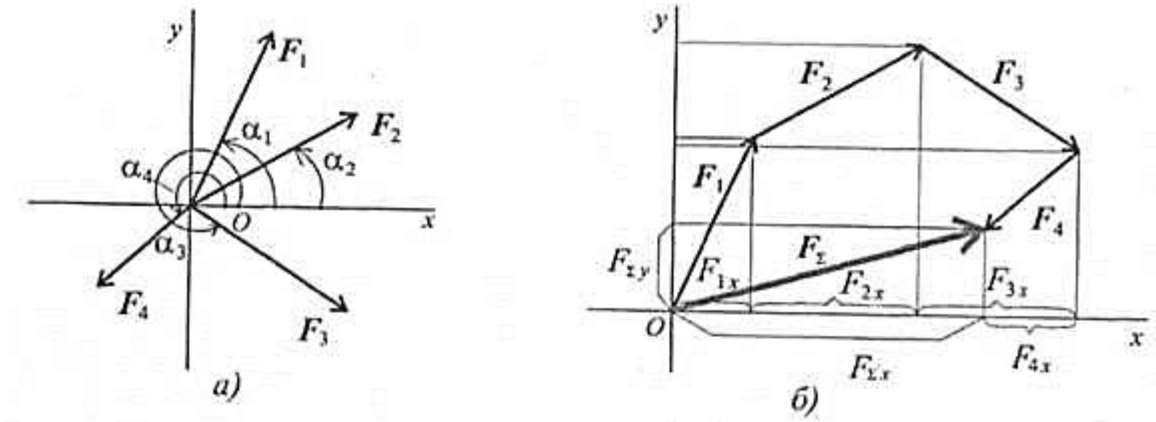


Рис.3.4

FΣч = Flx + F2x + F3x + F4x; FΣн = Fly + F2y + F3y + F4y;

Модуль (величину) равнодействующей можно найти по известным проекциям:

Направление вектора равнодействующей можно определить по величинам и знакам косинусов углов, образуемых равнодействующей с осями координат (рис. 3.5). Растяжение сжатие Продольные силы и определение напряжений

$$\cos\alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_\Sigma}; \quad \cos\alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_\Sigma}$$

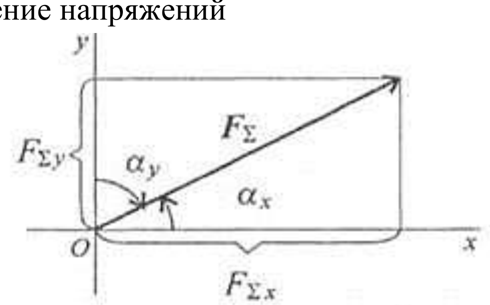


Рис.3.5

Рис.3.5
Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме
Исходя из того, что равнодействующая равна нулю, получим:
FΣ = 0.

Условия равновесия в аналитической форме можно сформулировать следующим образом:
Плоская система сходящихся сил находится в равновесии, если алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равна нулю.
Система уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил:
В задачах координатные оси выбирают так, чтобы решение было наиболее простым. Желательно, чтобы хотя бы одна неизвестная сила совпадала с осью координат.
Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства механического движение тел, без учета их масс и действующих на них сил

Контрольные вопросы
1)Что называется Кинематикой?
2) Определение аналитический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил?
3)Как найти модуль величину равнодействующей?

Лекция 50

Рациональный выбор координатных осей.

Перейдем к рассмотрению аналитического (численного) метода решения задач статики. Этот метод основывается на понятии о проекции силы на ось. Как и для всякого другого вектора, проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы. Проекция имеет знак плюс, если перемещение от ее начала к концу происходит в положительном направлении оси, и знак минус - если в отрицательном. Из определения следует, что проекции данной силы на любые параллельные и одинаково направленные оси равны друг другу. Этим удобно пользоваться при вычислении проекции силы на ось, не лежащую в одной плоскости с силой.

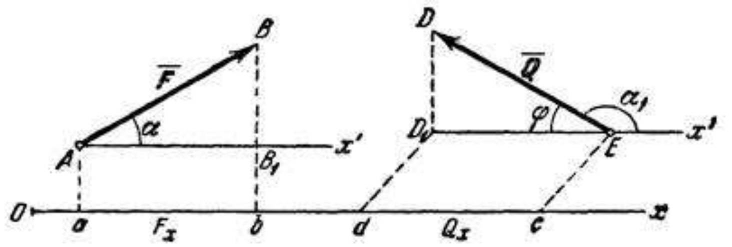


Рис. 1

Обозначать проекцию силы $\bar{F}$ на ось Ох будем символом Fx. Тогда для сил, изображенных на рис.1, получим:
$F_x = AB_1 = ab, \; Q_x = -ED_1 = -ed.$
Но из чертежа видно, что $AB_1 = Fcos\alpha, \;\; ED_1 = Qcos\beta = -Qcos\alpha_1.$
Следовательно,
$F_x = Fcos\alpha, \;\; Q_x = -Qcos\varphi = Qcos\alpha_1,$
т. е. проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси. При этом проекция будет положительной, если угол

между направлением силы и положительным направлением оси - острый, и отрицательной, если этот угол - тупой; если сила перпендикулярна к оси, то ее проекция на ось равна нулю.

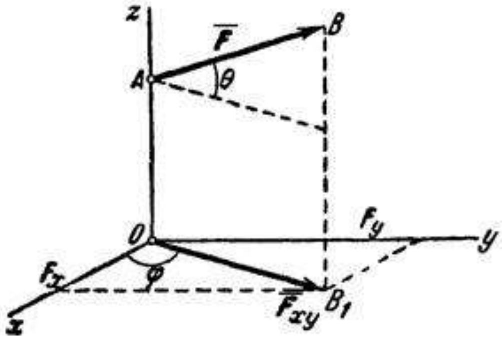


Рис.2

Проекцией силы $\bar{F}$ на плоскость Oxy называется вектор $F_{xy} = OB_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\bar{F}$ на эту плоскость (рис. 2). Таким образом, в отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости Oxy. По модулю $F_{xy} = F cos\theta$, где θ — угол между направлением силы $\bar{F}$ и ее проекции F_{xy}.
В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось бывает удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось.
Например, в случае, изображенном на рис. 2, найдем таким способом, что
$F_x = F_{xy} \cdot cos\varphi = F \cdot cos\theta \cdot cos\varphi,$
$F_y = F_{xy} \cdot sin\varphi = F \cdot cos\theta \cdot sin\varphi$

Геометрический способ сложения сил.
Решение многих задач механики связано с известной из векторной алгебры операцией сложения векторов и, в частности, сил. Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, будем называть главным вектором этой системы сил. Понятие о геометрической сумме сил не следует смешивать с понятием о равнодействующей, для многих систем сил, как мы увидим в дальнейшем, равнодействующей вообще не существует, геометрическую же сумму (главный вектор) можно вычислить для любой системы сил.
Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ (рис. 3, а), откладываем от произвольной точки O (рис. 3, б) вектор Oa, изображающий в выбранном масштабе силу F1, от точки a откладываем вектор $\overline{ab}$, изображающий силу F2, от точки b откладываем вектор bc, изображающий силу F3 и т. д.; от конца m предпоследнего вектора откладываем вектор mn, изображающий силу Fn. Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\overline{On} = \bar{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:
$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n$ или $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$.

От порядка, в котором будут откладываться векторы сил, модуль и направление $\bar{R}$ не зависят. Легко видеть, что проделанное построение представляет собою результат последовательного применения правила силового треугольника.

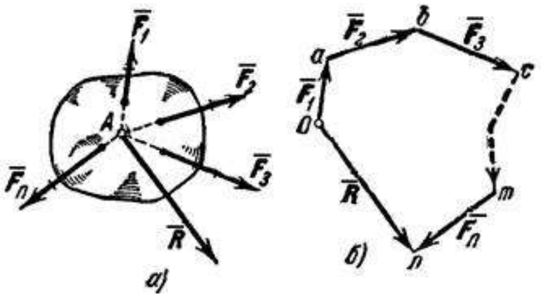


Рис.3

Фигура, построенная на рис. 3,б, называется силовым (в общем случае векторным) многоугольником. Таким образом, геометрическая сумма или главный вектор нескольких сил изображается замыкающей стороной силового многоугольника, построенного из этих сил (правило силового многоугольника). При построении векторного многоугольника следует помнить, что у всех слагаемых векторов стрелки должны быть направлены в одну сторону (по обводу многоугольника), а у вектора $\bar{R}$ - в сторону противоположную.

Равнодействующая сходящихся сил. При изучении статики мы будем последовательно переходить от рассмотрения более простых систем сил к более сложным. Начнем с рассмотрения системы сходящихся сил.

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называемой центром системы (см. рис. 3, а).

По следствию из первых двух аксиом статики система сходящихся сил, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (на рис. 3, а в точке А).

Последовательно применяя аксиому параллелограмма сил, приходим к выводу, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке их пересечения. Следовательно, если силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ сходятся в точке А (рис. 3, а), то сила, равная главному вектору $\bar{R}$, найденному построением силового многоугольника, и приложенная в точке А, будет равнодействующей этой системы сил.

Примечания.

1. Результат графического определения равнодействующей не изменится, если силы суммировать в другой последовательности, хотя при этом мы получим другой силовой многоугольник - отличный от первого.
2. Фактически силовой многоугольник, составленный из векторов сил заданной системы, является ломаной линией, а не многоугольником в привычном смысле этого слова.
3. Отметим, что в общем случае этот многоугольник будет пространственной фигурой, поэтому графический метод определения равнодействующей удобен только для плоской системы сил.

Лекция 51

Эквивалентные пары.

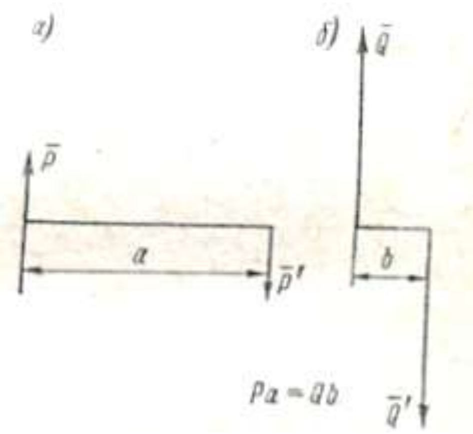
В соответствии с определением **эквивалентных** систем сил (см. — здесь), две пары сил считают **эквивалентными** в том случае, если после **замены** одной пары другой парой **механическое состояние тела не изменяется**, т. е. **не изменяется движение** тела или **не нарушается его равновесие**.

Эффект действия пары сил на твердое тело **не зависит от ее положения в плоскости**. Таким образом, пару сил **можно переносить в плоскости ее действия в любое положение**.

Рассмотрим еще одно **свойство** пары сил, которое является **основой** для **сложения** пар.

Не нарушая состояния тела, **можно как угодно изменять величины сил и плечо пары**, только бы **момент пары** оставался **неизменным**.

Рассмотрим **пару** сил ***PP'*** плечом ***a*** (рис. ***а***).



Заменим эту пару **новой** парой ***QQ'*** с плечом ***b*** (рис. ***б***) так, чтобы **момент пары остался тем же.**

Момент **заданной** пары сил $M_1 = Pa$. Момент **новой** пары сил $M_2 = Qb$. По определению пары сил **эквивалентны**, т. е. производят **одинаковые** действия, если их моменты **равны**.

Если, **изменив величину сил и плечо новой пары**, мы **сохраним равенство их моментов** $M_1 = M_2$ или $Pa = Qb$, то состояние тела от такой замены **не нарушится**.

Итак, вместо заданной пары ***PP'*** с плечом ***a*** мы получили **эквивалентную** пару ***QQ'*** с плечом ***b***.

Лекция 52

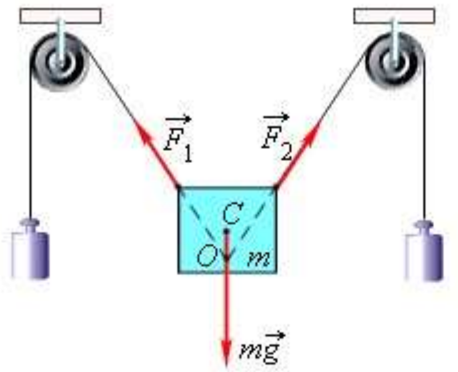
Условие равновесия

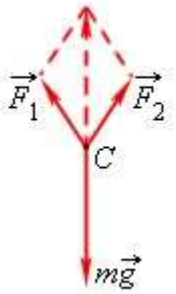
Тело находится в состоянии покоя (или движется равномерно и прямолинейно), если векторная сумма всех сил, действующих на него, равна нулю. Говорят, что силы уравновешивают друг друга. Когда мы имеем дело с телом определенной геометрической формы, при вычислении равнодействующей силы можно все силы прикладывать к центру масс тела.

Условие равновесия тел

Чтобы тело, которое не вращается, находилось в равновесии, необходимо, чтобы равнодействующая всех сил, действующий на него, была равна нулю.

→F=−→F1+−→F2+..+−→Fn=0F→=F1→+F2→+..+Fn→=0.





На рисунке выше изображено равновесие твердого тела. Брусок находится в состоянии равновесия под действием трех действующих не него сил. Линии действия сил −→F1F1→ и −→F2F2→ пересекаются в точке ОО. Точка приложения силы тяжести - центр масс тела СС. Данные точки лежат на одной прямой, и при вычислении равнодействующей силы −→F1F1→, −→F2F2→ и m→gmg→ приводятся к точке СС.

Равновесие вращающегося тела. Правило моментов

Условия равенства нулю равнодействующей всех сил недостаточно, если тело может вращаться вокруг некоторой оси.

Плечом силы dd называется длина перпендикуляра, проведенного от линии действия силы к точке ее приложения. Момент силы ММ - произведение плеча силы на ее модуль.

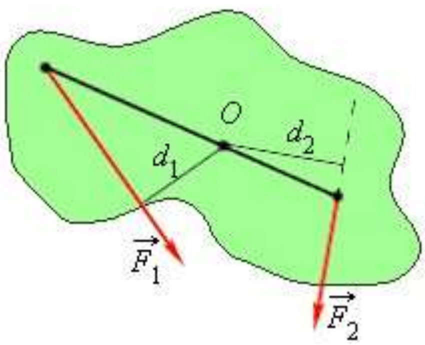
M=d·FM=d·F.

Момент силы стремится повернуть тело вокруг оси. Те моменты, которые поворачивают тело против часовой стрелки, считаются положительными. Единица измерения момента силы в международной системе СИ - 1 *Ньютон*/*метр*1 Ньютонметр.

Определение. Правило моментов

Если алгебраическая сумма всех моментов, приложенных к телу относительно неподвижной оси вращения, равна нулю, то тело находится в состоянии равновесия.

M1+M2+..+Mn=0M1+M2+..+Mn=0



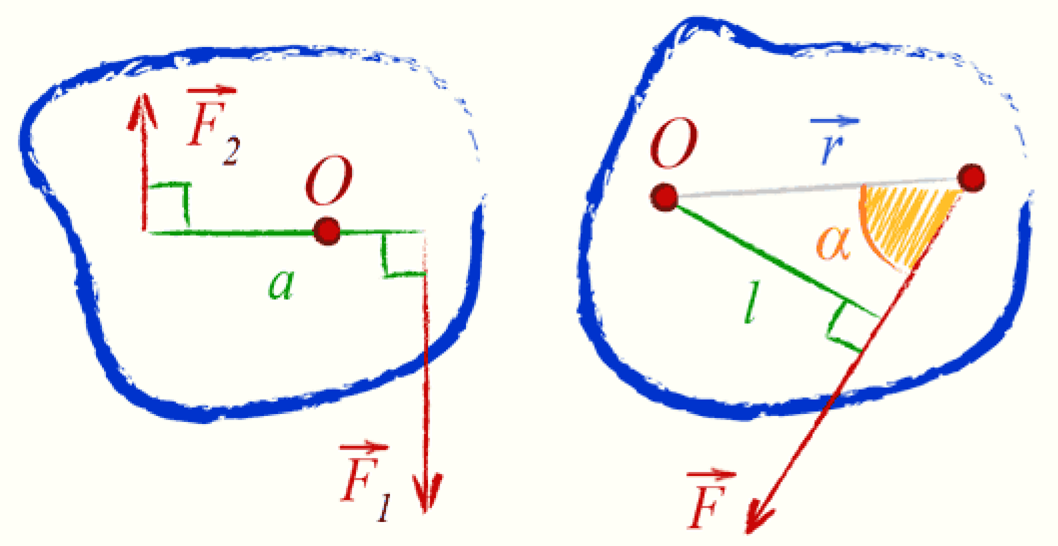
Важно!

В общем случае для равновесия тел необходимо выполнение двух условий: равенство нулю равнодействующей силы и соблюдение правила моментов.

Лекция 53

Моменты сил относительно точки.

Сила приложенная к твердому телу, которое может вращаться вокруг некоторой точки, создает момент силы. Действие момента силы аналогично действию пары сил.



Момент силы относительно некоторой точки — это векторное произведение *силы* на *кратчайшее расстояние* от этой точки до линии действия силы.
Единица СИ момента силы:

1. $[M]=$ *Ньютон · метр*

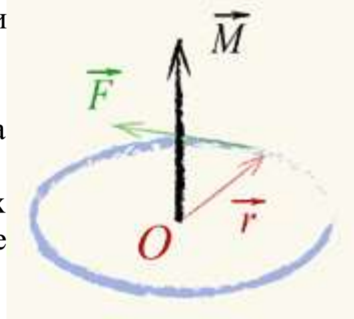
Если:
M — момент силы (Ньютон · метр),
F — Приложенная сила (Ньютон),
r — расстояние от центра вращения до места приложения силы (метр),
l — длина перпендикуляра, опущенного из центра вращения на линию действия силы (метр),
α — угол, между вектором силы F и вектором положения r,
То

2. $M = F \cdot l = F \cdot r \cdot \sin(\alpha)$

или в виде векторного произведения

3. $\vec{M} = \vec{F} \cdot \vec{r}$

Момент силы — *аксиальный вектор*. Он направлен вдоль оси вращения.



Направление вектора момента силы определяется правилом буравчика, а величина его равна *M*.
Аксиальные векторы не связаны с определенной линией действия. Их можно перемещать в пространстве параллельно самим себе (свободные векторы).

Лекция 54

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ ПРИВЕДЕНИЕ СИЛЫ К ТОЧКЕ

Плоская система произвольно расположенных сил — это система сил, линии действия которых расположены в одной плоскости произвольным образом.
Рассмотрим случай переноса силы в произвольную точку, не лежащую на линии действия силы.
Теорема. Действие силы на тело не изменится, если ее перенести параллельно самой себе в любую точку тела, присоединяя при этом некоторую пару сил.
Доказательство. Пусть к телу в некоторой точке *К* приложена сила *F* (рис. 1). Перенесем в произвольную точку *О* того же тела силу *F = F'* параллельно данной силе. Но чтобы равновесие не изменилось, к точке *О* надо приложить равную по величиной противоположно направленную силу *F''* (см. рис. 1).

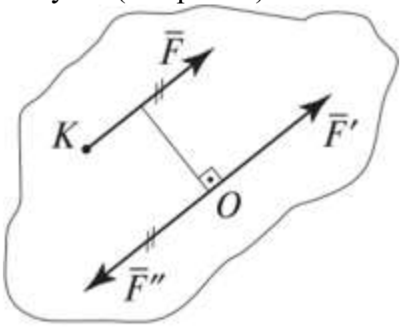


Рис. 1

Силы *F'* и *F''* взаимно уравновешиваются, и поэтому действие на тело одной данной силы *F* эквивалентно действию на него системы трех сил *F, F'* и *F''*. При этом сила *F'* может рассматриваться как сила *F,* перенесенная параллельно своему начальному направлению в точку *О,* а силы *F''* и *F* образуют пару, которую мы должны присоединить при параллельном переносе силы из точки *К* в точку *О,* чтобы сохранить действие силы при этом переносе. Теорема доказана.
Пару *(F'' F),* образующуюся при переносе точки приложения силы *F,* называют присоединенной парой.

ПРИВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ОДНОМУ ЦЕНТРУ. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ

Рассмотрим систему нескольких сил $F_р$ F_2, ..., *F* , расположенных как угодно на плоскости. Возьмем в плоскости действия сил произвольную точку *О* (рис. 1.4.2, *а),* назовем ее центром приведения. Перенесем все_ данные силы в эту точку. Мы получим систему сил *F[*, F'_2, ..., F'_n, приложенных в этой точке, и систему пар сил *(Fy, F''), (*F_2*, *F_2*)*, ..., *(*F_n*, F'')*. Приложенные в точке *О* силы *F,* F_2,..., F'_n можно сложить по правилу многоугольника и, следовательно, заменить одной эквивалентной им равнодействующей силой *F у* равной их геометрической сумме. Так как силы *F*j, F_2,..., F'_n геометрически равны данным силам $F_р$ F_v ..., F_n, то

$$\overline{F}_{\text{гл}} = \overline{F}_1' + \overline{F}_2' + \ldots + \overline{F}_n' = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k.$$

Вектор *F у* равный геометрической сумме всех сил данной системы, является главным вектором этой системы (рис. 2, *б),*

$$\overline{F}_{\text{гл}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k.$$

Модуль и направление главного вектора можно найти по формуле равнодействующей системы

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_{\text{гл}\,x}^2 + F_{\text{гл}\,y}^2}.$$

сходящихся сил:

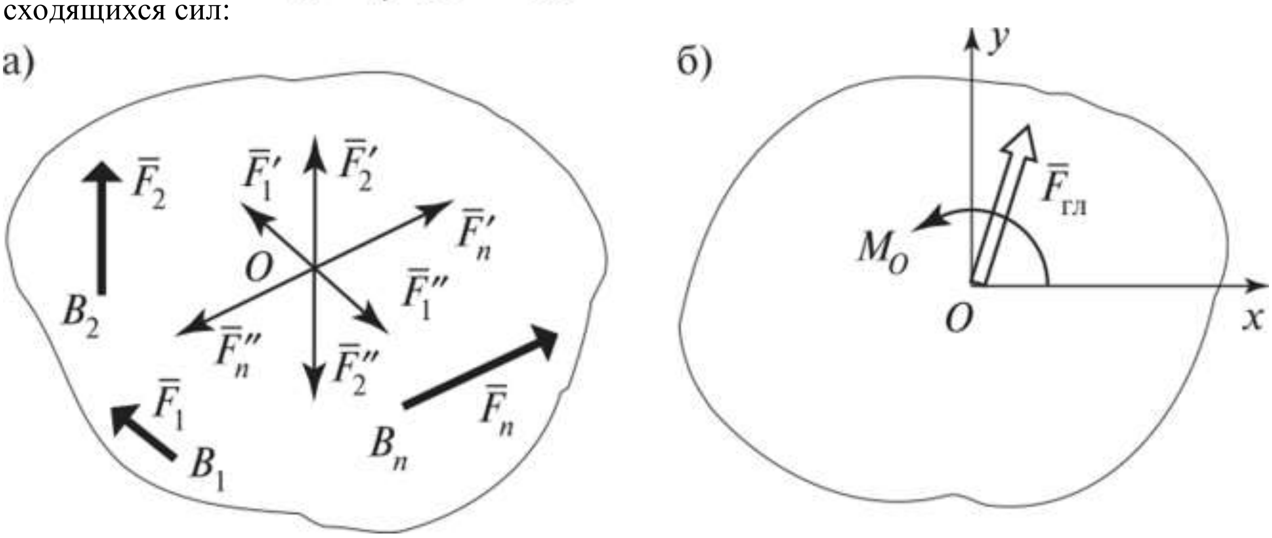


Рис. 2

Все присоединенные пары *(Fv F''), (F2, F2), ..., (Fn, F'')* можно сложить по правилу сложения пар сил, лежащих в одной плоскости, и, следовательно, заменить их одной результирующей парой. Моменты этих пар равны моментам данных сил $F_{\text{р}}$ *F2, ..., Fn* относительно центра приведения *O,* т.е.

$$M(\overline{F}_1, \overline{F}_1'') = M_O(\overline{F}_1),$$
$$M(\overline{F}_2, \overline{F}_2'') = M_O(\overline{F}_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M(\overline{F}_n, \overline{F}_n'') = M_O(\overline{F}_n).$$

Отсюда найдем момент результирующей пары M_n*:*

$$M_O = M_O(\overline{F}_1) + M_O(\overline{F}_2) + \ldots + M_O(\overline{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} M_O(\overline{F}_k).$$

Алгебраическая сумма моментов относительно какой-то точки *O* всех данных сил, расположенных произвольным образом на плоскости, называется главным моментом данной плоской системы относительно этой точки (см. рис. 2, *б):*

$$M_O = \sum_{k=1}^{n} M_O(\overline{F}_k).$$

Произвольная точка тела, в которую переносятся параллельно все силы системы, называется точкой (или центром) приведения. Итак, полученный результат можно сформулировать следующим образом: всякую плоскую систему сил всегда можно заменить одной силой, равной главному вектору системы, приложенной в произвольной точке *O*, и парой, момент которой равен главному моменту данной системы сил относительно этой точки.

Главный вектор системы не является равнодействующей силой для данной системы сил, так как он заменяет данную систему сил вместе с присоединенной парой. Модуль и направление главного вектора не зависят от выбора точки приведения, так как все силы переносятся параллельно их начальному направлению и силовой многоугольник во всех случаях будет одним и тем же.

Величина и знак главного момента зависят от центра приведения, так как с изменением центра приведения изменяются моменты сил относительно этого центра, а следовательно, и их алгебраическая сумма. Поэтому, задавая главный момент, нужно указывать, относительно какой точки он вычислен.

Лекция 55

Главный вектор и главный момент плоской системы сил

В *аналитическом методе* для вычисления главного вектора и главного момента используются проекции сил F_{ix}, F_{iy} и координаты x_i, y_i точек их приложения.

Модуль R главного вектора плоской системы сил и его направляющие косинусы e_x, e_y вычисляются по следующим формулам:

$$R = (R_x + R_y)^{1/2};\ e_x = R_x / R;\ e_y = R_y / R;\ R_x = \sum F_{ix};\ R_y = \sum F_{iy}.$$

Здесь в суммировании проекций можно не включать силы, образующие пары сил (**F**$_k$, **F'**$_k$), **F**$_k$ = -**F'**$_k$, поскольку суммы проекций таких двух сил на любую ось равны нулю.

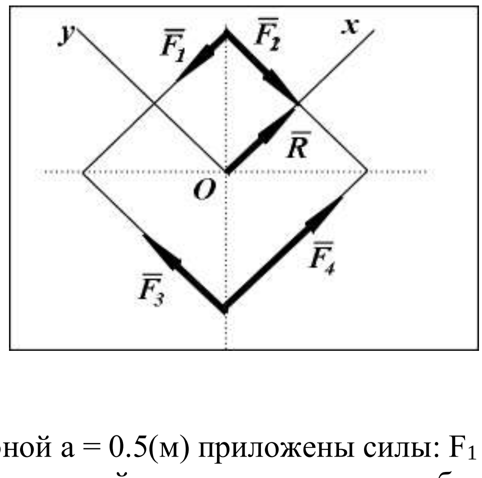
Алгебраический главный момент L_O плоской системы сил относительно центра O (начала координатных осей) вычисляется по формуле:

$$L_O = \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) + \sum M_k.$$

Здесь во вторую сумму выделены алгебраические моменты M_k пар сил (**F**$_k$, **F'**$_k$).

В случаях, когда плечи h_i всех сил определяются достатосно просто (например, если силы параллельны координатным осям Ox и Oy), величина L_O может быть вычислена по формуле:

$$L_O = \sum \pm F_i h_i + \sum M_k.$$



. К вершинам квадрата со стороной a = 0.5(м) приложены силы: F_1 = 4(H); F_2 = F_3 = 8(H); F_4 = 12(H). Определить главный вектор этой системы сил и ее алгебраический главный момент относительно центра квадрата O.

Решение. Введем координатную систему Oxy, оси которой параллельны сторонам квадрата (в такой системе координат расчеты проводятся наиболее простым образом).

Силы **F**$_2$,**F**$_3$ образуют пару сил с моментом $M_{23} = -F_2 \cdot a = -4(H \cdot м)$ и их можно не учитывать при вычислении проекций главного вектора **R**:

$$R_x = F_{1x} + F_{4x} = -F_1 + F_4 = -4 + 12 = 8(H);$$
$$R_y = F_{1y} + F_{4y} = 0.$$
Вычисление алгебраического главного момента L_O проведем с использованием плеч сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_4$, равных половине длины стороны квадрата (a/2):
$$L_O = F_1 \cdot a/2 - F_4 \cdot a/2 + M_{23} = 1 - 4 + 3 = 0.$$
Таким образом, для заданной системы сил ее главный вектор равен по модулю R = 8(H) и направлен вдоль оси Ox, а ее алгебраический главный момент $L_O = 0$.

Замечание. В случае, когда $L_O = 0$, главный вектор **R** является *равнодействующей силой* заданной системы сил.

Лекция 56

Уравнения равновесия

Проекция силы на ось - характеризует действие этой силы вдоль этой оси.

То есть Проекция силы на ось Ox (Px=∑Xi) характеризует действие этой силы вдоль оси Ox.

А проекция силы на ось Oy (Py=∑Yi) характеризует действие этой силы вдоль оси Oy.

И если сумма проекций всех сил на ось Ox равна нулю (∑Xi=0)– значит действие этих сил вдоль этой оси Ox нет , силы вдоль этой оси друг друга уравновешивают.

И если сумма проекций всех сил на ось Oy равна нулю (∑Yi=0)- значит действие этих сил вдоль этой оси Oy нет , силы друг друга вдоль этой оси Oy уравновешивают.

Вращательное действие силы относительно точки O характеризует момент этой силы относительно этой точки O (M0(P)=0) .

И если сумма моментов всех сил относительно точки O равно нулю (∑MO=0), то вращательного действия всех этих сил на тело относительно точки O нет, они его не производят, или их вращательные действия их взаимно уравновешены.

Теперь - если проекции всех сил на оси Ox и Oy равны нулю , и сумма моментов всех сил относительно любой - какой угодно - точки равны нулю, то тело находится в равновесии.

∑X=0∑Y=0∑MA=0

Это и есть условия равновесия тела под действием произвольной плоской системы тел:

Система сил, действующих на тело, называется сходящейся, если линии действия этих сил пересекается в одной точке.

Условие равновесия системы сходящихся сил

Для того, чтобы система сходящихся сил была уравновешенной, то есть под действием ее тело будет находится в равновесии - условие равновесия системы сходящихся сил, может быть записано :

∑Xi=0∑Yi=0

Или другими словами - для плоской системы сходящихся сил, лежащих в плоскости Oxy, соответствующие уравнения равновесия примут вид:

∑Xi=0∑Yi=0

Проекция силы на ось

Определение. Проекцией силы PP→ на ось Ox называется взятая с знаком ± длина отрезка этой оси, заключенная между проекциями на неё начала и конца вектора силы.

Эту проекцию обычно обозначают как Px или X. В соответствии с определением она равна:

PPPx=X=|P→|·cos(P→,i→)=P·cosα

PPPy=Y=|P→|·cos(P→,j→)=P·sinα

, где i→ – единичный вектор оси /Ox/, а α – угол между ним и силой PP→ (Рис.1).

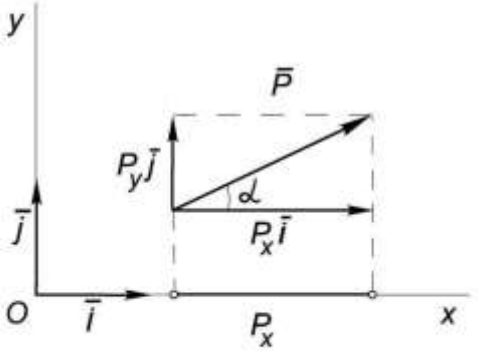


Рис.1
Таким образом:
еслиPx>0, если 0≤α<π2
еслиPx=0, если α=π2
еслиPx<0, если π2<α≤π
Проекция силы на ось равна нулю, если сила перпендикулярно оси.
Аналогично находится проекция силы P на ось Oy.
Вектор PP→ может быть выражен:
PP→=Px·i→+Py·j→=X·i→+Y·j→
А равнодействующая плоской системы двух сходящихся сил равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.
Модуль и направление искомого вектора силы P можно найти по формулам:
PPP=X2+Y2cos⁡(P→,i→)=XPcos⁡(P→,j→)=YP
Момент силы относительно центра
Приложим в точке A силу P и выясним - чем определяется момент силы относительно точки O, который характеризует вращательное действие этой силы относительно точки O (Рис.2).

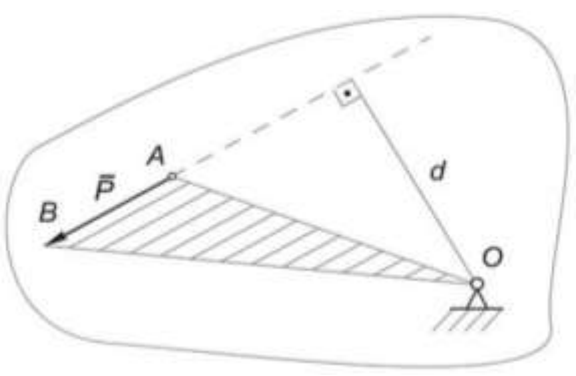


Рис.2
Очевидно, что воздействие силы на тело будет зависеть не только от ее величины, но и от того, как она направлена, и в конечном итоге будет определяться ее моментом относительно центра O.
Рассмотренное определение момента силы подходит только для плоской системы сил.
Определение 1. Моментом силы P относительно центра O называется взятое со знаком ± произведение модуля силы на ее плечо – то есть длину перпендикуляра, опущенного из моментной точки на линию действия силы.
Правило знаков: момент силы считается положительным, если сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки и отрицательным, если она вращает тело по ходу часовой стрелки.
В соответствии с данным определением момент силы численно равен удвоенной площади треугольника OAB, построенного на векторе силы P с вершиной в моментной точке: M0(P)=P·d=2SΔOAB.
Отметим, что момент силы относительно точки O равен нулю, если линия действия силы проходит через моментную точку.
Уравнения равновесия плоской системы сил
Уравнения равновесия плоской системы сил, которые можно записать в трех различных формах:

Первая форма:
$\sum X=0 \sum Y=0 \sum MA=0$
Вторая форма:
$\sum MA=0 \sum MB=0 \sum Y=0$, где ось Oy не перпендикулярна отрезку AB
Третья форма:
$\sum MA=0 \sum MB=0 \sum MC=0$, где точки A, B и C не лежат на одной прямой.
Таким образом, любая из этих трех форм эквивалентна условию равновесия плоской системы сил и наоборот.
Центр тяжести
Центр тяжести - точка, через которую проходит равнодействующая сил тяжести при любом пространственном расположении тела.
Если тело имеет ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит там.
Центр тяжести квадрата и прямоугольника - точка пересечения его диагоналей.
Центр тяжести круга - в его центре.
Центр тяжести треугольника - в точке пересечения медиан.

Лекция 57
Определение главного вектора и главного момента

Можно сказать, что главный вектор – это вектор, представляющий собой геометрическую сумму всех заданных сил, перенесенных параллельно самим себе в точку O, называемую центром приведения.
Модуль главного вектора можно определить по его проекциям Rx и Ry на оси координат Ox и Oy по формуле:
Ro = Rx + R y
где на основании теоремы о проекции равнодействующей на ось:
Rx = F1x + F2x +…+ Fnx;
Ry = F1y + F2y +…+ Fny.
Направление главного вектора определяется из выражений $\sin \alpha = Ry/R$ и $\cos \alpha = Rx/R$, где α – угол между главным вектором и положительным направлением оси x. Модуль главного момента системы получим, используя уравнения:
M = M1 + M2 + M3 +…+ Mn = Mo(F1) + Mo(F2) + Mo(F3) +…+ Mo(Ffi).
Отсюда модуль главного момента системы равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения. Если за центр приведения принять другую точку, то нетрудно убедиться, что модуль и направление главного вектора будут такими же, т. е. они не зависят от выбора центра приведения. Что же касается главного момента системы, то его модуль и направление зависят от выбора центра приведения, так как при изменении положения центра приведения изменяются плечи сил заданной системы, а значит, и их моменты. Следует также отметить, что главный вектор не является равнодействующей системы, хотя по модулю и направлению совпадает с ней. Рассмотренный случай приведения системы, когда Ro ≠ 0 и M ≠ 0, является общим. Возможны следующие частные случаи приведения:
а) главный вектор оказался равным нулю, а главный момент не равен нулю (Ro = 0, M ≠ 0), т. е. система эквивалентна одной только паре);
б) главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю (Ro ≠ 0, M = 0), т. е. система сводится к одной силе, и очевидно, что главный вектор есть равнодействующая этой системы;
в) главный вектор и главный момент системы равны нулю (Ro = 0 и M = 0) – система находится в равновесии.
Равнодействующая плоской системы сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей
Рассмотрим более подробно общий случай приведения системы, когда Ro ≠0 и M ≠ 0. Можно убедиться, что в этом случае система имеет равнодействующую, приложенную в некоторой точке, не совпадающей с центром приведения. Пусть данная система сил приведена к главному вектору Ro , приложенному в точке O, и главному моменту системы M (пара RR'). Представим последний в виде пары сил, у которых модуль равен модулю главного вектора системы. Одну из сил пары R'

приложим в центре приведения О и направим противоположно главному вектору системы. Тогда точку приложения второй силы пары R найдем, если вычислим плечо пары:
Силы Ro и R', равные и противоположно направленные, взаимно уравновешиваются, их можно отбросить согласно II аксиоме статики. Остается одна сила R = Ro, заменившая собой заданную систему сил. Она и является равнодействующей этой системы. Таким образом, мы доказали, что в общем случае, когда главный вектор и главный момент системы не равны нулю, система имеет равнодействующую, равную по модулю и направленную параллельно главному вектору в ту же сторону. Модуль момента равнодействующей R относительно центра приведения О:
Mo(R) = Ra, но произведение Ra выражает модуль главного момента системы:
Mo(R) = M = ∑Mo(Fi).
Следовательно, момент равнодействующей произвольной плоской системы сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно этого же центра (теорема Вариньона). Плоскую систему сходящихся сил и плоскую систему параллельных сил следует рассматривать как частные случаи произвольной системы. Для них также справедлива теорема Вариньона. Теоремой Вариньона широко пользуются при решении различных задач статики. В частности, ее применяют при определении равнодействующей системы параллельных сил.

Лекция 58
Центр тяжести тела

Как известно, сила тяжести тела равна векторной сумме сил тяжести, которые действуют на все материальные точки, на которые можно разбить рассматриваемое тело. Точку, к которой приложена результирующая сила тяжести, называют центром тяжести. Если известно положение центра тяжести, то можно считать, что на тело действует только одна сила тяжести, приложенная к центру тяжести.

Следует учитывать, что силы тяжести, действующие на отдельные элементы тела, направлены к центру Земли и не являются строго параллельными. Но так как размеры большинства тел на Земле много меньше ее радиуса, поэтому эти силы считают параллельными.

Определение центра тяжести тела

Центром тяжести называют точку, через которую проходит равнодействующая всех сил тяжести, действующих на материальные точки, на которые разбито рассматриваемое тело, при любом положении тела в пространстве.

Центр тяжести - это точка, относительно которой суммарный момент сил тяжести равен нулю при любом положении тела.

От положения центра тяжести зависит устойчивость всех конструкций.

Для нахождения центра тяжести тела сложной формы необходимо мысленно разбить тело на части простой формы и определить место нахождения центров тяжести для них. У тел простой формы центр тяжести определяют, используя их симметрию. Так, центр тяжести однородных диска и шара расположен в их центре, однородного цилиндра в точке на середине его оси; однородного параллелепипеда на пересечении его диагоналей и т, д. У всех однородных тел центр тяжести совпадает с центром симметрии. Центр тяжести может находиться вне тела, например, у кольца.

Определив, где расположены центры тяжести отдельных частей тела, переходят к поиску места расположения центра тяжести тела в целом. Тело представляют в виде системы материальных точек. При этом каждая точка имеет массу своей части тела и располагается в ее центре тяжести.

Центр тяжести, центр масс и центр инерции тела

Считают, что центр тяжести тела совпадают с центром масс тела, если его размеры малы в сравнении с расстоянием до центра Земли. В основной массе задач центр тяжести принимают совпадающим с центром масс тела.

Сила инерции в неинерциальных системах отсчета, движущихся поступательно, приложена к центру тяжести тела.

Но центробежная сила инерции (в общем случае) не приложена к центру тяжести, поскольку в неинерциальной системе отсчета на элементы тела действуют разные центробежные силы инерции (даже если массы элементов равны), так как расстояния до оси вращения разные.

Лекция 59

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Рассмотрим систему параллельных сил {F1, F2, …, Fn}. При повороте всех сил системы на один и тот же угол линия действия равнодействующей системы параллельных сил повернется в ту же сторону на тот же угол вокруг некоторой точки (рисунок 1, а).

Эта точка называется центром параллельных сил.

Согласно теореме Вариньона, если система сил имеет равнодействующую, то ее момент относительно любого центра (оси) равен сумме моментов всех сил системы относительно того же центра (оси).

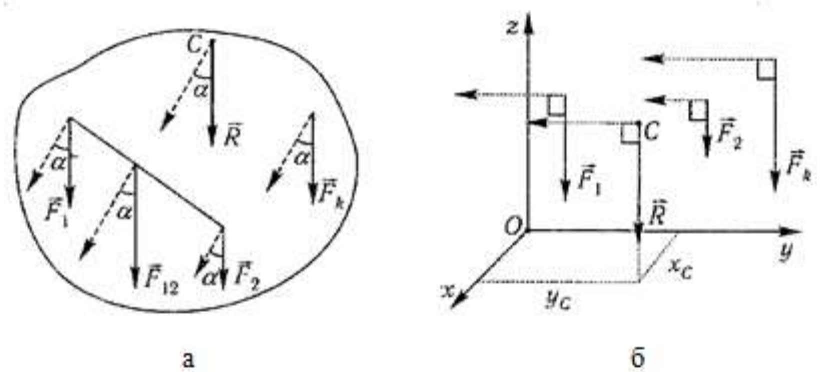


Рисунок 1.

Для определения координат центра параллельных сил воспользуемся этой теоремой.

Относительно оси x

Mx(R) = ΣMx(Fk),

— yCR = ΣykFk ,

yC = ΣykFk/ΣFk.

Относительно оси y

My(R) = ΣMy(Fk),

— xCR = ΣxkFk ,

xC = ΣxkFk/ΣFk.

Чтобы определить координату zC, повернем все силы на 90° так, чтобы они стали параллельны оси y (рисунок 1.5, б). Тогда

Mz(R) = ΣMz(Fk),

-zCR = ΣzkFk ,

zCΣzkFk/ΣFk.

Следовательно, формула для определения радиус-вектора центра параллельных сил принимает вид

rC= ΣrkFk/ΣFk.

Свойства центра параллельных сил:

Сумма моментов всех сил Fk относительно точки C равна нулю ΣMC(Fk) = 0.

Если все силы повернуть на некоторый угол α, не меняя точек приложения сил, то центр новой системы параллельных сил будет той же точкой C.

Лекция 60

Определение центра тяжести сложной фигуры.

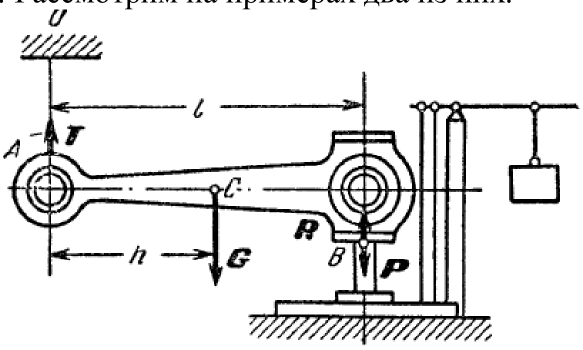
Для определения положения центра тяжести фигур и тел сложной геометрической формы их мысленно разбивают на такие части простейшей формы (если, конечно, это возможно), для которых положения центров тяжести известны. Затем определяют положение центра тяжести всей фигуры или тела, понимая в этих формулах под v_k, F_k и l_k объемы, площади и длины частей, на которые разбито данное тело, фигура или линия, а под x_k, y_k и z_k — координаты центров тяжести этих частей.

Если рассматриваемые фигуры или тела неоднородны, то, разделив их па однородные части, умножают входящие в объемы, площади и длины этих частей на соответствующий каждой части удельный вес. Если в данном теле или фигуре имеются полости или отверстия, то для определения центра тяжести такого тела или фигуры пользуются теми же приемами и формулами, считая при этом объемы и площади вырезанных частей отрицательными.

В тех случаях, когда данное тело нельзя разбить на такие части, для которых было бы известно положение их центров тяжести, для вычисления координат центра тяжести тела приходится пользоваться методами интегрального исчисления.

Экспериментальный способ

Для определения центра тяжести неоднородных тел сложной формы существуют различные экспериментальные методы. Рассмотрим на примерах два из них.



I. Метод взвешивания. Для определения положения центра тяжести шатун AB подвешиваем в точке A и опираем точкой B на платформу десятичных весов, так чтобы он занял горизонтальное положение. Сила давления шатуна на платформу, найденная путем взвешивания, оказалась равной по модулю P. К находящемуся в равновесии шатуну приложены силы: сила G тяжести шатуна, проходящая через его центр C тяжести, вертикальная реакция R платформы, проходящая через точку B и равная по модулю силе P давления шатуна на платформу, и сила T натяжения нити OA.

Зная вес G шатуна и расстояние L между его точками A и B, теперь нетрудно найти и расстояние H от точки A до центра C тяжести шатуна. Одним из уравнений равновесия шатуна будет:

$$\sum m_A(\boldsymbol{P}_k) = -\,Gh + Rl = 0,$$

$$h = \frac{Rl}{G} = \frac{Pl}{G}.$$

Метод подвешивания. Тело подвешивают на нити за какую-либо его точку A к неподвижной точке O. После того как тело придет в равновесие, проводят вертикальную линию AA, составляющую продолжение направления нити OA. При равновесии центр тяжести тела должен находиться на одной вертикали с неподвижной точкой O и, следовательно, будет лежать на линии AA. Вновь подвесив тело к другой его точке B, мы точно так же найдем, что его центр тяжести лежит на линии BB, являющейся продолжением направления нити OB. Точка C пересечения линий AA и BB и будет являться центром тяжести тела. Способ подвешивания удобен для определения положения центра тяжести тонких пластинок.