«Қостанай жоғары политехникалық колледжі» КМҚК
КГКП «Костанайский политехнический высший колледж»

Учебно-методический комплекс

Математика

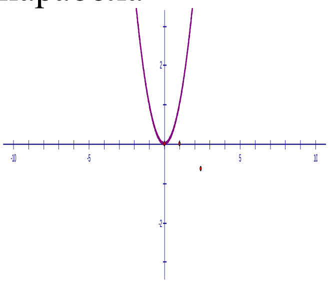
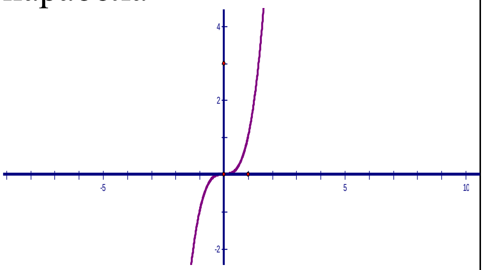
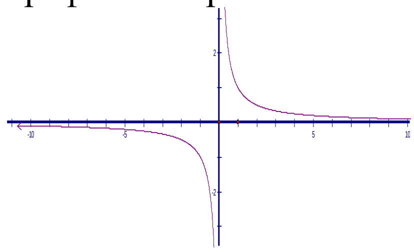
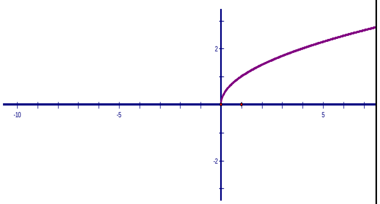
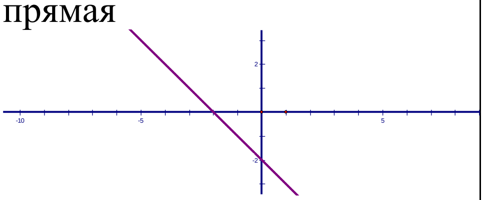
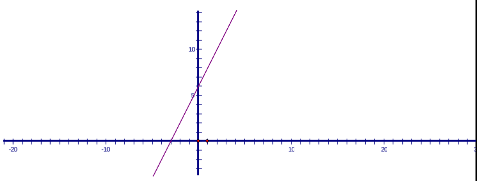
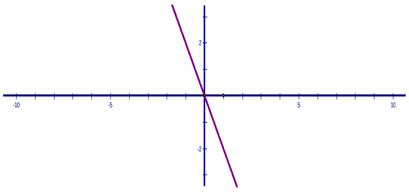
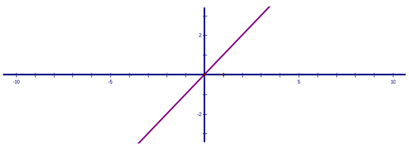
Костанай 2021

Оглавление

Раздел 1. Функции, их свойства и графики

Тема 1. Функция и способы ее задания. Преобразования графиков функций.

Понятие функции и способы ее задания

$y = x^2$ график функции – парабола 	$У = x^3$ График -кубическая парабола 	$У=\frac{1}{x}$ График-гипербола 
$У = \sqrt{x}$ Арифметический квадратный корень 	$У = kx + b$ Линейная функция, график – прямая  	$У = kx$  

Функция- зависимость переменной у от переменной х, если каждому значению х соответствует единственное значение у.

Переменная х- независимая переменная или аргумент.

Переменная у- зависимая переменная

Значение функции- значение у, соответствующее заданному значению х.

Область определения функции- все значения, которые принимает независимая переменная.

Область значений функции (множество значений)- все значения, которые принимает функция.

Функция является четной- если для любого х из области определения функции выполняется равенство f(x)=f(-x)

Функция является нечетной- если для любого x из области определения функции выполняется равенство f(-x)=-f(x)
Возрастающая функция- если для любых x_1и x_2, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$
Убывающая функция- если для любых x_1и x_2, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$

Правило или закономерность, при котором каждому значению x из множества X соответствует единственное значение y из множества У, называют ***ФУНКЦИЕЙ***

Х- независимая переменная
У – зависимая переменная
f ,g – правило или закономерность

Множество значений переменной, при которых функция принимает точные значения, называются **областью определения функции D(y) или ОДЗ**

Значение функции, соответствующее каждому значению независимой переменной из области определения, называют **множеством значения функции E(y)**

Найти область определения функции
А) $y = x^2 + 2x - 5$ – квадрвтичная функция

Если функция задана в виде многочлена, то ее значение можно вычислить при любом значении аргумента, следовательно, D (y) = R

Б) $y = \frac{2}{x-1}$ - дробно- рациональная функция

D (y) : $x - 1 \neq 0$
$X \neq 1$
D (y) = $X \neq 1$

Областью определения дробно рациональной функции является множество всех значений аргумента, за исключением тех, при которых знаменатель равен нулю.

В) $y = \sqrt{x}$ - арифметический квадратный корень
D (y) = $x \geq 0$

Область определения функции, заданной в виде иррационального выражения зависит от показателя корня:
Если показатель корня четное чило, то D (y) – множество всех неотрицательных чисел;

Если показатель – нечетное число, то D (y) – множество всех действительных чисел

Если функция задана в виде алгебраической суммы различных функций, то D (y) является пересечением всех слагаемых функции.

Критерии оценивания:

1. Разъясняет определение функции;
2. Различает способы задания и виды функции функции

Вопросы для самоконтроля:

1. **Какая функция называется четной, а какая нечетной?**

Тема 2. Свойства функции.

Определение: Функция f (x) называется четной, если для любого $x \in D$ выполняются равенства:

1) $-x \in D$,

2) f (–x) = f (x).

График четной функции на всей области определения симметричен относительно оси OY. Примерами четных функций могут служить y = cos x, y = |x|, y = x^2 + |x|.

Определение: Функция f (x) называется нечетной, если для любого $x \in D$ выполняются равенства:

1) $-x \in D$,

2) f (–x) = –f (x).

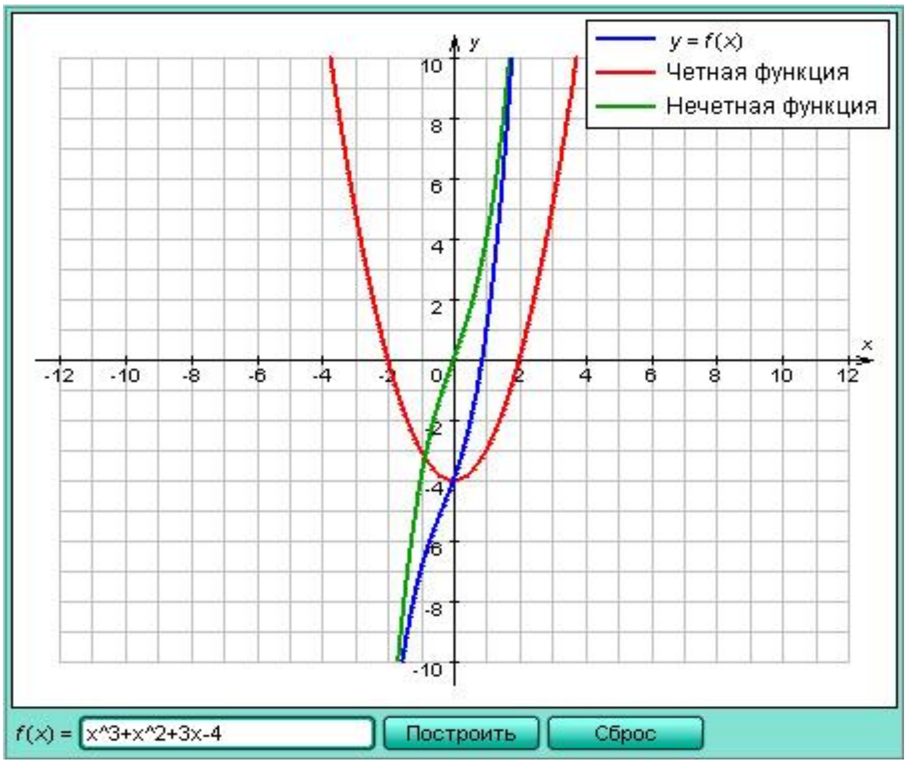
Иными словами функция называется нечетной, если ее график на всей области определения симметричен относительно начала координат. Примерами нечетных функций являются y = sin x, y = x^3.

Не следует думать, что любая функция является либо четной, либо нечетной. Так, функция $y = \sqrt{x+1}$ не является ни четной, ни нечетной, так как ее область определения $D = [-1;\ \infty)$ несимметрична относительно начала координат. Область определения функции y = x^3 + 1 охватывает всю числовую ось и поэтому симметрична относительно начала координат, однако f (–1) ≠ f (1).

Если область определения функции симметрична относительно начала координат, то эту функцию можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Таковой суммой является функция Первое слагаемое является четной функцией, второе – нечетной.



Модель 1.8. Четные и нечетные функции

Исследование функций на четность облегчается следующими утверждениями.
Сумма четных (нечетных) функций является четной (нечетной) функцией.
Произведение двух четных или двух нечетных функций является четной функцией.
Произведение четной и нечетной функции является нечетной функцией.
Если функция f четна (нечетна), то и функция 1/f четна (нечетна).
Периодические функции
Определение: Функция f (x) называется периодической с периодом T $\neq$ 0, если выполняются два условия:
если $x \in D$, то x + T и x – T также принадлежат области определения D (f (x));
для любого $x \in D$ выполнено равенство

$$f(x + T) = f(x).$$

Поскольку $x - T \in D,$ то из приведенного определения следует, что f (x – T) = f (x).
Если T – период функции f (x), то очевидно, что каждое число nT, где $n \in \mathbb{Z}$, n $\neq$ 0, также является периодом этой функции.
Наименьшим положительным периодом функции называется наименьшее из положительных чисел T, являющихся периодом данной функции.
Хорошим примером периодических функций могут служить тригонометрические функции y = sin x, y = cos x (период этих функций равен 2π), y = tg x (период равен π) и другие. Функция y = const также является периодической. Для нее периодом является любое число T $\neq$ 0.
В заключение отметим свойства периодических функций.

Если f (x) – периодическая функция с периодом T, то функция g (x) = A · f (kx + b), где k ≠ 0 также является периодической с периодом $T_1 = \frac{T}{k}$.

Пусть функции f_1 (x) и f_2 (x) определены на всей числовой оси и являются периодическими с периодами $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$. Тогда если $\frac{T_2}{T_1} \in \mathbb{Q}$, то функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ периодическая с периодом T, равным наименьшему общему кратному чисел T_1 и T_2.

Монотонность функций

Определение: Функция f (x) называется возрастающей на промежутке D, если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение: Функция f (x) называется убывающей на промежутке D, если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

На показанном на рисунке графике функция y = f (x), $x \in [a;\ b]$, возрастает на каждом из промежутков $[a;\ x_1)$ и $(x_2;\ b]$ и убывает на промежутке $(x_1;\ x_2)$. Обратите внимание, что функция возрастает на каждом из промежутков $[a;\ x_1)$ и $(x_2;\ b]$, но не на объединении промежутков $[a;\ x_1) \cup (x_2;\ b]$.

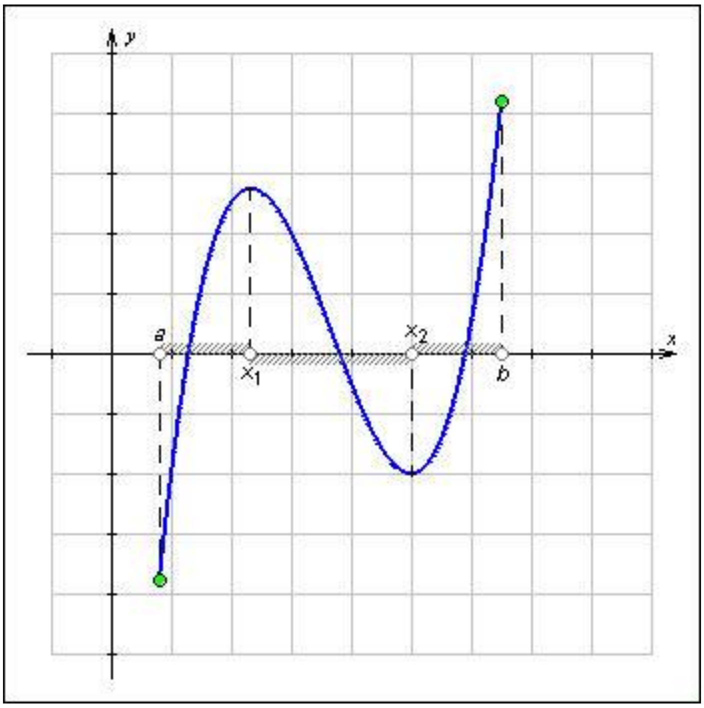


Рисунок 1.3.5.1.
Промежутки возрастания и убывания функции

Определение: Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, то она называется монотонной на этом промежутке.

Заметим, что если f – монотонная функция на промежутке D (f (x)), то уравнение f (x) = const не может иметь более одного корня на этом промежутке.

Действительно, если $x_1 < x_2$ – корни этого уравнения на промежутке D (f(x)), то $f(x_1) = f(x_2) = 0$, что противоречит условию монотонности.

Перечислим свойства монотонных функций (предполагается, что все функции определены на некотором промежутке D).

Сумма нескольких возрастающих функций является возрастающей функцией.

Произведение неотрицательных возрастающих функций есть возрастающая функция.

Если функция f возрастает, то функции cf (c > 0) и f + c также возрастают, а функция cf (c < 0) убывает. Здесь c – некоторая константа.
Если функция f возрастает и сохраняет знак, то функция 1/f убывает.

Если функция f возрастает и неотрицательна, то f^n, где $n \in \mathbb{N}$, также возрастает.
Если функция f возрастает и n – нечетное число, то f^n также возрастает.
Композиция g (f (x)) возрастающих функций f и g также возрастает.
Аналогичные утверждения можно сформулировать и для убывающей функции.

Определение: Окрестностью точки называется любой промежуток, содержащий данную точку.
Определение: Точка a называется точкой максимума функции f, если существует такая ε-окрестность точки a, что для любого x из этой окрестности выполняется неравенство f (a) ≥ f (x).
Определение: Точка a называется точкой минимума функции f, если существует такая ε-окрестность точки a, что для любого x из этой окрестности выполняется неравенство f (a) ≤ f (x).
Определение: Точки, в которых достигается максимум или минимум функции, называются точками экстремума.
В точке экстремума происходит смена характера монотонности функции. Так, слева от точки экстремума функция может возрастать, а справа – убывать. Согласно определению, точка экстремума должна быть внутренней точкой области определения.
Если для любого $x \in D$ (x ≠ a) выполняется неравенство f (x) ≤ f (a) $(a \in D)$, то точка a называется точкой наибольшего значения функции на множестве D:

$$\max_{x \in D} f(x) = f(a).$$

Если для любого $x \in D$ (x ≠ b) выполняется неравенство f (x) > f (b) $(b \in D)$, то точка b называется точкой наименьшего значения функции на множестве D.

$$\min_{x \in D} f(x) = f(b).$$

Точка наибольшего или наименьшего значения может быть экстремумом функции, но не обязательно им является.
Точку наибольшего (наименьшего) значения непрерывной на отрезке функции следует искать среди экстремумов этой функции и ее значений на концах отрезка.

Если функция не является ограниченной на множестве, то говорят, что она не ограничена.
Примером функции, ограниченной снизу на всей числовой оси, является функция $y = x^2$. Примером функции, ограниченной сверху на множестве (–∞; 0) является функция y = 1/x. Примером функции, ограниченной на всей числовой оси, является функция y = sin x.
Решение примеров:
№29 (а, б, в, г),

Критерии оценивания:

1. Описывает свойства функции;

Вопросы для самоконтроля:

1) $y = x^4 - x^2 + 3$

2) $y = \dfrac{x^5 + 9}{x}$

3) $y = -\sin x - 4x$

4) $y = e^x + 12$

5) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 16} \cdot \cos x$

6) $y = \mathrm{tg}x - 2x$

Тема 3. Дробно-линейная функция.

1 блокИсследуем (установим свойства) и построим график следующей функции $y = \frac{3}{x}$.

–Как называется эта функция? /обратная пропорциональность/

– Какие свойства данной функции вы знаете? /область определения, область значений, промежутки монотонности, нули функции, промежутки знакопостоянства/

– Область определения функции? /$D(x) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$/

– Область значений функции? /$E(x) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$/

– Что такое асимптота? /своими словами, на понятийном уровне/

– Асимптоты данной функции /*x=0, y=0*/

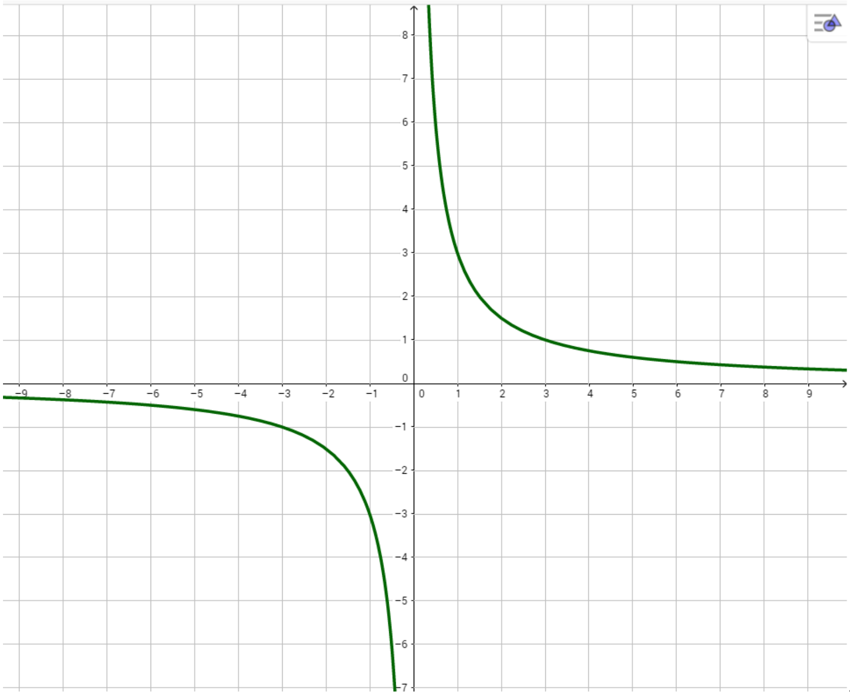
– Промежутки монотонности? /Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$/

– Нули функции? /не имеет/

– Промежутки знакопостоянства? /y>0 при x>0, y<0 при x<0/

– В каких координатных четвертях расположен график? /Iи III/

– Как называется график данной функции? Постройте график функции. /гипербола



/

2 блокВспомним основные правила преобразования графиков функций

– График функции $y = f(x) + n$ можно получить из графика функции

$y = f(x)$ с помощью сдвига… /вдоль оси ординат/

– На n единиц…, если $n > 0$. /вверх/

– На $|n|$ единиц…, если $n < 0$. /вниз/

– График функции $y = f(x – m)$ можно получить из графика функции

$y = f(x)$ с помощью сдвига… /вдоль оси абсцисс/

– На mединиц…, если $m > 0$. /вправо/

– На $|m|$ единиц…, если $m < 0$. /влево/

Совместное определение целей урока.

Изучение нового материала

<u>Определение</u>:Дробно-линейная функция – это функция вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$,

где x – переменная, a, b, c, d – некоторые числа, причем $c \neq 0$, $ad – bc \neq 0$.

Какие из этих функций являются дробно – линейными?

- ☐ $y = \dfrac{3x-5}{2x+4}$
- ☐ $y = \dfrac{7x-1}{10x}$
- ☐ $y = x^3$
- ☐ $y = \dfrac{\sqrt{3x+2}}{x+1}$
- ☐ $y = \dfrac{8}{5x-6}$

Графиком дробно-линейной функции является гипербола, которую можно получить из гиперболы $y = \frac{k}{x}$ с помощью параллельных переносов вдоль координатных осей.

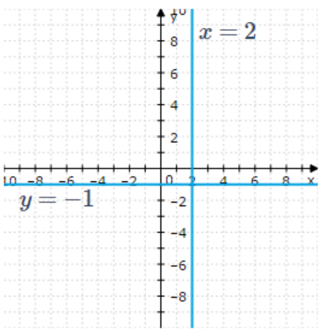
Определение: Асимптотой кривой называется прямая, к которой приближаются как угодно близко точки кривой по мере их удаления в бесконечность.

Асимптоты дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$:

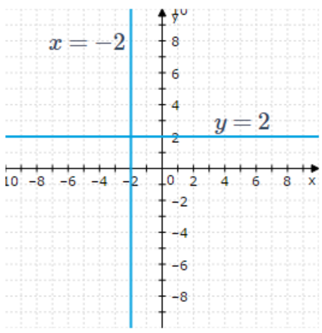
$y = \frac{a}{c}$ - горизонтальная асимптота,

$x = -\frac{d}{c}$ - вертикальная асимптота.

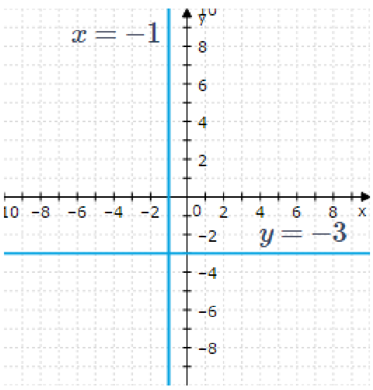
Даны асимптоты рациональной функции $f(x)$. Найдите недостающие коэффициенты в выражении для $f(x)$. Заполните пропуски.



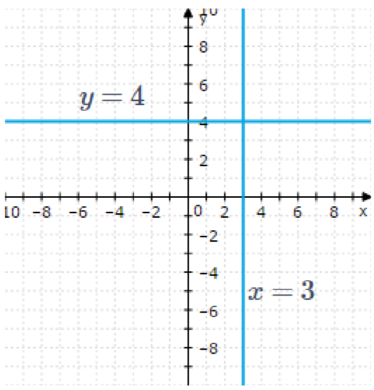
$f(x) = \dfrac{\square x - 2}{\square x - 8}$



$f(x) = \dfrac{\square x + 1}{x + \square}$



$f(x) = \dfrac{6x+8}{\boxed{}\,x - \boxed{}}$



$f(x) = \dfrac{8x-9}{\boxed{}\,x + \boxed{}}$

<u>План построения графика дробно-линейной функции</u>:

1 способ

1. Выделяем из дроби целую часть.

2. Определяем асимптоты: $y = \frac{a}{c}$ и $x = -\frac{d}{c}$.

3. Составляем таблицу для функции $y=\frac{k}{x}$.

4.Строим график функции $y = \frac{k}{x}$ на асимптотах как на осях.

2 способ

1. Представить её в виде

$y=\frac{k}{x-m}+n$ путём выделения из неё целой части.

2. Составляем таблицу для функции $y=\frac{k}{x}$, строим её график в исходной системе координат.

3. Воспользоваться правилами параллельного переноса вдоль осей координат.

Подробнее рассмотрим первый пункт плана (выделение целой части). Для этого тоже можно использовать два способа:

<u>Пример 3</u>:Выделите целую часть в дробно-линейной функции $y = \frac{2x+4}{x-1}$.

1 способ

$$\begin{array}{r|l} 2x+4 & x-1 \\ \cline{2-2} -\;\underline{2x-2} & 2 \\ 6 & \end{array}$$

2 способ

$$y=\frac{2x+4}{x-1} = 2+\frac{6}{x-1}$$

Пример 4:Выделите целую часть в дробно-линейной функции $y = -\frac{2x-1}{x+1}$.

1 способ

$$\begin{array}{r|l} 2x-1 & x+1 \\ \underline{2x+2} & \overline{2} \\ -3 & \end{array}$$

2 способ

$$y = -\frac{2x-1}{x+1} = -(2-\frac{3}{x+1}) = -2+\frac{3}{x+1}$$

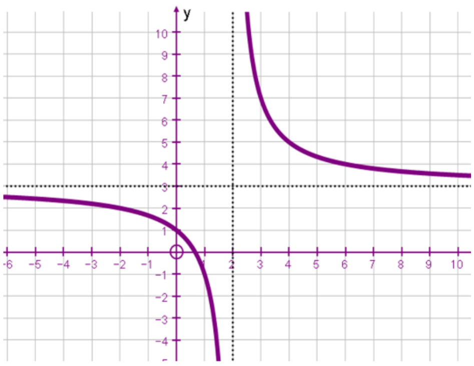
Построим графики нескольких дробно-линейных функций обеими способами.

1 способ

Пример 5: Постройте график функции $y = \frac{3x-2}{x-2}$.

$y = \frac{3x-2}{x-2} = 3 + \frac{4}{x-2}$, тогда асимптоты: $y=3$ и $x=2$.

Строим график функции $y = \frac{4}{x}$ на асимптотах как на осях:

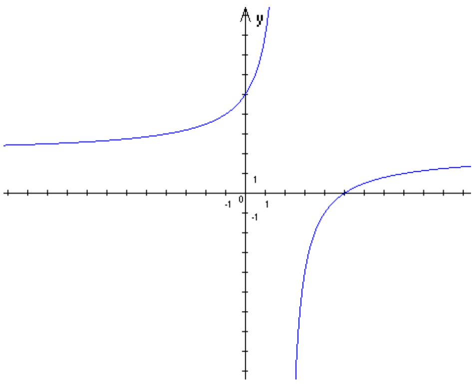


2 способ

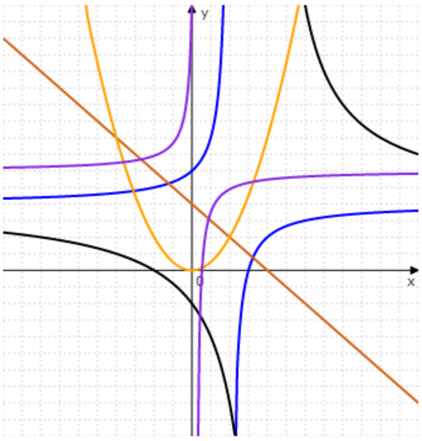
Пример 6: Постройте график функции $y = \frac{2x-10}{x-2}$.

$y = \frac{2x-10}{x-2} = 2 - \frac{6}{x-2}$,

Сдвиг графика функции $y = -\frac{6}{x}$вдоль оси Ох на 2 единицы вправо, вдоль оси Оу на 2 единицы вверх:



Выберите правильный график функции $y = \frac{2x-3}{x-1}$.



<u>Свойства дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, где $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$</u>:

1. Область определения $D(x)=(-\infty;-dc)\cup(-dc;+\infty)$.
2. Область значений $E(y)=(-\infty;-ac)\cup(ac;+\infty)$.
3. Точки пересечения с осью Ox (нули функции): Если $y=0$, то $x=-ba$.

Значит, если $a\neq0$, то точка пересечения с осью Ox имеет координаты

$(-ba;0)$.

Если же $a=0$, $b\neq0$, то точек пересечения с осью Ox график дробно-линейной функции не имеет.
4. Точки пересечения с осью Oy: Если $x=0$, то $f(0)=bd$, $d\neq0$. То есть точка пересечения с осью Oy имеет координаты $(0;bd)$.
5. Наибольшего и наименьшего значений функция не имеет.
6. Асимптоты: $y = \frac{a}{c}$ - горизонтальная асимптота,

$x = -\frac{d}{c}$ - вертикальная асимптота.

7. Промежутки монотонности.

8. Промежутки знакопостоянства.

Критерии оценивания:

1. Выполняет преобразования для заданных функций

Вопросы для самокотроля

Для каждой дробной-линейной функции

1. опишите её свойства свойства,

2. постройте её график (одним из двух способов),

3. по полученному графику проверьте, верно ли вы записали свойства.

1.$y = \frac{2x-3}{x-2}$ 2. $y = \frac{4}{x} - 3$ 3. $y = \frac{24+3x}{3x-6}$

Тема 4. Понятия сложной и обратной функций.

В европейских и американских учебниках функцию принято записывать в виде упорядоченных пар, состоящих из значений аргумента и соответствующего ему значения функции, например:

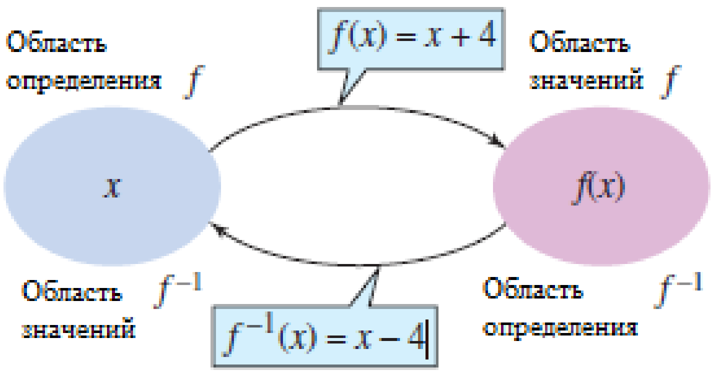
f(x)=x+4 : {(1; 5), (2; 6), (3; 7), (4; 8)}.

Если поменять местами абсциссу и ординату в каждой упорядоченной паре, то мы получим обратную функцию, которая обозначается следующим образом: $f^{-1}(x)$ (это **не** значит, что мы будем находить $\frac{1}{f(x)}$): $f^{-1}(x)$=*x–4: {(5; 1), (6; 2), (7; 3), (8;3)}.*

Обратите внимание, что область определения функции *f(x)*является областью значений функции $f^{-1}(x)$ и наоборот. Кроме того, выполняется следующее тождество:

$$f(f^{-1}(x)) = f(x-4) = (x-4) + 4 = x$$
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x+4) = (x+4) - 4 = x$$

Таким образом:



Пример 1: Найдите функцию, обратную функции *f(x)=4x*, проверьте, выполняются ли тождества $f(f^{-1}(x))$ и$f^{-1}(f(x))$.

$f^{-1}(x) = \frac{x}{4}$.

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{4}\right) = 4\left(\frac{x}{4}\right) = x \qquad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(4x) = \frac{4x}{4} = x$$

Пример 2: Найдите функцию, обратную функции *f(x)=x–6*, проверьте, выполняются ли тождества $f(f^{-1}(x))$ и $f^{-1}(f(x))$.

$$f^{-1}(x) = x + 6.$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(x+6) = (x+6) - 6 = x$$
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x-6) = (x-6) + 6 = x$$

Таблица значений может помочь вам понять определение обратной функции:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-7	-6	-5	-4

⇒

x	-8	-7	-6	-5	-4
$f^{-1}(x)$	-2	-1	0	1	2

В таблице слева каждое значение функции на 6 меньше соответствующего значения аргумента, а в таблице справа – на 6 больше.

Определение: Заданы две функции *f* и *g*.

Если *f(g(x))=x* для каждого значения *x* из области определения функции *g* и *g(f(x))=x* для каждого значения *x* из области определения функции *f*, то функция *g* является обратной для функции *f*, обозначается следующим образом: $f^{-1}(x)$.

Таким образом, $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ и $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$. Область определения функции *f* является областью значений функции $f^{-1}(x)$ и область значений функции *f* является областью определения функции $f^{-1}(x)$.

Функции *f* и *g* называют взаимообратными функциями.

Пример 3: Покажите, что функции взаимообратны $f(x) = 2x^3 - 1$ и $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$.

$$f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1$$

$$= 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1$$

$$= x + 1 - 1$$

$$= x$$

$$g(f(x)) = g(2x^3 - 1) = \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{x^3}$$

$$= x$$

<u>Пример 4</u>: Какая из функций является обратной для функции $f(x) = \dfrac{5}{x-2}$?

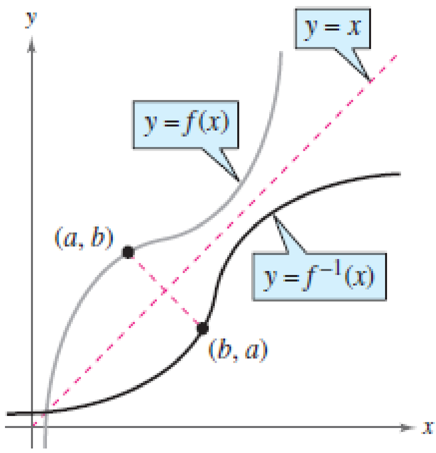
$g(x) = \dfrac{x-2}{5}$ или $h(x) = \dfrac{5}{x} + 2$?

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x-2}{5}\right) = \frac{5}{\left(\frac{x-2}{5}\right) - 2} = \frac{25}{x-12} \neq x.$$

$$f(h(x)) = f\left(\frac{5}{x} + 2\right) = \frac{5}{\left(\frac{5}{x} + 2\right) - 2} = \frac{5}{\left(\frac{5}{x}\right)} = x.$$

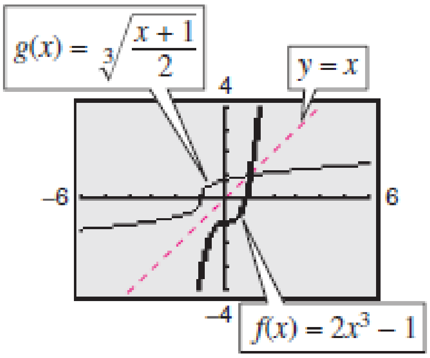
Т.о. функция hявляется обратной для функции f.

Графики функции$f(x)$и $f^{-1}(x)$её обратной функции связаны друг с другом вследующим образом. Если точка $(a; b)$лежит на графике$f(x)$, то точка$(b; a)$должна лежать на графике $f^{-1}(x)$и наоборот. Это означает, что график являетсясимметричным относительно прямой $y=x$.



<u>Пример 5</u>: Убедитесь в том, что функции из примера 3 являются взаимообратными аналитически и графически.

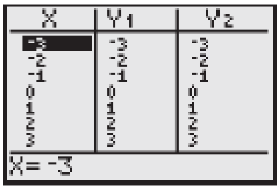
Графически



Аналитически

$$y_1 = f(g(x)) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1$$

$$y_2 = g(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{(2x^3-1)+1}{2}}$$



X	Y1	Y2
-3	-3	-3
-2	-2	-2
-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3

X= -3

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$, зададим её с помощью таблицы значений, затем поменяем местами значения аргумента и значения функции:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

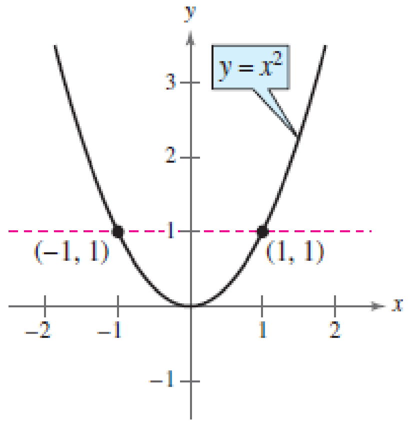
↓

x	4	1	0	1	4
$g(x)$	-2	-1	0	1	2

Вторая таблица не задаёт функцию, т.к. одному и тому же значению аргумента ($x=4$) соответствует два различных значения функции, это противоречит определению функции.Т.о. для того, чтобы функция имела обратную функцию, она должна быть монотонна (т.е. строго убывающей или строго возрастающей).

<u>Теорема</u>: Если функция $f(x)$ монотонна на всей свой области определения, то она обратима (имеет обратную функцию).

Это легко проверить на графике функции («*тест горизонтальной прямой*»). Необходимо провести прямую, параллельную оси абсцисс, если она пересекает график функции не более, чем в одной точке, тогда функция является монотонной, а значит и обратимой (это условие должно выполняться для каждой прямой, параллельной оси абсцисс).



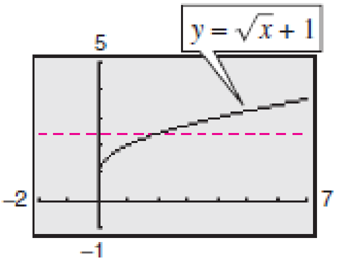
Пример 6: Определите, является ли функция $f(x) = \sqrt{x} + 1$обратимой.

Аналитически

$$\sqrt{a} + 1 = \sqrt{b} + 1$$
$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$
$$a = b$$

Значит каждому значению аргумента соответствует только одно значение функции, т.о. функция обратима.

Графически



Правила нахождения обратной функции

1.по графику определитьс помощью «теста горизонтальной прямой» является ли функция монотонной.

2. В уравнении *f(x)* заменить*f(x)* на *y*.

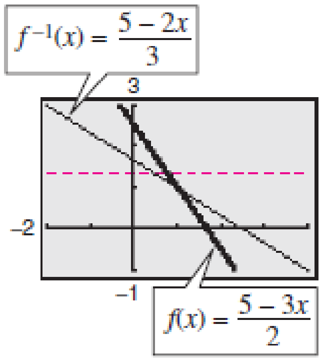
3. В полученном уравнении заменить *x* на *y*, а *y* на *x* и выразить *y*.

4. В новом уравнении заменить *y* на $f^{-1}(x)$.

5. Убедиться, что функции *f(x)* и $f^{-1}(x)$ взаимообратны. Т.е. область определения функции *f*является областью значений функции$f^{-1}(x)$и область значений функции *f*является областью определения функции $f^{-1}(x)$ и$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$и$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$.

Если функция не является обратимой на всей свой области определения, то можно разбить её область определения на части, где она будет строго монотонна и искать обратную функцию для каждого из этих интервалов.

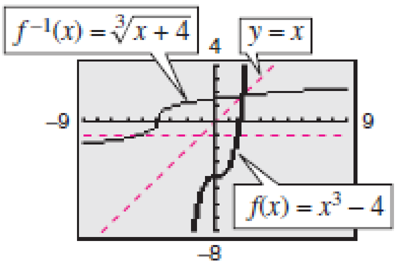
<u>Пример 7</u>: Найдите функцию, обратную функции $f(x) = \dfrac{5-3x}{2}$.



$$f(x) = \frac{5-3x}{2}$$
$$y = \frac{5-3x}{2}$$
$$x = \frac{5-3y}{2}$$
$$2x = 5 - 3y$$
$$3y = 5 - 2x$$
$$y = \frac{5-2x}{3}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{5-2x}{3}$$

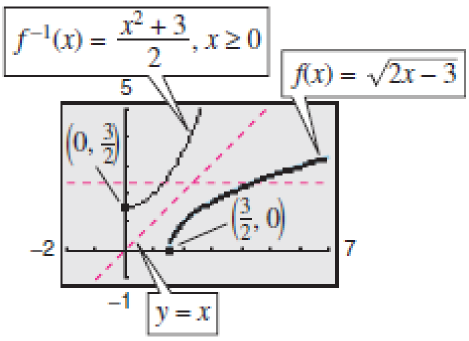
Область определения и область значений функций *f(x)* и $f^{-1}(x)$ – все действительные числа.

<u>Пример 8</u>: Найдите, функцию, обратную функции $y=x^3–4$, постройте графики этих функций в одной координатной плоскости.



$$f(x) = x^3 - 4$$
$$y = x^3 - 4$$
$$x = y^3 - 4$$
$$y^3 = x + 4$$
$$y = \sqrt[3]{x+4}$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+4}$$

<u>Пример 9</u>: Найдите, функцию, обратную функции $y=\sqrt{2x-3}$, постройте графики этих функций в одной координатной плоскости.



$$f(x) = \sqrt{2x-3}$$
$$y = \sqrt{2x-3}$$
$$x = \sqrt{2y-3}$$
$$x^2 = 2y - 3$$
$$2y = x^2 + 3$$
$$y = \frac{x^2+3}{2}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}, \quad x \ge 0$$

Критерии оценивания:

1. Объясняет последовательность определения обратной функцию;
2. Объясняет содержание формулы сложной функции;

Раздел 2. Тригонометрические функции

Тема 5. Тригонометрические функции их свойства и графики. Построение графиков тригонометрических функций с помощью преобразований.

Преобразование суммы (разности) тригонометрических функций в произведение (преобразование тригонометрических выражений к виду, удобному для логарифмирования)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha)$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$tg\alpha + ctg\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta} \qquad tg\alpha - ctg\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$$

$$tg\alpha + ctg\alpha = 2\operatorname{cosec}2\alpha \qquad tg\alpha - ctg\beta = -2ctg2\alpha$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$$

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$$

$$\boldsymbol{\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}.$$

Рассмотрим примеры: а) sin2α + sinα

Решение: $\sin2\alpha + \sin\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+\alpha}{2}*\cos\frac{2\alpha-\alpha}{2} = 2\sin\frac{3\alpha}{2}*\cos\frac{\alpha}{2}$

а)Упростить: $sin40° + sin20°$

Решение:

$$sin40° + sin20° = 2sin\frac{40° + 20°}{2}cos\frac{40° - 20°}{2} = 2cos30°cos10° = 1 \cdot \frac{1}{2}cos10° = cos10°.$$

Ответ: $sin40° + sin20° = cos10°$.

$$\boldsymbol{sinx - siny = 2sin\frac{x-y}{2}cos\frac{x+y}{2}}.$$

Упростить: $sin40° - sin20°$.

Решение:

$$sin40° - sin20° = 2sin\frac{40° - 20°}{2}cos\frac{40° + 20°}{2} = 2sin10°cos30° = 2sin10° \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}sin10°.$$

Ответ: $\sqrt{3}sin10°$.

Вычислить:

$$\frac{sin10° - sin50°}{\sqrt{3}sin20°}.$$

$$\boldsymbol{cosx + cosy = 2cos\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}}.$$

Рассмотрим примеры: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\alpha = 2\sin\frac{\frac{\pi}{3}-\alpha+\alpha}{2} * \cos\frac{\frac{\pi}{3}-\alpha-\alpha}{2} = 2\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = 2*\frac{\sqrt{3}}{2}*\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

Упростить: $cos40° + cos20°$.

Решение:

$$cos40° + cos20° = 2cos\frac{40° + 20°}{2}cos\frac{40° - 20°}{2} = 2cos30°cos10° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}cos10° = \sqrt{3}cos10°.$$

Ответ: $\sqrt{3}cos10°$.

2. Вычислить:

$$\frac{cos5° + cos55°}{\sqrt{3}cos25°}.$$

Решение:

$$cos5° + cos55° = 2cos\frac{5° + 55°}{2}cos\frac{5° - 55°}{2} = 2cos30°cos(-25°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}cos25° =$$

$$= \sqrt{3}\, cos25°;$$

$$\frac{cos5° + cos55°}{\sqrt{3}cos25°} = \frac{\sqrt{3}cos25°}{\sqrt{3}cos25°} = 1.$$

Ответ: 1.

$$cosx - cosy = -2sin\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2}.$$

$$\boldsymbol{tgx + tgy = \frac{sin(x+y)}{cosxcosy}}$$

$$\boldsymbol{tgx - tgy = \frac{sin(x-y)}{cosxcosy}}$$

Рассмотрим пример: Упростите выражение$\frac{cos\alpha+2cos2\alpha+cos3\alpha}{sin\alpha+2sin2\alpha+sin3\alpha}=\frac{(cos\alpha+cos3\alpha)+2cos2\alpha}{(sin\alpha+sin3\alpha)+2sin2\alpha}=$

Критерии оценивания:

1. определяет тригонометрические функции;
2. объясняет свойства тригонометрических функций;
3. строит графики и описывает свойства данных тригонометрических функций по графику

Вопросы для самоконтроля:

1. Назовите формулу преобразования суммы и разности тригонометрических функций

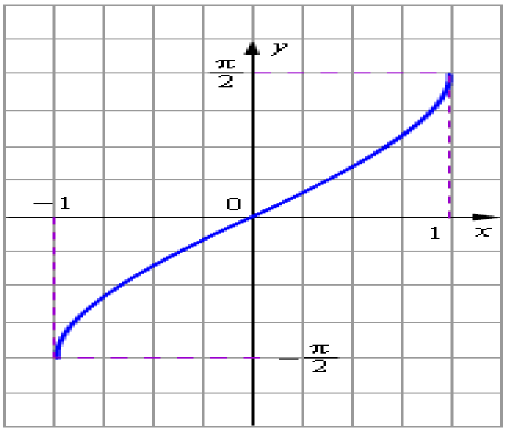
Тема 6. Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс.

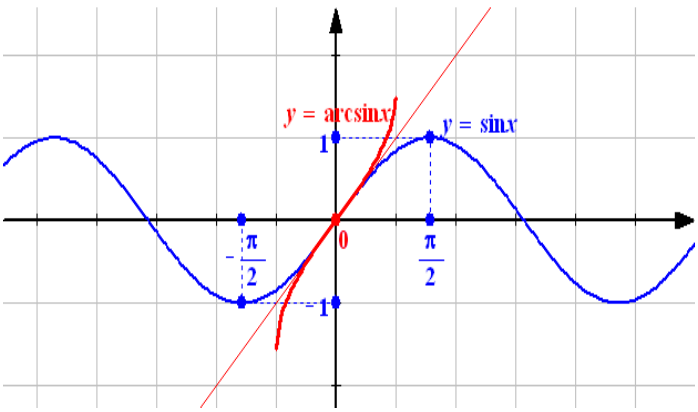
Арксинус и арккосинус.

I.Обратную функцию к функции $y = sinx$ обозначают: $y = arcsinx$ и читают «арксинус x».

Функция $y = arcsinx$ определена на отрезке $[-1; 1]$*и*является монотонно возрастающей, множество значений функции изменяется на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

График функции $y = arcsinx$ симметричен графику функции $y = sinx$ относительно прямой $y = x$. Следовательно , прямая $y = x$ является осью симметрии.

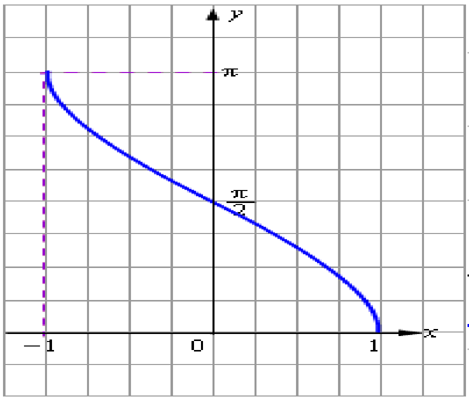


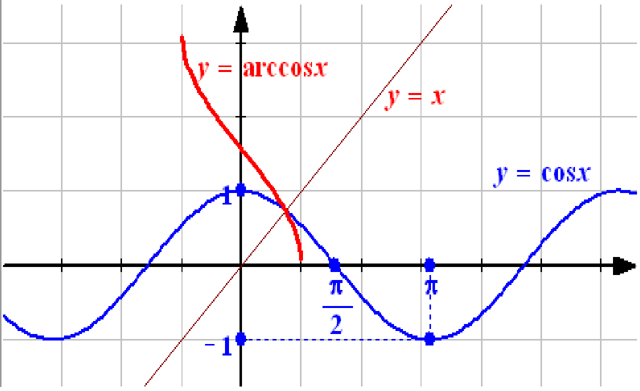


.Обратную функцию к функции $y = cosx$ обозначают $y = arccosx$ и читают **«арккосинус х».**

Функция $y = arccosx$ определена на отрезке $[-1; 1]$ и является монотонно убывающей, множество значений изменяется на отрезке $[0; \pi]$.

График функции $y = arccosx$ симметричен графику функции $y = cosx$ относительно прямой $y = x$. Прямая $y = x$ является осью симметрии.





Примеры. Вычислим значения а) $arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ б)$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

а) по определению $y = arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ означает $siny = \frac{\sqrt{2}}{2} и -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Поэтому $y = \frac{\pi}{4}$,тогда $arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;

б)$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}, таккакsin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}$

Примеры.Вычислить значенияа) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ б)$\cos\left(\pi + \arccos\frac{1}{2}\right)$

а) по формуле (2) имеем : $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

б) $\cos\left(\pi + \arccos\frac{1}{2}\right)$ $, обозначим \arccos\frac{1}{2} = \alpha,$

$$тогдапоформулеприведенийполучим \cos\left(\pi + \arccos\frac{1}{2}\right) = \cos(\pi + \alpha) = -cos \propto$$

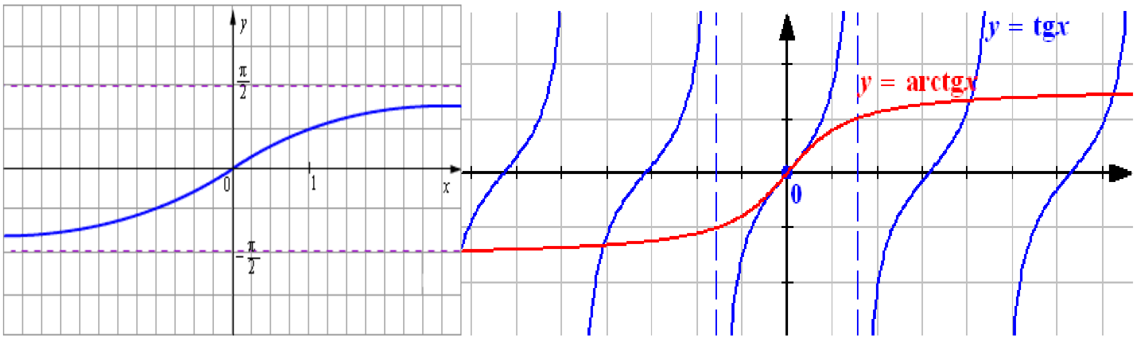
$-cos \propto = -\cos\left(arccos\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$

Арктангенс и арккотангенс.

III.Обратную функцию к функции $y = tgx$ обозначают $y = arctgx$ и читают **«арктангенс x».**

Функция $y = arctgx$ определена на множестве действительных чисел и является монотонно возрастающей, множество значений изменяется на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

График функции $y = arctgx$ симметричен графику функции $y = tgx$ относительно прямой $y = x$. Прямая $y = x$ является осью симметрии.



Обучающиеся в парах (группах) выводят определения $\arccos a$, $arctga$, $arcctga$.

Выводы:

1. Функции $arcsinx, arccosx, arctgx,\ arcctgx$являются обратными к функциям $sinx, cosx, tgx,\ ctgx$ соответственно;

2. $arcsinx$, где$x \in [-1; 1]$принимает значения$\in\ [-\pi/2;\ \pi/2]$;

   $arccosx$, где$x \in [-1; 1]$принимает значения$\in\ [0;\ \pi]$;

   $arctgx$, где$x \in [-\infty; \infty]$принимает значения$\in [-\pi/2;\ \pi/2]$;

   $arcctgx$, где$x \in [-\infty; \infty]$принимает значения$\in\ [0;\ \pi]$.

3. $\arcsin(-a) = -\arcsin a$,

   $arccos(-a) = \pi - arccosa$,
   $arctg(-a) = arctga$,
   $arcctg(-a) = \pi - arcctga$.

Выполните решение заданий.

1. Вычислите (устно):

21.1. а) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\arcsin 1$; г) $\arcsin 0$.

21.2. а) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\arcsin(-1)$;

б) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$; г) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

21.15. а) $\arccos(-1) + \arccos 0$;

б) $\arccos \frac{1}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2. Вычислите(комментированное решение в тетради):

о21.16. а) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin(-1)$;

в) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Найдите область определения и область значений функции(работа в группах через взаимооценивание):

   a) arcsin(x-2); b) arccos$\frac{1-2x}{4}$

4. Сравните:

   arcsin$\frac{2}{3}$; arcsin 0,7; arcsin$\frac{1}{2}$; arcsin 1

Индвидуальноеработа Решение задач

.Вычислите:

$$а)\ arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4};\qquad б)\ \frac{\pi}{3}arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi^2}{18};\qquad в)2-arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}=2-\frac{\pi}{3}=\frac{6-\pi}{3};$$

$$г)\ arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6};\qquad д)arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3};\qquad е)arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}.$$

№ Найдите значения выражений:

$$а)\ arctg1 - arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - 4\pi}{12} = -\frac{\pi}{12};$$

$$б)\ arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12};$$

$$в) arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi - 2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2};$$

$$г) - arctg(-\sqrt{3}) + arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = -\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi + \pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

№ Сравните:

$$а) \arcsin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) и \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right); \quad -\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4};\ \arcsin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) < \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$б)\ arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) uarctg(-1); \ -\frac{\pi}{6} > -\frac{\pi}{4}\ ;\ arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) > arctg(-1);$$

$$в)\ arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) и\ 1 + arctg\sqrt{3};\ \frac{5\pi}{6} > \ 1 + \frac{\pi}{3};\ arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) > \ 1 + arctg\sqrt{3};$$

$$г)\ arcctg(-\sqrt{3}) uarctg(-\sqrt{3})\ ;\ \frac{5\pi}{6} > -\frac{\pi}{3};\ arcctg(-\sqrt{3}) > arctg(-\sqrt{3})\ ;$$

Историческая справка

-обучающийся подготовили реферат

-преподаватель рассказывает о истории возникновения обратных тригонометрических функций.

Историческая справка

Тригонометрические функции возникли впервые в связи с исследованиями в астрономии и геометрии. Соотношения отрезков в треугольнике и окружности, являющиеся по существу тригонометрическими функциями, встречаются уже в 3 в. до н. э. в работах математиков Древней Греции – Евклида, Архимеда, АполлонияПергского и других.

В последующий период математика долгое время наиболее активно развивалась индийскими и арабскими учеными. В трудах по астрономии Ариабхаты появляется термин «ардхаджива». Позднее привилось более краткое название «джива», а при переводе математических терминов в XII в. Это слово было заменено латинским «sinus».

Принципиальное значение имело составление Птолемеем первой таблицы синусов(долгое время она называлась таблицей хорд): появилось практическое средство решения ряда прикладных задач, и в первую очередь задач астрономии.

Слово косинус –это сокращение латинского выражения «complementysinus»(синус).

Тангенсы возникли в связи с решением задачи об определении длины тени.Тангенс (а также котангенс, секанс и косеканс) введен в X веке Абу-л-Вафой, который составил и первые таблицы для нахождения тангенсов и котангенсов. Однако эти открытия долгое время оставались неизвестными европейским ученым, и тангенсы были заново открыты в XIV в. Т. Бравердином, а позже астрономом Региомонтаном.

Первым автором, который использовал специальные символы для обратных тригонометрических функций был, Бернулли. В 1729 и в1736 годах он писал as и at соответственно вместо arcsin иarctg.Современные обозначения arcsin и arctg появляются в 1772 г. в работах венского математика Шерфера известного французского ученого Лагранжа.Приставка «arc» происходит от латинского «arcus»(лук, дуга), что вполне согласуется со смыслом понятия: arcsin x, например,- это угол (а можно сказать и дуга) синус которого равен x.

Критерии оценивания:

1. Определяет значения арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса;

Тема 7. Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики. Преобразование выражений, содержащих арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс.

Обра́тныетригонометри́ческиефу́нкции (*круговые функции, аркфункции*) — математические функции, являющиеся обратными к тригонометрическим функциям. К обратным тригонометрическим функциям обычно относят шесть функций:
аркси́нус (обозначение: arcsin)
аркко́синус (обозначение: arccos)
аркта́нгенс (обозначение: arctg; в иностранной литературе arctan)
арккота́нгенс (обозначение: arcctg; в иностранной литературе arccot или arccotan)
Название обратной тригонометрической функции образуется от названия соответствующей ей тригонометрической функции добавлением приставки «арк-»

(от лат. *arc* — дуга). Это связано с тем, что геометрически значение обратной тригонометрической функции можно связать с длиной дуги единичной окружности (или углом, стягивающим эту дугу), соответствующей тому или иному отрезку. Изредка в иностранной литературе пользуются обозначениями типа $\sin^{-1}$ для арксинуса и т. п.; это считается не совсем корректным, так как возможна путаница с возведением функции в степень -1.

Функция arcsin

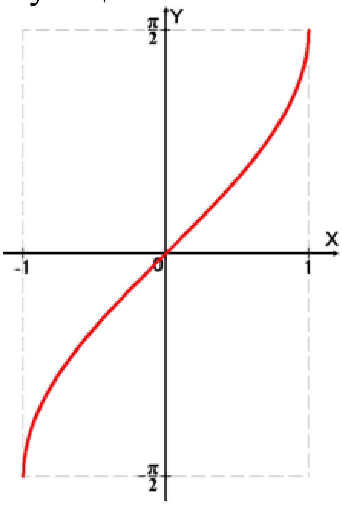


График функции $y = \arcsin x$.

Арксинусом числа *m* называется такое значение угла *x*, для которого $\sin x = m,\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ |m| \leqslant 1.$

Функция $y = \sin x$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой.

Функция $y = \arcsin x$ является строго возрастающей.

$\sin(\arcsin x) = x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

$\arcsin(\sin y) = y$ при $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,

$D(\arcsin x) = [-1; 1]$ (область определения),

$E(\arcsin x) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (область значений).

Свойства функции arcsin

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$ (функция является нечётной).

Получение функции arcsin

Функция arccos

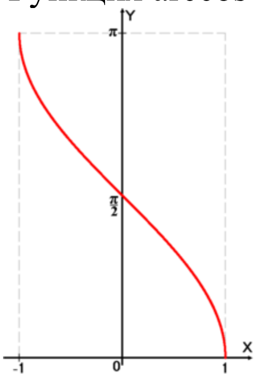


График функции $y = \arccos x$.
Арккосинусом числа *m* называется такое значение угла *x*, для которого
$\cos x = m, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi, |m| \leqslant 1.$
Функция $y = \cos x$непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой.
Функция $y = \arccos x$является строго убывающей.
$\cos(\arccos x) = x$при $-1 \leqslant x \leqslant 1,$
$\arccos(\cos y) = y$при $0 \leqslant y \leqslant \pi.$
$D(\arccos x) = [-1; 1],$(область определения),
$E(\arccos x) = [0; \pi].$(область значений).
Свойства функции arccos
$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$(функция центрально-симметрична относительно точки
Функция arctg

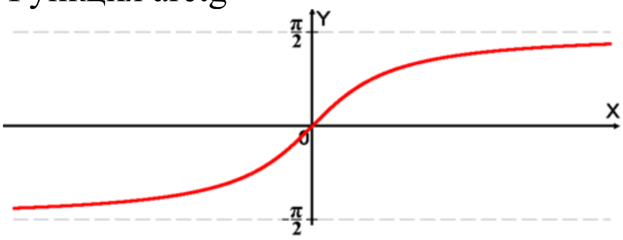


График функции $y = \operatorname{arctg} x$.
Арктангенсом числа *m* называется такое значение угла α, для которого
$\operatorname{tg} \alpha = m, \qquad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$
Функция $y = \operatorname{arctg} x$непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой.
Функция $y = \operatorname{arctg} x$является строго возрастающей.
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$при $x \in \mathbb{R},$
$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y) = y$при $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$
$D(\operatorname{arctg} x) = (-\infty; \infty),$
$E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Функция arcctg

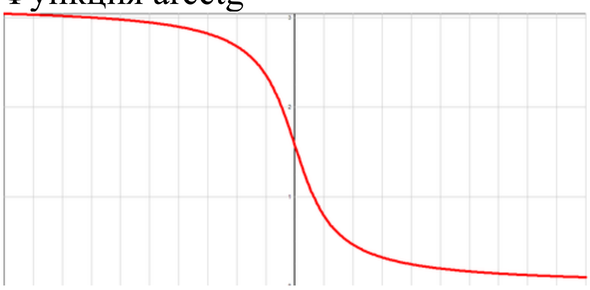


График функции y=arcctg x
Арккотангенсом числа *m* называется такое значение угла *x*, для которого
$\operatorname{ctg} x = m, \qquad 0 < x < \pi.$
Функция $y = \operatorname{arcctg} x$непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой.
Функция $y = \operatorname{arcctg} x$является строго убывающей.

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ при $x \in \mathbb{R}$,
$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} y) = y$ при $0 < y < \pi$,
$D(\operatorname{arcctg} x) = (-\infty; \infty)$,
$E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi)$.
Свойства функции arcctg
$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$ (график функции центрально-симметричен относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. x.

Критерии оценивания:

1. Вычисляет значения выражений, содержащих обратные тригонометрические функции;
2. выполняет преобразования выражений, содержащие тригонометрические функции

Вопросы для самоконтроля:

1. **Как записываются обратные тригонометрические функции.**
2. **Назовите свойства обратных тригонометрических функций.**

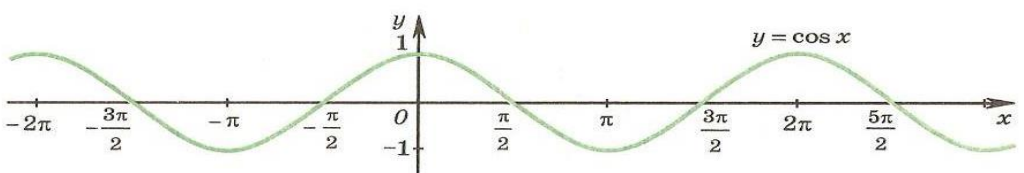
Тема 8. Простейшие уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.

Вамизвестныспособырешениялинейных, квадратных, дробно-рациональныхуравнений.
Теперьрассмотримрешениятригонометрическихуравнений.
Определение:Уравнение, заданное в виденеизвестногоаргументатригонометрическойфункции, называетсятригонометрическимуравнением.

Определение Простейшие тригонометрические уравнения – уравнения *вида Sinx = a, Cosx = a, tgx = a, ctgx = a.*
Решить простейшее тригонометрическое уравнение – значит найти множество всех значений аргумента, при котором данная тригонометрическая функция принимает значение а.

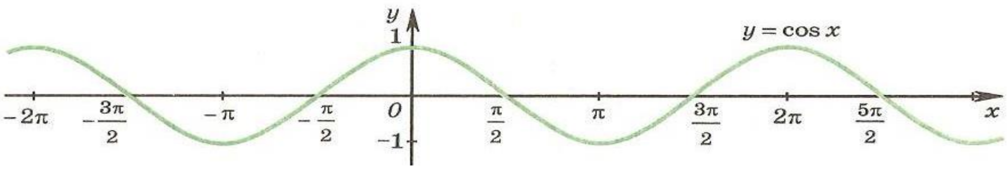
Рассмотрим решения данных уравнений
Уравнение Cos x = a
Т.к. функция y = Cosx имеет смысл при ,то рассмотрим основные случаи решения данного уравнения.
Опр. Простейшими тригонометрическими уравнениями называют уравнения вида cosx=a, sinx=a, tgx= a, ctgx=a. В этих уравнениях переменная находится под знаком тригонометрической функции, а – данное число.
Сегодня мы научимся решать уравнения вида cosx=a.

Рассмотрим графики



функций в одной системе координат y=cosx и y=a.

1.|a| >1, т.е. a>1 или a<1, то :
Сделайте вывод самостоятельно.
О: уравнение cosx=a не имеет решений, если |a| >1
2. .|a|<1, тогда:



То уравнение cosx=a на отрезке $[0;\pi]$ имеет единственный корень, который называется arccos a, т.к. функция на этом промежутке убывает и принимает все значения от -1 до 1. Косинус – чётная функция, значит на отрезке $[-\pi;0]$ уравнение имеет в точности одно решение - arccos a. Значит на отрезке длиной 2π уравнение cosx=a имеет два корня. Как их записать одной формулой?
x= ± arccos a..
Как записать все решения этого уравнения?
x=± arccos a+ 2πn, n$\in$ Z
так как функция периодическая, все остальные решения отличаются на 2πn.
Итак, уравнение cosx=a имеет множество корней, которые записывают формулой вида: x=± arccos a+ 2πn, , n$\in$ Z
А уравнения : *cost=0, cost=1, cost=-1 имеют частные решения:*

$t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $\quad$ $t = 0 + 2\pi n,\ t = 2\pi n,\ n \in Z$ $\quad$ $t = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

$\cos t = a, \quad \lvert a\rvert \ll 1$ $t = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$		
$\cos t = 1,$ $t = 2\pi n, \quad n \in Z$	$\cos t = -1,$ $t = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$	$\cos t = 0,$ $t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Например: 2sin x = 1
arccos 0 + arcsin 1; и) arcsin $\frac{1}{2}$ + arccos $(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; к)arcsin $(-\frac{1}{2})$ + arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

Уравнения, содержащие косинус - cos *x*.

Уравнение: РЕШЕНИЯ:

$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z$	
$\cos x = 1$	$x = 2\pi k, \ \ k \in Z$	
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi k, \ \ k \in Z$	
$\cos x = \frac{1}{2}$	$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ \ k \in Z$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ \ k \in Z$
$\cos x = -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ \ k \in Z$	$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ \ k \in Z$
$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ \ k \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ \ k \in Z$
$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ \ k \in Z$	$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ \ k \in Z$
$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in Z$	$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in Z$
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in Z$	$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in Z$

Общий вид решения уравнения cos *x* = *a*, где | *a* | £ 1, определяется формулой:
x = ± arccos(*a*) + 2p*k*, *k* Î Z (целые числа),
при | *a* | > 1 уравнение cos *x* = *a* не имеет решений среди вещественных чисел.

Уравнения, содержащие синус - sin *x*.

Уравнение: РЕШЕНИЯ:

$\sin x = 0$	$x = \pi k,\ \ k \in Z$	
$\sin x = 1$	$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	
$\sin x = -1$	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	
$\sin x = \dfrac{1}{2}$	$x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = -\dfrac{1}{2}$	$x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$

Общий вид решения уравнения sin *x* = *a*, где | *a* | £ 1, определяется формулой:
x = (- 1)^k · arcsin(*a*) + p*k*, *k* Î Z (целые числа),
при | *a* | > 1 уравнение sin *x* = *a* не имеет решений среди вещественных чисел.

Уравнения, содержащие тангенс и котангенс - tg *x* и ctg *x*

Уравнение:	Уравнение:	РЕШЕНИЯ:

$\operatorname{tg} x = 0$	***	$x = \pi k,\ \ k \in Z$
$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$
$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$	$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$
$\operatorname{tg} x = 1$	$\operatorname{ctg} x = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$
$\operatorname{tg} x = -1$	$\operatorname{ctg} x = -1$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$
$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$
$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$
***	$\operatorname{ctg} x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$

Общий вид решения уравнения tg x = a определяется формулой:
x = arctg(a) + pk, k Î Z (целые числа).
Общий вид решения уравнения ctg x = a определяется формулой:
x = arcctg(a) + pk, k Î Z (целые числа).

Критерии оценивания:

1. Называет формулы для решения тригонометрических уравнений;

Вопросы для самоконтроля:

1. **Назовите определение тригонометрических уравнений?**
2. **Назовите простейшие тригонометрические уравнения?**
3. **Как вычисляются простейшие тригонометрические уравнения**?

Тема 10. Методы решения тригонометрических уравнений и их систем.

Вамизвестныспособырешениялинейных, квадратных, дробно-рациональныхуравнений.
Теперьрассмотримрешениятригонометрическихуравнений.

1. Алгебраический метод. Этот метод нам хорошо известен из алгебры (метод замены переменной и подстановки).

Рассмотрим решения тригонометрических уравнений некоторых видов.

I. *Тригонометрические уравнения, приводимые к алгебраическим уравнениям относительно одной тригонометрической функции.*

Пример 1. $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0.$

Решение. Данное уравнение является квадратным уравнением относительно функции $\sin x$. Поэтому обозначим $\sin x = u$, тогда $2u^2 + 3u - 2 = 0$. Получим корни: $u_1 = -2$; $u_2 = \frac{1}{2}$.

Переходим к двум простейшим уравнениям относительно функции $\sin x$, а именно: $\sin x = -2$ и $\sin x = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим решение каждого уравнения в отдельности.

Уравнение $\sin x = -2$ не имеет корней, так как $|-2| > 1$.

$\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. Проверим, удовлетворяет ли полученное решение данному уравнению. Для этого $x = \frac{\pi}{6}$ подставим в данное уравнение, тогда получим

$$2\sin^2\frac{\pi}{6} + 3\cdot\sin\frac{\pi}{6} - 2 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 = 0.$$

Следовательно, полученный корень удовлетворяет данному уравнению.

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

$2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$

$\cos^2 2x - 2\cos 2x - 3 = 0$

$\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$

$6\sin^2 x - \sin x = 1;$

$10\cos^2 x + 3\cos x = 1$

$\sqrt{3}\operatorname{tg}(3x + \frac{\pi}{4}) = 1$

$2\cos x - 1 = 0$

115. а) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$;
б) $2\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$;
в) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;
г) $6\,tg^2 x + tg\, x - 1 = 0$.

Самостоятельная работа №2

Найти период функции: а)f(x)= sin5x+2 б)f(x)= tg$\frac{x}{5}$-6 в)f(x)=cos($\frac{X}{3}+1$) г)f(x)=ctg(2-$\frac{x}{7}$) 3) Вычислить: а) arccos(-$\frac{\sqrt{3}}{2}$) +arctg$\sqrt{3}$ б)$\frac{\pi}{3} * arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - arctg1$ в)arcsin $\left(-\frac{1}{2}\right) - arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ г)$arccos\frac{1}{2} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 4) Решить уравнения: а) sinx=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ б) tgx=$\frac{1}{\sqrt{3}}$ в) ctgx=$\sqrt{3}$ г) cosx=$\frac{\sqrt{3}}{2}$	Найти период функции: а)f(x)= sin5x+2 б)f(x)= tg$\frac{x}{5}$-6 в)f(x)=cos($\frac{X}{3}+1$) г)f(x)=ctg(2-$\frac{x}{7}$) 3) Вычислить: а) arccos(-$\frac{\sqrt{3}}{2}$) +arctg$\sqrt{3}$ б)$\frac{\pi}{3} * arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - arctg1$ в)arcsin $\left(-\frac{1}{2}\right) - arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ г)$arccos\frac{1}{2} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 4) Решить уравнения: а) sinx=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ б) tgx=$\frac{1}{\sqrt{3}}$ в) ctgx=$\sqrt{3}$ г) cosx=$\frac{\sqrt{3}}{2}$

II. ***Тригонометрические уравнения, решаемые путем преобразований тригонометрическими формулами.***

***Пример* 4.** **Решим уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.**

Решение. **Чтобы решить данное уравнение, группируем слагаемые следующим образом: $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$. Теперь к выражению в скобках применим формулу**

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тогда $2\sin\frac{x+3x}{2}\cdot\cos\frac{x-3x}{2} + \sin 2x = 0$,

$2\sin 2x\cos(-x) + \sin 2x = 0$, $\sin 2x(2\cos x + 1) = 0$.

Отсюда получим два простейших уравнения:

$\sin 2x = 0$ **или** $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение первого уравнения: $2x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$.

Решение второго уравнения: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

***Пример* 5.** $\cos 4x\cdot\cos 2x = \cos 5x\cdot\cos x$.

Решение. **Используя формулы тригонометрии, преобразуем произведения в сумму:** $\cos 4x\cdot\cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)$ **и** $\cos 5x\cdot\cos x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x)$. **Тогда данное уравнение примет следующий вид:**

$\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x)$,

$\cos 6x + \cos 2x - \cos 6x - \cos 4x = 0$,

$\cos 2x - \cos 4x = 0$.

Теперь, используя формулу разности косинусов, преобразуем разность в произведение: $2\sin 3x\cdot\sin x = 0$.

Вам известны способы решения линейных, квадратных, дробно-рациональных уравнений. Теперь рассмотрим решения тригонометрических уравнений.

Приведение к однородному уравнению. Уравнение называется *однородным относительно* sin *и* cos, *если все его члены одной и той же степени относительно* sin *и* cos *одного итого же угла*. Чтобы решить однородное уравнение, надо:

а) перенести все его члены в левую часть;

б) вынести все общие множители за скобки;

в) приравнять все множители и скобки нулю;

г) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на cos (или sin) в старшей степени;

д) решить полученное алгебраическое уравнение относительно tan .

IV. *Решение однородных тригонометрических уравнений.*

Определение. *Уравнение вида*

$$a_0u^n + a_1u^{n-1}v + a_2u^{n-2}v^2 + \dots a_{n-1}uv^{n-1} + a_nv^n = 0 \qquad (1)$$

называется однородным уравнением степени n относительно u и v.

Если $u = \sin x$ и $v = \cos x$, то уравнение вида (1) называют однородным тригонометрическим уравнением.

Пример 7. Решим уравнение $6\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 1$.

Решение. Заменим единицу основным тригонометрическим тождеством $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ и перенесем его в левую часть.

Тогда $6\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$,

$5\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

В полученном уравнении показатель степени каждого слагаемого равен 2. Следовательно, уравнение является однородным уравнением второй степени. Чтобы решить это уравнение, можно разделить его почленно на $\cos^2 x \neq 0$ или $\sin^2 x \neq 0$.

Если разделим уравнение почленно на $\cos^2 x \neq 0$, то получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$; если же разделим уравнение почленно на $\sin^2 x \neq 0$, то получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg} x$. Рассмотрим первый случай:

$$5 \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \cdot \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - 2 \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0, \quad 5\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Допустим, что $\operatorname{tg} x = u$, тогда $5u^2 - 3u - 2 = 0$, $u_1 = -0{,}4$; $u_2 = 1$.

Итак, получили два простейших тригонометрических уравнения: $\operatorname{tg} x = -0{,}4$; $\operatorname{tg} x = 1$. Соответственно эти уравнения имеют следующие корни:

$x_1 = -\operatorname{arctg} 0{,}4 + \pi n,\ n \in Z$; $\qquad x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $-\operatorname{arctg} 0{,}4 + \pi n,\ n \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Решите уравнения

$3\sin^2 x + \sin x\cos x = 2\cos^2 x$ *Решить уравнение:* 1) $2\sin x - 3\cos x = 0$ $\cos x \neq 0$	$4\sin^2 x = 3\sin x\cos x + \cos^2 x$

Решение:

Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$2 \cdot tgx - 3 = 0$; $\qquad tgx = \frac{3}{2}$; $\qquad x = arctg\frac{3}{2} + \pi k$, $\quad k \in Z$.

Ответ: $x = arctg\frac{3}{2} + \pi k$, $\quad k \in Z$.

2) $Sin2x+\cos 2x=0$ $\cos 2x\neq 0$

Решение:

Разделим обе части уравнения на $\cos 2x$:

$tg\,2x+1=0;$

$tg\,2x=-1;$

$2x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k;$ $x=(4k-1)\dfrac{\pi}{8}$, $k\in Z$. Ответ: $x=(4k-1)\dfrac{\pi}{8}$, $k\in Z$.

$2x=(4k-1)\dfrac{\pi}{4};$

3) $\cos^2 x+\sin x\cos x=0$

Решение:

В условии не указано, что $\cos x\neq 0$, а потому делить на $\cos^2 x$ - нельзя. Но можно утверждать, что $\sin x\neq 0$, так как в противном случае $\cos x=0$, что невозможно одновременно. Разделим обе части уравнения на $\sin^2 x$, получим:

$ctg^2 x+ctgx=0;$

$ctgx(ctgx+1)=0;$

1. $ctgx=0;$ или 2. $ctgx+1=0;$

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ $ctgx=-1;$

$x=\dfrac{3}{4}\pi+\pi k$, где $n,k\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\dfrac{3}{4}\pi+\pi k$, $n,k\in Z$.

4) $4\sin^2 x+2\sin x\cos x=3$

Решение:

Умножим правую часть уравнения на $\sin^2 x+\cos^2 x$, получим:

$4\sin^2 x+2\sin x\cos=3\sin^2 x+3\cos^2 x;$

$\sin^2 x+2\sin x\cos-3\cos^2 x=0$

Очевидно, что $\cos x\neq 0$. Разделим на $\cos^2 x$, получим:

$tg^2 x+2\cdot tgx-3=0;$ $tgx=-3$ и $tgx=1$ $x=-arctg3+\pi k$ и $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n,k\in Z$.

Ответ: $x=-arctg3+\pi k$, $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n,k\in Z$.

Ответ: $x=2\pi n$, $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $n,k\in Z$.

П р и м е р . Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2$.

Решение . $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x = 0$,

$\tan^2 x + 4\tan x + 3 = 0$, отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,

корни этого уравнения: $y_1 = \cdot\ 1$, $y_2 = \cdot\ 3$, отсюда

1) $\tan x = -1$, 2) $\tan x = -3$,

$x_1 = -\pi/4 + \pi k$; $x_2 = -\arctan 3 + \pi n$.

Критерии оценивания:
1. Различает методы решенияуравнения.
2. тригонометрических уравнений.

Вопросы для самоконтроля:
1. **Назовите способы решения тригонометрических уравнений.**
2. **Дайте определение тригонометрических уравнений.**

Тема 11. Решение тригонометрических неравенств.

Тогда прямая пересечет синусоиду в бесконечном множестве точек (рис. 44).

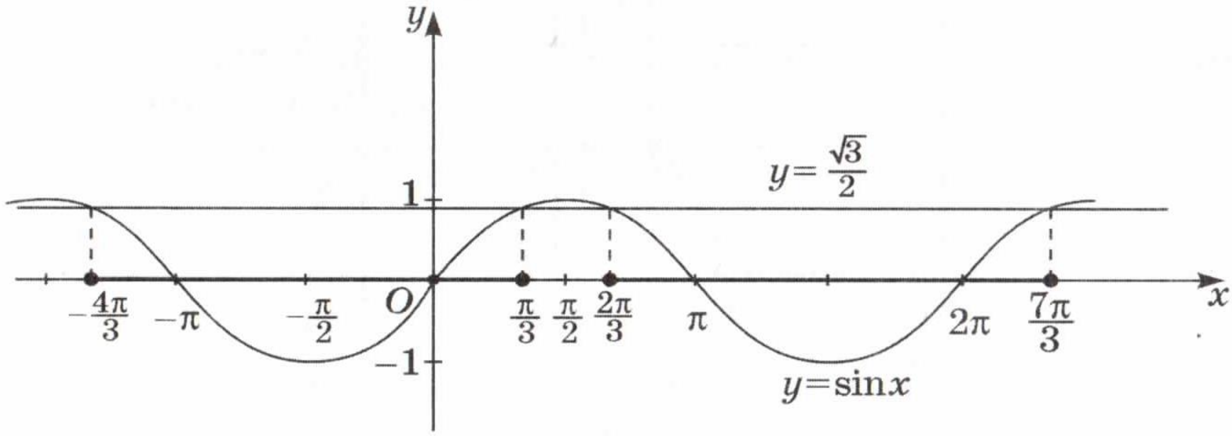


Рис. 44

Части синусоиды, удовлетворяющие данному неравенству, расположены ниже прямой $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда концы первого отрезка, лежащего в правой части оси абсцисс, отметим через x_1 и x_2. Учитывая, что $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, вычислим значения $x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ и $x_2 = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$.

Тогда $\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{3}$. Используя периодичность функции $y = \sin x$, запишем решение данного неравенства:

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

Пример 2. Решим неравенство $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$.

Решение. Чтобы решить неравенство $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$, построим в одной координатной плоскости график функции $y = \operatorname{tg} x$ и прямую $y = \sqrt{3}$ (рис. 45). Тогда прямая $y = \sqrt{3}$ пересекается с тангенсоидой в бесконечном множестве точек (в каждом периоде одна точка пересечения). Точки тангенсоиды, удовлетворяющие данному неравенству, расположены выше прямой $y = \sqrt{3}$.

Если учесть, что $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, то на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ абсцисса точки пересечения равна $x = \frac{\pi}{3}$. Основным решением данного

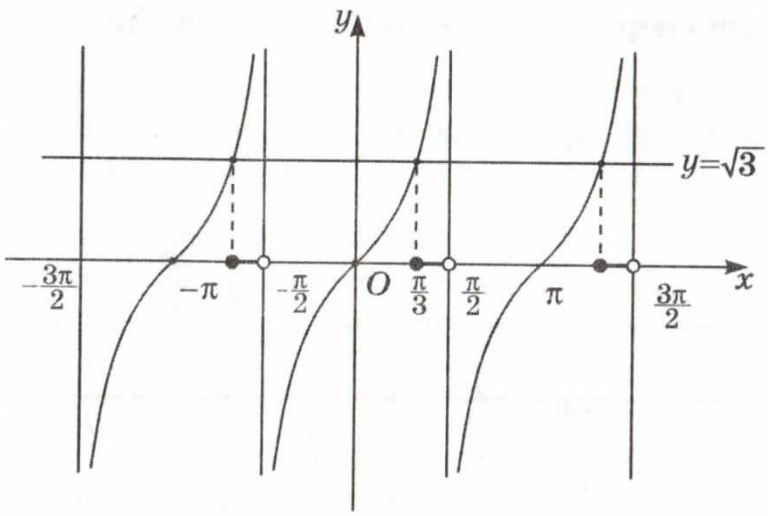


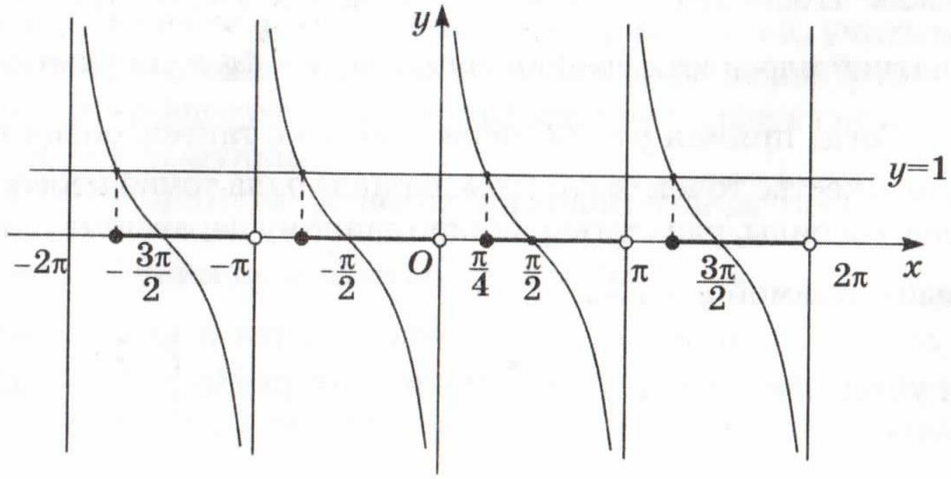
Рис. 45

неравенства будет промежуток $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, т.е. $\frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Теперь, учитывая периодичность функций $y = \operatorname{tg} x$, напишем решение данного неравенства: $\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

Пример 3. Решим неравенство $\operatorname{ctg} x \leqslant 1$.

Решение. По алгоритму решения тригонометрических неравенств вначале построим в одной координатной плоскости график функции $y = \operatorname{ctg} x$ и прямую $y = 1$ (рис. 46). Тогда прямая $y = 1$ пересекается котангенсоидой в бесконечном множестве точек (в каждом периоде одна точка пересечения). Точки котангенсоиды, удовлетворяющие данному неравенству, расположены ниже прямой $y = 1$.



Основной промежуток, удовлетворяющий данному неравенству, будет $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$ или $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \pi$, так как $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{ctg} x$, запишем общее решение неравенства:

$$\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x < \pi + \pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \pi + \pi n\right)$, $n \in Z$.

Пример 4. Решим неравенство $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. В одной координатной плоскости построим график функции $y = \cos x$ и прямую $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда прямая пересечет косинусоиду в бесконечном множестве точек (рис. 47). Точки косинусоиды, удовлетворяющие данному неравенству, расположены выше прямой $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

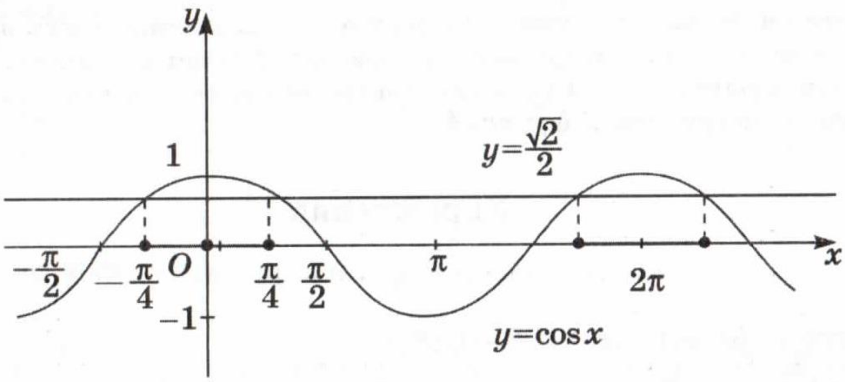


Рис. 47

Основной промежуток решения: $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Тогда $-\frac{\pi}{4} \leqslant 2x - \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{4}$. Если учесть периодичность функции $y = \cos x$, то получим следующее неравенство: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant 2x - \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. Теперь к каждой части неравенства прибавим $\frac{\pi}{3}$: $\frac{\pi}{12} + 2\pi n \leqslant 2x \leqslant \frac{7\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Затем каждую часть последнего неравенства разделим на 2: $\frac{\pi}{24} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{24} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{24} + \pi n; \frac{7\pi}{24} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

Пример 5. Решим неравенство $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$.

Решение. Применим формулу $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
Тогда $\cos 2x + 2\cos 2x\cdot\cos x > 0$. Затем вынесем $\cos 2x$ за скобки и получим $\cos 2x\,(2\cos x + 1) > 0$. Тогда получим две системы простейших тригонометрических неравенств:

а) $\begin{cases}\cos 2x < 0,\\ \cos x < -\frac{1}{2}\end{cases}$ или б) $\begin{cases}\cos 2x > 0,\\ \cos x > -\frac{1}{2}.\end{cases}$

Решением данного неравенства будет объединение решений систем неравенств.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n\in Z$.

136. а) $\sin x > 0$; б) $\cos x < 0$;
в) $\operatorname{tg} x < 0$; г) $\operatorname{ctg} x > 0$.

137. а) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$; б) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$;
в) $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$; г) $\sqrt{2}\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{2}$.

138. а) $\cos 5x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin 8x < \frac{1}{2}$;
в) $\operatorname{ctg} 2x > -1$; г) $\operatorname{tg} 3x \leqslant -1$.

139. Имеют ли решения следующие неравенства: а) $4\sin x - 2 \geqslant 0$; б) $2\operatorname{tg} 2x + 8 > 0$; в) $5\cos 2x + 2 \leqslant 7$?

140. Найдите решение неравенств на указанном промежутке:

а) $\sin 2x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x\in[-\pi; \pi]$; б) $\cos\frac{x}{3} < \frac{1}{2}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

Критерии оценивания:

1. Объясняет решение тригонометрических неравенств

Вопросы для самоконтроля:

1. **Как вычислить тригонометрические неравенства?**

Тема 12 Многочлены с несколькими переменными и их стандартный вид. Однородные и симметрические многочлены.

Многочлен - это алгебраическое выражение представляющее собой сумму одночленов. Для примера:$2a + 4ab^7 - 3ab^3 + 4$; $6 + 4b^3$

многочлены, а выражение$\frac{z}{2x-xy+4}$не является

многочленом потому, что оно не является суммой одночленов. Многочлен еще иногда называют полиномом, а одночлены которые входят в состав многочлена членами многочлена или мономами.

Комплексное понятие многочлена

Если многочлен состоит из двух слагаемых, то его называют двучлен, если из трех - трехчлен. Названия четырехчлен, пятичлен и другие не используются, а в таких случаях говорят просто, многочлен. Такие названия, в зависимости от количества слагаемых, ставят все на свои места.

И термин одночлен становится интуитивно понятным. С точки зрения математики, одночлен является частным случаем многочлена. Одночлен это многочлен, который состоит из одного слагаемого.

Так же как и у одночлена, у многочлена есть свой стандартный вид. Стандартным видом многочлена называется такая запись многочлена, при которой все входящие в него в качестве слагаемых одночлены, записаны в стандартном виде и приведены подобные члены.

Многочлен считается приведенным к стандартному виду тогда, когда все составляющие его одночлены приведены к стандартному виду, а также приведены все подобные члены, то есть в многочлене нет подобных членов.
Например, следующий многочлен не приведен к стандартному виду:

$4a * ab^2 + 8c – a^2b^3 – 3c$

У него первый одночлен не приведен к своему стандартному виду, а также есть подобные. Исправив эти недочеты, получим:

$4a^2b^2 – a^2b^3 + 5c$

Теперь многочлен приведен к стандартному виду.

Однако есть еще правило: если в многочлен входит только одна переменная, то одночлены располагают в порядке убывания ее степеней. Сравните:

$a^3 – 4a + 3$ и $3 – 4a + a^3$

Здесь стандартный вид имеет только первый многочлен, хотя эти многочлены являются тождественно равными друг другу. Вообще существует утверждение, что тождественно равные многочлены стандартного вида могут отличаться только порядком следования одночленов и ничем иным.

Определение: многочлен от нескольких переменных называется симметрическим, если он не изменяется ни при какой перестановке неизвестных.

Однородый многочлен – сумма степеней каждого одночлена равны между собой.

Работа в парах.

Решите уравнение

$$(x-4)(x^2+4x+16)=-189$$

$$6(x+1)^2+2(x-1)(x^2+x+1)-2(x+1)^3=32$$

$$(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)=26$$

$$3x^4+x^3-12x^2-4x=0$$

$$2x^4+3x^3-8x^2-12x=0$$

Работа в парах

Запишите многочлен в стандартном виде:

1. $b\cdot ab+a^2b$
2. $12+3c\cdot 8b\cdot c^2-c\cdot 2a$
3. $0.5x\cdot(-7y)\cdot 8x^2+(-0.6x)\cdot 3y^2$
4. $(x-2y)^3+5(x-y)^3+(x+2y)^2$
5. $(a+b-5)(a^2+b^3-ab)$
6. $(m^3-n^2+3)(m^3+2n^2+5)$

Индивидуальная работа.

Решите уравнение

$$x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0$$

$$(x-3)^4+(x+1)^4=256$$

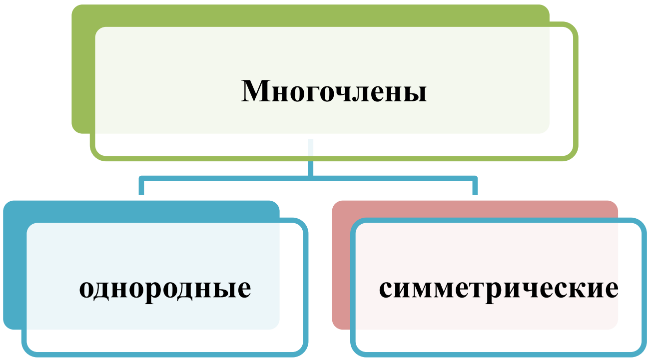
Привести к стандартному виду

1. $3nmk\,4n - \frac{3}{8}nm5nk + \frac{2}{9}n^2m\left(-4\frac{1}{2}\right)$

2. $\left(2x^2y + 3xy^2\right)\left(2x + 3y + 1\right)$

3. $(a+b)^5 - 2(a-b)^5$

III. Вместе с учащимся рассмотреть виды многочленов: однородные и симметричные



Определение 1: Многочлен $P(x, y)$ называется **однородным многочленом степени *n***, если сумма показателей степеней переменных в каждом члене многочлена равна ***n***.

$P(x, y) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + a_{n-2}x^{n-2}y + \ldots + a_1 xy^{n-1} + a_0 y^n$ - общий вид однородного многочлена от двух переменных *n*-й степени.

Приведем примеры:

1) $P(x, y) = 2x + 3y$ - однородный многочлен первой степени.
2) $P(x, y) = 3x^2 + 5xy - 7y^2$ - однородный многочлен второй степени.
3) $P(x, y) = x^3 + 4xy^2 - 5y^3$ - однородный многочлен третий степени.

Определение 2: Многочлен $P(x, y)$называется **симметрическим**, если он сохраняет свой вид при одновременной замене ***x***на***y***и***y***на ***x***.
Пример:
$xy, x + y, x^2 + y^2, x^3 + y^3, 2x^3y + 3x^2y^2 - x^4 - y^4 + 2xy^3$и т.д.

Работа в парах (при возникновении вопросов - разбор у доски).

1.Укажите однородные, симметричные многочлены, обоснуйте ответ.

1. $7x^5 + 4x^3 - x^2 + 4x + 7$

2. $y^3 + 4y^2c - 105c^3$
3. $-3d^4 + 4ec^3 - 5c^2d^2$
4. $7u^4 + 4uv^3 - 5v^2$
5. $-6z^5 + 4z^4 - 5z^3 + 5z^2 + 4z - 6$
6. $2ab^3 - 4ab^2 - 5ab + 4a^2b + 2ba^3$

2.Выразите симметрический многочлен P через симметрические многочлены $u = x + y,\ v = xy,$ если

a) $P = x^3 + y^3$;

$P = x^4 + y^4$.

Критерии оценивания:

1. Приводит многочлен к стандартному виду;
2. определяет степень многочлена стандартного вида;
3. распознает симметрические и однородные многочлены

Вопросы для самокотроля:

1. Приведите пример однородного многочлена второй степени; третьей степени.
2. Выразить симметрический многочлен P через симметрические многочлены $u = x + y,\ v = xy,$ если

b) $P = x^5 + y^5$;

c) $P = x^6 + y^6$.

Тема 13. Общий вид многочлена с одной переменной. Деление «уголком» многочлена на многочлен.
Новая тема:

Особое место в теории многочленов занимает деление одного многочлена на другой.

Пусть заданы многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 1$ и ненулевой многочлен $T(x)$. Если существует такой многочлен $Q(x)$, что для всех x выполняется равенство

$$P(x) = T(x) \cdot Q(x), \tag{2}$$

то говорят, что многочлен $P(x)$ *делится* на многочлен $T(x)$ или $T(x)$ *делит* $P(x)$, а формулу (2) называют *формулой деления многочленов*, многочлен $Q(x)$ называют *частным*.

Простые примеры показывают, что один многочлен делится на другой не всегда. Например, многочлен $x^2 + 2$ не делится на многочлен $x + 1$. Действительно, в противном случае имело бы место равенство $x^2 + 2 = (x + 1) \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый многочлен. Но при $x = -1$ левая часть этого равенства принимает значение 3, а правая — значение 0. Следовательно, написанное соотношение не может иметь места ни при каком $Q(x)$.

Итак, в множестве многочленов деление осуществимо не всегда. Однако имеет место более общая операция, называемая *деление с остатком*.

Пусть заданы многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 1$ и ненулевой многочлен $T(x)$ степени $m \geqslant 1$, где $m \leqslant n$. Говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком, если найдутся такие многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, что для всех x выполняется равенство

$$P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x), \tag{3}$$

где многочлен $Q(x)$ — (*неполное*) *частное*, степень которого $k = n - m$; а $R(x)$ — *остаток*, степень которого $p < m$.

Тождественное равенство (3) называют *формулой деления многочленов с остатком*.

Если остаток $R(x) = 0$, то говорят, что многочлен $P(x)$ *делится нацело* на многочлен $T(x)$.

[10 минут]

Теорема 1. *Для любых многочленов $P(x)$ и $T(x)$, где $T(x) \neq 0$, существует пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$ таких, что выполняется равенство $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$, причем либо степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $T(x)$, либо $R(x) = 0$.*

Теорема 2. *Пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1, единственна.*

Теоретическим обоснованием и фактически изложением способа деления многочленов «уголком» является доказательство теоремы 1. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 4. Разделить «уголком» многочлен

$$P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 9x - 5$$

на многочлен $T(x) = 3x^2 + 4x - 5$.

$\triangle$ Условие данного примера совпадает с условием примера 2, только многочлены даны в стандартном виде.

Описанная в доказательстве теоремы 1 процедура деления многочлена $P(x)$ на многочлен $T(x)$ (см. также пример 2) может быть реализована в виде *деления многочленов «уголком»*.

$$
\begin{array}{lr|ll}
\text{Делимое}\rightarrow & 6x^4+5x^3-17x^2+9x-5 & 3x^2+4x-5 & \leftarrow\text{Делитель}\\ \cline{3-3}
- & 6x^4+8x^3-10x^2 & 2x^2-x-1 & \leftarrow\text{Частное}\\ \cline{2-2}
 & -3x^3-7x^2+9x & & \\
- & -3x^3-4x^2+5x & & \\ \cline{2-2}
 & -3x^2+4x-5 & & \\
- & -3x^2-4x+5 & & \\ \cline{2-2}
 & 8x-10 & \leftarrow\text{Остаток} &
\end{array}
$$

В данном примере получаем $Q(x) = 2x^2 - x - 1$, $R(x) = 8x - 10$ и

$$6x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 9x - 5 = (3x^2 + 4x - 5)(2x^2 - x - 1) + (8x - 10). \blacktriangle$$

Задание 3. Выясните, при каком значении*а* многочлен *P(x)* делится нацело на многочлен *Q(x)*.

а) $P(x) = 5x^3 - 9x^2 + 13x + a, \ \ Q(x) = 5x + 1.$

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
-\ 5x^3 - 9x^2 + 13x + a & 5x+1 \\
\underline{5x^3 + x^2} \qquad\qquad\quad & \overline{x^2 - 2x + 3} \\
-\ -10x^2 + 13x \quad & \\
\underline{-10x^2 - \ \ 2x} \quad & \\
-\ 15x + a & \\
\underline{15x + 3} & \\
a - 3 &
\end{array}
$$

Значит, $a - 3 = 0$.

Ответ: $a = 3$.

б) $P(x) = 3x^5 - 3x^4 + ax^2 - ax, \ \ Q(x) = 3x^3 + 2.$

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
-\ 3x^5 - 3x^4 + ax^2 - ax & 3x^3 + 2 \\
\underline{3x^5 + 0x^4 + 2x^2} \qquad & \overline{x^2 - x} \\
-\ -3x^4 + (a-2)x^2 - \qquad ax & \\
\underline{-3x^4 + \qquad 0x^2 - \qquad 2x} & \\
(a-2)x^2 - (a-2)x &
\end{array}
$$

Значит, $a - 2 = 0$.

Ответ: $a = 2$.

в) $(x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2):(x^2 - x + 1)$;

г) $(x^3 - x^2 - 2x + 4):(x^2 - 3x + 1)$;

д) $(x^5 + 2x^3 - x^2 - 2):(x^3 - 1)$;

е) $(x^4 + 4):(x^2 + 2x + 2)$;

ж) $(2x^5 + 3x^3 - 2x):(2x^2 + 2)$.

2. Решение примеров

Задание 2. Найдите частное и проверьте результат умножением.
(Выполняется у доски.)

а) $(6x^3 + 7x^2 - 6x + 1):(3x - 1)$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 & 3x - 1 \\
\cline{2-2}
\underline{6x^3 - 2x^2} \qquad\qquad & 2x^2 + 3x - 1 \\
-\,9x^2 - 6x \qquad & \\
\underline{9x^2 - 3x} \qquad & \\
-\,-3x + 1 & \\
\underline{-3x + 1} & \\
0 &
\end{array}
$$

Q(X) = $2x^2$ + 3x -1
R(x) = 0

$6x^3+7x^2-6x+1 = (3x-1)(2x^2 + 3x - 1) + 0$

Задание 1. Выполните деление.

а) $(x^3 - 4x):(x - 4)$;

б) $(2x^3 + x^2 - 4x - 2):(2x + 1)$;

в) $(x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2) : (x^2 - x + 1)$;

г) $(x^3 - x^2 - 2x + 4) : (x^2 - 3x + 1)$;

д) $(x^5 + 2x^3 - x^2 - 2) : (x^3 - 1)$;

е) $(x^4 + 4) : (x^2 + 2x + 2)$;

ж) $(2x^5 + 3x^3 - 2x) : (2x^2 + 2)$.

2. Решение примеров

Задание 2. Найдите частное и проверьте результат умножением.

(Выполняется у доски.)

а) $(6x^3 + 7x^2 - 6x + 1) : (3x - 1)$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 & 3x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^3 - 2x^2\phantom{{}-6x+1}} & 2x^2 + 3x - 1 \\
-\;9x^2 - 6x\phantom{{}+1} & \\
\underline{9x^2 - 3x\phantom{{}+1}} & \\
-\;-3x + 1 & \\
\underline{-3x + 1} & \\
0 &
\end{array}
$$

Задание 3. Выясните, при каком значении*a* многочлен *P(x)* делится нацело на многочлен *Q(x)*.

а) $P(x) = 5x^3 - 9x^2 + 13x + a,\;\; Q(x) = 5x + 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;5x^3 - 9x^2 + 13x + a & 5x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{5x^3 + x^2\phantom{{}+13x+a}} & x^2 - 2x + 3 \\
-\;-10x^2 + 13x\phantom{{}+a} & \\
\underline{-10x^2 - \;\; 2x\phantom{{}+a}} & \\
-\;15x + a & \\
\underline{15x + 3} & \\
a - 3 &
\end{array}
$$

Значит, $a - 3 = 0$.

Ответ: $a = 3$.

б) $P(x) = 3x^5 - 3x^4 + ax^2 - ax,\;\; Q(x) = 3x^3 + 2$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;3x^5 - 3x^4 + ax^2 - ax & 3x^3 + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^5 + 0x^4 + 2x^2\phantom{{}-ax}} & x^2 - x \\
-\;-3x^4 + (a-2)x^2 - \qquad ax & \\
\underline{-3x^4 + \qquad 0x^2 - \qquad 2x} & \\
(a-2)x^2 - (a-2)x &
\end{array}
$$

Значит, $a - 2 = 0$.

Ответ: $a = 2$.

учащимся предлагается выполнить следующие задания в парах:

Используя способ деления «уголком»,

Найти числа a, b и c, при которых справедливы следующие равенства:

1) $3x^4+7x^3+3x^2+x+2=(x+1)(ax^3+bx^2-x+c)$;

2) $2x^5+5x^4+5x^3+7x^2-x+6=(x^2+x+2)(2x^3+ax^2+bx+c)$.

2 уровень.

Используя способ деления «уголком», найти частное и остаток при делении многочлена $P(x)$ на многочлен $T(x)$:

1) $P(x)=x^4-2x^3+4x^2-6x+8$, $T(x)=x-1$;

2) $P(x)=3x^5+x^4-19x^2-13x-10$, $T(x)=x-2$;

Дескрипторы:

Правильно выполняет деление «уголком».

Правильно записывает частное и остаток от деления.

Проверка.

Критерии оценивания:

1. Выполняет деление многочленов «Уголком»

Тема 14. Нахождение корней многочлена с однойпеременной методом разложения на множители. Теорема Безу. Схема Горнера

Учебник 2часть . стр 13-19

Пример 1. Дан многочлен $P(x)=2x^5-5x^3-8x-8$. Найти $P(-1)$, $P(1)$, $P(0)$, $P(2)$.

$\triangle$ $P(-1)=2(-1)^5-5(-1)^3-8(-1)-8=-2+5+8-8$, т. е. $P(-1)=3$; аналогично, $P(1)=2-5-8-8=-19$, $P(0)=-8$, $P(2)=0$. $\blacktriangle$

Число x, при котором многочлен $P(x)$ обращается в нуль, называется *корнем* этого многочлена.

Например, число 2 — корень многочлена $P(x)=2x^5-5x^3-8x-8$, так как $P(2)=0$.

Отметим, что число x_0 называется корнем многочлена $P(x)$, если оно является решением уравнения $P(x)=0$, т. е. верно равенство $a_0x_0^n+\ldots+a_kx_0^{n-k}+\ldots+a_n=0$.

Пример 2. Разделить многочлен $P(x)=2x^5-5x^3-8x-8$ на двучлен $x+1$.

Следовательно, $P(x) = (x+1)(2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 3x - 11) + 3$. ▲

Сравнивая результаты примеров 1 и 2, замечаем, что остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x+1$ равен значению этого многочлена при $x = -1$, т. е. $R = P(-1) = 3$.

Этот факт не случаен и является следствием *теоремы Безу*.

Теорема 1 (*Безу*). *Если x_0 — произвольное число, то при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - x_0)$ получается остаток, равный значению многочлена при $x = x_0$, т. е. $R = P(x_0)$.*

Пример: Найти остаток от деления многочлена $A(x) = x^4 - 6x^3 + 8$ *на* $x + 2$

$$x_0 = -2, A(-2) = (-2)^4 - 6(-2)^3 + 8 = 72$$

Замечание: При делении $A(x)$ *на* $ax + b$ $R(x) = A(-\frac{b}{a})$

Из теоремы Безу вытекает следующее важное утверждение.

Теорема 2. *Число x_0 является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $x - x_0$.*

○ Если x_0 — корень многочлена $P(x)$, то по теореме Безу $R = P(x_0) = 0$, т. е. $P(x) = Q(x) \cdot (x - x_0)$, а это значит, что многочлен $P(x)$ делится на $x - x_0$ нацело.

Пусть теперь $R = 0$, т. е.

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - x_0). \quad (1)$$

Подставляя в равенство (1) $x = x_0$, получаем $P(x_0) = 0$, т. е. x_0 — корень многочлена $P(x)$. ●

Закрепление новых знаний(№1 НЕ выполняя деление)

Упражнения

1. Найдите остаток от деления многочлена $x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 5x + 1$ на $x + 2$.
2. Найдите коэффициент a, зная, что остаток от деления многочлена $x^3 - ax^2 + + 5x - 3$ на $x - 1$ равен 6.

Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $Q(x) = ax + b$, не выполняя деления:

1) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2$, $Q(x) = 2x + 1$;
2) $P(x) = x^5 - x^3 + 2x - 1$, $Q(x) = 3 - 2x$.

13. Проверить делимость нацело многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

1) $P_3(x) = 35x^3 - 124x^2 - 67x + 12$, $\quad Q_1(x) = 5x + 3$;
2) $P_3(x) = 18x^3 - 105x^2 + 77x - 10$, $\quad Q_1(x) = x - 5$;
3) $P_3(x) = 63x^3 - 149x^2 + 48x - 4$, $\quad Q_1(x) = x - 2$;
4) $P_3(x) = 6x^3 + 17x^2 - 23x - 70$, $\quad Q_1(x) = 2x + 5$;
5) $P_4(x) = 2x^4 - x^3 - 29x^2 + 26x + 48$, $\quad Q_1(x) = x - 3$;

4.

При каких значениях a и b многочлен $ax^3 + bx^2 - 73x + 102$

делится на трёхчлен $x^2 - 5x + 6$ без остатка ?

Решение:

Разложим делитель на множители :

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Поскольку двучлены $x - 2$ и $x - 3$ взаимно просты , то данный многочлен делится на $x - 2$ и на $x - 3$, а это значит , что

по теореме Безу

$R_1 = P_3(2) = 8a + 4b - 146 + 102 = 8a + 4b - 44 = 0$

$R_2 = P_3(3) = 27a + 9b - 219 + 102 = 27a + 9b - 117 = 0$

Решим систему уравнений :

$$\begin{cases} 8a + 4b - 44 = 0 \\ 27a + 9b - 117 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 11 \\ 3a + b = 13 \end{cases}$$

Отсюда получаем : $a = 2$, $b = 7$.

Многочлен P(x) при делении на x-1 дает остаток 3, а при делении x-2 дает остаток 5. Найдите остаток от деления многочлена P(x) на $x^2 - 3x + 2$

Решение:

По теореме Безу: P(1)=3, P(2)=5. Отсюда P(x)=($x^2 - 3x + 2$)M(x)+R(x), нужно найти R(x), R(x) не может быть болше первой степени, так как $(x^2 - 3x + 2)$ второй степени, следовательно R(x)=ax+b Так как $P(1) = (1 - 3 + 2)M(1) + a + b = a + b = 3$

а $P(2) = (4 - 6 + 2)M(2) + 2a + b = 5$, то решая эту систему, получим a=2, b=1, то есть остаток равен 2x+1

Ответ: 2x+1

Решение задач с рабочего листа.

2. Найти все a и b, при которых многочлен $P(x)$ делится нацело на многочлен $Q(x)$:

1) $P_3(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b, \quad Q_2(x) = x^2 - 1;$
2) $P_4(x) = 6x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 4, \quad Q_2(x) = x^2 - 4.$

3. Многочлен $f(x)$ при делении на $x - 1$ дает остаток 4, а при делении на $x - 3$ дает остаток 6. Найдите остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x^2 - 4x + 3$.

4. При каких значениях a и b многочлен $x^4 + 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ делится без остатка на $x + 2$, а при делении на $x - 1$ имеет остаток, который равен 3?

5. Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $3x^2 - 5x + 2$ равен $7x + 1$. Найдите остаток от деления этого многочлена на двучлены $x - 1$ и $3x - 2$.

Задача 1. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - c$, если:

1) $P(x) = (2x^3 - 4x + 5)^2(2x + 3)^3$, $c = 1$;
2) $P(x) = (4x^4 - 3x^2 + 1)^3(x - 1)^4$, $c = -1$.

Задача 2. Выяснить, делится ли нацело многочлен $P(x)$ на многочлен $T(x)$, если:

1) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 10$, $T(x) = x - 2$.
2) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$, $T(x) = x^2 - x - 2$.

Найдите частное и остаток от деления

(a) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 7x + 5$ is divided by $x^2 + 2x - 1$,

(b) $x^4 - x^3 + 7x + 2$ is divided by $x^2 + x - 1$,

Критерии оценивания:

1. Находит корни многочлена с одной и несколькими переменными методом разложения его на множители.
2. Применяет теорему Безу, схему Горнера при решении задач.

Тема 15. Метод неопределенных коэффициентов. Теорема о рациональном корне многочлена с целыми коэффициентами

Эпиграф: ***Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть – и впоследствии подтвердить это, - что следуя этому методу, мы достигнем цели.***

Лейбниц

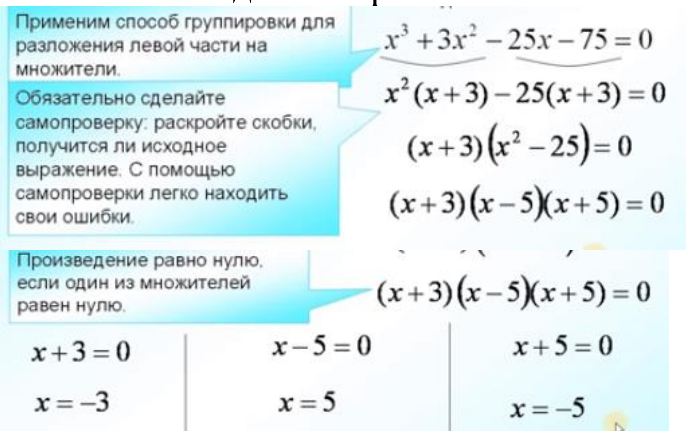
Одним из приемов решения уравнений высших степеней является разложение на множители.

Разложение многочлена на множители.

Любой многочлен может быть представлен в виде произведения. Самые известные методы разложения многочленов это: вынесение общего множителя, применение формул сокращенного умножения, выделение полного квадрата, группировка, разложение квадратного трехчлена на множители по формуле

Пример: решить уравнение $x^3+3x^2-25x-75=0$.

- Как называется способ, с помощью которого можно разложить левую часть уравнения на множители?
- Когда произведение множителей равно 0?
- Сколько корней имеет данное уравнение?
- Как вы думаете, может ли уравнение третьей степени иметь 1, 2, 4, 5 корней или ни одного корня



Тренировочные упражнения. По ЦО 10.2.1.5.

Учащимся предлагаются различные задачи для закрепления из учебного пособия. Раздаточный материал должен содержат задачи с запасом на более способных учащихся с высокой скоростью решения. Предложите учащимся заполнить «Лист успеха».

1. $2x^4-x^3=0$
2. $6x^4-3x^3+12x^2-6x=0$
3. x^3 -7x + 6 =0

$x^4+2x^3+5x^2+4x-12=0$

Критерии оценивания:

1. Применяетспособ «неопределенных коэффициентов. Применяет теорему о рациональном корне многочлена с одной переменной с целыми коэффициентами для нахождения его корней.
2. Применяет методы разложения на множители, введения новой переменной;

Тема 16. Уравнения высших степеней, приводимые к виду квадратного уравнения. Обобщенная теорема Виета для многочлена третьего порядка).

Пусть у уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$ имеется три корня: x_1, x_2, x_3 Тогда, выражение которое стоит слева знака равенства можно разложить на множители следующим образом:

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Если мы раскроем скобки и сгруппируем относительно переменных x^3, x^2, x получим выражение ниже:

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$$
$$ax^3-a(x_1+x_2+x_3)x^2+a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-$$
$$-ax_1x_2x_3.$$

Отсюда:

$$ax^3+bx^2+cx+d=$$
$$ax^3-a(x_1+x_2+x_3)x^2+a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-ax_1x_2x_3.$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

Это – формулы Виета для кубического уравнения.

Пример №1.

Дано уравнение $3x^3-4x^2+4x-1=0$, x_1, x_2, x_3 - корни уравнения. Найдите значения выражений не находя корни уравнения, $(x_1+x_2+x_3)^2-x_1x_2x_3$ и $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

Решение: $a=3, b=-4, c=4, d=-1.$

1). По формулам Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\dfrac{4}{3}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{4}{3}, \\ x_1x_2x_3=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

2).

$$(x_1+x_2+x_3)^2 - x_1x_2x_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = \frac{16}{9} - \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{16-3}{9} = \frac{13}{9} = 1\frac{4}{9}.$$

3) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ чтобы найти значение выражения возведем в квадрат первое уравнение:

$$(x_1+x_2+x_3)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = \frac{16}{9}.$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{16}{9} - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 =$$
$$= \frac{16}{9} - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \frac{16}{9} - 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{16-3\cdot 8}{9} = -\frac{8}{9}.$$

Ответ: $(x_1+x_2+x_3)^2 - x_1x_2x_3 = 1\frac{4}{9}.$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -\frac{8}{9}.$

По новой теме. Т. Виетта

1. Числа x_1, x_2, x_3 корни многочлена $x^3 + 2x^2 - 14x - 3$. Найдите значение выражения $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Критерии оценивания:

1. Использует обобщенную теорему Виета к многочленам третьего порядка.

Раздел 4. Степени и корни. Степенная функция
Тема17. Корень n-ой степени и его свойства.
Корнем n-ой степени из числа a, называется такое число b, n-*ая*степень котрого равна*a.*
$\sqrt[n]{a} = b$, поскольку $b^n = a$.Например : Корень третьей степени из числа 8 равен 2, так как $2^3 = 8$, т.е$\sqrt[3]{8} = 2$. Нахождение корня n-й степени из числа а называют *извлечение корня.*
Для того, чтобы вычислить корень n – *ой* степени из числа *a,* необходимо решить уравнение $x^n = a$.
Например, числа 3 и -3 являются корнями уравнения $x^4 = 81$, поскольку $3^4 = 81$ и ---(-3)$^4 = 81$
Арифметическимкорнемn-ой степени из неотрицательного числа a, называется такое неотрицательное число b, n-*ая*степень котрого равна*a.*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$$
$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Свойства корней n-*ой* степени:
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Пример: $\sqrt[3]{100 * 64 * (-27)} = \sqrt[3]{100 * \sqrt[3]{64}} * \sqrt[3]{-27}$ = 10*4*(-3) = -120

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Пример: $\sqrt{\frac{25}{64}} =$

3. $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$

Пример 1. $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

2. $\sqrt[12]{b^8} = \sqrt[3]{b^2}$

4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

Пример: $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = \sqrt{81 = 9}$, $(\sqrt[3]{2}\ )^5 = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8*4} = 2\sqrt[3]{4}$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Пример: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

6. $(\sqrt[n]{a})^n = a$

Пример. $(\sqrt[3]{6})^3 = 6$

Степень с рациональным показателем

Определение Степенью неотрицательного числа с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ \ несократимая дробь, называется значение корня n-й степени из числа a^m, следовательно по определению $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Пример $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$,

Свойства степени с рациональным показателем

1) $a^{\frac{m}{n}} * a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

Пример: $5^{\frac{1}{3}} * 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 5$,

2. $a^{\frac{m}{n}} / a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

Пример : $(\frac{4}{9})^{\frac{3}{4}} / (\frac{4}{9})^{\frac{1}{4}} = (\frac{4}{9})^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = (\frac{4}{9})^{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

1. $a^r * a^s = a^{r+s}$
2. $a^r / a^s = a^{r-s}$
3. $(a*b)^r = a^r * b^r$
4. $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$
5. $(a^r)^s = a^{r*s}$

Повторить пройденный теоретический материал

<u>Алгебраический словарь.</u>

$\sqrt{a} =$ в, в^2 == а, а $\geq$ 0, в $\geq$ 0

$\sqrt[n]{a} =$ в, в^п = а

п - четное

а $\geq$ 0, в ≥ 0 $\qquad$ $(\sqrt{a})^2$ = а, а $\geq$ 0

п - нечетное

а,в - любые $\qquad$ $(\sqrt[n]{a})^п$ = а

$\sqrt{a^2} = |a|$

а, если а $\geq$ 0 $\qquad$ - а, если а < 0

$\sqrt{(a-в)^2} = |a-в|$

а - в. если а $\geq$ в $\qquad$ в - а, если а $<$ в

$\sqrt{ав} = \sqrt{а}\sqrt{в}$, а $\geq$ 0, в $\geq$ 0

.$\sqrt[n]{ав} = \sqrt[n]{а}\sqrt[n]{в}$, а ≥ 0, в ≥ 0

$\sqrt{\frac{а}{в}} = \frac{\sqrt{а}}{\sqrt{в}}$, а $\geq$ 0, в $>$ 0

$\sqrt[n]{\frac{а}{в}} = \frac{\sqrt[n]{а}}{\sqrt[n]{в}}$, а ≥ 0, в > 0

$\sqrt[mn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$ а ≥ 0

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ m, n, k - натуральные числа

Приложение 2

1)Устная работа

а) Какие выражения имеют смысл?

$\sqrt{1}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{-27}$;

$\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt[4]{16}$;

$\sqrt[3]{-1}$; $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt[4]{-16}$;

$\sqrt[8]{-1}$; $\sqrt{-4}$; $\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[5]{-32}$.

б) при каких значениях переменной а имеет смысл выражение?

$\sqrt{a}$ $\sqrt{a^2}$

$\sqrt{-a}$ $\sqrt{a^3}$

$\sqrt{-a^2}$ $\sqrt{-a^5}$

$\sqrt[3]{a}$ $\sqrt[4]{a}$

$\sqrt[5]{a^2}$ $\sqrt[6]{a^3}$

в) Вычислите:

$\sqrt{100}$; $\sqrt[5]{100000}$; $\sqrt{6{,}25}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[3]{0{,}001}$; $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$.

Письменно:

При каких значениях х имеет смысл выражение:

1. $\sqrt[4]{9-x^2}$ - решить у доски (показать два способа выполнения этого задания: метод интервалов; с помощью графика)

2. $\sqrt[5]{\frac{x}{3-x}}$ - решить самостоятельно

3. $\sqrt[8]{-5a^2+7a-2}$ - комментированное письмо

<u>Устные упражнения</u>: 1. Вычислите: а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[3]{0{,}3}\cdot\sqrt[3]{90}$; в) $\frac{\sqrt[3]{8{,}1}}{\sqrt[3]{0{,}3}}$.

2. Приведите выражение к виду $a\sqrt[n]{в}$, где а –рациональночисло, в – натуральное.

а) $\frac{5}{\sqrt{10}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{7}{\sqrt[3]{4}}$; г) $\frac{4}{\sqrt[4]{125}}$.

<u>Проблемные вопросы</u>: 1. Можно ли упростить следующие выражения:

а) $\sqrt{\sqrt{2}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; в) $\sqrt[4]{5^2}$; г) $\sqrt[6]{a^3}$?

2. Можно сравнить числа:

а) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[6]{15}$; б) $\sqrt[5]{3}$ и $\sqrt[15]{26}$; в) $\sqrt[6]{4}$ и $\sqrt[9]{8}$?

3. А как вычислить $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}$?

Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{625} = 5,$ поскольку $5^4 = 625$;

б) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3},$ поскольку $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

в) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2\cdot 8} = \sqrt[4]{16} = 2$

Сравните числа:

а) $\sqrt[4]{50}$ и $\sqrt{7}$

$\sqrt{7} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt[4]{49}$ Так как $50 > 49,$ то и $\sqrt[4]{50} > \sqrt[4]{49}$

б) $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[3]{3}$

$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$

$\sqrt[12]{27} < \sqrt[12]{81}$

Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которого не содержит корня *n – ой* степени:

а) $\frac{1}{\sqrt[5]{3}} = \frac{1\cdot\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3^4}} = \frac{\sqrt[5]{81}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{81}}{3}$

б) $\frac{3}{\sqrt{5}+1} = \frac{3\cdot(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{3\cdot(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1} = \frac{3\cdot(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{3\cdot(\sqrt{5}-1)}{4}$

V. Формирование умений об учающихся.

2. Дополнительные задания.

№ 1 Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$;

б) $1{,}5\sqrt[6]{\frac{1}{64}} - \sqrt[4]{\frac{81}{625}}$;

в) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} + \sqrt{12{,}25}$

№ 2. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$

б) $\sqrt[4]{\sqrt{2}}$

в) $\sqrt[6]{c^3}$

г) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$

Применение ЗУН-ов в стандартных ситуациях

Предлагается устная работа :

<u>Верно ли равенство?</u>

<u>(Если необходимо, можно обратиться к словарю.)</u>

$\sqrt{2^2} = 2$; $\sqrt{(-2)^2} = 2$;

$(\sqrt{2})^2 = 2;$

$\sqrt{(-2)^2} = -2;$ $\sqrt{a^2} = a;$

$\sqrt{a^2} = -a;$

$\sqrt{a^2} = |a|;$ $a - \sqrt{a^2} = 0;$ $-\sqrt{a^2} = 2a;$

$a - \sqrt{a^2} = a - |a|;$ $\sqrt[3]{3^2} = 3;$

$\sqrt[5]{2^5} = -2;$

$\sqrt[4]{2^2} = 2;$ $\sqrt[6]{3^6} = 3;$

$\sqrt[9]{2^9} = |2|$

<u>Вычислить (устно):</u>

1) $\sqrt{4a^2}$ 2) $\sqrt{a^4в^8}$ 3) $\sqrt{9a^2в^4}$; 4) $\sqrt{81a^2в^6c^4}$; 5) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$;

6) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$;

7) $\sqrt[3]{8a^3в^6}$; 8) $\sqrt[4]{625a^4в^8}$.

<u>Вычислить (письменно):</u>

а) $0{,}5 \cdot \sqrt[3]{96} \cdot \sqrt[3]{1\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$; б) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

<u>Определите знак выражения:</u>

а) $\frac{\sqrt[3]{7{,}3}-\sqrt[3]{3{,}7}}{\sqrt[4]{1{,}001}-1}$; б) $(\sqrt[5]{3{,}5}-\sqrt[5]{\Pi})(\sqrt[6]{0{,}999}-1)$;

в) $\sqrt[7]{-6{,}5}-\sqrt[7]{-5{,}6})(\sqrt[4]{0{,}3}-\sqrt[4]{0{,}2})$.

<u>3.Упростить:</u>а) $\frac{(\sqrt[4]{24}+\sqrt[4]{6})^2}{4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}$; б) $\frac{(\sqrt[3]{9}+\sqrt{3})^2}{\sqrt[3]{3}+2\sqrt[6]{3}+1}$.

V. Самостоятельная работа:

Вариант $А_1$ Вариант $А_2$

1. Вычислить:

а) $\sqrt[4]{81}+\sqrt[3]{-125}$; б) $(\sqrt[5]{2})^5 - \sqrt[3]{0{,}001}$; а) $\sqrt[6]{64}+\sqrt[3]{-27}$, б) $(\sqrt[4]{3})^4 - \sqrt[4]{0{,}0001}$;

в) $\sqrt[4]{(-3)^4}+3\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$.в) $\sqrt[6]{(-2)^6}+3\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$.

2. Найти значение выражений:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}+\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$; а) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}+\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$;

б) $\sqrt[4]{0{,}001}\cdot\sqrt[4]{0{,}1}+\sqrt[3]{5^6}$.б) $\sqrt[3]{0{,}04}\cdot\sqrt[3]{0{,}2}+\sqrt[4]{3^8}$.

3. Сравнить числа:

$\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt{1}$. $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt{4}$.

4. а) Внести множитель под знак корня:

$2\sqrt[3]{7}$. $3\sqrt[4]{2}$.

б) Вынести множитель из-под знака корня:

$\sqrt[4]{32}$.

Критерии оценивания:

1. Устанавливает соответствие определения корня n-ой степени и арифметического корня n-ой степени;

Вопросы для самоконтроля:

1. **Определение корня *n-ой* степени из числа *a*.**
2. **Определение арифметического корня *n-ой* степени из числа *a*.**
3. **Показатель корня, подкоренное выражение, радикал.**
4. **Область допустимых значений выражений с корнями *n-ой* степени.**
5. **Свойства арифметического корня *n-ой* степени**

Тема 18. Степень с рациональным показателем. Преобразование выражений, содержащих степень с рациональным показателем.

Степень с рациональным показателем

Определение Степенью неотрицательного числа с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ \ несократимая дробь, называется значение корня n-й степени из числа a^m, следовательно по определению $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Пример $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$,

Свойства степени с рациональным показателем

1) $a^{\frac{m}{n}} * a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

Пример: $5^{\frac{1}{3}} * 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 5$,

2. $a^{\frac{m}{n}} / a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

Пример : $(\frac{4}{9})^{\frac{3}{4}} / (\frac{4}{9})^{\frac{1}{4}} = (\frac{4}{9})^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = (\frac{4}{9})^{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

1. $a^r * a^s = a^{r+s}$
2. $a^r / a^s = a^{r-s}$
3. $(a*b)^r = a^r * b^r$
4. $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$
5. $(a^r)^s = a^{r*s}$

в) Вычислите:

$\sqrt{100}$; $\sqrt[5]{100000}$; $\sqrt{6{,}25}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[3]{0{,}001}$; $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$.

<u>Устные упражнения</u>: 1. Вычислите: а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[3]{0{,}3} \cdot \sqrt[3]{90}$; в) 2. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{625} = 5$, поскольку $5^4 = 625$;

б) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$, поскольку $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

в) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2 \cdot 8} = \sqrt[4]{16} = 2$

Сравните числа:

а) $\sqrt[4]{50}$ и $\sqrt{7}$

$\sqrt{7} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt[4]{49}$ Так как $50 > 49$, то и $\sqrt[4]{50} > \sqrt[4]{49}$

б) $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[3]{3}$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$$

$$\sqrt[12]{27} < \sqrt[12]{81}$$

Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которого не содержит корня *n – ой* степени:

а) $\frac{1}{\sqrt[5]{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^4}} = \frac{\sqrt[5]{81}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{81}}{3}$

б) $\frac{3}{\sqrt{5}+1} = \frac{3 \cdot (\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{3 \cdot (\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2 - 1} = \frac{3 \cdot (\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{3 \cdot (\sqrt{5}-1)}{4}$.

2. Дополнительные задания.

№ 1 Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$;

б) $1{,}5\sqrt[6]{\frac{1}{64}} - \sqrt[4]{\frac{81}{625}}$;

в) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} + \sqrt{12{,}25}$

№ 2. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$

б) $\sqrt[4]{\sqrt{2}}$

в) $\sqrt[6]{c^3}$

г) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$

<u>Вычислить (устно):</u>

1) $\sqrt{4a^2}$ 2) $\sqrt{a^4 в^8}$ 3) $\sqrt{9a^2 в^4}$; 4) $\sqrt{81a^2 в^6 c^4}$; 5) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$;

6) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$;

7) $\sqrt[3]{8a^3 в^6}$; 8) $\sqrt[4]{625a^4 в^8}$.

<u>Вычислить (письменно):</u>

а) $0{,}5 \cdot \sqrt[3]{96} \cdot \sqrt[3]{1\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$;

V. Самостоятельная работа:

Вариант $А_1$ Вариант $А_2$

1. Вычислить:

а) $\sqrt[4]{81}+\sqrt[3]{-125}$; б) $(\sqrt[5]{2})^5-\sqrt[3]{0,001}$; а) $\sqrt[6]{64}+\sqrt[3]{-27}$, б) $(\sqrt[4]{3})^4-\sqrt[4]{0,0001}$;

в) $\sqrt[4]{(-3)^4}+3\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$.в) $\sqrt[6]{(-2)^6}+3\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$.

2. Найти значение выражений:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}+\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$; а) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}+\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$;

б) $\sqrt[4]{0,001}\cdot\sqrt[4]{0,1}+\sqrt[3]{5^6}$.б) $\sqrt[3]{0,04}\cdot\sqrt[3]{0,2}+\sqrt[4]{3^8}$.

3. Сравнить числа:

$\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt{1}$. $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt{4}$.

4. а) Внести множитель под знак корня:

$2\sqrt[3]{7}$. $3\sqrt[4]{2}$.

б) Вынести множитель из-под знака корня:

$\sqrt[4]{32}$. $\sqrt[3]{81}$.

Вариант № 1	*Вариант № 2*
1) Найдите значение выражения	
а) $4^{2,5}-(1/9)^{-1,5}+(5/4)^{3,5}\cdot 0,8^{3,5}$	а) $9^{1,5}-(1/8)^{-4/3}+(5/6)^{4,5}\cdot 1,2^{4,5}$
б) $\sqrt[4]{(-11)^4}$; $\sqrt[3]{25\cdot 135}$;	б) $\sqrt[6]{(-7)^6}$; $\sqrt[3]{9\cdot 375}$;
в) $8^{5/3}$;	*в*) $27^{-2/3}$;
г) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{9/2}$;	*г*) $\left(\sqrt[3]{16}\right)^{9/2}$
д) $\left(\left(\sqrt{6}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$;	*д*); $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$
е) $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2}}\cdot\sqrt[5]{8}$;	
2) Сравните числа	
а) $\sqrt[6]{80}$ *и* $\sqrt[3]{9}$;	*а*) $\sqrt[5]{7}$ *и* $\sqrt[10]{47}$;
в) $2^{\frac{6}{13}}$ *и* $2^{\frac{2}{7}}$;	*б*) $3^{\frac{5}{8}}$ *и* $3^{\frac{8}{13}}$;

Вопросы для самоконтроля:

1. **Что такое функция?**
2. **Назовите функции, которые вы знаете?**

Критерии оценивания:

1. Применяет свойства корня *n*-ой степени и степени с рациональным показателем для преобразования иррациональных и алгебраических выражений.

Тема 19. Преобразование иррациональных выражений.

Определение. Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют иррациональными.

Из предложенных уравнений назовите номера тех, которые являются иррациональными.

Рассмотрим пример. Запишите его в тетрадь.

$\sqrt{x} = 2$

$x = 2^2$, $x = 4$

1) $\sqrt{x^4+19}=10$;

2) $3+\sqrt{3x+1}=x$

3) $2x^2-5x+9=0$;

4) $y^2-3\sqrt{2}y=4$;

5) $7x-8=11$;

6) $\sqrt[3]{x-7}=2$;

7) $2\cos x-1=0$;

8) $\sqrt{x+6}=\sqrt{4-x}$;

Верные ответы дают год рождения Георга Римана-1826.

Решим данные иррациональные уравнения. Ход решения объясняют у доски ученики, подготовленные учителем заранее.

1-ый ученик:

$\sqrt{x^4+19}=10$

Возведём обе части уравнения в квадрат, получим:

$x^4+19=100$;

$x^4=81$;

$x_1=-3$, $x_2=3$

Проверка.

Если $x=-3$, то $\sqrt{(-3)^4+19}=10$, Если $x=3$, то $\sqrt{3^4+19}=10$,

10=10-верно. 10=10-верно.

Значит, $x=-3-$ корень уравнения. Значит, $x=3-$ корень уравнения.

Ответ. -3;3.

2-ой ученик:

1-ый способ решения.

$3+\sqrt{3x+1}=x$,

$\sqrt{3x+1}=x-3$,

Возведём обе части уравнения в квадрат, получим:

$3x+1=x^2-6x+9$,

$x^2-9x+8=0$,

$x_1=1$, $x_2=8$

Проверка.

Если $x=1$, то $3+\sqrt{3*1+1}=1$, Если $x=8$, то $3+\sqrt{3*8+1}=8$,

5 = 1 - неверно. 8 = 8 - верно.

Значит, $x=1-$ посторонний корень. Значит, $x=8-$ корень уравнения.

Ответ. $x=8$.

2-ой способ решения (объясняет учитель).

$3+\sqrt{3x+1}=x$,

$\sqrt{3x+1}=x-3$

Может ли выражение в правой части быть отрицательным? Перейдём к смешанной системе:

$\begin{cases} x-3\ge 0, \\ 3x+1=x^2-6x+9; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 3, \\ x^2-9x+8=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 3, \\ x_1=1, x_2=8; \end{cases}$ $x=8.$

Ответ. $x=8.$

Уравнение 8) решаем самостоятельно (ученик за доской) с последующей проверкой.

$\sqrt{x+6}=\sqrt{4-x}$

$\begin{cases} x+6\ge 0, \\ 4-x\ge 0, \\ x+6=4-x; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -6, \\ x\le 4, \\ 2x=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} -6\le x\le 4, \\ x=-1; \end{cases}$

Ответ. $x=-1.$

Вывод. 1) Решение иррациональных уравнений сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению путём возведения в степень обеих частей уравнения.

2) При возведении обеих частей уравнения в чётную степень возможно появление посторонних корней. Поэтому при использовании указанного метода следует проверить все найденные корни подстановкой в исходное уравнение.

$\sqrt{x+6}=\sqrt{4-x}$

Критерии оценивания:

1. Объясняет содержание определения иррационального уравнения и находит область допустимых значений иррационального уравнения;

Раздел 5. Показательная и логарифмическая функции

Тема 23. Показательная функция, ее свойства и график.

Показательная функция – это функция вида *$y = a^{x}$ зависящая от показателя степени x при некотором фиксированном значении основания степени a , (a>0, $a \neq 1$.)*
II. Введение определения показательной функции

аргумент – показательстепени

На доске:
$y = a^{x}$

основание степени – заданное число

Этим и объясняется название функции. Итак, что называется показательной функцией?

______

Показательной функцией называется функция вида $y = a^{x}$, где a – заданное число, a>0, $a \neq 1$.
Основные свойства показательной функции:
1. Областью определения показательной функции будет являться множество вещественных чисел.
2. Область значений показательной функции будет являться множество всех положительных вещественных чисел. Иногда это множество для краткости записи обозначают как R+.
3. Если в показательной функции основание a больше единицы, то функция будет возрастающей на всей области определения. Если в показательной функции для основания a выполнено следующее условие 0<a
4. Справедливы будет все основные свойства степеней.
Основные *свойства показательной функции $y = a^{x}$*:

Свойство	$a > 1$	$0 < a < 1$
Область определения	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений	$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Монотонность	Возрастает	Убывает
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная

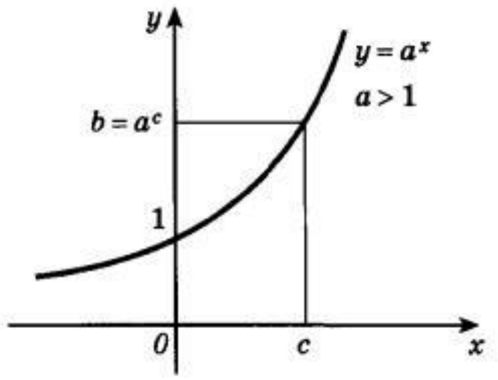
Основные свойства степеней представлены следующим равенствами:

$$
\begin{aligned}
&a > 0,\ b > 0: \\
&a^0 = 1, 1^x = 1; \\
&a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}\ (k \in Z,\ n \in N); \\
&a^{-x} = \frac{1}{a^x}; \\
&a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \\
&\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \\
&(a^x)^y = a^{xy}; \\
&a^x \cdot b^x = (ab)^x; \\
&\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.
\end{aligned}
$$

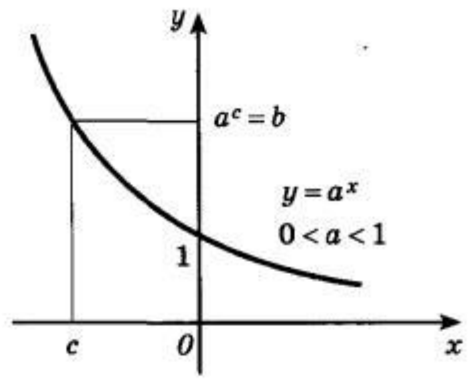
Данные равенства будут справедливы для все действительных значений x и y.

5. График показательной функции всегда проходит через точку с координатами (0;1)
6. В зависимости от того возрастает или убывает показательная функция, её график будет иметь один из двух видов.

На следующем рисунке представлен график возрастающей показательной функции: a>0.



На следующем рисунке представлен график убывающей показательной функции: 0<a<1.



И график возрастающей показательной функции и график убывающей показательной функции согласно свойству, описанному в пятом пункте, проходят через точку (0;1).

7. Показательная функция не имеет точек экстремума, то есть другими словами, она не имеет точек минимума и максимума функции. Если рассматривать функцию на каком-либо конкретном отрезке, то минимальное и максимальное значения функция будет принимать на концах этого промежутка.

8. Функция не является четной или нечетной. Показательная функция это функция общего вида. Это видно и из графиков, ни один из них не симметричен ни относительно оси Оу, ни относительно начала координат.

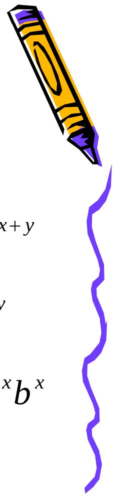
Критерии оценивания:

1. Разъясняет определение показательной функции и строит ее график;
2. применяет свойства показательной функции в зависимости от основания.

Тема 24. Показательные уравнения и их системы.

Определение. Уравнение, содержащие переменную в показателе степени, назыветсяпоказательным уравнением.

Например : $2^x = \frac{1}{16}$, $\quad 3^{x+1} + 3^x = 108$



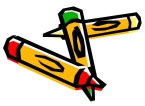
4. При любых действительных значениях X и У справедливы равенства.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \qquad a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

$$a^0 = 1$$



Показательные уравнения в основном решаются двумя способами:
Способ приведения к общему основанию
Способ введения новой переменной
При решении показательныз уравнений данным способом применяется следующий алгоритм:
Обе части уравнения приводим у одинаковому основанию
Приравниваем показатели степеней левой и правой частей уравнения, в результате чего получаем равносильное уравнение, способ решения которого известен
Решаем полученное уравнение
С помощью проверки определяем, каие из полученных значений переменной являются корнями данного показательного уравнения
Записываем решение исходногго показательного уравнения

Рассмотрим пример 1. Решимуравнение $27^x = \frac{1}{81}$

Решение: 1. Обе части уравнения приводим к основанию *3,* тогда $3^{3x} = 3^{-4}$

2. Приравниваем показатели степеней левой и правой частей последнего уравнения, т.е получим равносильное уравнение: 3x = -4

3. решивполученноеуравнение, имеем $x = -\frac{4}{3}$

4. проверим, удовлетворяет ли найденное значениепременнойданномупоказательномууравнению: $27^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{81}$ или $\frac{1}{\sqrt[3]{27^4}} = \frac{1}{81}$;

$\frac{1}{\sqrt[3]{3^{12}}} = \frac{1}{81}$: $\frac{1}{81} = \frac{1}{81}$. Значит удовлетворяет нашему уравнению. Ответ $-\frac{4}{3}$

Способ введения новой переменной

При решении показательного уравнения данным способом используют следующий алгоритм:

Делаем замену переменной, приводящую к алгебраическому уравнению

Решаем полученное алгебраическое уравнение

Найденные значения корней алгебраического уравнения подставим в равенство. Определяющее замену

Найдем корни полученного уравненияс

помощью проверки определяем, какие из этих корней являются корнями данного показательног уравнения

Записываем ответ

При мер 2. Решимуравнения : $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$

Решени: Прежде вс его, степени, входящие в урвнение, запишем в следующемвиде: м $3^{2x+5} = 3^{2x} * 3^5 = 243 * 3^{2x}$; $3^{x+2} = 3^x * 3^2 = 9 * 3^x$

Тогда данное уравнениеприметвид : $243 * 3^{2x} - 9 * 3^x - 2 = 0$

Положим, что $y = 3^x$. *Тогда последнее показательное уравнение можно записать в ввиде:* $243y^2 - 9y - 2 = 0$

D= $b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Решивэтотуравнение , имеем $y_1 = \frac{1}{9}, y_2 = -\frac{2}{27}$ По условию замены в качестве решения последнего уравнения можем взять только первый корень $y_1 = \frac{1}{9}$, Второйкорень $y_2 = -\frac{2}{27}$ отрицателен, а значение 3^x положительноприлюбом x

Подставимнайденноезначение $y_1 = \frac{1}{9}$, в равенство $y = 3^x$: $\frac{1}{9} = 3^x$, или $3^{-3} = 3^x$, отсюда следует, что x= - 2 .

Сделаемпроверку: $3^{2*(-2)+5} = 3^{-2+2} + 2$ или $3^1 = 1 + 2$, 3 = 3. Ответ -2

Пример 2 Решить уравнение: $2^{3x}-6 \cdot 2^{2x}+12 \cdot 2^x-8=0$

Решение: обозначим 2^x=a ; $a^3-6a^2+12a-8=0$ $(a-2)^3=0$ a=2 $2^x=2^1$ <u>x=1</u>

Пример 3 Решить уравнение: 2^{2x+1}- $5 \cdot 2^x$- 88=0 обозначим 2^x=a

$2a^2-5a-88=0$ Д=729

$x_1 = \frac{5+27}{4} = 8$ $x_2 = \frac{5-27}{4} = -4{,}5$

$2^x=8=2^3$ <u>x=3</u> $2^x \neq -4{,}5$

Пимер 4. Решить уравнение: 18^x-8·6^x-9·2^x=0 2^x·9^x- 8·2^x·3^x-9·2^x=0 / $2^x \neq 0$, 9^x-8·3^x-9=0
обозначим 3^x=a a^2-8a-9=0 Д=100 x_1=9 x_2=1 3^x=9 3^x=1
x_1=2x_2=0
пример 5. Решить уравнение: $24\cdot 3^{2x^2-3x-2} - 2\cdot 3^{2x^2-3x}+3^{2x^2-3x-1}=9$
обозначим 3^{2x^2-3x}=a
$24\cdot 3^{-2}a-2a+3^{-1}a=9$ $a(24\cdot 3^{-2}-2+3^{-1})=9$ $a\cdot 1=9$ a=9 $3^{2x^2-3x}=9=3^2$ $2x^2-3x-2=0$ Д=25
X_1=2x_2=-0,5
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА (Показательные уравнения)

Вариант № 1	*Вариант № 2*
Решите уравнения	
$9^{-x} = 27$	$8^{-x} = 16$
$5^{x+1} - 3\cdot 5^{x-2} = 122$	$3^{x+1} - 4\cdot 3^{x-2} = 69$
$9^x - 2\cdot 3^x = 63$	$4^x - 3\cdot 2^x = 40$
4) $4\cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33$	4) $2\cdot 3^{x-6} + 6\cdot 9^{0,5x-2} = 56$

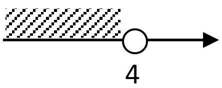
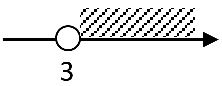
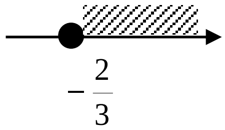
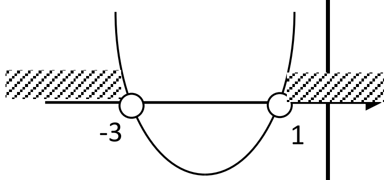
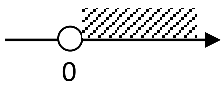
Критерии оценивания:
1. Использует алгоритм решения показательного уравнения;
2. называет способы решения показательных уравнений;
3. решает систему показательных уравнений

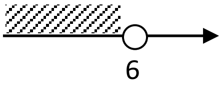
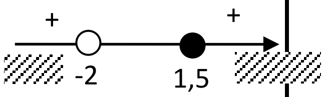
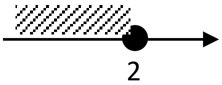
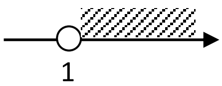
Вопросы для самоконтроля:
1. **Сформулируйте определение показательной функции.**
2. **Приведите примеры показательной функции.**
3. **Перечислите свойства показательной функции.**
4. **Как вы думаете, почему в определении показательной функции $y = a^x$ одно из обязательных условий $a \neq 1$?**

Тема 25. Показательные неравенства.

Алгоритм решения показательных неравенств.
Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$
$a^{f(x)} < a^{g(x)}$
Различные способы решения показательных неравенств

методы решения	образцы решения

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ *при переходе от неравенства степеней с одинаковыми основаниями к неравенству показателей степеней* *при а > 1 знак неравенства сохраняется* *при 0 < а< 1 знак неравенства меняется на противоположный* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ при $a>1$ $f(x)>g(x)$ $f(x)<g(x)$ при $0<a<1$ $f(x)<g(x)$ $f(x)>g(x)$	а) $3^x < 81$ $3^x < 3^4$ $3>1$, функция $y=3^x$ возрастающая $x<4$  Ответ: (-∞; 4). б) $0{,}5^{7-3x} > 4$ $((2)^{-1})^{7-3x} > 2^2$ $2^{-7+3x} > 2^2$ $2>1$, функция $y=2^t$ возрастающая $-7+3x>2$ $3x>2+7$ $3x>9$ $x>\frac{9}{3}$ $x>3$  Ответ: (3; ∞).	в) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} \le \left(\frac{4}{3}\right)^{2x+5}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} \le \left(\frac{3}{4}\right)^{-2x-5}$ $0<\left(\frac{3}{4}\right)<1$, функция $y=\left(\frac{3}{4}\right)^t$ убывающая $x-3\ge -2x-5$ $x+2x\ge -5+3$ $3x\ge -2$ $x\ge -\frac{2}{3}$  Ответ: $\left[-\frac{2}{3};\infty\right)$.	г) $6^{x^2+2x} > 6^3$ $6>1$, функция $y=6^t$ возрастающая $x^2+2x>3$ $x^2+2x-3>0$ $x^2+2x-3=0$ $D=в^2-4ac$ $D=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=$ $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ $x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{-2-4}{2}=-$  Ответ: $(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$.
$a^{f(x)} > 1$ $a^{f(x)} < 1$ *представить 1 в виде степени числа а с нулевым показателем*($1=a^0$) $a^{f(x)} > 1$ $a^{f(x)} < 1$ $a^{f(x)} > a^0$ $a^{f(x)} < a^0$ при $a>1$ $f(x)>0$ $f(x)<0$ при $0<a<1$ $f(x)<0$ $f(x)>0$	а) $3^{6-x} > 1$ $3^{6-x} > 3^0$ $3>1$, функция $y=3^t$ возрастающая $6-x>0$ $-x>-6$ $x<\frac{-6}{-1}$ *(при делении на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный)* $x<6$	б) $19^{\frac{2x-3}{x+2}} \ge 1$ $19^{\frac{2x-3}{x+2}} \ge 19^0$ $19>1$, функция $y=19^t$ возрастающая $\frac{2x-3}{x+2}\ge 0$ 1) нули числителя: $2x-3=0$ $2x=3$ $x=1{,}5$ 2) нули знаменателя: $x+2=0$ $x=-2$ (определить знак	в) $3^x < 5^x$ $\frac{3^x}{5^x}<1$ $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^0$ $0<\frac{3}{5}<1$, функция $y=\left(\frac{3}{5}\right)^x$ убывающая $x>0$  Ответ: $(0;\infty)$

	 Ответ: $(-\infty;6)$.	дроби на каждом промежутке и выбрать те, где знак"+", т.к. в неравенстве знак">0")  Ответ: $(-\infty;-2)$ $\cup[1{,}5;\infty)$.	
$A_1a^{f(x)+k_1}+A_2a^{f(x)+k_2}+\ldots+A_na^{f(x)+k_n}>B$ $A_1a^{f(x)+k_1}+A_2a^{f(x)+k_2}+\ldots+A_na^{f(x)+k_n}<B$ *(A, k,B числовые коэффициенты) вынести общий множитель за скобки* $a^{f(x)}(A_1a^{k_1}+A_2a^{k_2}+\ldots+A_na^{k_n})>B$ $a^{f(x)}(A_1a^{k_1}+A_2a^{k_2}+\ldots+A_na^{k_n})<B$	а) $2^x-2^{x-2}\le 3$ $2^x(1-2^{-2})\le 3$ $2^x\left(1-\frac{1}{4}\right)\le 3$ $2^x\cdot\frac{3}{4}\le 3$ $2^x\le 3:\frac{3}{4}$ $2^x\le 4$ $2^x\le 2^2$ $2>1$, функция $y=2^x$ возрастающая $x\le 2$  Ответ: $(-\infty;2]$.	б) $2^{2x+1}-3^{2x+1}<3^{2x}-7\cdot 2^{2x}$ $2^{2x+1}+7\cdot 2^{2x}<3^{2x}+3^{2x+1}$ $2^{2x}(2+7)<3^{2x}(1+3)$ $2^{2x}\cdot 9<3^{2x}\cdot 4$ $\frac{2^{2x}}{3^{2x}}<\frac{4}{9}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}<\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$ $0<\frac{2}{3}<1$, функция $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{t}$ убывающая $2x>2 \quad x>1$  Ответ: $(1;\infty)$.	

$Aa^{2x}+Ba^{x}+C>0$

$Aa^{2x}+Ba^{x}+C<0$

1) обозначить $a^{x}=y$

2) решить полученное квадратное неравенство $Ay^{2}+By+C>0$ ($Aa^{2x}+Ba^{x}+C<0$) *относительно* y

3) выполнить обратную замену и решить получившиеся неравенства относительно x

а)

$3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{x}-10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+3<0$

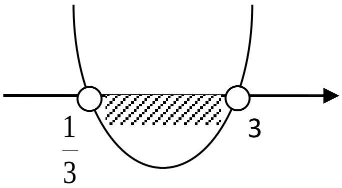
$3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+3<0$

пусть $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=t$

$3y^{2}-10y+3<0$

$3y^{2}-10y+3=0$

$y_1=\frac{1}{3}\ \ y_2=3$



$\frac{1}{3}<y<3;$

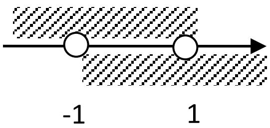
$\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<3$

$\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$0<\frac{1}{3}<1$, функция убывающая

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}>\frac{1}{3},\\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x<1,\\ x>-1\end{cases}$$



Ответ: $(-1;1)$.

б)

$2^{6x-10}-9\cdot2^{3x-5}+8\ge0$

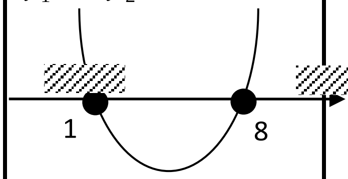
$2^{2(3x-5)}-9\cdot2^{3x-5}+8\ge0$

пусть $2^{3x-5}=y$

$y^{2}-9y+8\ge0$

$y^{2}-9y+8=0$

$y_1=1\ y_2=8$



$y\le1$ и

$y\ge8$

$2^{3x-5}\le1$ и

$2^{3x-5}\ge8$

$2>1$, функция $y=2^{x}$ возрастающая

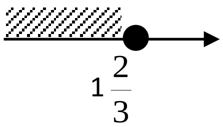
$2^{3x-5}\le2^{0}\ 2^{3x-5}\ge2^{3}$

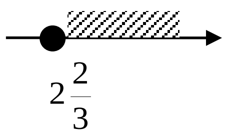
$3x-5\le0\ 3x-5\ge3$

$3x\le5\ 3x\ge8$

$x\le\frac{5}{3}\ x\ge\frac{8}{3}$

$x\le1\frac{2}{3}\ x\ge2\frac{2}{3}$





Ответ: $\left(-\infty;1\frac{2}{3}\right]\cup\left[2\frac{2}{3};\infty\right)$.

в)

$3\cdot16^{x}-5\cdot36^{x}+2\cdot81^{x}<0$

$3\cdot4^{2x}-5\cdot4^{x}9^{x}+2\cdot9^{2x}<0$

разделим неравенство на 9^{2x}

$\frac{3\cdot4^{2x}}{9^{2x}}-\frac{5\cdot4^{x}\cdot9^{x}}{9^{2x}}+\frac{2\cdot9^{2x}}{9^{2x}}<0$

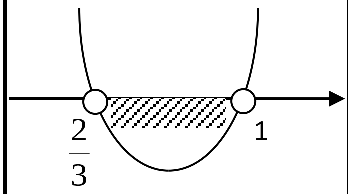
$\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x}+2<0$

пусть $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}=y$

$3y^{2}-5y+2<0$

$3y^{2}-5y+2=0$

$y_1=1\ y_2=\frac{2}{3}$



$\frac{2}{3}<y<1;$

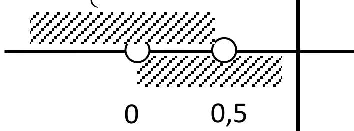
$\frac{2}{3}<\left(\frac{4}{9}\right)^{x}<1$

$\frac{2}{3}<\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}<\left(\frac{2}{3}\right)^{0}$

$0<\frac{2}{3}<1$, функция убывающая

$$\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}>\frac{2}{3}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}<\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x<1,\\ 2x>0\end{cases}\ \begin{cases}x<0,5\\ x>0\end{cases}$$



Ответ: $(0;0,5)$.

Пример 1. Решим неравенство $2^x < 32$
Запишем неравенство в виде $2^x < 2^5$. Т. к. $2 > 1$, то показательная функция $y = 2^x$ возрастает. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $x < 5$. Ответ: $(-\infty, 5)$.

Пример 2. Решим неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$.

Запишем неравенство в виде $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

Т. к. $0 < \frac{1}{2} < 1$, то показательная функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывает. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $x > -3$. Ответ: $(-3;+\infty)$.
Решите неравенства:

$2^x \geq \frac{1}{2}$

$3^x < 9$

Пример 1. Решите неравенство $3^{x^2 - x} < 9$

Запишем неравенство в виде $3^{x^2 - x} < 3^2$. Показательная функция $y = 3^t$ возрастает (3>1). Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $x^2 - x < 2$.Откуда $x^2 - x - 2 < 0$. Решив квадратное неравенство,

получим $-1<x<2$. Ответ: (–1;2).
Решите неравенство $3^{x^2-13} > 27$
Решите неравенство $3^{x+2} - 3^x > 24$
Самостоятельная работа.
(Учитель раздает карточки с заданиями)

I вариант	II вариант
А) $0{,}3^{3-2x} = 0{,}09$ Б) $3^{x-2} - 3^{x-3} = 2$ $4^x < \frac{1}{2}$ $2^{3 \cdot x} \geq \frac{1}{2}$ $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2 - 3 \cdot x} < \frac{121}{169}$ $2^{x-1} + 2^{x+3} > 17$ $5^{4x-7} > 1$	А) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} = 9$ Б) $4^{x-2} + 4^{x-1} = 5$ $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$ $3^{2 \cdot x} \leq \frac{1}{3}$ $\left(\frac{7}{9}\right)^{2 \cdot x^2 - 3 \cdot x} \geq \frac{9}{7}$ $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$ $2^{2x-9} < 1$

Критерии оценивания:

1. Применяет свойства показательной функции в зависимости от основания при решении показательных неравенств;
2. решает систему показательных уравнений и неравенств.

Вопросы для самоконтроля:

1.Сформулируйте определение показательной функции.

2.Приведите примеры показательной функции.

3.Перечислите свойства показательной функции.

4.Как вы думаете, почему в определении показательной функции $y = a^x$ одно из обязательных условий $a \neq 1$?

Тема 26. Логарифм и его свойства.

Вычисление логарифмов.

Более 300 лет логарифмы использовались для облегчения вычислений. Их основное достоинство – способность сводить умножение к сложению на основании свойств логарифмов. Были составлены обширные таблицы логарифмов чисел, с помощью которых можно легко переходить от чисел к их логарифмам и обратно.

Все таблицы логарифмов до 1950 г. являлись перепечаткой или сокращением таблиц Бриггса. Генри Бриггс (1561 – 1630) с очень большой точностью (16 знаков после запятой) извлёк подряд 57 квадратных корней из 10 и получил значения 10; 10; 10; ., ., ., 10. Это огромная работа, и за 300 лет не нашлось никого, кто повторил бы ее.

С появлением компьютера ситуация переменилась. Умножение по – прежнему выполняется дольше, но логарифмирование требует еще больше времени. Поиск числа в таблице очень дорогая операция для компьютера. Поэтому теперь значение логарифмов как инструмента вычисления резко упало, а с распространением калькуляторов оно сходит на нет. С другой стороны, сами по себе логарифмические зависимости легко обрабатываются и используются при вычислениях на компьютере.

На современных компьютерах (и на калькуляторах) значения $\ln x$ и e вычисляются, пользуясь заранее найденными приближенными формулами. По этим формулам вычисление логарифмов становится довольно простым. Пользователю компьютера никогда не приходится думать о вычислении логарифмов: на всех компьютерах для этого имеются стандартные программы.

Определение логарифма.

Логарифмом положительного числа b по основанию a называется показатель степени, где a>0; a$\neq$1, называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить b.

$log_a b$= x читается так : "Логарифм числа b по основанию a равен x"

Пример 1: Найдем логарифмы чисел 25, 625, 1/125 по основанию 5.

Решение:

1)так как $5^2 = 25$, то будет *$\log_5 25 = 2$ (x=2 степени, основание то число, которое возводится в степень).*
2)так как $5^4 = 625$, то будет *$\log_5 625 = 4$*
3)так как $5^{-3} = 1/125$, то будет *$\log_5 1/125 = -3$*
Так называется равенство $a^{\log_a b} = b$ *(Основное логарифмическое тождество).*
Пример 2: $3^{\log_3 27} = 27$. $5^{\log_5 125} = 125$.
Пример 3: Найдем логарифм числа 27 по основанию 9.
Решение: $\log_9 27 = x$ (так как x это степень то будет) $9^x=27$ $(3^2)^x=3^3$, откуда $2x=3$, $x=3/2$
Ответ: 3/2
Пример 4: Определим, при каком основании логарифм числа 16 равен 4
Решение: $\log_x 16 = 4$, $x^4=16$, $x^4=2^4$, $x=2$
Ответ: 2.
Пример 5: Найдем число, логарифм которого при основании 81 равен -3/4.
Решение: $\log_{81} x = -3/4$, можно записать $x=81^{-3/4} = 1/27$
Ответ: 1/27.

$\log_{\frac{1}{4}}(x-3)$, *(При $x-3>0$; то есть $x>3$;$(3;+\infty)$)*

$\log_5(x-10)$, *(При $x-10>0$; то есть $x>10$;$(10;+\infty)$)*

$\log_2(-x^4)$, *(не имеет смысла, так как $-x^4 \le 0$)*

$\log_{0,2}(-3x^5)$, *(При $-3x^5>0$,то есть $x^5<0$, $x<0$;$(-\infty;0)$)*

$\log_{1,3}(x^2+2)$ *(Так как $x^2+2>0$, то x - любое число)*

Сегодня на уроке мы с вами рассмотрим несколько основных свойства логарифмов.
1. Логарифм числа а по основанию а равен единице
$\log_a a = 1$
2. Логарифм числа 1 по основанию а равен нулю.
$\log_a 1 = 0$
3. Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей.
$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, где $a > 0$, $a \neq 0$, $b>0$,$c>0$.
- давайте на примере №75 (3, 4) посмотрим, как применяется данное свойство.

1) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12}(2\times 72) = \log_{12} 144 = 2$.
2) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2} = \log_3(6\times\frac{3}{2}) = \log_3 9 = 2$
Рассмотрим второе свойство:
4. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, где a>0,a ≠ 0, b>0, c> 0.

- решим

3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{54}{2} = \log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$.

4) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32 = \log_8 (\frac{1}{16} : 32) = \log_8 2 = \frac{1}{3}$.

- докажем третье свойство логарифмов.

5. Логарифм степени с положительным основанием равен показателю степени, умноженному на логарифм основания.

$\log_a b^r = r \log_a b$, где a> 0, a ≠ 0, b>0, $r \in R$

Для закрепления этого свойства выполним

3) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243} = \log_{\frac{1}{3}} 243^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{3}} 243 = \frac{1}{4} \times (-5) = -1\frac{1}{4}$

4) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{128}} = \log_2 128^{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{6} \log_2 128 = -\frac{1}{6} \times 7 = -1\frac{1}{7}$.

1) $\log_{10} 100 = 2$, т.к. $10^2 = 100$ (определение логарифма и свойства степени),

2) $\log_5 5^3 = 3$, т.к. $5^3 = 5^3$ (…),

3) $\log_4 \frac{1}{4} = -1$, т.к. $4^{-1} = \frac{1}{4}$ (…

$a^{\log_a b} = b$ $\log_a a = 1$ $\log_a 1 = 0$ $\log_a a^c = c$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$ $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

И так мы с вами разобрали три свойства логарифмов. Для того чтобы проверить, как вы их поняли, выполним следующее задание:

На доске записаны решения четырёх примеров, но только одно из них верное.

1) $\log_2 32 + \log_2 2 = \log_2 34$,

2) $\log_3 45 - \log_3 5 = \log_3 40$,

3) $\log_7 28 - \log_7 4 = \log_7 7$ (*верно*)

4) $2\log_5 6 = \log_5 12$.

Найдитекакое, в остальныхисправьтеошибки.

<u>Верноерешениезадания</u>:

$$1)\log_2 32+\log_2 2=\log_2(32\bullet 2)=\log_2 64=6$$

$$2)\log_3 45-\log_3 5=\log\frac{45}{5}=\log_3 9=2$$

$$3)\log_7 28-\log_7 4=\log_7 7=1$$

$$4)2\log_5 6=\log_5 6^2=\log_5 36$$

В каждом, из разобранных примеров, мы с вами применяли только какое-то одно из свойств. Давайте рассмотрим примеры, в которых применяется сразу несколько свойств логарифмов. (Решениезаданийнадоске)

$$1)\log_6 9+2\log_6 2=\log_6 9+\log_6 2^2=\log_6(9\bullet 4)=\log_6 36=2$$

$$2)2\log_{72}3+3\log_{72}2=\log_{72}3^2+\log_{72}2^3=\log_{72}(9\bullet 8)=$$

$$=\log_{72}72=1$$

$$3)\log_3 6+\log_3 18-\log_3 4=\log_3\frac{6\bullet 18}{4}=\log_3 27=3$$

а) $\log_2 4$;	б) $\log_2 16$;	в) $\log_3 3$;
г) $\log_3 27$;	д) $\log_4 1$;	е) $\log_5\frac{1}{5}$;
ж) $\log_{10} 100$;	з) $\log_5 5^3$;	и) $\log_7 7^5$.

а) $2^{\log_2 3}$;	б) $3^{\log_3 5}$;	в) $7^{\log_7 9}$;
г) $2^{\log_2 3+\log_2 5}$;	д) $(3^{\log_3 7})^2$;	е) $(3^2)^{\log_3 7}$;
ж) $7^{2\log_7 3}$;	з) $10^{3\log_{10} 5}$;	и) $0{,}1^{2\log_{0,1}10}$.

а) $\log_e e$;	б) $\log_e e^2$;	в) $\log_e\frac{1}{e}$;
г) $\ln e$;	д) $\ln e^3$;	е) $\ln\frac{1}{e}$;
ж) $\ln e^n$;	з) $\ln\sqrt{e}$;	и) $\ln\sqrt[3]{\frac{1}{e}}$.

а) $\log_5 x=2$;	б) $\log_3 x=-1$;	в) $\log_{\frac{1}{6}} x=-3$;	г) $\log_{\sqrt{5}} x=0$;
д) $\log_x 81=4$;	е) $\log_x\frac{1}{16}=2$;	ж) $\log_x\frac{1}{4}=-2$;	з) $\log_x 27=3$.

Задание №2.

Устный счет (работает весь класс; учащиеся имеют сигнальные карточки).

№	Задание/варианты ответов	1	2	3
1.	$\log_7 7$	0	1	7
2.	$\log_{\frac{1}{4}} 64$	-3	1/3	$\sqrt{3}$
3.	$\log_{11} 1$	1	11	0
4.	$\log_2\log_2 2^{16}$	2	4	8

5.	$5^{\log_5 11}$	55	5	11
6.	$3^{2\log_3 7}$	49	6	7
7.	$(\frac{1}{6})^{-1\log_6 4}$	4	6	1/4
8.	$5^{1+\log_5 2}$	2	10	7
9.	$\log_6(2x+4)$	$0 \le x \le 2$	$x \ge -2$	$x \rangle -2$
10.	$\log_3(x+2)=3$	25	1	7

Критерии оценивания:

1. Определяет логарифм числа, значения десятичного и натурального логарифма;
2. применяет свойства логарифмов для преобразования логарифмических выражений.

Вопросы для самоконтроля:

1.Сформулируйте определение логарифмической функции.

2.Приведите примеры логарифмической функции.

3.Перечислите свойства логарифмической функции.

Тема 27. Логарифмическая функция, свойства и график

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где a>0, a ≠ 1 называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить число b.

1) $\log_{10} 100 = 2$, т.к. $10^2 = 100$ (определение логарифма и свойства степени),

2) $\log_5 5^3 = 3$, т.к. $5^3 = 5^3$ (…),

3) $\log_4 \frac{1}{4} = -1$, т.к. $4^{-1} = \frac{1}{4}$ (…

Сложение и вычитание логарифмов

Рассмотрим два логарифма с одинаковыми основаниями: log a x и log a y. Тогда их можно складывать и вычитать, причем:

log a x + log a y = log a (x · y);

log a x − log a y = log a (x : y).

Итак, сумма логарифмов равна логарифму произведения, а разность — логарифму частного. Обратите внимание: ключевой момент здесь — одинаковые основания. Если основания разные, эти правила не работают!

Эти формулы помогут вычислить логарифмическое выражение даже тогда, когда отдельные его части не считаются (см. урок «Что такое логарифм»). Взгляните на примеры — и убедитесь:

Задача. Найдите значение выражения: log6 4 + log6 9.

Поскольку основания у логарифмов одинаковые, используем формулу суммы:

$\text{Log}_6 4 + \log_6 9$ = log6 (4 · 9) = log6 36 = 2.

Задача. Найдите значение выражения: log2 48 − log2 3.

Основания одинаковые, используем формулу разности:

$\text{Log}_2 48 - \log_2 3$ = log2 (48 : 3) = log2 16 = 4.

Задача. Найдите значение выражения: log3 135 − log3 5.

Снова основания одинаковые, поэтому имеем:
log3 135 − log3 5 = log3 (135 : 5) = log3 27 = 3.
Как видите, исходные выражения составлены из «плохих» логарифмов, которые отдельно не считаются. Но после преобразований получаются вполне нормальные числа. На этом факте построены многие контрольные работы. Да что контрольные — подобные выражения на полном серьезе (иногда — практически без изменений) предлагаются на ЕГЭ.
Вынесение показателя степени из логарифма
Теперь немного усложним задачу. Что, если в основании или аргументе логарифма стоит степень? Тогда показатель этой степени можно вынести за знак логарифма по следующим правилам:
log a x n = n · log a x
Несложно заметить, что последнее правило следует их первых двух. Но лучше его все-таки помнить — в некоторых случаях это значительно сократит объем вычислений.
Разумеется, все эти правила имеют смысл при соблюдении ОДЗ логарифма: a >0, a ≠ 1, x > 0. И еще: учитесь применять все формулы не только слева направо, но и наоборот, т.е. можно вносить числа, стоящие перед знаком логарифма, в сам логарифм. Именно это чаще всего и требуется.
Задача. Найдите значение выражения: log7 496.
Избавимся от степени в аргументе по первой формуле:
log7 496 = 6 · log7 49 = 6 · 2 = 12
Задача. Найдите значение выражения:
Заметим, что в знаменателе стоит логарифм, основание и аргумент которого являются точными степенями: 16 = 24; 49 = 72. Имеем:
Думаю, к последнему примеру требуются пояснения. Куда исчезли логарифмы? До самого последнего момента мы работаем только со знаменателем. Представили основание и аргумент стоящего там логарифма в виде степеней и вынесли показатели — получили «трехэтажную» дробь.
Теперь посмотрим на основную дробь. В числителе и знаменателе стоит одно и то же число: log2 7. Поскольку log2 7 ≠ 0, можем сократить дробь — в знаменателе останется 2/4. По правилам арифметики, четверку можно перенести в числитель, что и было сделано. В результате получился ответ: 2.
Переход к новому основанию
Говоря о правилах сложения и вычитания логарифмов, я специально подчеркивал, что они работают только при одинаковых основаниях. А что, если основания разные? Что, если они не являются точными степенями одного и того же числа?
На помощь приходят формулы перехода к новому основанию. Сформулируем их в виде теоремы:
Пусть дан логарифм log a x. Тогда для любого числа c такого, что c > 0 и c ≠ 1, верно равенство:
В частности, если положить c = x, получим:
Из второй формулы следует, что можно менять местами основание и аргумент логарифма, но при этом все выражение «переворачивается», т.е. логарифм оказывается в знаменателе.

Эти формулы редко встречается в обычных числовых выражениях. Оценить, насколько они удобны, можно только при решении логарифмических уравнений и неравенств.
Впрочем, существуют задачи, которые вообще не решаются иначе как переходом к новому основанию. Рассмотрим парочку таких:
Задача. Найдите значение выражения: log5 16 · log2 25.
Заметим, что в аргументах обоих логарифмов стоят точные степени. Вынесем показатели: log5 16 = log5 24 = 4log5 2; log2 25 = log2 52 = 2log2 5;
А теперь «перевернем» второй логарифм:
Поскольку от перестановки множителей произведение не меняется, мы спокойно перемножили четвеку и двойку, а затем разобрались с логарифмами.
Задача. Найдите значение выражения: log9 100 · lg 3.
Основание и аргумент первого логарифма — точные степени. Запишем это и избавимся от показателей:
Теперь избавимся от десятичного логарифма, перейдя к новому основанию:
Основное логарифмическое тождество
Часто в процессе решения требуется представить число как логарифм по заданному основанию. В этом случае нам помогут формулы:
n = log a a n
В первом случае число n становится показателем степени, стоящей в аргументе. Число n может быть абсолютно любым, ведь это просто значение логарифма.
Вторая формула — это фактически перефразированное определение. Она так и называется: основное логарифмическое тождество.
В самом деле, что будет, если число b возвести в такую степень, что число b в этой степени дает число a? Правильно: получится это самое число a. Внимательно прочитайте этот абзац еще раз — многие на нем «зависают».
Подобно формулам перехода к новому основанию, основное логарифмическое тождество иногда бывает единственно возможным решением.Вычислите
Задача. Найдите значение выражения:
Заметим, что log25 64 = log5 8 — просто вынесли квадрат из основания и аргумента логарифма. Учитывая правила умножения степеней с одинаковым основанием, получаем:
Если кто-то не в курсе, это была настоящая задача из ЕГЭ :)
Логарифмическая единица и логарифмический ноль
В заключение приведу два тождества, которые сложно назвать свойствами — скорее, это следствия из определения логарифма. Они постоянно встречаются в задачах и, что удивительно, создают проблемы даже для «продвинутых» учеников.
log a a = 1 — это логарифмическая единица. Запомните раз и навсегда: логарифм по любому основанию a от самого этого основания равен единице.
log a 1 = 0 — это логарифмический ноль. Основание a может быть каким угодно, но если в аргументе стоит единица — логарифм равен нулю! Потому что a 0 = 1 — это прямое следствие из определения.
Вот и все свойства. Обязательно потренируйтесь применять их на практике! Скачайте шпаргалку в начале урока, распечатайте ее — и решайте задачи.
Бекіту / Закрепление:
№ 278.

2) $\log_{0,2}(7-x)$ 4) $\log_8 \frac{5}{2x-1}$ 6) $\log_{0,7}(-2x^3)$

$7-x \rangle 0$ $\frac{5}{2x-1} \rangle 0$ $-2x^3 \rangle 0$

$x \langle 7$ $2x-1 \rangle 0$ $x^3 \langle 0$

$x \rangle \frac{1}{2}$ $x \langle 0$

Ответ: 2) x< 7; 4) x > 1/2; 6) x< 0.

№ 279.

2) $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}} = \log_3 3^{-1+(-\frac{1}{2})} = \log_3 3^{-1\frac{1}{2}} = -1\frac{1}{2}$

4) $\log_7 \frac{\sqrt[3]{7}}{49} = \log_7 7^{\frac{1}{3}-2} = \log_7 7^{-1\frac{2}{3}} = -1\frac{2}{3}$

Критерии оценивания:

1.Разъясняет определение логарифмической функции и описывает ее свойства;

2. строит график логарифмической функции.

Вопросы для самоконтроля:

1.Сформулируйте определение логарифмической функции.

2.Приведите примеры логарифмической функции.

3.Перечислите свойства логарифмической функции.

Тема 28. Логарифмические уравнения и их системы.

Определение .*Уравнение, содержащее переменную по знаком логарифма, называется логарифмическим уравнением.*

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение (1) $loq_a x = b$, где а и b –данные числа, а x - переменная величина.

Если а>0 и а=1, то уравнение имеет единственный корень. $x = a^b$

Решение более сложных уравнений как правило сводится либо к решению алгебраических уравнений либо к решению уравнений вида (1)

Способ непосредственного применения определения логарифма.

*Пример 1.*Решим уравнение $\log_x(x^3-5x+10)=3$

Решение. По определению логарифма можно записать: $x^3-5x+10=x^3$, откуда x=2.

Проверим найденное значение переменной: $\log_2(2^3-5*2+10)=\log_2 8=3$.Значит значение x=2 удовлетворяет данному уравнению. Ответ: 2

2.Способ введения новой переменной

Пример: $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$

Решение: Обозначим $\log_2 x$ через у, тогда вместо исходного уравнения получим: $y^2-y-2=0$, откуда $y_1 = 2.y_2 = -1$

Найдем теперь искомые значения x:

$\log_2 x = 2. x_1 = 4 \log_2 x = -1. x_2 = \frac{1}{2}$

II. Использование свойств логарифма

Пример 3. Решить уравнения

a) $\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24)$,

b) $\log_4(x^2 - 4x + 1) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -{}^1/_2$

d) $2\log_3(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$,

e) $16^{\log_4(1 - 2x)} = 5x^2 - 5$.

Решение. а) *ОДЗ* уравнения есть множество x □ (0;+□) которое определяется из системы неравенств (условия существования логарифмов уравнения)

$$\begin{cases} x > 0, \\ x+3 > 0, \\ x+24 > 0. \end{cases}$$

Используя свойство Р2 и утверждение 1, получим

$$\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24) \quad □ \quad \begin{cases} \log_3 x(x + 3) = \log_3(x + 24), \\ x > 0, \end{cases} \quad □$$

$$□ \quad \begin{cases} x(x + 3) = x + 24, \\ x > 0, \end{cases} \quad □ \quad \begin{cases} x^2 + 2x - 24 = 0, \\ x > 0, \end{cases} \quad □ \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -6, \\ x_2 = 4, \end{array} \right. \\ x > 0, \end{cases} \quad □ \quad x = 4.$$

Пример 4. Решить уравнения

Решение простейших уравнений:

Простейшими логарифмическими уравнениями будем называть уравнения следующих видов:

$\log_a x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$\log_a f(x) = b$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$\log_{f(x)} b = c$, $b > 0$.

Эти уравнения решаются на основании определения логарифма: если $\log_b a = c$, то $a = b^c$.

Решить уравнение

$\log_2 x = 3$.

Решение. Область определения уравнения $x > 0$. По определению логарифма $x = 2^3$, $x = 8$ принадлежит области определения уравнения.

Ответ: $x = 8$.

Уравнения вида $\log_a f(x) = b$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Уравнения данного вида решаются по определению логарифма с учётом области определения функции $f(x)$. Уравнение равносильно следующей системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = a^b. \end{cases}$$

Обычно область определения находится отдельно, и после решения уравнения $f(x) = a^b$ проверяется, принадлежат ли его корни области определения уравнения.
$\log_3(5x - 1) = 2$.
Решение:
ОДЗ: $5x - 1 > 0$; $x > 1/5$.
$\log_3(5x- 1) = 2$,
$\log_3(5x - 1) = \log_3 3^2$,
$5x - 1 = 9$,
$x = 2$.
Ответ: 2.

Пример. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{9}}(2x^2 - 2x - 1) = -\frac{1}{2}.$$

Решение. Область определения уравнения находится из неравенства $2x^2 - 2x - 1 > 0$. Воспользуемся определением логарифма:

$$2x^2 - 2x - 1 = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Применим правила действий со степенями, получим $2x^2 - 2x - 1 = 3$. Это уравнение имеет два корня $x = -1$; $x = 2$. Оба полученные значения неизвестной удовлетворяют неравенству $2x^2 - 2x - 1 > 0$, т.е. принадлежат области определения данного уравнения, и, значит, являются его корнями.
Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.
Уравнения вида $\log_{f(x)} b = c$, $b > 0$.
Уравнения этого вида решаются по определению логарифма с учётом области определения уравнения. Данное уравнение равносильно следующей системе

$$\begin{cases} b > 0, \\ f(x) > 0, f(x) \neq 1, \\ \left(f(x)\right)^c = b. \end{cases}$$

Чаще всего, область определения логарифмического уравнения находится отдельно, и после решения уравнения $(f(x))^c = b$ или равносильного уравнения

$$f(x) = b^{\frac{1}{c}}$$

проверяется, принадлежат ли его корни найденной области.
Пример. Решить уравнение
$\log_{x-1} 9 = 2$.
Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x - 1 > 0,\ x - 1 \neq 1, \\ (x-1)^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1,\ x \neq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ. $x = 4$.

2.. *Потенцирование.*

Суть метода заключается в переходе от уравнения

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ куравнению$f(x) = g(x)$, которое обычно

не равносильно исходному.

Уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)\ ,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

На основании свойства монотонности логарифмической функции заключаем, что $f(x) = g(x)$.

Переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению

$f(x) = g(x)$ называется *потенцированием*.

Нужно отметить, что при таком переходе может нарушиться равносильность уравнения. В данном уравнении $f(x) > 0$, $g(x) > 0$,

а в полученном после потенцирования эти функции могут быть как положительными, так и отрицательными. Поэтому из найденных корней уравнения $f(x) = g(x)$ нужно отобрать те, которые принадлежат области определения данного уравнения. Остальные корни будут посторонними.

Пример. Решить уравнение

$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x)$.

Решение. Область определения уравнения найдётся из системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0, \\ 7 - 2x > 0. \end{cases}$$

Потенцируя данное уравнение, получаем $x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$,

$x^2 - x - 12 = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Число 4 не удовлетворяет системе неравенств.

Ответ. $x = -3$.

Сведение уравнений к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

с помощью свойств логарифмов по одному основанию.

Если уравнение содержит логарифмы по одному основанию, то для приведения их к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ используются следующие свойства логарифмов:

$\log_b a + \log_b c = \log_b (ac)$, где$a > 0$; $c > 0$; $b > 0$, $b \neq 1$,

$\log_b a - \log_b c = \log_b (a/c)$, где$a > 0$; $c > 0$; $b > 0$, $b \neq 1$,

$m \log_b a = \log_b a^m$, где$a > 0$; $b > 0$, $b \neq 1$; $m \in R$.

Пример 1. Решить уравнение

$\log_6 (x - 1) = 2 - \log_6 (5x + 3)$.

Решение. Найдём область определения уравнения из системы неравенств

$$\begin{cases} x - 1 > 0; \\ 5x + 3 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1; \\ x > -0{,}6. \end{cases} \quad x > 1.$$

Применяя преобразования, приходим к уравнению

$\log_6 (x - 1) + \log_6 (5x + 3) = 2$,

$\log_6 ((x - 1)(5x + 3)) = 2$, далее, потенцированием, к уравнению

$(x - 1)(5x + 3) = 36$, имеющему два корня $x = -2{,}6$; $x = 3$. Учитывая область определения уравнения, $x = 3$.

Ответ. $x = 3$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_5\big((3x-1)(x+3)\big)-\log_5\frac{3x-1}{x+3}=0.$$

Решение. Найдём область определения уравнения, решив неравенство $(3x - 1)(x + 3) > 0$ методом интервалов.

$$x\in(-\infty;-3)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right).$$

Учитывая, что разность логарифмов равна логарифму частного, получим уравнение $\log_5 (x + 3)^2 = 0$. По определению логарифма $(x + 3)^2 = 1$, $x = -4$, $x = -2$. Число $x = -2$ посторонний корень.

Ответ. $x = -4$.

Пример 3. Решить уравнение

$\log_2 (6 - x) = 2\log_6 x$.

Решение. На области определения $0 < x < 6$ исходное уравнение равносильно уравнению $6 - x = x^2$, откуда $x = -3$, $x = 2$. Число $x = -3$ посторонний корень.

Ответ. $x = 2$.

Уравнения вида

$A\log_a f(x) + B\log_b g(x) + C = 0$.

Метод потенцирования применяется в том случае, если все логарифмы, входящие в уравнение, имеют одинаковое основание. Для приведения логарифмов к общему основанию используются формулы:

$$1.\ \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},\quad \text{где } a>0,\ a\neq1;\ b>0;\ c>0,\ c\neq1.$$

$$2.\ \log_a b=\frac{1}{\log_b a},\quad \text{где } a>0,\ a\neq1;\ b>0,\ b\neq1.$$

$$3.\ \log_{a^n} b=\frac{1}{n}\log_a b,\quad \text{где } a>0,\ a\neq1;\ b>0;\ n\in R,\ n\neq0.$$

$$4.\ \log_{a^n} b^m=\frac{m}{n}\log_a b,\quad \text{где } a>0,\ a\neq1;\ b>0;\ m,n\in R,\ n\neq0.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_2(2-x)+\log_{0,5}(x-1)=3.$$

Решение. Область определения уравнения $1 < x < 2$. Используя формулу (3), получим

$$\log_2(2-x)-\log_2(x-1)=3.$$

Так как $3 = \log_2 8$, то на области определения получим равносильное уравнение $(2-x)/(x-1) = 8$, откуда $x = 10/9$.

Ответ. $x = 10/9$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_3(x-1)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{25}.$$

Решение. Область определения уравнения $x>1$. Приведём логарифмы к основанию 3, используя формулу (4).

$$\log_3(x-1)=\frac{1}{2}\log_{3^{-1}}5^{-2},\quad \log_3(x-1)=\log_3 5.$$

Ответ. $x = 6$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_3(x+1)+\log_{x+1}3=2.$$

Решение. Область определения уравнения $x>-1$, $x\neq 0$. Приведём логарифмы к основанию 3, используя формулу (2).

$$\log_3(x+1)+\frac{1}{\log_3(x+1)}=2.$$

Умножим обе части уравнения на $\log_3(x+1)\neq 0$ и перенесем все слагаемые в левую часть уравнения. Получим $(\log_3(x+1)-1)^2=0$, откуда $\log_3(x+1)=1$ и $x=2$.

Ответ. $x=2$.

3.Введение новой переменной

Рассмотрим два вида логарифмических уравнений, которые введением новой переменной приводятся к квадратным.

$$A\log_a^2 f(x)+B\log_a f(x)+C=0,$$

$$A\log_a f(x)+B\log_{f(x)} a+C=0.$$

Уравнения вида

$$A\log_a^2 f(x)+B\log_a f(x)+C=0,$$

где $a>0$, $a\neq 1$, A, B, C *– действительные числа*.

Пусть $t=\log_a f(x)$, $t\in R$. Уравнение примет вид $t^2+Bt+C=0$. Решив его, найдём x из подстановки $t=\log_a f(x)$. Учитывая область определения, выберем только те значения x, которые удовлетворяют неравенству $f(x)>0$.

Пример 1. Решить уравнение $\lg^2 x-\lg x-6=0$.

Решение. Область определения уравнения – интервал $(0;\infty)$.Введём новую переменную $t=\lg x$, $t\in R$.

Уравнение примет вид $t^2-t-6=0$. Его корни $t_1=-2, t_2=3$.

Вернёмся к первоначальной переменной $\lg x=-2$ или $\lg x=3$,

$x=10^{-2}$ или $x=10^3$. Оба значения x удовлетворяют области определения данного уравнения ($x>0$).

Ответ. $x = 0{,}01$; $x = 1000$.

Пример 2. Решить уравнение

$$2\log_3 x^2-\log_3^2(-x)=4$$

Решение. Найдём область определения уравнения

$$\begin{cases} -x > 0, \\ x^2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad x < 0.$$

Применив формулу логарифма степени, получим уравнение

$$4\log_3 |x| - \log_3^2(-x) = 4.$$

Так как $x< 0$, то $| x | = -x$ и следовательно

$$4\log_3(-x) - \log_3^2(-x) = 4.$$

Введём новую переменную $t = \log_3 (-x)$, $t\in R$. Квадратное уравнение
$t^2 - 4t + 4 = 0$
имеет два равных корня $t_{1,2} = 2$. Вернёмся к первоначальной переменной $\log_3 (-x) = 2$, отсюда $-x = 9$, $x = -9$. Значение неизвестной принадлежит области определения уравнения.
Ответ. $x = -9$.

Уравнения вида

$$A\log_a f(x) + B\log_{f(x)} a + C = 0,$$

где $a>0$, $a\neq1$, A, B, C – действительные числа ,$A\neq0$, $B\neq0$.

Уравнения данного вида приводятся к квадратным умножением обеих частей его на $\log_a f(x)\neq0$. Учитывая, что $\log_a f(x)\cdot\log_{f(x)} a=1$
(свойство $\log_b a= 1/ \log_a b$), получим уравнение

$$A\log_a^2 f(x) + C\log_a f(x) + B = 0.$$

Замена $\log_a f(x)=t$, $t\in R$приводит его к квадратному
$At^2 + Ct + B = 0$.

Из уравнений $\log_a f(x)=t_1$, $\log_b f(x)=t_2$ найдем значения x и выберем среди них принадлежащие области определения уравнения:
$f(x) > 0$, $f(x) \neq 1$.

Пример. Решить уравнение

$$\log_5(x+2) - 2\log_{x+2} 5 - 1 = 0.$$

Решение. Область определения уравнения находим из условий $x+2>0$, $x+2 \neq 1$, т.е.$x>-2$, $x\neq -1$.
Умножим обе части уравнения на$\log_5(x+2) \neq0$, получим

$$\log_5^2(x+2) - 2 - \log_5(x+2) = 0$$

или, заменив $\log_5(x+2) = t$, придем к квадратному уравнению
$t^2 - t - 2 = 0$, $t_1 = -1$, $t_2 =2$.
Возвращаемся к первоначальной переменной:

$\log_5(x+2) = -1$, $x+2 = 1/5$, $x= -9/5$,

$\log_5(x+2) = 2$, $x+2 = 25$, $x= 23$.

Оба корня принадлежат области определения уравнения.
Ответ: $x= -9/5$, $x= 23$.
в) $\log_2 x - 2 \log_x 2 = -1$

Решение:
ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$
Используя формулу перехода к новому основанию, получим

$$\log_2 x - 2\frac{\log_2 2}{\log_2 x} = -1,$$

$$\log_2 x - \frac{2}{\log_2 x} = -1.$$

Обозначим

$\log_2 x = y.$

$$y - \frac{2}{y} = -1,$$

$$\frac{y^2 + y - 2}{y} = 0,$$

$$\begin{cases} y^2 + y - 2 = 0, \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$y_1 = -2;\ y_2 = 1.$

а) $\log_2 x = -2;\ x = 2^{-2};\ x = \frac{1}{4}.$

б) $\log_2 x = 1;\ x = 2.$

Ответ: $\frac{1}{4};\ 2.$

Используя свойства и определение логарифма вычислите устно.
1) Заполни пропуски:
а)$\mathrm{Log}_2\ 16 = \ldots;$
б)$\mathrm{Log}_2\ 1/8 = \ldots;$
в) Log2 1 = …;
г)$\mathrm{Log}_{\sqrt{5}}\ 25 = \ldots;$
д)Log…1/32 = - 5.
е) $\log_2 16 =$
е) $\log_3 \sqrt{3} =$
ж) $\log_2 22 - \log_2 11 =$
г) $\log_8 14 + \log_8 \frac{32}{7} =$
з) $5^{\log_5 49} =$
ж) $\log_{\frac{1}{6}} 1 =$
и) $7 \cdot 5^{\log_5 2} =$

a) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$, c) $\lg^2 100x + \lg^2 10x + \lg x = 14$,

b) $\log_2^2(x-1)^2 - 3\log_2(x-1) - 1 = 0$, d) $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.

Решение. а) *ОДЗ* уравнения есть множество $x \in (0;+\infty)$. Обозначив $\lg x = t$ (тогда $\lg^2 x = (\lg x)^2 = t^2$), получим квадратное уравнение

$t^2 - 3t + 2 = 0$,

решения которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 1, \\ \lg x = 2, \end{array}\right.$$

откуда $x_1 = 10$ и $x_2 = 100$. Оба корня входят в *ОДЗ*.

Решить уравнение

$\log_2\left(x^2+5x+2\right)=3$

Решение.

Используем метод - решение логарифмических уравнений непосредственно по определению. Найдем область допустимых значений (ОДЗ) заданного уравнения. Для этого решим неравенство:

$x^2+5x+2>0$

Раскладываем левую часть на множители, для этого находим корни квадратного уравнения:

$x^2+5x+2=0$

$D=b^2-4ac=5^2-4\cdot1\cdot2=25-8=17$

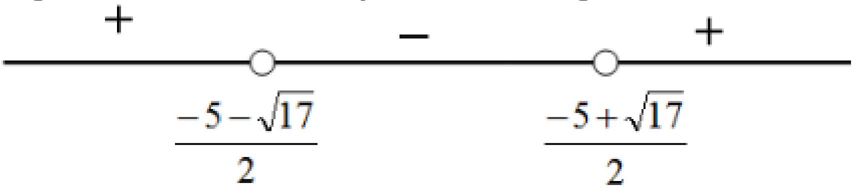
$\sqrt{D}=\sqrt{17}$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2\cdot1}=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

Тогда неравенство перепишется в виде:

$$\left(x+\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)>0$$

Отметим полученные корни на числовой прямой и определим знаки в полученных интервалах.



Учитывая знак неравенства определим ОДЗ:

$$x\in\left(-\infty;-\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(-\frac{5-\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$$

ОДЗ нашли, теперь приступим к поиску корней исходного логарифмического уравнения:

$\log_2\left(x^2+5x+2\right)=3$

Перепишем уравнение, используя определение логарифма:

$\log_2(x^2+5x+2)=3 \Rightarrow x^2+5x+2=2^3$

$x^2+5x+2=8$

$x^2+5x-6=0$

Решим полученное квадратное уравнение.

$D=b^2-4ac=5^2-4\cdot1\cdot(-6)=25+24=49$

$\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5\pm7}{2}=\{-6,1\}$

Можете проверить решение на нашем онлайн калькуляторе - решение квадратных уравнений.

Убеждаемся, что полученные корни принадлежат ОДЗ.

Ответ. $x_1=-6,\ x_2=1$

а) $\log_2^2 x-4\log_2 x+3=0$;

б) $x^{\lg x}=100x$;

в) $\log_5(x-4)=2$;

г) $\log_{23}(2x-1)=\log_{23}x$;

д) $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7$;

е) $\lg(x-1)+\lg x=\lg(5x-8)$.

IV. Бекіту / Закрепление:

Пример 1. Решить уравнение $\lg^2 x-\lg x-6=0$.

Решение. Область определения уравнения – интервал $(0;\infty)$.Введём новую переменную $t=\lg x$, $t\in R$.

Уравнение примет вид $t^2-t-6=0$. Его корни $t_1=-2, t_2=3$.

Вернёмся к первоначальной переменной $\lg x=-2$ или $\lg x=3$, $x=10^{-2}$ или $x=10^3$. Оба значения x удовлетворяют области определения данного уравнения ($x>0$).

Ответ. $x=0{,}01$; $x=1000$..

Решить уравнения:

1. $\log_6 x=2$;

Решение. ОДЗ: x>0,

$x=6^2$,

$x=36$.

Ответ: 36.

2. $\lg(4x+5)=\lg(5x+2)$;

Решение. 4x+5=5x+2,

-x=-3,

x=3.

Проверка: $\lg(12+5)=\lg17$, $\lg(15+2)=\lg17$.

Ответ: 3.

3. $\log_2(x^2-1)=3$;

Решение. $x^2-1=2^3$,

$x^2-1=8$,

x=-3, x=3.

Проверка: $\log_2((-3)^2-1)=3$,

$\log_2(3^2-1)=3$.

Ответ: -3, 3.

Индивидуальное решение уравнения $\lg^2 x-3\lg x+2=0$. Проверка решения, обсуждение в парах.

Решение. ОДЗ: x>0,

$\lg\ \ x=t$,

$t^2-3t+2=0$,

D=1, $t_1=2$, $t_2=1$;

$\lg\ \ x=2$, $\qquad \lg\ \ x=1$;

$x=10^2$, $\qquad x=10^1$,

$x_1=100$, $\qquad x_2=10$.

Ответ: 10, 100.

Те ученики, у которых ошибки в решении этого уравнения, решают следующие уравнения (самостоятельная работа по закреплению новых знаний):

а) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6=0$;

Решение. ОДЗ: x>0,

$\log_5 x=t$,

$t^2-5t+6=0$,

D=1, $t_1=3$, $t_2=2$;

$\log_5 x=2$, $\quad \log_5 x=3$;

$x=5^2$, $\qquad x=5^3$,

$x_1=25$, $\qquad x_2=125$.

Ответ: 25, 125

б) $\lg^2 x-3\lg x-4=0$.

Решение. ОДЗ: x>0,

$\lg\ \ x=t$,

$t^2-3t-4=0$,

D=25, $t_1=4$, $t_2=-1$;

$\lg\ \ x=4$, $\qquad \lg\ \ x=-1$;

$x=10^4$, $\qquad x=10^{-1}$,

$x_1=10000$, $\qquad x_2=0.1$.

Ответ: 0.1; 10000

Решение. ОДЗ: x>0,

$2\log_3^2 x-\log_3 x=0$,

$\log_3 x = t$,

$2t^2 - t = 0$,

$t(2t-1) = 0$,

$t_1 = 0$ или $2t - 1 = 0$,

$t_2 = \frac{1}{2}$.

$\log_3 x = 0$, $\log_3 x = \frac{1}{2}$;

$x_1 = 1$, $x = 3^{\frac{1}{2}}$,

$x_2 = \sqrt{3}$.

Ответ: 1, $\sqrt{3}$

а) $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$;

б) $x^{\lg x} = 100x$;

в) $\log_5 (x-4) = 2$;

г) $\log_{23}(2x-1) = \log_{23} x$;

д) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$;

е) $\lg(x-1) + \lg x = \lg(5x-8)$.

Самостоятельная работа.

Учащиеся, которые первыми решили логарифмические уравнения получают карточки с разноуровневыми заданиями по теме.

Ребята выбирают любые уравнения.

Вариант 1.	Вариант 2.
<u>I уровень на «4»:</u>	<u>I уровень на «4»:</u>
а) $\log_5 x = -2$; б) $\log_6 (x-7) = 2$; в) $\log_8 (x+10) = 0$; г) $\log_{\frac{1}{2}} (x+5) = -3$;	а) $\log_4 x = -2$; б) $\log_7 (x-7) = 2$; в) $\log_{\frac{1}{8}} (x-10) = 0$; г) $\log_{\frac{1}{2}} (x+5) = -4$;
<u>II уровень на «5»:</u>	<u>II уровень на «5»:</u>
г) $2\lg(x-1) = \lg(1{,}5x+1)$; д) $9^{\log_9 (x^2-5)} = 31$. г) $\log(x^2 - x) = \lg(10+2x)$; д) $\log_{\frac{1}{6}} (6-x) = -2$.	а) $\log_3 (2x-4) = \log_3 (x+7)$; б) $\log_4 (x-3) - 1 = \log_4 (x-6)$; в) $0{,}1^{\log_{0,1}(3x-1)} = 2$; д) $\log_{\frac{1}{9}} (6-x) = -2$.

Критерии оценивания:

1. Объясняет способы решения логарифмических уравнений.

2. Применяет свойства, правила при решении практических задач с логарифмами.

Вопросы для самоконтроля:
1.Сформулируйте определение логарифмической функции.
2.Приведите примеры логарифмической функции.
3.Перечислите свойства логарифмической функции.

Тема29. Логарифмические неравенства.

Логарифмические неравенства – это неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0, a \neq 1$ и неравенства, сводящиеся к этому виду.
Решение логарифмических неравенств:
$\boldsymbol{a} > 1$
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$
(знак неравенства сохраняется)
$\boldsymbol{0 < a < 1}$
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$
(знак неравенства меняется)
Способы решения логарифмических неравенств основаны на монотонности логарифмической функции в зависимости от основания логарифма. Функция возрастает, если $a > 1$ и убывает, если $0 < a < 1$.
$\boldsymbol{a} > 1$
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$
(знак неравенства сохраняется)
$\boldsymbol{0 < a < 1}$
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$
(знак неравенства меняется)
Пример 1.
Решить неравенство $\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$.
Решение:
Основание логарифма 3 > 1, значит используем 1 схему.
$$\begin{cases} 2x-4 > 14-x \\ 2x-4 > 0 \\ 14-x > 0 \end{cases}; \begin{cases} x > 6 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases}; 6 < x < 14.$$
Ответ: (6; 14)
Пример 2.
Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x+15) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x-1) - 2$.
Решение:

Выполним преобразование правой части: заменим $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$ и используем свойство суммы логарифмов.

$\log_{\frac{1}{3}}(x+15) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}} 9;$

$\log_{\frac{1}{3}}(x+15) \geq \log_{\frac{1}{3}}(9 \cdot (x-1))$

Основание логарифма $0 < \frac{1}{3} < 1$, значит используем 2 схему.

$\begin{cases} x+15 \leq 9 \cdot (x-1) \\ x+15 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}; \begin{cases} -8x \leq -24 \\ x > -15 \\ x > 1 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 3 \\ x > -15 \\ x > 1 \end{cases}; x \geq 3.$

Ответ: $[3; +\infty)$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА (Логарифмические уравнения)

Вариант № 1	*Вариант № 2*
1) $\log_3(3x-5) = \log_3(x-3)$	1) $\log_7(4x-6) = \log_7(2x-4)$
2) $\log_2(x^2-3x+10) = 3$	2) $\log_{1/2}(x^2-4x-1) = -2$
3) $loq_3^2 x - \log_3 x = 2$	3) $\log_{1/2}^2 x - \log_{1/2} x = 6$
7) $\log_x(x+2) = 2$	7) $\log_x(x+6) = 2$

Критерии оценивания:

1. Составляет уравнения и неравенства по условию задачи

Вопросы для самоконтроля:

1.Сформулируйте определение логарифмической функции.

2.Приведите примеры логарифмической функции.

3.Перечислите свойства логарифмической функции.

Раздел 6. Математическая статистика и теория вероятностей

Тема 30. Элементы комбинаторики и их применение для нахождения вероятности событий. Бином Ньютона для приближённых вычислений. Вероятность события и ее свойства. Условная вероятность. Правила сложения и умножения вероятностей

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих заданному свойству.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы: Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно n+m способами.

Правило произведения: Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объекта B можно выбрать n способами, то пара объектов(AB) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

В комбинаторике рассматриваются виды выборок – перестановки, размещения, сочетания.

Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только их порядком и их расположением. Число всех возможных перестановок $P_n = n!$

Пример: Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом.

Решение: Будем считать выделенных книги за одну книгу. Тогда для шести книг существует формула: $P_6 = 6! = 720$ перестановок. Однако четыре определенные книги можно переставить между собой

$P_4 = 4! = 24$ способами. По правилу умножения имеем $P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17280$

Размещением из n элементов по m называется любое упорядоченное подмножество из m элементов множества, состоящего из n различных элементов.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример: Сколькими способами можно разместить 4 фотографии на 12 страницах газеты, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии.

Решение: Для размещения фотографий следует отобрать 4 различных страницы газеты из 12 имеющихся. Упорядоченная совокупность страниц является согласно определению размещением из 12 элементов по 4.

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11880$$

Если порядок отбираемых m элементов из n не играет роли, то говорят о числе сочетаний.

Сочетанием из n элементов по m называется любое подмножество из m элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n различных элементов.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример:Необходимо выбрать в порядок 4 из 10имеющихся книг. Сколькими способами можно это сделать?

Решение: Порядок выбора книг роли не играет. Здесь важен только их состав, значит $C_4^{10} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$ ***Комбинаторика*** - *это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Основы комбинаторики очень важны для оценки вероятностей случайных событий, т.к. именно они позволяют подсчитать принципиально возможное количество различных вариантов развития событий*

Пример 1. В группе 20 учащихся. Сколькими способами могут быть выбраны староста и заместитель старосты?

Решение. Пусть сначала избирается староста. Поскольку каждый член группы может быть выбран старостой, то, очевидно, есть 20 способов его выбора. Тогда заместителем старосты может стать каждый из оставшихся 19 человек. Любой из 20 способов выбора старосты может осуществиться вместе с любыми из 19 способов выбора заместителя старосты. Поэтому всего существует 20 · 19 = 380 способов выбора старосты и его заместителя.

Символ **n!** (читается: «эн факториал»). Используя знак факториала, можно, например, записать

$$1! = 1,$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6,$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24,$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120,$$

Тип комбинаций	Примеры решения типовых заданий	Задания для самостоятельной работы
Перестановки ***Определение.*** ***Перестановками*** *из n элементов называются такие соединения из n элементов, которые отличаются друг от друга лишь порядком следования элементов* Возьмем n различных элементов: A, B, C, … M; будем переставлять эти элементы всевозможными способами, оставляя неизменным их число и	1.В задаче 2 требовалось найти число всех . перестановок ораторов. Это число оказалось равным 24, следовательно, P_4 = 24. В общем случае число перестановок из n элементов $P_n = A_n^n$ и, следовательно, его можно найти по формуле (1): $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$. Таким образом $P_n = n!$ **Пример 5.** Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр	**1.** Сколько трехсловных предложений можно составить из слов: сегодня, дождь, идет? **2.** В пассажирскм поезде 15 вагонов. Сколькими способами можно распределить по вагонам 15 проводников, если за каждым закрепляют 1 вагон? **3.**Сколько 5-тизначных чисел (без повторения цифр) можно составить

меняя лишь их порядок. Каждая из таких комбинаций называется перестановкой. P – число всех перестановок; n – количество элементов. **$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$** *Читаем: n! – эн факториал*	1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что все числа не повторяются. **Решение**. Так как число кратно пяти, следовательно, цифра пять должна стоять на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е. $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. **1.**Найти число перестановок из трех элементов А, В, С. <u>*Решение:*</u> Выпишем возможные варианты перестановок: АВС ВАС САВ АСВ ВСА СВА. Проверим по формуле: n= 3; $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6$ <u>*Ответ:*</u> 6 перестановок. **2.**Найти число перестановок из трех элементов: 1,2,3. <u>*Решение:*</u> выпишем возможные варианты перестановок: 123 213 312 132 231 321. Всего получилось 6 перестановок. Проверим по формуле: n= 3; $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ <u>*Ответ:*</u> 6 перестановок. **3.**Сколькими способами можно расставить на полке 6 различных книг: <u>*Решение:*</u> n=6; $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ <u>*Ответ:*</u> 720 различных вариантов.	из чисел: 0,3,4,6; 8. **4.**Сколькими способами можно выстроить очередь в кассу, если хотят получить зарплату 6 человек?

Тип комбинаций	**Примеры решения типовых заданий**	**Задания для самостоятельной**

<table>
<tr><td></td><td></td><td>работы</td></tr>
<tr><td>

Размещения

Определение. *Пусть имеется множество, содержащее n элементов.* ***Размещениями*** *из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их следования.*

Будем составлять из n различных элементов в каждой, располагая взятые m элементов в различном порядке. Каждая группа из m элементов называется размещением из n элементов по m элементов.

A – число всех размещений;
n- количество всех элементов;
m- количество элементов в группе.

$\boldsymbol{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}}$

</td><td>

Пример 4. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?
Решение. Число способов равно числу размещений из 7 элементов по 4, т.е. равно A_7^4. По формуле получаем $A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3} = 4\cdot5\cdot6\cdot7 = 840$

1. Найдите число размещений из трех элементов: 7,4,5 по два.
Решение: выпишем возможные варианты: 74, 75, 47, 45, 57, 54 – всего 6 различных групп по 2 элемента. Проверим по формуле: n = 3; m = 2
$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)} = \frac{1\cdot2\cdot3}{1} = 6$
Ответ: 6 размещений.
2. Найдите число размещений из четырех элементов: A, B, C, D по два.
Решение: n = 4, m = 2
$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{2!} = 3\cdot4 = 12$
Ответ: 12 размещений
3. Из 10 студентов группы надо выбрать старосту, его заместителя и редактора газеты. Сколькими способами это можно сделать?
Решение: n = 10; m= 3
$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} = =$ 720
Ответ: 720 способами.

</td><td>

1. В забеге участвуют 5 спортсменов. Сколькими способами можно предсказать распределение первых трех мест между ними ?
2. В классе изучают 7 предметов, в среду 4 урока, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на среду?
3. В розыгрыше кубка страны по футболу участвуют 17 команд. Сколько существует способов распределения золотой, серебряной и бронзовой медалей ?

</td></tr>
</table>

Тип комбинаций	Примеры решения типовых заданий	Задания для самостоятельной работы
Сочетания ***Сочетаниями без повторений*** *из n элементов по k в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (в них не имеет значения порядок расположения элементов в той или иной совокупности).* ***Определение 3. Сочетаниями*** *из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. (Подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, не считаются различными.)* *Число сочетаний из n элементов по m обозначается символом* C_n^m *и вычисляется по формуле:* Обозначение: $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ ***Сочетаниями с повторениями*** *из n элементов по m называются соединения, имеющие одинаковый*	**1**. Найдите все сочетания из трех элементов: 7, 4, 5 по два элемента в каждом. *Решение:* Выпишем группы по 2 элемента (но 47 и 74 – эквиваленты(одинаковые) группы): 74, 75, 45. Всего - 3 группы, т.е. 3 сочетания. Проверим по формуле: n = 3, m = 2; $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot1}$ = 3 *Ответ:* 3 сочетания. **2.**Найдите все сочетания из пяти элементов: A,B,C,D,E по три в каждом. *Решение:*n= 5, m= 3; $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2} = 10$ *Ответ:* 10 сочетаний. **3.** Сколькими способами можно выбрать из 6 человек комиссию, состоящую из трех человек? *Решение:*n= 6, m= 3; $C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3} = 20$ *Ответ:* 20 способов. **Пример 6.** Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз? **Решение**. Матчей состоится столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т.е. их число равно	**1.** Из 10 рабочих необходимо выделить для поездки за границу 6 человек. Сколькими способами это можно сделать? **2.**На тренировке занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером различных стартовых пятерок ? **3.** При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько сделано рукопожатий? **4.**В группе 20 человек. На дежурство в столовую надо назначит 4 дежурных. Сколькими способами это можно сделать ?

состав из n элементов, содержащих m элементов. С – число сочетаний n - количество <u>всех</u> элементов m - количество элементов <u>в группе</u> *Обозначение:* $\boldsymbol{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$ **Свойства сочетаний:** 1) $C_n^m = C_n^{n-m}$ 2) $C_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m$	$C_{16}^2 = \frac{16!}{(16-2)!2!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot \ldots \cdot 1}{14\cdot 13\cdot \ldots \cdot 1\cdot 2\cdot 1}$, т.е. всего будет сыграно 120 матчей.	$= \frac{15\cdot 16}{2} = 120$

Работа в парах
(сочетания без повторений)

Сколькими способами можно составить команду по бегу из 4-х человек, если имеются 7 бегунов при условии учета порядка? ($A_7^4 = \frac{7!}{4!}$)

На 5 сотрудников выделено 3 путевки в санаторий. Сколькими способами можно распределить эти путевки, если:все путевки различны,все путевки одинаковые. ($A_5^3 = \frac{5!}{3!}$; $C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}$)

Сколькими способами можно разложить в ряд 5 белых и 4 черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом, если:шары одного цвета не отличаются друг от друга,все шары разные. ($C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot(6-4)!}$; $k = C_6^4 \cdot 5!\cdot 4!$)

У 6 взрослых и 11 детей обнаружены признаки инфекционного заболевания. Чтобы проверить диагноз выбирают 2-х взрослых и 3-х детей для сдачи анализов. Сколькими способами можно это сделать? ($k = C_6^2 \cdot C_{11}^3 = \frac{6!\cdot 11!}{2!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 8!}$)

У одного ученика есть 11 книг по математике, а у другого – 15. Сколькими способами они могут выбрать по 3 книги каждый для обмена? ($k = C_{11}^3 \cdot C_{15}^3 = \frac{11!\cdot 15!}{(3!)^2\cdot 8!\cdot 12!}$)

В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревнованиях необходимо составить команду из 4 человек, в которую должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами можно это сделать? ($k = C_7^2 + C_2^1 \cdot C_7^3$)

Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой? ($k = \frac{C_{10}^5}{2}$)

(сочетания с повторениями)

В кондитерской продаются пирожные эклер, корзиночка, бисквит, безе, картошка, заварное (всего 6 сортов). Надо купить 10 пирожных. Сколькими способами можно это сделать? ($\overline{C}_6^{10} = C_{10+6-1}^{10} = C_{15}^{10}$)

В почтовым отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить: 1) 12 открыток, 2) 8 открыток, 3) 8 различных открыток. ($\overline{C}_{12}^{10} = \frac{21!}{10! \cdot 11!}$; $\overline{C}_{10}^{8} = \frac{17!}{8! \cdot 9!}$; $C_{10}^8 = \frac{10!}{8! \cdot (10-8)!}$)

На плоскости даны 5 точек, никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки?

Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «конверт»?

Найти: а) A_8^6 – P_4, б) A_7^5 - P_5 в) $\frac{A_9^3}{P_6} - C_{21}^1$.

(размещения без повторений)

Учащиеся 9 классов изучают 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы 6 уроков были различными? ($A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!}$)

Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеются 5 различных цветов ткани?

($A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!}$)

Решить предыдущую задачу при условии, что один из цветов должен быть красным. ($A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!}$)

В цехе работают 8 токарей. Сколькими способами можно поручить трем из них изготовить три различные детали по одной на каждого? ($A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!}$)

Сколькими способами можно выбрать ноль элементов из n элементов? ($A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!}$)

Сколькими способами можно выбрать n элементов из n элементов? ($A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!}$)

(размещения с повторениями)

Серия и номер паспорта советского образца состоят из 2-х букв и 6-и цифр. Сколько может быть паспортов с различными сериями и номерами, если римские цифры серии зафиксировать? ($k = \overline{A}_{33}^{2} \cdot \overline{A}_{10}^{6} = 33^2 \cdot 10^6$)
Решить предыдущую задачу при условии, что повторений нет. ($k = A_{33}^{2} \cdot A_{10}^{6} = \dfrac{33! \cdot 10!}{(33-2)! \cdot (10-6)!}$)

Задание2: Вычислите: $C_7^3 + A_{10}^3$ $\qquad C_7^3 + A_{10}^3 = \dfrac{7*6*5}{1*2*3} + 10*9*8 = 35 + 720 = 755$

<u>Решение:</u>

<u>Ответ:</u> 755

Классическое определение вероятности.

Для практической деятельности важно уметь сравнивать события по степени возможности их наступления. Численная мера степени объективной возможности наступления события называется вероятностью события.

Согласно *классическому определению* вероятность события А равна отношению числа случаев, благоприятствующих ему, к общему числу случаев, т.е. $P(A) = \dfrac{m}{n}$,

где P(A) - вероятность события A;
m - число случаев, благоприятствующих событию A;
n – общее число случаев.

Пример: набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал её на удачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение: Обозначим через A событие - набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, значит n равна 10. Благоприятствует событию A лишь один исход m=1. Имеем P(A)= $\dfrac{1}{10}$

1.Примеры выполнения упражнений тренинга на умение №1

Задание №1а

20 студентов из 30 занимаются в спортивных секциях. Какова вероятность того, что выбранный студент спортсмен.

Решение

Заполните таблицу, подобрав каждому алгоритму конкретное содержание.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1.	Ввести обозначения для заданных величин	n-число всех студентов m-число спортсменов A-студент - спортсмен n=30, m=20 Найти p(A)
2.	Найти формулу для этого случая	Задано общее число событий и число благоприятных событий, следовательно, нужна формула а)

		$P(A) = m/n = 20/30 = 2/3$

Критерии оценивания:

1. Приводит примеры на «перестановки», «размещения» и «сочетания» без повторений и с повторениями;
2. применяет формулы для вычисления перестановок, сочетаний, размещений без повторений и с повторениями.

Вопросы для самоконтроля:

1.Назовите основные формулы комбинаторики?

2.Как вычисляется размещение , сочетание и пререстановки?

Тема 31. Формула полной вероятности и формула Байеса. Формула Бернулли и ее следствия Вероятностные модели реальных явлений и процессов.

При практическом применении теории вероятностей и математической статистики часто приходится встречаться с задачами, в которых один и тот же опыт повторяется неоднократно. В результате каждого опыта может появиться или не появиться событие А, причем нас интересует не результат каждого опыта, а общее число появлений события А в серии опытов. Например, если производится серия выстрелов по одной и той же цели, то нас, как правило, интересует не результат каждого отдельного выстрела, а общее число попаданий. При этом результаты предыдущих опытов никак не сказываются на последующих.

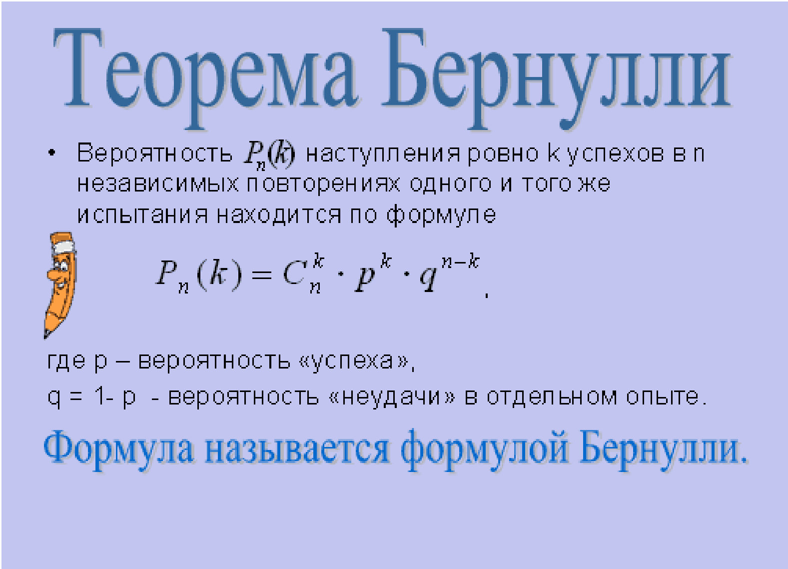
Такая стандартная схема часто встречается и в самой теории вероятностей. Она называется схемой независимых испытаний или схемой Бернулли. Швейцарский математик XVII в. Якоб Бернулли объединил примеры и вопросы такого типа в единую вероятностную задачу-схему (работа "Искусство предположений" опубликована в 1713 году).

Историческая справка. Якоб Бернулли (27.12.1654, Базель, – 16.8.1705, там же) – профессор математики Базельского университета (1687) был выходцем из Голландии.

Вам дома надо было вычислить вероятность выпадения 6 на игральном кубике.

(Ученики называют результаты. Вывод: результаты могут зависеть и от размера кубика от силы бросания и т.п.)

Несколько опытов называются независимыми, если вероятность исхода каждого из опытов не зависит от того, какие исходы имели другие опыты. Например, несколько последовательных бросаний монеты – это независимые опыты. Несколько последовательных выниманий карты из колоды – независимые опыты при условии, что вынутая карта каждый раз возвращается в колоду и карты перемешиваются. В противном случае – это зависимые опыты.



РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

***Пример* 1.** Монета бросается 6 раз. Какова вероятность выпадения герба 0, 1, …6 раз?

Решение. Число опытов *n*=6. Событие *A* – «успех» – выпадение герба. Тогда $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$.

$$P_6(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64};$$

$$P_6(1) = C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{64};$$

$$P_6(2) = C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64};$$

$$P_6(3) = C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{64};$$

$$P_6(4) = C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64};$$

$$P_6(5) = C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{64};$$

$$P_6(6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

Очевидно, что наиболее вероятное число выпадений герба равно трём. Но далеко не каждый раз при шести бросаниях монеты герб выпадет ровно три раза! Вероятность $\frac{20}{64}$ говорит о том, что это будет происходить меньше, чем в трети случаях

Пример 2. Монета бросается 10 раз. Какова вероятность двукратного появления герба?

Решение. Число опытов n=10, m= 2. Событие A – «успех» – выпадение герба. Тогда $p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$.

$$\mathrm{P}_{10}(2)=C_{10}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{8}=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{45}{1024}\approx 0,04395.$$

Ответ:0,04395.

Пример 3. Вероятность того, что изделие не пройдет контроля, равна 0,125. Какова вероятность того, что среди 12 изделий не будет ни одного забракованного контролером?

Решение. Число опытов n=12,m=0. Событие A – «успех» – не будет ни одного забракованного. Тогда $p=\frac{1}{8},\ q=\frac{7}{8}$.

$$P_{12}(0)=C_{12}^{0}\left(\frac{1}{8}\right)^{0}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^{12}=1\cdot 1\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^{12}=0,2514.$$

Ответ:0,2514.

В следующих испытаниях найдите вероятности «успеха» и «неудачи».

а) Бросают пару различных монет. «Неудача» - выпадение двух «орлов».

б) Бросают игральный кубик. «Успех» - выпадение числа, кратного трем.

в) Бросают пару различных кубиков. «Неудача» - выпадение двух четных чисел.

г) Из 36 игральных карт берут 5. «Успех» - среди них нет дамы пик.

Решение.

а) Общее число исходов эксперимента n=2·2=4; вероятность «неудачи» $P(\bar{A})=\frac{1}{4}$; вероятность «успеха» $P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

б) n=6; исходы, благоприятствующие «успеху» - выпадение 3 и 6 очков; $m_A=2$; вероятность «успеха» $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; вероятность «неудачи» $P(\bar{A})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

в) n=6·6=36; количество исходов, благоприятствующих «неудаче», $m_A=3\cdot 3=9$ (на каждом кубике 3 четные числа); вероятность «неудачи» $P(\bar{A})=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$; вероятность «успеха» $P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

г) $n=C_{36}^{5}$ =376992; количество исходов, благоприятствующих «успеху», равно $m_A=C_{35}^{5}$ (выбираем карту из колоды без дамы пик);

вероятность «успеха» $P(A)=\frac{C_{35}^{5}}{C_{36}^{5}}=\frac{35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32}=\frac{31}{36}$, вероятность «неудачи» $P(\bar{A}) = 1 - \frac{31}{36} = \frac{5}{36}$.

Примеры решения задач

Пример №1. Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента –разрядники?

Решение: Пусть событие А-3 выбранных наудачу студента– разрядники. Общее число случаев выбора 3 студентов из 30 равно $n = C_{30}^{3}$, так как комбинации из 30 студентов по 3 представляют собой сочетания, они отличаются только составом студентов. Точно также число случаев, благоприятствующих событию А равно $m = C_{10}^{3}$. Итак, $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^{3}}{C_{20}^{3}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} : \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{61}{203} \approx 0{,}03$.

Пример №5**.** Вероятность изготовления на станке – автомате нестандартной детали равна 0,02. Какова вероятность того, что среди наудачу взятых шести деталей окажется:

а) 4 стандартных; б) более 4 стандартных?

Решение: Используем формулу Бернулли.

Здесь $n = 6,\ p = 0{,}02,\ q = 1 - p = 0{,}98.$

а) $p_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^4 0{,}98^4 \cdot 0{,}02^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 0{,}98^4 \cdot 0{,}02^2 = 12 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}0007 = 0{,}0044$

б) Появление более 4 стандартных деталей, означает, что среди взятых шести деталей пять или шесть стандартных, т.е. одна или нуль бракованных. По теореме сложения вероятностей,

$p_6(0 \le m < 1) = p_6(0) + p_6(1) = C_6^0 (0{,}02)^0 \cdot (0{,}98)^6 + C_6^1 (0{,}02)^1 \cdot (0{,}98)^5 \approx 0{,}994$

Вероятность того, что купленный арбуз спелый равна 0,9. Найти вероятность того, что из 7 купленных арбузов ровно 5; не менее 5 спелых.

Решение

Заполните таблицу, подобрав каждому алгоритму конкретное содержание

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму.
1.	Ввести обозначения для заданных величин	n - число испытаний m - число спелых арбузов p - вероятность успешной покупки p = 0,9, q = 1 - p = 0,1,n = 7 Найти $p_7(5)$ и $ð_7(5 \le m \le 7)$
2.	Сосчитать требуемую вероятность	Так как n<10, нужно воспользоваться формулой Бернулли – пункта а) $ð_7(5) = C_7^5 \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}124$ $p_7(5 \le m \le 7) = p_7(5) + p_7(6) + p_7(7) = 0{,}974$

Критерии оценивания:

1. Находит вероятности, применяя формулы комбинаторики, Бином Ньютона;

2. вычисляет вероятность случайных событий, применяя свойства вероятностей. Называет условия для применения схемы Бернулли и формулы Байеса;
3. использует формулу Бернулли и ее следствия при решении задач.

Вопросы для самоконтроля

1. Что означает запись n! ?

2.Что называется перестановкой из n элементов?

3.Что называется размещением изn элементов по m?

4.Что называется сочетанием изn элементов поm?

5. Сформулируйтеклассическоеопределениевероятности.

6. Формула Бернулли?

Тема 32. Случайные величины. Дискретные случайные величины. Понятие непрерывной случайной величины. Закон распределения дискертной случайной величины.

Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Основнымихарактеристиками ДСВ являютсяматематическоеожидание, дисперсия и среднеквадратическоеотклонение.

Характеристикойсреднегозначенияслучайнойвеличиныслужитматематическоеожидание.

Математическиможиданиемдискретнойслучайнойвеличиныназываютсуммупроизведенийвсехееевозможныхзначенийнаихвероятности:

<u>Математическое ожидание дискретной случайной величины.</u>

Случайные величины, виды случайных величин.

Определение: *Случайной* называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

В зависимости от количества значений, которое может принимать случайная величина в промежутке своего изменения,различают 2 вида случайных величин - дискретные и. непрерывные

*Определение.*Случайная величина *называется дискретной (прерывной*), если она в процессе своего изменения может принимать изолированные (чаще всего целые) значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным (число дождливых дней в году, число студентов, сдавших экзамен в сессию и т

Определение. Случайная величина называется *непрерывной*, если она в процессе своего изменения может принимать любые значения в определенном интервале. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно расход воды предприятием за определенный период, 2напряжение электрической сети и т.д. (*Дискретной случайной величиной* называют такую случайную величину, множество возможных значений которой либо конечное, либо бесконечное, но счетное. *Непрерывной случайной величиной* называют такую случайную величину, которая может принять любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала.)

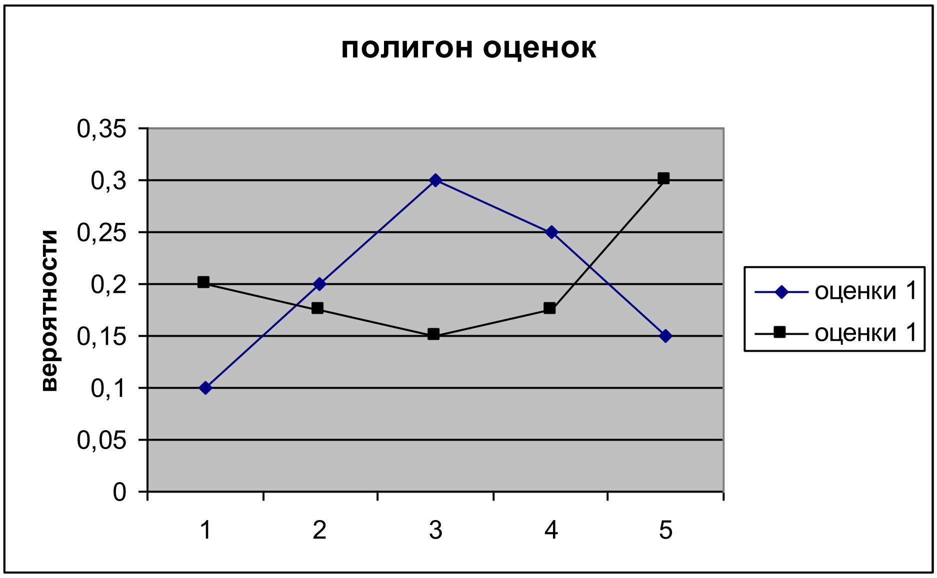
*Пример 1.*Примерами дискретной случайной величины являются: число бракованных изделий в случайно отобранной партии из *n*-изделий; число солнечных дней в году; число учеников, опрошенных на уроке в школе.
Примерами непрерывной случайной величины служат: время безаварийной работы станка; расход горючего на единицу расстояния; количество осадков, выпавших за сутки.
Данное определение непрерывной случайной величины не является не точным
Несмотря на то, что закон распределения дает исчерпывающую информацию о случайной величине, для определения характеристических свойств случайной величины бывает удобно знать так называемые числовые характеристики случайной величины. Эти величины определяют некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины, и степень их разбросанности вокруг этого среднего значения.
Пример: Известны законы распределений случайных величин X и Y – оценок, полученных 1 и 2 студентами по теории вероятности.
X:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0, 1	0,2	0,3	0,25	0,15

Y:

y_i	1	2	3	4	5
p_i	0, 2	0,175	0,15	0,175	0,3

Необходимо выяснить какой из двух студентов учится лучше. Глядя на ряды распределений их оценок на данный вопрос ответить не просто. У первого студента вероятности получения промежуточных значений (2,3,4) достаточно большие. А у второго студента велики вероятности получения крайних оценок (1и5).
Построим полигон распределений оценок.



Из двух студентов лучше тот, кто чей балл в среднем выше. Таким средним значением случайной величины X является ее математическое ожидание.

Определение. ***Математическим ожиданием*** дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad \textbf{(7)}$$

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Если предположить, что каждая материальная точка с абциссой x_i имеет массу p_i ($i=1\ldots.n$), а вся масса системы (которая равна1, т.к. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$) распределена между этими точками, то математическое ожидание представляет абциссу центра масс системы материальных точек.

Пример: вычислить M(X) и M(Y) в задаче о студентах.

Решение: По формуле $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}25 + 5\cdot 0{,}15 =$ 3,15.

$M(Y) = y_1 p_1 + y_2 p_2 + \ldots + y_n p_n = 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}175 + 3\cdot 0{,}15 + 4\cdot 0{,}175 + 5\cdot 0{,}3 =$ 2,65.

Т.е. второй студент учится в среднем хуже первого.

Свойства математического ожидания.

Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.

$$M(C) = C \quad \textbf{(8)}$$

Доказательство: Постоянную величину C можно рассматривать как случайную величину, принимающую свое единственное значение C с вероятностью равной 1. Поэтому
M(C)=C·1=1. ■

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M(Cx) = CM(x) \quad \textbf{(9)}$$

Доказательство: Случайная величина CX принимает свои значения Cx_i с вероятностями p_i($i=1\ldots n$).

Отсюда $M(CX) = \sum_{i=1}^{n} (Cx_i) p_i = C\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = CM(X)$. ■

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий

$$M(XY) = M(X)M(Y) \quad \textbf{(10)}$$

Доказательство: так как величины X и Y независимы, тоp_{ij}=P $P(X = x_i)\cdot P(Y = y_j) = p_i \cdot p_j$. Поэтому $\grave{I}\ (\tilde{O}Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i p_j =$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \sum_{j=1}^{m} y_j p_j = M(X)M(Y). ■$$

Это свойство справедливо для произвольного числа случайных величин.

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$M(X+Y)=M(X)+M(Y)$ **(11)**

Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

Пример: Известно, что M(X)=5, M(Y)=2. Найти математическое ожидание случайной величины Z=6X-2Y+9-XY.

Решение: M(Z)=6M(X)-2M(Y)+9-M(X)M(Y)=30-4+9-10=25.

<u>Дисперсия дискретной случайной величины</u>

Математическое ожидание не может в достаточной мере охарактеризовать случайную величину.

Определение:***Дисперсией (рассеиванием)*** дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$D(X)=M\left[X-M(X)\right]^2$. **(12)**

Механическая интерпретация дисперсии заключается в том, что дисперсия представляет собой момент инерции распределения масс относительно центра масс (математического ожидания). Чем меньше дисперсия, тем меньший разброс имеют значения случайной величины относительно математического ожидания.

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобною Поэтому в качестве показания рассеивания используют также случайную величину $\sqrt{D(X)}$.

Определение: ***Средним квадратическим отклонением (стандартным отклонением или стандартом)*** $\sigma(\tilde{O})$ дискретной случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

$\sigma(\tilde{O})=\sqrt{D(X)}$. **(13)**

Пример:

1.Дан ряд распределения случайной величины X.

x_i	2	4	6	7
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Найти математическое ожидание , дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины случайной величины X.

Решение:

$m_x=M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=2\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}3+6\cdot 0{,}1+7\cdot 0{,}2=4$.

Выпишем возможные значения для квадрата отклонения случайной величины X.

$\left[x_1-M(X)\right]^2=(2-4)^2=4$

$\left[x_2-M(X)\right]^2=(4-4)^2=0$

$\left[x_3-M(X)\right]^2=(6-4)^2=4$

$\left[x_6-M(X)\right]^2=(7-4)^2=9$

Тогда

$\left[\tilde{O} - M(X)\right]^2$	4	0	4	9
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Дисперсия равна $D(X) = 4 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,2 = 3,8$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(\tilde{O}) = \sqrt{3,8} = 1,949$.

Как показывает практика, этот способ вычисления дисперсии не очень удобен, потому что при большом количестве значений случайной величины приводит к очень громоздким вычислениям. Поэтому применяется другой способ вычисления дисперсии.

<u>Вычисление дисперсии</u>

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания.

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$. **(14)**

Доказательство. Так как математическое ожидание M(X) и квадрат математического ожидания $M^2(X)$ – величины постоянные, можно записать:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M\left[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)\right] =$$

$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$ что и требовалось доказать. ■

Пример:

Применим эту формулу для нашего примера:

x_i	2	4	6	7
x_i^2	4	16	36	49
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

$M(X^2) = 4 \cdot 0,4 + 16 \cdot 0,3 + 36 \cdot 0,1 + 49 \cdot 0,2 = 19,8$

$D(X) = 19,8 - [4]^2 = 3,8$.

<u>Свойства дисперсии.</u>

Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$D(C) = 0$. **(15)**

Доказательство: $D(\tilde{N}) = M[\tilde{N} - M(\tilde{N})]^2 = M(\tilde{N} - \tilde{N})^2 = \grave{I}\ (0) = 0.$ ■

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

$D(CX) = C^2 D(X)$. **(16)**

Доказательство:

$D(\tilde{N}\tilde{O}) = M[\tilde{N}\tilde{O} - M(\tilde{N}\tilde{O})]^2 = M(\tilde{N}\tilde{O} - \tilde{N}\grave{I}\ (\tilde{O}))^2 = \tilde{N}^2\grave{I}\ (\tilde{O} - M(X))^2 = C^2 D(X).$ ■

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ **(17)**

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$D(X-Y)=D(X)+D(Y)$ **(18).**

Справедливость этого равенства вытекает из свойства 2

Замечание: обратите внимание, что дисперсия как суммы, так и разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

Пример: Известно, что D(X)=5, D(Y)=2. Найти математическое ожидание случайной величины Z=6X-2Y+9.

Решение: $D(Z)=6^2D(X)-2^2D(Y)+0=180-8=172$. ■

Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение и другие числа, призванные в сжатой форме выразить наиболее существенные черты распределения называются ***числовыми характеристиками случайной величины***. В теории вероятности эти числовые характеристики играют очень большую роль. Часто вероятностные задачи решают, оперируя только числовыми характеристиками, отставляя в стороне законы распределения случайных величин.

Упражнение: дать интерпретацию математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения в анализе меткости стрелка. Если, например, известны распределения X попаданий в 1,2,3,….10 какого то стрелка за определенный промежуток времени.

Задание № 5. Известно, что D(X)=5, D(Y)=2. Найти дисперсию случайной величины Z=6X-2Y+9.

Задание № 6. Дан ряд распределения случайной величины X:

. x_i	10	20	30	40	50
. p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Найдите:

1 математическое ожидание

2 дисперсию

4 среднее квадратическое отклонение

Задание № 4. Законы распределения двух случайных величин X и Y заданные таблицами:

x_i	-1	$-0,5$	0	1	2
p_i	0,4	0,2	0,1	0,1	0,2

y_j	-7	-4	-2	2	3
p_j	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и $M(Y)$.

Критерии оценивания:

1. Объясняет правила сложения и умножения вероятностей; приводит примеры случайных величин; применяет понятие дискретной случайной величиной для решения задач, возникающих в теории и практике.

Вопросы для самоконтроля:

1. Как обозначается математическое ожидание?

2. Как найти дисперсию?

Раздел 7 . Комплексные числа

Тема 33. Мнимые числа. Определение комплексных чисел.

Введение комплексных чисел связано с неразрешимостью в области вещественных чисел операции извлечения корня четной степени из отрицательных чисел.

Рассмотрим простейший случай: $x^2+1=0$ или $x^2=-1$. Число, квадрат которого равен –1, называют мнимой единицей и обозначают буквой i. Тогда $i^2=-1$ и $i=\sqrt{-1}$.

Запомните!!! $\boldsymbol{a+bi}$**- это не сумма, а число!**

Определение. *Комплексными числами* называются числа вида $z=x+iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица, то есть число, квадрат которого равен (−1); x называется действительной или вещественной частью z, а y – мнимой частью (обозначается x = Re z, y = Imz). Числа z с $x=0$, $y\neq 0$ называются чисто мнимыми. Число $z = x - iy$ называется комплексно сопряженным к числу $z = x + iy$.

Определение. Каждому комплексному числу $z=x+iy$ ставится в соответствие точка (x; y) на координатной плоскости Оxy и вектор с теми же координатами. Длина вектора $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называется модулем числа $z\left(r=|z|\right)$. Угол φ, отложенный на плоскости Оxy против часовой стрелки от оси Оx до вектора (x; y), называется аргументом числа z (r = arg z). Обычно считается, что функция arg z принимает значения от − π до π.

Если |z| = r, argz = φ, то комплексное число z может быть записано в виде z = r(cos φ +i sin φ). Такая запись называется тригонометрической формой числа z. Представление $z = x + iy$ называется алгебраической формой числа z.

3. Докажите равенства:

а) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$; б) $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}z$; в) $\bar{z}\cdot z=|z|^2$

4. Дайте геометрическую интерпретацию следующих неравенств:

а) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$; б) $|z_1-z_2|\le\big||z_1|-|z_2|\big|$; в) $|z-1|\le|\arg z|$, если |z| = 1.

Критерии оценивания:

1. Раскрывает понятие комплексное число и его модуль; изображает комплексное число на комплексной плоскости

Тема 44. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Алгебраическая форма записи комплексного числа:

$$a+bi или x+y$$

Действия над числами вида $\boldsymbol{z = a + bi}$:

1) **Сложение комплексных чисел:**

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$$

2) Умножение двух комплексных чисел:

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2-b_1b_2+i(b_1+b_2)$$

3) Деление комплексных чисел:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

4) **Умножение комплексного числа на действительное:**

$$\lambda(a+bi)=\lambda a+\lambda bi$$

Домашнее задание.

Повторить изученное на уроке.

Вычислите:

1. $z_1 z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 10 + \mathrm{i}$, $z_2 = 5 - 2\mathrm{i}$;
2. $\dfrac{5 - \mathrm{i}}{(1 - \mathrm{i})(2 + 3\mathrm{i})}$;
3. $(1 + \mathrm{i})^3 - (1 - \mathrm{i})^3$;
4. $(2 - \mathrm{i})^2 + (1 + \mathrm{i})^4 - \dfrac{7 - \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}$;
5. $\dfrac{\sqrt{1+a} + \mathrm{i}\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \mathrm{i}\sqrt{1-a}} - \dfrac{\sqrt{1-a} + \mathrm{i}\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a} - \mathrm{i}\sqrt{1+a}}$;
6. $(2 + \mathrm{i})^6$;
7. $(\sqrt{3}\mathrm{i} + 1)^4 (1 + \mathrm{i})^5$;
8. $(1 - \sqrt{3}\mathrm{i})^5 : (1 - \mathrm{i})^6$;
9. $\left(\dfrac{(3 + 2\mathrm{i})(2 - \mathrm{i})}{(2 + 3\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}\right)^2$;
10. $\left(\dfrac{1 + 3\mathrm{i}}{\mathrm{i} + 2}\right)^2 + \left(\dfrac{4\mathrm{i} - 1}{3\mathrm{i} + 1}\right)^2$.

Критерии оценивания:

1. Выполняет арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Раздел 8. Предел функции и непрерывность
Тема 39: Предел функции в точке и на бесконечности. Предел числовой последовательности.

Последовательность же есть не что иное, как функция, определенная на множестве натуральных чисел. Но интересующие нас функции будут существенно отличаться от последовательностей: они определены на промежутках, а не на множестве натуральных чисел. Это и определяет специфику понятия *предела функции*.
Заметьте, например, что всякая конкретная сходящаяся последовательность имеет только один предел, так что фраза "предел данной последовательности" является исчерпывающей. Что же касается функции, определенной на промежутке, то с ней можно сопоставить бесконечно много "пределов", поскольку предел функции рассматривается *всякий* раз в некоторой точке $x = a$ (или, как принято говорить, при x стремящемся к a). Таким образом, надо рассматривать предел данной функции в данной точке a. При этом упомянутая точка a либо должна принадлежать области определения функции, либо должна совпадать с одним из концов этой области.
Перейдем к определению предела функции. Прежде всего, отметим, что рассматривается некоторая функция $y = f(x)$, определенная на некотором промежутке, и точка a, взятая из этого промежутка (или совпадающая с одним из его концов). А теперь само определение предела функции.
Определение: Если число а, к которому стремится аргумент х, входит в область определения функций, то значение функции в этой точке есть и предельное значение функции, т.е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Если функция является элементарной и если предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Пример:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1) = 2\cdot 0+1=1$

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} 4tgx = 4tg\frac{\pi}{4} = 1$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x+1} = \frac{0}{5} = 0$

Если аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители, по формуле:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни трехчлена, которые находим по формуле: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)(x-\frac{1}{2})}{3(x-5)(x+\frac{1}{3})}=\lim_{x\to 5}\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{9}{16}$$

Рассмотрим раскрытие неопределенности каждого вида в отдельности.

2) Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Делим числитель и знаменатель дроби на x^2 (наивысшая здесь степень x):

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}}=\dfrac{3-0}{5+0}=\dfrac{3}{5}$ при $x\to\infty$ величины $\dfrac{1}{x^2}$ и $\dfrac{1}{x}$ являются бесконечно малыми

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-1}{x^2+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Решим тем же способом, что и предыдущий пример:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(6x-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{6\cdot\infty-0}{1+0}=\infty$$

в)

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^5+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^5+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2-\frac{1}{x})}{x^2(x^3+\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{x^3+\frac{1}{x^2}}=\frac{2-0}{\infty+0}=0$$

Вычисление некоторых пределов последовательностей

Задание 1

Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+1}{x+1}$

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму

1	Вычислить значение функции, подставив предельное значение	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{4\cdot 2+1}{2+1}=\frac{9}{3}=3$

Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2+4x-1)$

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-1}{6}$

Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+7}{2}$

Вычислить $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{1}{x}$

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+5}{2x+3x^2}$

2.1 Вычислить $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2-4x+1}{x^2+5}$

2.2 Вычислить $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{7x-2x^4}{4x^4+3x^2+1}$

2.3 Вычислить $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x-3x^2}{5x^3+9}$

2.4 Вычислить $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{4x^2-1}{x+2}$

2.5 Вычислить $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{4x^5-3x+2}{3+2x^2+5x^5}$

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+7x+12}$

Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$

Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+6x+8}$

Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-8x+15}$.

Вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x+5}{3x-6}$.

Вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2+x-20}{x^2-16}$.

Вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x+6}{2x-4}$.

Вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x \to 7} \frac{x^2-49}{x^2-5x-14}$.

Вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2+4}{2x-6}$.

Вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-12x+35}{x^2-25}$.

Вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-1}{2x-10}$.

Вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x \to 6} \frac{x^2-3x-18}{x^2-36}$.

Вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x \to 4} \frac{2x-3}{3x-12}$.

Вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x \to 9} \frac{x^2-81}{x^2-11x+18}$.

Вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x \to 6} \frac{3x-5}{2x-12}$.

Для самостоятельной работы задания

Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^4-x^3+1}{2x^4+x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3+2x}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-4}{x^3+2x}$.

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2+x}{x^2-2x}$.

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 8} \frac{x^2-10x+16}{x-8}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. **Что такое параметр? (постоянная величина, которое сохраняет постоянное, вполне определенное числовое значение лишь в условиях данной задачи)**

2. **Переменная величина? (величина, принимающая различные числовые значения)**

Критерии оценивания:

1. Вычисляет предел функции в точке, на бесконечности;
2. применяет свойства непрерывности функции.

Раздел 9. Производная
Тема 21. . Определение производной

Ребята! Мы с вами начали изучение большой и важной темы “Производная”. Запишите тему урока: “Определение производной”.
Определение производной. Правила вычисления производных
<u>Определение:</u> Производной функции y = f(x) в данной точке x_0называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.
Обозначение производной: $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$.
Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями. На практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.
Если C - постоянное число и $u = u(x)$, $v = v(x)$ некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:
Имеют место также следующие правила дифференцирования;

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
$\left(\sqrt{x} + \sin x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x$
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, $(x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2(\sin x)' = 2x \cdot sin\, x + x^2 \cos x$
в частности, $(C \cdot u)' = C \cdot u'$ $(3\cos x)' = 3(\cos x)' = -3\sin x$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$
$$\left(\frac{x^3}{\cos x}\right)' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3(\cos x)'}{cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{cos^2 x}$$
Таблица производных
Таблица получена, исходя из определения производной и правил дифференцирования.

Итак,
$$C' = 0$$
$$x' = 1$$
$$(x^2)' = 2x$$
$$(kx + m)' = k$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

$$\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a \ \left(a>0, a\neq 1\right) \Rightarrow \left(e^{x}\right)' = e^{x}.$$

$$\left(\log_a x\right)' = \log_a e \cdot \frac{1}{x} \ \left(a>0, a\neq 1\right) \Rightarrow \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}.$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x.$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x.$$

$$\left(\mathrm{tg}x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\left(\mathrm{ctg}x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\left(\mathrm{arctg}x\right)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\left(\mathrm{arcctg}x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Таким образом, с помощью определения производной, можно найти производную любой функции.
Запишем найденные производные в таблицу и в дальнейшем будем ей пользоваться.

Примеры.

$(\sin x)' = \cos x$ $(5^x)' = 5^x \ln 5$ $(x^8)' = 8x^7$	$(6\sin x)' = 6(\sin x)' = 6\cos x$ $(3 \cdot 5^x)' = 3(5^x)' = 5^x 3\ln 5$ $(3x^8)' = 3(x^8)' = 3 \cdot 8x^7 = 24x^7$

<u>1. Устное решение упражнений.</u>
Таблица с заданиями выводится на экран.
Задание: устно вычислить производную функции:

	1	2

1	$y=x^5$	$y=9x^3$
2	$y=2x^{-6}$	$y=\sqrt{x}$
3	$y=x^{-1}$	$y=\sqrt[3]{x}$
4	$y=2x^3+5$	$y=\sin x$
5	$y=\cos x$	$y=tgx$
6	$y=ctgx$	$y=2\sin x+5x$
7	$y=\sqrt{x}-tgx$	$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}ctgx$
8	$y=\sin x\cdot\cos x$	$y=\frac{\cos x}{x}$

Ответы: 1.1.) $5x^4$; 1.2.) $27x^2$; 2.1.) $-12x^{-7}$; 2.2.) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

3.1.) $-\frac{1}{x^2}$; 3.2.) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; 4.1.) $6x^2$; 4.2.) cosx;

5.1.) $-\sin$ x; 5.2.) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 6.1.) $-\frac{1}{\sin^2 x}$; 6.2.) 2cosx+5;

7.1.) $\frac{1}{2\sqrt{\text{x}}}-\frac{1}{\cos^2 x}$; 7.2.) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}$; 8.1.) cosxcosx – sinxsinx;8.2.) $\frac{-\text{sinx}\cdot\text{x - cosx}}{x^2}$;

Вычислите производную функции в точке.

А	$y=5x^4+\sqrt{2}$	$x=1$
В	$y=x^2-x$	$x=0.5$
Т	$y=\cos x$	$x=\frac{\pi}{4}$
Н	$y=2x^3(x^6-1)$	$x=1$
Е	$y=\sqrt[3]{x}$	$x=3\sqrt{3}$
С	$y=\frac{1+\cos x}{\sin x}$	$x=\frac{\pi}{2}$

Пример 1. Найти производную функции y = $9x^5$

Решение: y' = $(9x^5)'$ = $5*9x^{5-1}$ = $45x^4$

Пример 2. Найти производную функции y = x^3 + 6x

Решение: y' = $(x^3 + 6x)'$ = $(x^3)'$ + (6x)' = $3x^2$ + 6

Пример 3. Найти производную функции y = $5x^2$ – x + 4

Решение: y' = $(5x^2 – x + 4)'$ = $(5x^2)'$ - (x)' + 4' = 10x - 1

Пример 4. Найти производную функции y = $3x^{-2}$

Решение: y' = $(3x^{-2})'$ = $-6x^{-2-1}$ = $-6x^{-3}$

Пример 5. Найти производную функции y = $4x^{-3}$

Решение: $y' = (4x^{-3})' = -12x^{-3-1} = -12x^{-4}$
Пример 6. Найти производную функции $y = 2x^{1/3}$
Решение: $y' = (2x^{1/3})' = 2/3x^{1/3-1} = 2/3\,x^{-2/3}$
Пример 7. Найти производную функции $y = 2x^{1/4}$
Решение: $y' = (2x^{1/4})' = 2/4x^{1/4-1} = 1/2\,x^{-3/4}$
Пример 8. Найти производную функции $y = 3x^{-2/3}$
Решение: $y' = (3x^{-2/3})' = -2x^{-2/3-1} = -2\,x^{-5/3}$
Пример 9. Найти производную функции $y = 5x^{-3/5}$
Решение: $y' = (5x^{-3/5})' = -3x^{-3/5-1} = -3x^{-8/5}$
Пример 10. Найти производную функции $y = 5x^{-3/5}$
Решение: $y' = (5x^{-3/5})' = -3x^{-3/5-1} = -3x^{-8/5}$

Вопросы для самоконтроля:

1. **Назовите определение производной?**
2. **Как вычислить производную функции?**
3. **Как обозначается производная функции?**

Тема 22. Производная суммы, произведения и частного двух функций

Выведем несколько правил вычисления производных.

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями. На практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

Если C - постоянное число и $u = u(x)$, $v = v(x)$ некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1. $(C)' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, в частности, $(C \cdot u)' = C \cdot u'$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, в частности, $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{C \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$

1. Найдите производную функции $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 2x$
2. Найдите производную функции $h(x) = \dfrac{3x+4}{x-3}$ в точке x=4
3. Решите уравнение f’(x)=0, если $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

1. C	2. $\sqrt{x}$	3. x	4. $-\frac{1}{\sin^2 x}$	5. $12\sin x$	6. $\frac{12}{\cos^2 x}$
7. $3x^5$	8. $4\sin x$	9. $17x^5$	10. $\sin x$	11. $4\cos x$	12. $85x^4$
13. x^n	14. $tg\, x$	15. $6\sqrt{x}$	16. $\cos x$	17. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	18. $12\cos x$
19. 1	20. $\frac{3}{\sqrt{x}}$	21. $\frac{1}{x}$	22. nx^{n-1}	23. $2x$	24. $-\sin x$
25. $8ctg\, x$	26. $-\frac{8}{\sin^2 x}$	27. 0	28. $\frac{1}{\cos^2 x}$	29. $12\, tg\, x$	30. $\frac{3}{x}$
31. $\cos x$	32. $-\frac{3}{x^2}$	33. $ctgx$	34. 2	35. $15x^4$	36. $-\frac{1}{x^2}$

Вариант I.

Часть А.

К каждому *заданию А* дано несколько ответов, из которых один верный. Решите задание, сравните полученный ответ с предложенным. Выберите правильный ответ.

A_1. Производной функции $y=4x^7$ является

1) $7x^6$ 2) $28x^6$ 3) $8x^6$ 4) $27x^6$

A_2. Производной функции $y=x^4-2x-\frac{1}{x}$

1). $4x^3-2-\frac{1}{x^2}$ 2) $4x-2+\frac{1}{x^2}$ 3). $4x^3-2+\frac{1}{x^2}$ 4). $4x^2-2$

A_3.Производной $y=\frac{1}{2x^4}$ является

1) $-\frac{2}{x^5}$ 2) $\frac{2}{x^5}$ 3) $\frac{2}{x^3}$ 4) $\frac{2}{x^4}$

A_4. Производной функции $y=x^3+4x^2-\frac{1}{x^2}$ является

1) $3x^2+8x+\frac{2}{x^3}$ 2) $x^2+8x-\frac{2}{x^3}$ 3) $3x+2x-\frac{2}{x^3}$ 4) x^3+8x-x^2

A_5 Производной функции $y=\frac{x^5-2x^2-1}{x}$ является

1) $\frac{4x^5-2x^2+1}{x^2}$ 2) $\frac{2x^5-2x^2+1}{x}$ 3) $\frac{5x\ -2x^2+1}{x^2}$ 4) $\frac{5x\ -4x^2-1}{x}$

Часть В.

Найдите производную функции (решение запишите в тетрадях):

1) $y = x^2 - 3x^4 + \frac{1}{x} - \sqrt{x}$

2) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

Вариант 2.

Часть А.

К каждому *заданию А* дано несколько ответов, из которых один верный. Решите задание, сравните полученный ответ с предложенным. Выберите правильный ответ.

A_1 Производной функции $y=5x^6$ является

1) 5x 2) 30 x^6 3) 30 x^5 4) $6x^5$

A_2 Производной $y = x^2 - 3x - \frac{1}{x^2}$ является

1) $2x + 3 + \frac{2}{x^3}$ 2) $x^2 - 3 - \frac{2}{x^3}$ 3) $x - 3 - \frac{1}{x^2}$ 4) $2x - 3 + \frac{2}{x^3}$

A_3Производной $y = \frac{1}{3x^5}$ является

1) $\frac{5}{3x^6}$ 2) $-\frac{5}{3x^6}$ 3) $-\frac{5}{3x^4}$ 4) $\frac{3}{x^6}$

A_4 Производной функции $y = 2x^3 + x^2 - \frac{1}{x}$ является

1) $6x^2 + x + \frac{1}{x^2}$ 2) $3x^2 + 2x - \frac{1}{x^2}$ 3) $6x^2 + 2x + \frac{1}{x^2}$ 4) $6x^2 + 2x - \frac{1}{x^2}$

A_5 Производной функции $y = \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x}$ является

1) $\frac{2x^3 - 5x^2 - 1}{x^2}$ 2) $\frac{2x^3 - 15x^2 + 1}{x^2}$ 3) $\frac{2x^3 + 5x^2 - 1}{x^2}$ 4) $\frac{2x^3 - 15x^2 + 1}{x}$

Часть В.

Найдите производную функции (решение запишите в тетрадях):

1) $y = x^3 - 4x^5 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$

2) $y = \frac{x^3 - 2x}{x}$

Вопросы для самоконтроля:

1. **Назовите определение производной?**
2. **Как вычислить производную функции?**
3. **Как обозначается производная функции?**

Тема 23. Производная сложной функции

На данном уроке мы научимся находить **производную сложной функции**. Урок является логическим продолжением занятия **Как найти производную?**, на котором мы разобрали простейшие производные, а также познакомились с правилами дифференцирования и некоторыми техническими приемами нахождения производных.

Правило дифференцирования сложной функции:

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

Разбираемся. Прежде всего, обратим внимание на запись $u(v)$. Здесь у нас две функции – u и v, причем функция v, образно говоря, вложена в функцию u. Функция такого вида (когда одна функция вложена в другую) и называется сложной функцией.

Функцию u я буду называть **внешней функцией**, а функцию v **– внутренней (или вложенной) функцией**.

Пример 1

Найти производную функции $y = \sin(3x-5)$

$$y = \sin\underbrace{(3x-5)}_{v}$$

Во вторую очередь нужно будет найти $\sin(-2)$, поэтому синус – будет внешней функцией:

$$y = \underbrace{\boxed{\sin\underbrace{(3x-5)}_{v}}}_{u(v)}$$

После того, как мы **РАЗОБРАЛИСЬ** с внутренней и внешней функциями самое время применить правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.

Результат применения формулы $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ в чистовом оформлении выглядит так:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)'$$

Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0)$$

Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0) =$$
$$= 3\cos(3x-5)$$

Готово

Пример 2

Найти производную функции $y = \cos 2x$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

Пример 3

Найти производную функции $y=(2x+1)^5$

Как всегда записываем:

$y'=((2x+1)^5)'$

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения $(2x+1)^5$ при $x=1$. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: $2\cdot 1+1=3$, значит, многочлен $(2x+1)$ – и есть внутренняя функция:

$$y=(\underbrace{2x+1}_{v})^5$$

И, только потом выполняется возведение в степень 3^5, следовательно, степенная функция – это внешняя функция:

$$y=\underbrace{\boxed{(\underbrace{2x+1}_{v})^5}}_{u(v)}$$

Согласно формуле $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: $(x^n)'=nx^{n-1}$. Повторяем еще раз: **любая табличная формула справедлива не только для «икс», но и для сложного выражения**. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$ следующий:

$y'=((2x+1)^5)'=5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)'$

Снова подчеркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции $u'(v)$, внутренняя функция v у нас не меняется:

$$5\cdot(\underbrace{2x+1}_{\text{не меняется}})^4$$

Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

$y'=((2x+1)^5)'=5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)'=$

$=5\cdot(2x+1)^4\cdot(2+0)=10\cdot(2x+1)^4$

Готово.

<u>Пример 4</u>

Найти производную функции $y=\dfrac{1}{(x^2-1)^7}$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

Для закрепления понимания производной сложной функции приведу пример без комментариев, попробуйте самостоятельно разобраться, порассуждать, где внешняя и где внутренняя функция, почему задания решены именно так?

Правило:

Чтобы найти производную сложной функции, надо ее правильно прочитать;
Чтобы правильно прочитать функцию, надо определить в ней порядок действий;
Функцию читаем в обратном порядку действий направлении;
Производную находим по ходу чтения функции.
А теперь разберем это на примере
Пример2: Найти производную функции $y = (x^3 - 5x + 7)^9$.
Решение: Обозначив в «уме» $u = x^3 - 5x + 7$, получим $y = u^9$. Найдем:
$y'_u = (u^9)_u' = 9u^8 = 9(x^3 - 5x + 7)^8$
и $u'_x = (x^3 - 5x + 7)'_x = 3x^2 - 5$
По формуле имеем $y'_x = y'_u \cdot u'_x = 9(x^3 - 5x + 7)^8 (3x^2 - 5)$.

1) $y = (x+9)^4$;
2) $y = \sin(7x-2)$;
3) $y = tg 3x$;

Вариант 1

Производная функции $y = 3 - \frac{4}{x^3}$ равна

а) $3 + \frac{12}{x^4}$; *б)* $\frac{4}{3x^2}$; *в)* $\frac{12}{x^4}$.

Вычислить производную для функции $y = tg\,(x^2)$:

а) $\frac{2x}{\cos^2 x^2}$; *б)* $\frac{1}{\cos^2 x^2} + 2x$; *в)* $\frac{1}{\cos^2\left(x^2\right)}$.

Вариант 2

Производная функции $y = \frac{2}{x^5} + 7$ равна:

а) $-\frac{12}{5x^6}$; *б)* $-\frac{10}{x^6}$; *в)* $\frac{2}{5x^4}$.

Вычислить производную для функции $y = -2\cos^2 x$:

а) $-2\sin^2 x$; *б)* $-4\cos x$; *в)* $2\sin 2x$.

Вариант 3

Производная функции $y = 6x - \frac{3}{x^4}$ равна:

а) $6 + \frac{12}{x^4}$; *б)* $6 - \frac{3}{4x^3}$; *в)* $6 + \frac{12}{x^5}$.

Вариант 4

Производная функции $y = 1 + 4x - \frac{1}{x^6}$ равна:

а) $4 + \frac{6}{x^7}$; *б)* $4 - \frac{6}{6x^5}$; *в)* $4 - \frac{6}{x^7}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. **Что такое производная?**
2. **Формулы для вычисления производных?**
3. **Как вычислить производную сложной функции?**

Тема 24. Производная тригонометрических функций, обратных тригонометрических функций.

К основным тригонометрическим функциям относятся следующие 6 функций:
синус (sinx),
косинус (cosx),
тангенс (tgx),
котангенс (ctgx),

Таблица производных тригонометрических функций

$$(\sin\ x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin\ x$$

$$(tgx)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (ctgx)' = -\cos ec^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\sec x)' = tgx \sec x \qquad (\cos ecx)' = -ctgx \cos ecx$$

4) (3sin4x)′ = 11) (7cos6x)′ =
5) (-5cos3x)′ =12) (4sin5x)′ =

Найдите производную функции y=cos2x−2sinx.
Найдите производную функции y=tgx+13tg3x.
Найдите производную функции y=cos2·sinx.
Найдите производную функции y=sin2x.
Найдите производную функции y=sin3x+cos3x.
Найдите производную функции y=cos(5−7x).
Найти производную функции.
а) $f(x)\ = sin5x + cos3x$;
б) $f(x) =\ tgx + ctg\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.Найти $f'(\frac{\pi}{3})$
в)$f(x) =\ tg\frac{x}{2} - ctg\frac{x}{2}$. Найти $f'(\ \pi)$

Тестовые задания
1 вариант.
Найдите производную функции $y=4\,sinx$
$4\,sinx$ b) -4cosx c) 4cosx d) -4sinx
Найдите производную функции $y=2\,cosx$
2sinxb) -2sinxc) 2cosxd) -2cosx
Найдите производную функции $y=\sin(4x-1)$
a)-4sin(4x-1) b) cos(4x-1) c) –cos(4x-1) d) -4cos(4x-1)

Найдите производную функции $y = ctgx$ и вычислите $y'(\frac{-\pi}{3})$

a)-3 b) -1 $\frac{1}{3}$ c) 3 d) 16

5. Найдите производную функции $y = 4tg3x$

a) - $\frac{4}{\sin^3 3x}$ b) $\frac{12}{\cos^2 3x}$ c) $\frac{4}{\cos^2 4x}$ d) $\frac{-12}{\sin^2 3x}$

6. Найдите производную функции $y = sinx + 0.5\sin 2x$

a) cosx+cos2x b) cosx+0.5cos2x c) 2cosx d) 1.5cosx

7. Найдите производную функции $y = sinxcosx$

a) $\cos^2 x + \sin^2 x$ b) cos2x c) $\sin^2 x - ¿$ $\cos^2 x$ d) 2cosx

8. Найдите производную функции $y = 2\cos^2 x + 2\sin^2 x$

a) 4sin2x b) 1 c) 0 d) $\cos^2 x - \sin^2 x$

9. Найдите производную функции $y = 2cosx - tgx$

a) $2sinx - \frac{1}{\cos^2 x}$ b) $-2sinx + ¿$ c) $-2sinx - \frac{1}{\cos^2 x}$ d) $2sinx + \frac{1}{\cos^2 x}$

10. Найдите производную функции $y = \sin\frac{x}{3} - ctg2x$

a) $\frac{+1}{\sin^2 x}$ b) $\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} + \frac{2}{\sin^2 x}$ c) $3\cos\frac{x}{3} - 2\frac{1}{\sin^2 2x}$ d) $\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} + \frac{2}{\sin^2 x}$

11. Найдите производную функции и вычислите её значение при $x = -1$

$f(x) = \frac{x^3}{6}$ – $0{,}5x^2 - 3x + 2$

а) -2,5 б) 1,5 в) -1,5 г) 2,5

12. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = x\sqrt{x}$

а) $\frac{3}{2\sqrt{x}}$ б) $\frac{2\sqrt{x}}{3}$ в) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$ г) $1{,}5\sqrt{x}$

Часть 2.

1. Найдите производную функции $g(x) = \frac{3+2x}{x-5}$
2. Найдите значение $f'(0{,}5)$, если $f(x) = \frac{3}{5-4x}$

Часть 3.

Решите уравнение $g'(x) = 0$, если $g(x) = sinx + 0{,}5sin2x$

II-вариант.

Найдите производную функции $y = 10\,sinx$

10sinx b) 10cosx c) -10sinx d)-10cosx

Найдите производную функции $y = 5\cos x$

5sinxb) -5cosxc) 5cosxd) -5sinx

Найдите производную функции $y = \sin(9x-2)$

cos(9x-2) b) –cos(9x-2) c) -9sin(x-2) d) -9cos(9x-2)

Найдите производную функции $y=6\text{tg}x$ и вычислите $y'(\frac{-\pi}{6})$
-8 b) 24 c) -24 d) 8
Найдите производную функции $y=3\text{ctg}4x$
$\frac{-3}{\cos^2 4x}$ b) $\frac{3}{\sin^2 4x}$ c) $\frac{-12}{\sin^2 4x}$ d) $\frac{12}{\cos^2 4x}$
Найдите производную функции $y=\cos x^2$
$\sin x^2$ b) $-2x\sin x^2$ c) $-2x\cos x^2$ d) $2x\sin x^2$

7. Найдите производную функции $y=2\cos^2 x+2\sin^2 x$
a) 4sin2x b) 1 c) 0 d) $\cos^2 x-\sin^2 x$
8. Найдите производную функции $y=4\,tg\,3x$
a) - $\frac{4}{\sin^3 3x}$ b) $\frac{12}{\cos^2 3x}$ c) $\frac{4}{\cos^2 4x}$ d) $\frac{-12}{\sin^2 3x}$
9. Найдите производную функции $y=3\cos x+9\text{tg}x$
a) $3\sin x-\frac{3}{\sin^2 x}$ b) $-3\sin x-\frac{3}{\sin^2 x}$ c) $-3\sin x-\frac{3}{\cos^2 x}$ d) $-3\sin x+\frac{3}{\cos^2 x}$
10. . Найдите производную функции $y=\sin\frac{x}{2}-ctg3x$
a) $\cos\frac{x}{2}+\frac{3}{\cos^2 3x}$ b) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{3}{\sin^2 3x}$ c) $\frac{-1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{3}{\sin^2 3x}$ d) $\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{3}{\sin^2 3x}$
11. Найдите производную функции и вычислите её значение при $x=-2$
$f(x)=-\frac{x^3}{6}+1,5x^2+5x-3$
а) -3 б) -5 в) 2 г) 3
12. Найдите $f'(x)$,если $f(x) = -x\sqrt{x}$
а) $-\frac{2}{3\sqrt{x}}$ б) $-\frac{2\sqrt{x}}{3}$ в) $-1{,}5\sqrt{x}$ г) $-\frac{3}{2\sqrt{x}}$
Часть 2.
1. Найдите производную функции $g(x)=\frac{4-3x}{x+2}$
2. Найдите значение $f'(-0{,}5)$, если $f(x) = \frac{4}{3+2x}$

Вопросы для самоконтроля:

1. **Что такое производная?**
2. **Формулы для вычисления производных?**

Тема 25 Вторая производная и ее физический смысл

Алгоритм
Найти область определения функции;

Определить четность и нечетность, периодичность функции;
Найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат;
Найти промежутки знакопостоянства функции;
Найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы;
Занести все полученные данные в таблицу;
Построить график функции.

Пример 1: Найти промежутки возрастания и убывания функции: $f(x) = 7+6x^2-x^3$.
Ученик объясняет ход выполнения данного задания:

1).найти производную функции: $f'(x)= 0 + 12x - 3x^2$;

2).приравнять ее к нулю и найти критические точки: $12x- 3x^2=0$ $3x (4-x)=0$
$3x=0$ или $4-x=0$, $x=0$ или $x=4$, 0 и 4 критические точки.

3).построим координатную прямую и на ней отметим интервалы:

4).по отмеченным интервалам запишем: функция возрастает на интервале: (0;4), и убывает на: $(-\infty; 0)$ и $(4; +\infty)$.

Пример 2: на нахождение точек экстремума функции:
$y = -x^2 + 2x +2$.

1).найдем производную функции: $f'(x)= -2x + 2$;

2).приравняем ее к нулю: $-2x=-2$ и найдем критические точки: $-2=-2$
$x= 2: 2$ $x=1$.

3).на координатной прямой отметим полученную точку, найдем промежутки возрастания и убывания, т. к. знак меняется с «+» на «–» то, имеем maxx= 1.

Пример 3: к доске, ему дается задание: найти наименьшее и наибольшее значение функции: $f(x)= x^3-6x^2-15x+8$ в промежутке [-2;2].

1).найдем производную функции: $f'(x)= 3x^2-12x-15$.

2).приравняем к 0 и найдем критические точки: $3x^2-12x-15=0$
$x^2-4x-5=0$ Д$= (-4)^2-4\cdot 1\cdot (-5)=16+20= 36$, Д$>0$. $x= 4+\sqrt{36}/2$, $x= 4-\sqrt{36}/2$,
$x = 5$ и $x =-1$. Точки 5 и -1 критические точки.

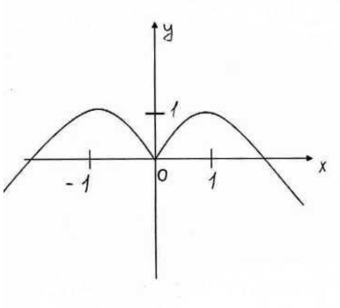
3).выберем из точек 5 и -1 точки принадлежащие промежутку [-2; 2].
$5 \in [-2; 2]$, $-1 \notin [-2; 2]$.

4).найдем значения функции в точках: f(-2), f(-1), f(2):
$f(-2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 - 15\cdot (-2) + 8 = 6$
$f(-1) = (-1)^3 - 6\cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-1) +8 = 16$
$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 15 \cdot 2 + 8 = 26$.

5). выберем наибольшее и наименьшее значение функции в данных точках:
$\max f(x) = f(2) = 16$, $f(x) = f(-2) = 6$.

5). заполним таблицу и построим график функции.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	(0 ; 1)	1	$(1; +\infty)$
f(x)	↑	max	↓	min	↑	max	↓
f′(x)	+	0	–	0	+	0	–



Вопросы для самоконтороля:

Тема 26. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции.

На основании достаточных условий (признаков) возрастания и убывания функции находятся промежутки возрастания и убывания функции.
Вот формулировки признаков возрастания и убывания функции на интервале:
если производная функции *y=f(x)* положительна для любого *x* из интервала *X*, то функция возрастает на *X*;
если производная функции *y=f(x)* отрицательна для любого *x* из интервала *X*, то функция убывает на *X*.
Таким образом, чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции необходимо:
найти область определения функции;
найти производную функции;
решить неравенства $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$ на области определения;
к полученным промежуткам добавить граничные точки, в которых функция определена и непрерывна.
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА (Производная)
1) Найти производные функций

а) $f(x) = 5x^3 – 3x^9$	а) $f(x) = 2x^7 + 3x^3$
в) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x}$	в) $f(x) = \dfrac{1-2x+3x^2}{x}$
г) $f(x) = 1/6\ x^3 – 0,5x^2 – 3x + 2$	г) $f(x) = – 1/6\ x^3 +1,5x^2 +5x – 3$
е) $f(x) = \dfrac{4-3x}{x+2}$	е) $f(x) = \dfrac{3+2x}{x-5}$
м) $f(x) = \cos(5 – 3x)$	м) $f(x) = \sin(3 – 2x)$
н) $f(x) = ctg(2 – 5x)$	н) $f(x) = tg(4 – 3x)$

Вопросы для самоконтроля:

1. **Что такое производная?**
2. **Формулы для вычисления производных?**

Тема 27. Экстремумы функции. Исследование функции на экстремум

Достаточные условия экстремума функции.

Для нахождения максимумов и минимумов функции можно пользоваться любым из трех признаков экстремума, конечно, если функция удовлетворяет их условиям. Самым распространенным и удобным является первый из них.
Первое достаточное условие экстремума.
Пусть функция *y=f(x)* дифференцируема в ε-окрестности точки x_0, а в самой точке x_0 непрерывна.
Тогда
если $f'(x)>0$ при $x\in(x_0-\varepsilon;x_0)$ и $f'(x)<0$ при $x\in(x_0;x_0+\varepsilon)$, то x_0 - точка максимума;
если $f'(x)<0$ при $x\in(x_0-\varepsilon;x_0)$ и $f'(x)>0$ при $x\in(x_0;x_0+\varepsilon)$, то x_0 - точка минимума.
Другими словами:
если в точке x_0 функция непрерывна и в ней производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 - точка максимума;
если в точке x_0 функция непрерывна и в ней производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.
Алгоритм нахождения точек экстремума по первому признаку экстремума функции.
Находим область определения функции.
Находим производную функции на области определения.
Определяем нули числителя, нули знаменателя производной и точки области определения, в которых производная не существует (все перечисленные точки называют *точками возможного экстремума*, проходя через эти точки, производная как раз может изменять свой знак).
Эти точки разбивают область определения функции на промежутки, в которых производная сохраняет знак. Определяем знаки производной на каждом из интервалов (например, вычисляя значение производной функции в любой точке отдельно взятого интервала).
Выбираем точки, в которых функция непрерывна и, проходя через которые, производная меняет знак - они и являются точками экстремума.

Записать правило исследования функции y=f(x) на экстремум:

а)найти область определения функции;
б)найти производную f '(x);
в)найти точки, в которых выполняется равенство f '(x) =0;
г)найти точки, в которых f '(x) не существует;
д)отметить на координатной прямой все критические точки и область определения функции y=f(x); получатся промежутки области определения функции, на каждом из которых производная функции y= f(x) сохраняет постоянный знак;
е)определить знак y' на каждом из промежутков, полученных в п. (д);
ж)сделать выводы о наличии или отсутствии экстремума в каждой из

критических точек в соответствии с достаточным условием экстремума.

5. Исследовать на экстремум функцию y= 2x3 -15x2+36x+1

Решение:

а) D(y) =R;

б) y'= 6x2-30x+36;

в)из уравнения 6x2-30x+36=0 находим x1=2, x2=3;

г) y' существует при всех x;

д)отметим точки x1=2, x2=3 на координатной прямой:

е)y' = 6(x-2)(x-3). Знаки производной на полученных промежутках отмечены на рисунке;

ж)при переходе через точку x=2 слева направо производная y' меняет знак с «+» на «-», значит x=2- точка максимума; при переходе через точку x=3 производная y' меняет знак с «-» на «+», значит, x=3- точка минимума. В точке x=2 имеем ymax=29; в точке x=3 имеем ymin=28.

4. Выполнение упражнений

Схематично изобразите график какой -либо функции f, для которой x1=-3- точка максимума; x2=4 — точка минимума.

Схематично изобразите график какой -либо функции g, которая имеет две точки максимума и одну точку минимума.

Функция f непрерывна в точке x0=2, причем g'(x)>0 на промежутке (-3,5;-3) и g '(x)<0 на промежутке (2;3). Является ли точка x0=2 точкой максимума или минимума?

Функция g непрерывна в точке x0=-3, причем f '(x)<0 на промежутке (0;2) и f '(x)>0 на промежутке (-3;0). Является ли точка x0= -3 точкой максимума или минимума?

Функция h непрерывна в точке x0=8, причем h'>0 на промежутке (7;8) и f '(x)>0 на промежутке (8;9). Будет точка x0= 8 точкой максимума или минимума?

Дифференцуемая функция y=f(x) на промежутке [-4;9] имеет единственную точку экстермума x0=3. Определите знак производной на каждом из промежутков [-4;3) и (3;9].

Функция y=g(x) на промежутке [-5;7] имеет единственную точку экстремума — точку минимума x0 =-2. Определите знак производной на каждом из промежутков [-5;-2) и (-2;7], если функция g дифференцируема.

Известно, что функция f непрерывна на всем рассматриваемом промежутке. Установите, есть ли у функции точки экстремума, запишите точки максимума м минимума, если:

а) f '(x)>0 на промежутке [-4;2); б)f '(x)<0 на промежутке (2;5); в) f '(x)<0 на промежутке (5;∞).

Известно, что функция f непрерывна на всем рассматриваемом промежутке. Установите, есть ли у функции точки экстремума, запишите точки максимума м минимума, если:

а) f '(x)<0 на промежутке (-∞;-1); б)f '(x)>0 на промежутке (-1;7); в) f '(x)>0 на промежутке (7;∞).

Вопросы для самоконтроля:

1. **Что такое производная?**

2. **Формулы для вычисления производных?**
3. **Как найти промежутки возрастания и убывания функции?**
4. **Что такое критические точки?**

Тема 28 Наибольшее и наименьшее значение функции

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
Ребята, каким должен быть наш первый шаг? В каких точках на отрезке функция может принимать наибольшее или наименьшее значение?
Ответ: в критических точках, стационарных или на концах отрезка.
Давайте запишем алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на [a; b]:
Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции:
-*найти производную функции;*
-*решить уравнение $f'(x)=0$ и найти критические точки;*
-*выяснить, принадлежат ли полученные критические точки данному отрезку;*
-*найти значения функции на концах отрезка и в критических точках, принадлежащих отрезку;*
-*сравнивая полученные значения функции, определить наибольшее и наименьшее значения функции.*

Итак, ребята, мы записали алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции, а теперь давайте рассмотрим применение алгоритма на конкретной задаче.
Вопросы для самоконтроля:
1. **Что такое производная?**
2. **Формулы для вычисления производных?**
3. **Как найти промежутки возрастания и убывания функции?**
4. **Что такое критические точки?**

Тема 29 Дифференциал сложной функции. Контрольная работа № 3. Контрольная работа

Вариант 1	*Вариант 2*
1) Найти производные следующих функций: а) $f(x) = 3x^{-2}+7x+3$ б) $y=(x^4-x-1)^4$ в) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ г) $y=-5\cos 3x$ 2) Вычислить производную функции: а) $y = \frac{1}{(2+3x)^3}$	1) Найти производные следующих функций: а) $f(x) = 4x^{-3}-3x^5+5$ б) $y=\sqrt{x^3+1}$ в) $y=\frac{1-5x^5}{1+5x^5}$ г) $y=-\frac{1}{7}ctg 7x$ 2) Вычислить производную функции: а) $y = \sqrt[7]{(3-14x)^2}$

3) Найти производную функции: а) у = $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$	3) Найти производную функции: а) у = $\frac{3x-5}{(x-3^2)}$, при х=3
Вариант 3 1) Найти производные следующих функций: а)$f(x) = 2x^{\frac{1}{3}}$+1 б) у=$(9\text{-}x^2)^4$ в) у=$\frac{3-x}{x^2}$ г) у=$\frac{1}{3}$sin6x 2) Вычислить производную функции: а) у = $\sqrt[4]{3x+2}(3x-1)^4$ 3) Найти производную функции: а) у =$(x^3+1)cos2x$	*Вариант 4* 1) Найти производные следующих функций: а)$f(x) = 2x^{\frac{1}{4}}$ - 6x б) у=$\sqrt{2x^2-3x}$ в) у=$\frac{2+x^3}{2x}$ г) у=2cos5x 2) Вычислить производную функции: а) у = (х+1)$\sqrt[3]{x^2}$ 3) Найти производную функции: а) у =$\frac{2}{x^3}-8\sqrt[4]{x}$
Вариант 5 1) Найти производные следующих функций: а) $y=3-\frac{4}{x^3}$ б) $y=(x^3-2x)^4$ в) $y=(x^2-1)(x^4+2)$ г) f(x) = tg(4 – 3x) 2 Вычислить производную функции: а) у = $\sqrt[3]{2x+7}$ 3) Найти производную функции: а) у =$\frac{1}{(3-2x)^3}$	*Вариант 6* 1) Найти производные следующих функций: а) $y=\frac{2}{x^5}+7$ б $y=\sqrt{4x^3+6x}$ в) $y=\frac{3x+4}{x-1}$ г) f(x) = cos(5 – 3x) 2) Вычислить производную функции: а) у = 3) Найти производную функции: а) у =
Вариант 7 1) Найти производные следующих функций: а)у = x^5 - $\frac{17}{x^2}$ + 28x + 1 б) $y=\left(1-\frac{1}{x}+x^2\right)^4$ в) $y=\frac{x+3}{x^2-2}$. г) f(x) = - sin2x 2) Вычислить производную функции: а) у =$\sqrt[3]{x-1}(x^4-1)$ 3) Найти производную функции:	*Вариант 8* 1) Найти производные следующих функций: а) $ó=\frac{1}{3}õ^3-\frac{1}{4}õ^2+2õ+3$ б $y=\sqrt{1-x^6}$ в) $ó=(x-2)(x^2+2x+4)$ г) f(x) = cos(5 – 3x) 2) Вычислить производную функции: а) у =$\frac{1}{\sqrt[3]{3x-7}}$ 3) Найти производную функции:

а) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^6}}$	а) $y = \dfrac{3x-5}{(x-3)^2}$, при x=3

Вопросы для самоконтроля:

1.Что такое производная?

2.Формулы для вычисления производных?

3.Как найти промежутки возрастания и убывания функции?

4.Что такое критические точки?

Раздел 10. Первообразная и интеграл

Тема 52. Первообразная. Неопределённый интеграл и его свойства.

Что такое дифференцирование? Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала заданной функции. Для дифференцирования существует обратное действие – интегрирование: нахождение функции по заданной ее производной или дифференциалу.

Производная – «производит» на свет новую функцию.

Первообразная - первичный образ.

Дифференцирование и интегрирование – взаимно-обратные действия.

Определение первообразной: Функцию, восстанавливаемую по заданной ее производной или дифференциалу, называют *первообразной (F(x))*

Функция	Первообразная
K	kx + C
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
1	$x+C$
cosx	$\sin x+C$
sinx	$-\cos x+C$
$\frac{1}{cos^2 x}$	$tgx+C$
$\frac{1}{cin^2 x}$	$-ctgx+C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$
$\frac{1}{x}$	$In\|x\|+C$
e^x	e^x+C
$(Kx + b)^n$	$\frac{(kx+b)^{n+1}}{k(n+1)}$
$\frac{1}{kx+b}$	$\frac{1}{k}\ln(kx+b)+C$
e^{kx+b}	$\frac{1}{k}\ e^{kx+b}$
Sin(kx+b)	$-\frac{1}{k}$ cos(kx+b)
cos(kx+b)	$\frac{1}{k}$ Sin(kx+b)

Из определения следуют свойства:

1.Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

Правило №1: Если *F* есть первообразная для *f*, а *G* – первообразная для g, то *F*+*G* есть первообразная для *f*+*g*.

$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x)$.

Приведём пример: Найдите общий вид первообразных для функции : $f(x)=5+x^2$

Решение: $F(x)=5x+\frac{x^{2+1}}{2+1}=5x+\frac{x^3}{3}+C$

Правило №2: Если*F* есть первообразная для *f*, а *k* – постоянная, то функция *kF* – первообразная для *kf*.

2.Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right)=d\left(F(x)+C\right)=F'(x)dx=f(x)dx.$$

Приведём пример: Найдите общий вид первообразных для функции: $f(x)=8\cos x$

Решение: $F(x)=8\sin x+C$

Правило №3: Если*F(x)* есть первообразная для *f(x)*, а *k* и *b* – постоянные, причём *к≠0,* то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ есть первообразная для $f(kx+b)$.

Приведём пример: Найдите общий вид первообразных для функции: $f(x)=\sin(4x-1)$

Решение: $F(x)=-\frac{1}{4}\cos(4x-1)+C$

Знакомство с правилами вычисления первообразных.

IV. Бекіту / Закрепление: стр 9-10 №1, 2, 8, 11

Пример:

Дано: $f(x)=(3x+1)^4$.Найти $F(x)$.

Ответ: $F(x)=\frac{(3x+1)^5}{5\cdot 3}=\frac{1}{15}(3x+1)^5$ (таблица).

Работа у доски

Решение примеров студентами у доски.

а) $f(x)=2-x^3+\frac{1}{x^3}$ $F(x)=2x-\frac{x^{3+1}}{3+1}+\frac{x^{-3+1}}{-3+1}=2x+\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2x^2}+C$

в) $f(x)=\frac{1}{x^2}-\sin x$ $F(x)=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-(-\cos x)=-\frac{1}{x}+\cos x+C$

г) $f(x)=5x^2-1$ $F(x)=5\frac{x^{2+1}}{2+1}-x=\frac{5x^3}{3}-x+C$

а) $f(x)=(2x-3)^5$ $F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^{5+1}}{5+1}=\frac{(2x-3)^6}{12}+C$

б) $f(x)=3\sin 2x$ $F(x)=\frac{1}{2}\cdot 3(-\cos 2x)=-\frac{3}{2}\cos 2x+C$

г) $f(x)=-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$ $F(x)=-\frac{1}{3}\cdot 3\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+C$

Найдите первообразные для функции:

Два ученика работают за доской самостоятельно, затем проверяем.

В) Найди ошибку:

1	$f(x)=x^2-x$	$F(x)=\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{2}+C$

2	$f(x)=x^{-3}+8$	$F(x)=\frac{1}{-2x^2}+C$
3	$f(x)=e^{3x}$	$F(x)=3e^{3x}+C$
4	$f(x)=2\cos x-0{,}2$	$F(x)=\frac{-\sin x}{2}-0{,}2x+C$
5	$f(x)=\cos 2x+x$	$F(x)=\frac{-\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}x^2$

Критерии оценивания:

1. Раскрывает содержание понятия первообразной функции и неопределенного интеграла;
2. вычисляет неопределённые интегралы;

Вопросы для самоконтроля:
1. Как звучала тема нашего урока?
2. Вспомните правила нахождения первообразных

Тема 53. Интеграл степенной функции с действительным показателем и показательной функции.

Определение. Совокупность всех первообразных F(x) + C функцииf(x) на рассматриваемом промежутке называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(x)dx$, где f(x) – *подынтегральная функция*, f(x)dx – *подынтегральное выражение*, x – *переменная интегрирования*.
$\int f(x)dx$ = F(x) + C
где C – любое действительное число.
Например: $\int 2xdx = x^2 + C$; $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
Например: $y = \int (3x^2 + 2)dx = x^3 + 2x + C$. Сделаем проверку: $y' = 3x^2 + 2$ или $dy = (3x^2 + 2)\, dx$. Следовательно, интеграл найден верно.
Пример 9.Найти $\int 6x^5dx$
Решение: Из дифференциального исчисления известно, что $6x^5 = (x^6)'$, значит, $\int 6x^5dx = x^6+ C$.
Таблица основных интегралов.

1.$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}+C\ (k\neq -1)$,

1.1 $\int dx = x+C$

2.$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$

4.$\int e^x dx = e^x+C$

5.$\int \cos x dx = \sin x + C$

6.$\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

Свойства неопределенного интеграла.

$1^0. \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

$2^0. \int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

3^0. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$

и $u = \varphi(x)$,

Ответ.

$$\int (5x+12)dx = 5\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + 12\cdot x + C = \frac{5x^2}{2} + 12x + C$$

$$\int (5x+12)dx = \frac{5x^2}{2} + 12x + C$$

$$\int (3 - x^5)dx = \int 3dx - \int x^5 dx = 3x - \frac{x^6}{6} + c$$

$$\left(3x - \frac{1}{6}x^6 + c\right)' = 3 - \frac{1}{6}\cdot 6\cdot x^5 + c' = 3 - x^5 = f(x)$$

$$\int \cos(3x - \frac{\pi}{6})dx = \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + c$$

$$\left(\frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + c\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + c' = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = f(x)$$

$$\int \frac{dx}{cos^2 4x} = \frac{1}{4}tg\ 4x + c$$

$$(\frac{1}{4}tg\ 4x + c)' = \frac{1}{4}\cdot 4\cdot\frac{1}{cos^2 4x} + c' = \frac{1}{cos^2 4x} = f(x)$$

$$\int (4x^3 + 5x^4)dx = 4\cdot\frac{x^4}{4} + 5\cdot\frac{x^5}{5} + C = x^4 + x^5 + C$$

Проверка:

$(x^4 + x^5 + C)' = 4x^3 + 5x^4 = f(x)$

Ответ: $x^4 + x^5 + C$.

y = 6/(5x – 7 $)^2$; 9) y = 4/(9x + 3$)^4$;

10) y = 4/$\sin^2$(10 – 5x). 10) y = 3/$\cos^2$5x

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА (Первообразная)

Вариант № 1 *Вариант № 2*

1)Найти первообразные функций

а) f(x) = $\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{3}-6x+2$

б) f(x) = $\frac{x^2}{3}-\sin 2x$

в) f(x) = $\sqrt{2x-1}$, *при* $x > 0{,}5$

ж) f(x) = $\cos 3x+\frac{1}{\sin^2 x}$

к) f(x) = $\sin(1{,}5x-1)+\sqrt{x}$

а) f(x) = $-\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{2}-4x+3$

б) f(x) = $\frac{x^3}{2}-\cos 3x$

в) f(x) = $\sqrt{4x+2}$, *при* $x > -0{,}5$

ж) f(x) = $\sin 3x-\frac{1}{cos^2 x}$

к) f(x) = $\cos(1-1{,}5x)+\sqrt{x+1}$

Критерии оценивания:

1. Вычисляет интеграл показательной функции и степенной функции с действительным показателем.

Вопросы для самоконтроля:

1. **Дайте определение первообразной.**
2. **Сформулируйте три правила нахождения первообразных.**
3. **Определение интеграл**?

Тема 54. Криволинейная трапеция и ее площадь. Определенный интеграл.

Определённым интегралом от непрерывной функции *f*(*x*) на конечном отрезке [*a*, *b*] (где $a \neq b$) называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. (Вообще, понимание заметно облегчится, если повторить тему неопределённого интеграла) При этом употребляется запись

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Числа *a* и *b* называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а отрезок [*a*, *b*] – отрезком интегрирования.

Теорема. Для нахождения определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ *достаточно найти какую-нибудь первообразную Fфункции f(x) рассмотреть разность F(b) – F(a).*

$\int_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a). – *Формула Ньютона-Лейбница*

В дальнейшем для удобства записи разность F(b) – F(a)., будем записывать через F(x) , тогда

В общем виде определенный интеграл записывается так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Что прибавилось по сравнению с неопределенным интегралом?
Прибавились *пределы интегрирования*.
Нижний предел интегрирования стандартно обозначается буквой a.
Верхний предел интегрирования стандартно обозначается буквой b.
Отрезок $[a;b]$ называется *отрезком интегрирования*.
С помощью знакомой со школы формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

В определенном интеграле можно переставить верхний и нижний предел, сменив при этом знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Например, в определенном интеграле перед интегрированием $\int_6^0 (1-x)dx$ целесообразно поменять пределы интегрирования на «привычный» порядок:

$$\int_6^0 (1-x)dx = -\int_0^6 (1-x)dx = \int_0^6 (x-1)dx$$

– в таком виде интегрировать значительно удобнее.

Таблица свойств определенного интеграла.

Основные свойства определенного интеграла	
$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz$	$\int_a^a f(x) = 0$
$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
$\int_a^b kf(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Пример 2

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x}$$

Это пример для самостоятельно решения, решение и ответ в конце урока.
Немного усложняем задачу:

Пример 3

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2)dx$$

Решение:

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx\overset{(1)}{=}8\int_{-2}^{4}dx+2\int_{-2}^{4}xdx-\int_{-2}^{4}x^2dx\overset{(2)}{=}8(x)\Big|_{-2}^{4}+2\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-2}^{4}-\frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^{4}\overset{(3)}{=}$$

$$=8(4-(-2))+(4^2-(-2)^2)-\frac{1}{3}(4^3-(-2)^3)=8\cdot 6+(16-4)-\frac{1}{3}(64+8)=$$

$$=48+12-24=36$$

<u>Пример 4</u>

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-3}^{1}(2x^2+3x-1)dx$$

0,5	6	1	3	4	7\3	8

$$1.\int_{1}^{2}(2x+3)dx=x^2+3x\Big|_{1}^{2}=4+6-1-3=6 \qquad \text{Е}$$

$$2.\int_{-1}^{2}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=3 \qquad \text{Б}$$

$$3.\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos xdx=\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0=\frac{1}{2} \qquad \text{Л}$$

$$4.\int_{1}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\Big|_{1}^{9}=2\sqrt{9}-2\sqrt{1}=4 \qquad \text{Н}$$

$$5.\int_{0,5}^{1}\frac{2}{x^2}\,dx=\frac{-2}{x}\Big|_{0,5}^{1}=\frac{-2}{1}+\frac{2}{0,5}=2 \qquad \text{П}$$

$$6.\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}2\sin xdx=-2\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=-2\cos\frac{\pi}{2}+2\cos\frac{\pi}{3}=1 \qquad \text{Й}$$

$$7.\int_{1}^{2}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3} \qquad \text{И}$$

$$8.\int_{0}^{2}(x+3)dx=\frac{x^2}{2}+3x\Big|_{0}^{2}=\frac{2^2}{2}+6-0-0=8 \qquad \text{Ц}$$

Ответ: Лейбниц.

2)Вычислить интеграл.

а) $\int_{-1}^{2}(9x^2-x-2)\,dx$

б) $\int_{0}^{\pi/3}\sin 3x\,dx$

в) $\int_{1}^{9}\frac{4x}{x^{1,5}}\,dx$

а) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2+2)\,dx$

б) $\int_{0}^{\pi/4}\cos 2x\,dx$

в) $\int_{1}^{4}\frac{5\sqrt{x}}{x}\,dx$

г) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{8}{\sin^2 2x}\,dx$

д) $\int\limits_{-5}^{1} \sqrt{2+x}\;dx$

г) $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{6}{\cos^2 2x}\,dx$

д) $\int\limits_{-3}^{4} \sqrt{x-3}\;dx$

Критерии оценивания:
1.Применяет формулу Ньютона-Лейбница для нахождения площади криволинейной трапеции;
Вопросы для самоконтроля:

1. **Дайте определение первообразной.**
2. **Сформулируйте три правила нахождения первообразных.**
3. **Определение интеграл?**
4. **Что такое интегрирование?**
5. **Определение первообразной**

Тема 55. Применение определенного интеграла при решении геометрических и физических задач.
Пусть на отрезке [a; b] оси Ox задана непрерывная функция f, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком [a; b] и прямыми x = a и x = b (рис. 1), называют криволинейной трапецией. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках 1, а — д.

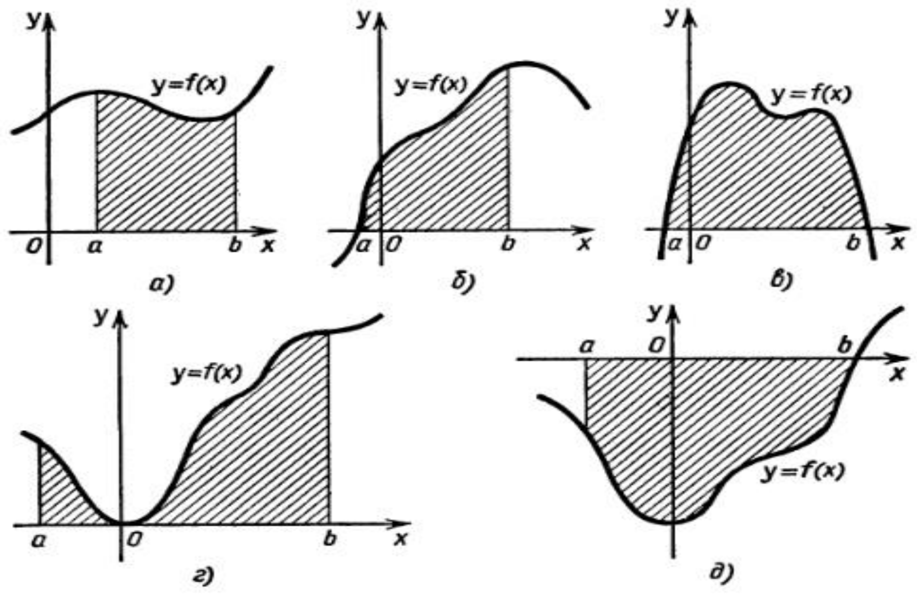


Рис. 1

Для вычисления площадей криволинейных трапеций применяется следующая теорема:

Теорема. Если f — непрерывная и неотрицательная на отрезке [a; b] функция, а F — ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей

криволинейной трапеции (рис. 2) равна приращению первообразной на отрезке [a; b] т. е.
S=F(b)-F(a). (1)
Доказательство. Рассмотрим функцию S (x), определенную на отрезке [a; b]. Если a <x≤b, то S (x) — площадь той части криволинейной трапеции, которая расположена левее вертикальной прямой, проходящей через точку M (x; 0) (рис. 2, а). Если x=a, то S (a) = 0. Отметим, что S(b)=S (S — площадь криволинейной трапеции).

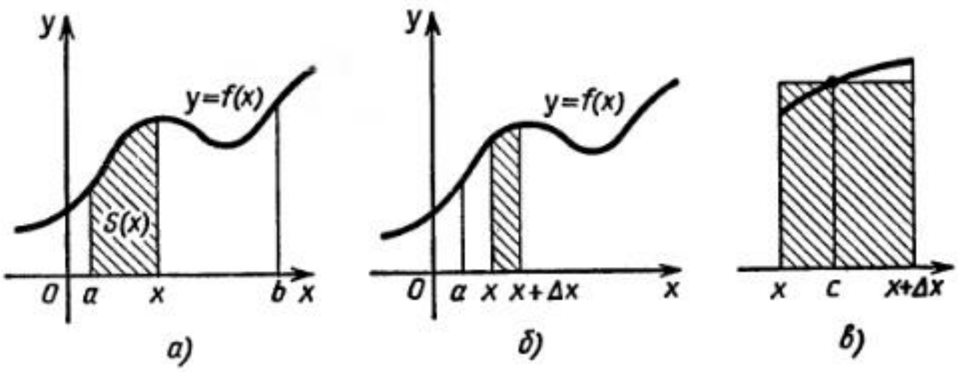


Рис. 2

Докажем, что
S'(x)=f(x). (2)

По определению производной надо доказать, что

$\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$ (3)

Выясним геометрический смысл числителя Δ S (x). Для простоты рассмотрим случай ΔX>0. Поскольку Δ S(x)= S (x + Δ x) — S (x), то Δ S (x) — площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 2, б. Возьмем теперь прямоугольник той же площади Δ S(x),опирающийся на отрезок [x; x+Δ x] (рис. 2, в). В силу непрерывности функции f верхняя сторона прямоугольника пересекает график функции в некоторой точке с абсциссой c ∈ [x; x+Δ x] (в противном случае этот прямоугольник либо содержится в части криволинейной трапеции над отрезком [x;x+Δx], либо содержит ее; соответственно его площадь будет меньше или больше площади Δ S (X)). Высота прямоугольника равна f (c). По формуле площади прямоугольника имеем Δ S (x)=f (c) Δ x, откуда $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(c)$ (Эта формула верна и при Δ x<0.) Поскольку точка c лежит между x и x + Δx; то c стремится к x при $\Delta x \rightarrow 0$. Так как функция f непрерывна, $f(c) \rightarrow f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Итак, $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$.Формула (2) доказана.Мы получили, что S есть первообразная для f. Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех x∈ [a;b] имеем:

S(x) = F(x)+C,

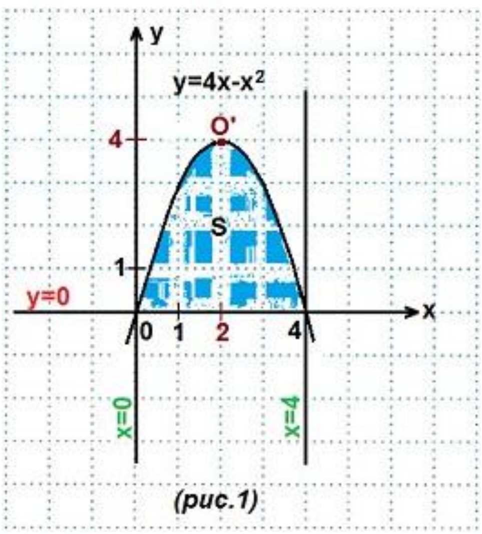
где C — некоторая постоянная, а F — одна из первообразных для функции f. Для нахождения C подставим x = a:

F(a)+C=S(a)=0, откуда C=—F(a). Следовательно,S(x) = F(x)-F(a). (4)

Поскольку площадь криволинейной трапеции равна S (b), подставляя x = b в формулу (4), получим:

S=S(b)=F(b)-F(a).
Примеры
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции y=f (x), снизу — осью Ox, слева и справа прямыми x=a, x=b, находят по формуле Ньютона-Лейбница (ф. Н-Л):

$$S=\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad \textbf{(ф. Н-Л)}$$



(рис.1)

Пример 1. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=4x-x^2$;y=0; x=0; x=4.
Решение. Строим графики данных линий. (*рис. 1*).
1) $y=4x-x^2$ — парабола (вида $y=ax^2+bx+c$). Запишем данное уравнение в общем виде:$y=-x^2+4x$. Ветви этой параболы направлены вниз, так как первый коэффициент a=-1<0.
Вершина параболы находится
в точке O′(m; n), где

$$\mathbf{m} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\cdot(-1)} = 2; \quad \mathbf{n = y(m)} = 4\cdot 2 - 2^2 = 4.$$

O′(2; 4). Нули функции (точки пересечения графика с осью Ox) найдем из уравнения:
$4x-x^2=0$.
Выносим x за скобки, получаем: x(4-x)=0. Отсюда, x=0 или x=4. Абсциссы точек найдены, ордината равна нулю — искомые точки: (0; 0) и (4; 0).

2) y=0 — это ось Ox; 3) x=0 — это ось Oy; 4) x=4 — прямая, параллельная оси Oy и отстоящая от нее на 4 единичных отрезка вправо.

Площадь построенной криволинейной трапеции находим по (ф. Н-Л). У нас $f(x)=4x-x^2$, $a=0$, $b=4$.

$$S=\int_0^4(4x-x^2)dx=\left(4\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4=2\cdot4^2-\frac{4^3}{3}=$$

$$=32-\frac{64}{3}=32-21\frac{1}{3}=10\frac{2}{3}\text{(кв. ед.)}$$

Ответ: $S=10\frac{2}{3}$ (кв. ед.)

Кстати, если Вы подсчитаете все целые заштрихованные клетки и добавите к ним половину всех остальных клеток заштрихованной фигуры, то получите приближенное значение искомой площади. Действительно, если единичный отрезок равен одной клетке, то площадь квадратика со стороной, равной 1 клетке, равна 1·1=1 (кв. ед.). Сколько квадратиков — столько квадратных единиц и составляет площадь фигуры.

Пример 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$y=\cos x$; $y=0$; $x=-\frac{\pi}{3}$; $x=\frac{\pi}{6}$.

Решение. Строим графики данных линий. (*рис. 2*).

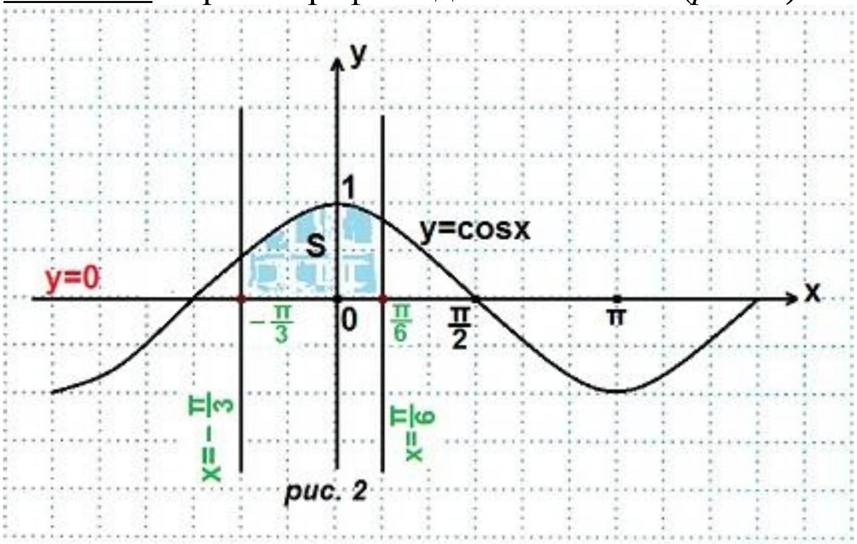


рис. 2

Площадь данной криволинейной трапеции:

$$S=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\text{(кв. ед.)}$$

Ответ: $S=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (кв. ед.)

Вычислить интеграл.

а) $\int_{-1}^{2}(9x^2-x-2)\,dx$	а) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2+2)\,dx$

б) $\int_{0}^{\pi/3} \sin 3x\, dx$

в) $\int_{1}^{9} \frac{4x}{x^{1,5}}\, dx$

г) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{8}{\sin^2 2x}\, dx$

д) $\int_{-5}^{1} \sqrt{2+x}\, dx$

б) $\int_{0}^{\pi/4} \cos 2x\, dx$

в) $\int_{1}^{4} \frac{5\sqrt{x}}{x}\, dx$

г) $\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{6}{\cos^2 2x}\, dx$

д) $\int_{-3}^{4} \sqrt{x-3}\, dx$

а) $f(x) = (2x-3)^5$ $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^{5+1}}{5+1} = \frac{(2x-3)^6}{12} + C$

б) $f(x) = 3\sin 2x$ $F(x) = \frac{1}{2} \cdot 3(-\cos 2x) = -\frac{3}{2}\cos 2x + C$

г) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + C$

Критерии оценивания:

1. Вычисляет площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями;
2. вычисляет объем тела вращения

Вопросы для самоконтроля:

1. Как звучала тема нашего урока?

2.Вспомните правила нахождения первообразных, все примеры которые мы разбирали с вами на уроке

Раздел 11. Дифференциальные уравнения

Тема 56. Основные сведения о дифференциальных уравнениях.

Определение 1. Уравнение, содержащее независимую переменную, функцию от этой независимой переменной и ее производные различных порядков, называется дифференциальным уравнением.

Определение 2. Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение *n*-го порядка имеет вид

$F(x,y,y',y'', \ldots, y^{(n)})=0.$

Определение 3. Дифференциальное уравнение *n*-го порядка называется линейным, если неизвестная функция и все ее производные входят в него в первой степени. Общий вид линейного дифференциального уравнения *n*-го порядка:

$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(1)} + a_n(x)y = f(x).$

Определение 4. Линейное дифференциальное уравнение (1) называется однородным, если свободный член $f(x) = 0$, и неоднородным - в противном случае.

Определение 5. Решением дифференциального уравнения называется любая функция $y = j(x)$, при подстановке которой в уравнение будет получено тождество. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения, график решения называют интегральной кривой.

Определение 6. Решение дифференциального уравнения *n*-го порядка, содержащее *n* произвольных постоянных, называется общим решением дифференциального уравнения.

Определение 7. Если в результате интегрирования дифференциального уравнения получена зависимость между *y* и *x*, из которой не удается явно выразить *y* через *x* (т.е. неизвестная функция задана неявно), то данную зависимость называют общим интегралом дифференциального уравнения.

Определение 8. Решение, полученное из общего при конкретных значениях произвольных постоянных, называется частным решением.

Диффренциальные уравнения первого порядка

Определение. Общий вид дифференциальных уравнений первого порядка: $F(x, y, y') = 0$

Определение. Вид общего решения дифференциального уравнения первого порядка:

$y = \varphi(x, C)$

в простейших случаях данное уравнение можно решить относительно y': $y' = f(x, y)$. В некоторых случаях заданные дифференциальные уравнения удобно записать в виде:

$dy/dx = f(x, x)$ или $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ айқын функциялар.

Первичное закрепление знаний:

Пример 1: $x \cdot y' = y$

Пример 2: $y' = -2y$ (0;2)

Пример3: $ydy - xydx = 0$

Самооценивание по готовым ответам совместно с учителем:

Пример 1: $x \cdot y' = y$

$$x\,\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

$$y = e^{\ln|x|+C} = e^{C} \cdot e^{\ln|x|} = Ax$$

Ответ: $y = Ax$

Пример 2: $y' = -2y$ (0;2)

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\frac{dy}{y} = -2dy$$

$$\ln|y| = -2x + C$$

$$y = e^{-2x+C} = e^{C} \cdot e^{-2x} = C \cdot e^{-2x}$$

$$2 = C \cdot e^0 \qquad C = 2$$

Ответ: $y = 2 \cdot e^{-2x}$

Пример3: $ydy - xydx = 0$

$$ydy = xydx$$

$$\frac{ydy}{y} = xdx$$

$$dy = xdx$$

$$\int dy = \int xdx$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

Ответ: $y = \frac{x^2}{2} + C$

Работа с классом

XVI.10. $y' = 2x,\ y(1) = 3.$ **XVI.11.** $y' = 4x - 3,\ y(0) = 0.$

XVI.12. $y' = \frac{y}{x},\ y(5) = 10.$ **XVI.13.** $y' = 2(y - 3),\ y(0) = 4.$

XVI.15. Найти функцию, удовлетворяющую условию $y' = \frac{2}{y^2}$, график которой проходит через точку $M = (4; 3)$.

XVI.16. Найти функцию, удовлетворяющую условию $xy' = (x+1)y$, график которой проходит через точку $M = (1; e)$.

Индивидуальная работа

Найти общее решение дифференциального уравнения (**XVI.21–XVI.30**).

XVI.21. $y + y'(1 - y)x = 0.$

XVI.22. $(y^2 + 1)dy + dx = (2x - x^2)dx + 2ydy.$

XVI.23. $2(ydy - xdx) = \frac{1}{y^2}dy - \frac{1}{x^2}dx.$

XVI.24. $y' = e^{x+y}.$

XVI.25. $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0.$

XVI.26. $ydy - \frac{e^x}{1+e^x}dx = 0.$

XVI.27. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0.$

Критерии оценивания:

1. Раскрывает смысл дифференциальных уравнений;

Тема 58 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
Определение линейного однородного дифференциального уравнения

$$ay'' + by' + cy = 0$$

или

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

второго порядка с постоянными коэффициентами.

Необходимо акцентировать внимание учащихся на ***характеристическом уравнении***$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Оно получается из данного заменой в нем **производных** искомой функции соответствующими **степенями** $\boldsymbol{\lambda}$,
причем сама **функция** заменяется **единицей**.

Тогда общее решение дифференциального уравнения второго порядка строится в зависимости от характера корней λ_1и λ_2 характеристического уравнения.

Рассмотреть все три возможных случая.
***1-й случай*. D>0**.
Корни действительные и различные.
Тогда общее решение уравнения имеет вид
$\mathrm{y} = \mathrm{C}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{x}} + \mathrm{C}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 \mathrm{x}}$.
***2-й случай.*D=0**
Корни действительные и равны.
Тогда общее решение уравнения имеет вид
$\mathrm{y} = (\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2\mathrm{x})\mathrm{e}^{\lambda \cdot \mathrm{x}}$.
***3-й случай*. D<0**
Корни комплексно-сопряженные
$\lambda_1 = \alpha + \beta i$ и $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.
Тогда общее решение уравненияимеет вид
$\mathrm{y} = \mathrm{e}^{\alpha \cdot \mathrm{x}}(\mathrm{C}_1 \cos\beta\, x + \mathrm{C}_2 \sin\beta\, x)$.

1.Какие уравнения называются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами?

$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, где $a_0;\ a_1;\ a_2$ - постоянные коэффициенты

2. Что такое – «характеристическое уравнение»?

Это уравнение вида $a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$, где $y'' = k^2;\quad y' = k;\quad y = 1$

3. Как записывается общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если $D > 0$ k_1 *и* k_2 - корни характеристического уравнения?

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, где C_1 *и* C_2 - константы.

4. Как записывается общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если $D = 0$ $k_1 = k_2 = k$ - корни характеристического уравнения?

$y = C_1 e^{k\,x} + C_2 x e^{kx}$, где C_1 *и* C_2 - константы.

5. Как записывается общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если $D < 0$ $k_1 = a + bi$; $k_2 = a - bi$ -корни характеристического уравнения?

$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$, где C_1 *и* C_2 - константы.

<u>*Определение*</u>. *Общим решением* дифференциального уравнения n-го порядка называется такое его решение

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n),$$

которое является функцией переменной x и n произвольных коэффициентов $C_1, C_2, \dots, C_n$.

<u>*Определение*</u>. *Частным решением* дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего решения при некоторых конкретных числовых значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Пример 1. Дано: $y' + y = 0,\ \ y(3) = 2,$

$y(x) = Ce^{-x}$ —общее решение.

Найдите частное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях.

Решение. Найдем значение C, применяя начальные условия:

$y(3) = 2 \Rightarrow Ce^{-3} = 2 \Rightarrow C = 2e^3$.

Тогда частное решение будет иметь вид

$$y = 2e^3 \cdot e^{-x} \Rightarrow y = 2e^{3-x}.$$

Пример 2. Дано: $y'' + 4y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$,

$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ — общее решение.

Найдите частное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях.

Решение. Найдем значенияC_1 и C_2, применяя начальные условия:

$$y(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$y' = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x,$$

$$y'(0) = 2C_1 \cos 0 - 2C_2 \sin 0 \Rightarrow 2C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}.$$

Тогда частное решение будет иметь вид

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 3. Дано: $y'' + 4y = 0,\ \ y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0,\ \ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$,

$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ — общее решение.

Найдите частное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях.

Решение. Найдем значения C_1 и C_2, применяя начальные условия:

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = C_1 \sin\frac{\pi}{4} + C_2 \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}C_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}C_2 = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = C_1 \sin\frac{\pi}{3} + C_2 \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 1.$$

Решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}C_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}C_2 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2, \\ C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}-1}, \\ C_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}-1}. \end{cases}$$

Тогда частное решение будет иметь вид

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{3}-1}(\sin 2x - \cos 2x).$$

Закрепление.

Решения 1 и 3 группы:

$$1) y'' - 9y = 0 \Rightarrow k^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -3 \\ k_2 = 3 \end{array} \right. \textit{Ответ}: \ y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$$

$$2) \ 2y'' - 3y' - 2y = 0 \Rightarrow 2k^2 - 3k - 2 = 0 \ \textit{Ответ}: \ y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{2x}$$

3) $y'' - 2y' + 5y = 0, \ y(0) = 1, \ y'(0) = -1$

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 1 - 2i \\ k_2 = 1 + 2i \end{array} \right.$$

$$y(0) = e^0 (C_1 \cos 2 \cdot 0 + C_2 \sin 2 \cdot 0) = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1$$

$$y' = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^x (-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x)$$

$$y'(0) = e^0 (C_1 \cos 2 \cdot 0 + C_2 \sin 2 \cdot 0) + e^0 (-2C_1 \sin 2 \cdot 0 + 2C_2 \cos 2 \cdot 0) = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_2 = -1$$

$$\textit{Ответ}: \ y = e^x (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$4) y'' - 10y' + 25y = 0 \Rightarrow k^2 - 10k + 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 5 \\ k_2 = 5 \end{array} \right.$$

$$\textit{Ответ}: \ y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} = e^{5x} (C_1 + C_2 x)$$

Решения 2 и 4 группы

$$1) y'' - 8y' = 0 \Rightarrow k^2 - 8k = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = 8 \end{array} \right. \textit{Ответ}: \ y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{8x} = C_1 + C_2 e^{8x}$$

2) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 3 \\ k_2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$$

$$y'(x) = 3e^{3x}(C_1 + C_2 x) + e^{3x}(0 + C_2)\ ,\ y'(0) = 3e^{3\cdot 0}(C_1 + C_2 \cdot 0) + e^{3\cdot 0}(0 + C_2) = 7 \Rightarrow C_2 = 1$$

Ответ: $y = e^{3x}(2 + x)$

3) $y'' + 4y = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow k^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -2i \\ k_2 = 2i \end{array}\right. \quad y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi = 1 \Rightarrow C_1 = -1$$

$$y'(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2C_1 \sin \pi + 2C_2 \cos \pi = -1 \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{2}$$

Ответ: $y = -\cos 2x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$

$$4)\ y'' + 6y' + 25y = 0 \Rightarrow k^2 + 6k + 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -3 + 4i \\ k_2 = -3 - 4i \end{array}\right.$$

Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x - C_2 \sin 2x)$

Дополнительные разноуровневые задачи:

1. Найдите частное решение уравнения:

   1) $y'' - 3y' + 2y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
   2) $y'' + 3y' = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$
   3) $y'' + 4y = 0$, если $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = -1$

1) $y'' - 6y' + 13y = 0$
2) $y'' + 2y' + y = 0$
3) y'' + y' − 2y = 0
4) y'' − 9y = 0
5) y'' − 4y' = 0

6) y′′ − 2y′ − y = 0

7) 3y′′ − 2y′ − 8y = 0

8) y′′ + y = 0

4. Парная работа.
Цель: анализировать навыкирешения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.
Навыки: применение, анализ.
Найти частные решение уравнений:

1пара	$\frac{d^2y}{dx^2}-1=0;\ y=2$ и $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=0.$
2пара	$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0;\ \ y=8$ и $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=0.$
3пара	$y''-10y'+25y=0;\ \ y=2$ и $y'=8$ при $x=0.$
4пара	$y''+6y'+9y=0;\ y=1$ и $y'=2$ при $x=0.$
5пара	$y''+9y=0;\ y=1$ и $y'=-6$ при $x=\frac{\pi}{3}.$
6пара	$y''-4y'+5y=0;\ \ y=1$ и $y'=-1$ при $x=0.$

Оценивание: взаомооценивание в парах
*Описание:*учащиеся в парах выполняют предложенные задания.

5. Индивидуальная работа

Цель: Проанализировать способности учащихся, с помощью предложенныхзаданий по изученной теме.

Навыки: знание, применение

Решить уравнение $y''+4y'+7y=0;$

Найти частные решение уравнений:

1. $\frac{d^2s}{dt^2}=6t-4;\ s=5$ и $\frac{ds}{dt}=6$ при $t=2.$

2. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=0;\ y=5$ и $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=0.$

Описание: Учащиеся индивидуально выполняют представленные задания.

Оценивание: самооценивание по дескрипторам

Работа в группах:

Найдите соответствие:

Учащиеся в группе решают уравнения, обсуждают решения, находят верные ответы.

$y'' + 5y' + 6y = 0$		$y = e^{x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$
$y'' + 8y' + 16y = 0$		$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$
$y'' - 4y' + 4y = 0$		$y = e^{-4x}(C_1 + C_2 x)$
$y'' - 2y' + 10y = 0$		$y = 5\sin(3t + \varphi)$
$x(t) = 4\cos(3t) + 3\sin(3t)$		$y = e^{x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$
$y'' - 2y' + 2y = 0$		$y = 13\cos\left(t + \arccos\dfrac{5}{13}\right)$
$x(t) = 5\cos(t) - 12\sin(t)$		$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$

Подводя итоги этого этапа, учитель задает вопросы, (проводит "Мозговой штурм") помогающие учащимсявспомнитьформулы для решениялинейных однородныхдифференциальныхуравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Вспоминают формулы, которые описывают гармонические колебания. Уравнения, применяемые в физике для описания движения материальной точки, это линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Вид оценивания: взаимооценивание между группами по слайду на презентации.

Дескрипторы:

- имеют понятие олинейных однородныхдифференциальных уравнениях второго порядка с постоянными коэффициентами;
- умеют решать дифференциальные уравнения гармонического колебания $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$;
- записывают общеерешениеуравнений;

Формативное оценивание:

Математика		**Ф. И.**

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами
Целиобучения:11.4.3.2– составлятьирешатьуравнениегармонического колебания Решитехарактерестические уравнения **Уровень А** $2y''+7y'+5y=0$ **Уровень В** а) $4y''+12y'+9y=0$ **б)** $y''+4y'+29y=0$ **Уровень С** а) $y''+49y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=-7$ б) Период колебаний материальной точки 2,4 с, амплитуда 5 см, начальная фаза равна нулю.Считая, что колебания происходят по закону косинуса, найдите смещение колеблющейся точки через 1,8 с после начала колебаний.
Применение знаний

об уче	ите ри	**Дескрипторы**	**Вывод**	
			Достиг	Стре-мится
11.4.3.2	Применение	решает линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами; решает дифференциальные уравнения гармонического колебания $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$; находит общее и частное решенияуравнений;		

Критерии оценивания:

1. Решает дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.

Раздел 12. Аксиомы стереометрии. Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей.

Тема 59. Аксиомы стереометрии и их следствия. Параллельность прямых в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.

Основные фигуры в пространстве: точки, прямые и плоскости.

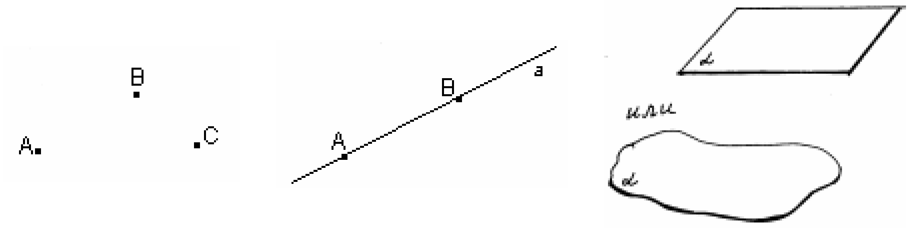
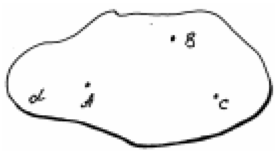


рис. 1 рис. 2 рис. 3

Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах.

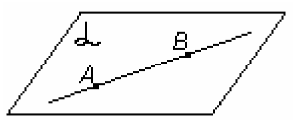
А1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



$A \in \alpha$
$B \in \alpha$ (точки А, В, С лежат в плоскости α)
$C \in \alpha$

рис. 4

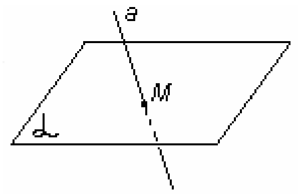
А2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости



$AB \subset \alpha$
Прямая АВ лежит в плоскости α

рис. 5

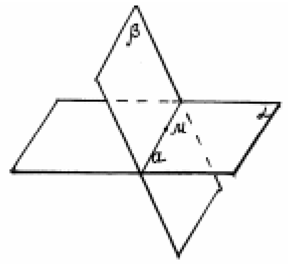
Замечание. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.



$a \cap \alpha = M$
Прямая а и плоскость α пересекаются в точке М.

рис. 6

А3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



$\alpha \cap \beta = a$

α и β пересекаются по прямой а.

рис. 7

Следствие 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Следствие 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

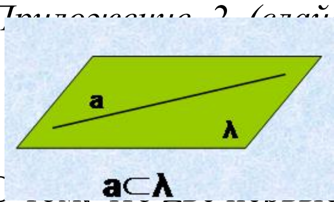
Критерии оценивания:

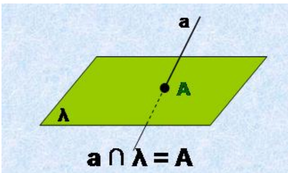
1. Поясняет содержание аксиом стереометрии, их следствий;
2. записывает аксиомы стереометрии и их следствия с помощью математических символов.
3. Применяет знание о свойствах параллельных и скрещивающихся прямых в пространстве при решении задач

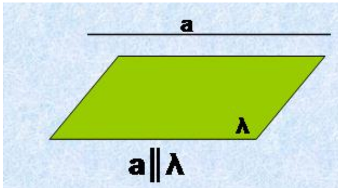
Тема 60. Параллельность прямой и плоскости

Ребята, как вы думаете, какие существуют возможности взаимного расположения прямой и плоскости? Сколько общих точек у прямой и плоскости в каждой из возможностей? Приведите примеры из окружающего нас мира, иллюстрирующие эти возможности .

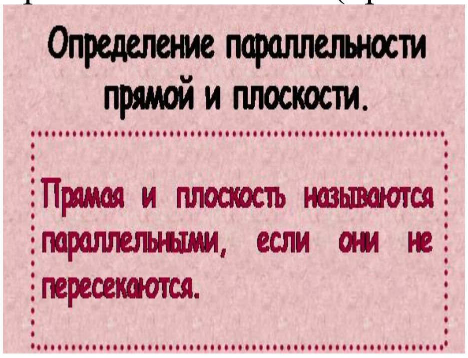
Приложение 2 (слайд №1)



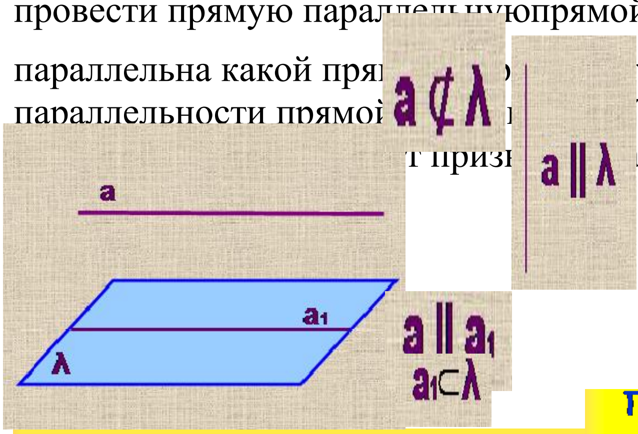


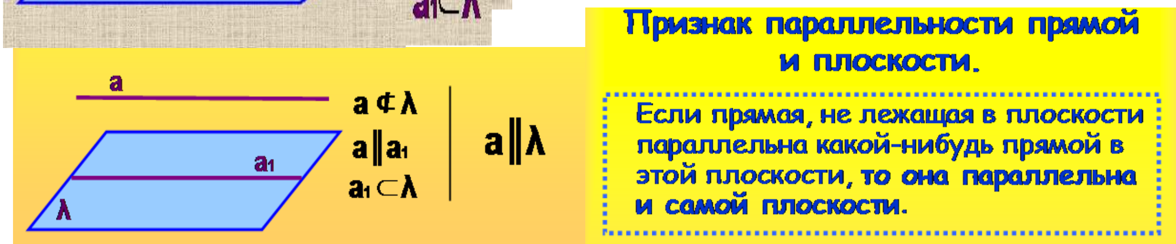


С тем, что две первые возможности осуществимы, мы уже убедились на прошлых уроках и взаимное расположение прямой и плоскости зависит от количества общих точек .Вопрос: “Как вы думаете, такое взаиморасположение прямой и плоскости по аналогии прямым на плоскости, как называется?” (Параллельностью прямой и плоскости) и третий случай даёт нам определение параллельности прямой и плоскости (просьба сформулировать самостоятельно) (*слайд №2*).



Часто при решении задач надо установить параллельность прямой и плоскости. Как, это можно сделать? (Можно воспользоваться определением или признаком параллельности прямой и плоскости (т.е. теоремой, дающей достаточное условие параллельности прямой и плоскости)). « Рассмотрим случай , когда прямая а лежит в плоскости , через точку в пространстве , не лежащую в плоскости , можно провести прямую параллельнуюпрямой а ?» Прямаяа лежит в плоскости λ.Прямая а параллельна какой пря… где лежит? Получили: $a \parallel \lambda$,т.е. признак параллельности прямой … Учащиеся в группах обсуждают условия … т призн… ллельности прямой и плоскости. (слайд





Учащиеся в группах обсуждают доказательство признака методом «от противного» .К доске вызывается ученик, представитель одной из групп, доказывает признак параллельности прямой и плоскости, остальные учащиеся это делают в тетрадях. Вопрос: “Существенно, ли в этой теореме, что а $a \not\subset \lambda$(Да, так как среди прямых, параллельных прямой а$_1$, есть и лежащиев плоскости λ. А их мы не называем параллельными плоскостиλ).

В каком случае прямая и плоскость параллельны (рис. 1. а, б, в)? Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

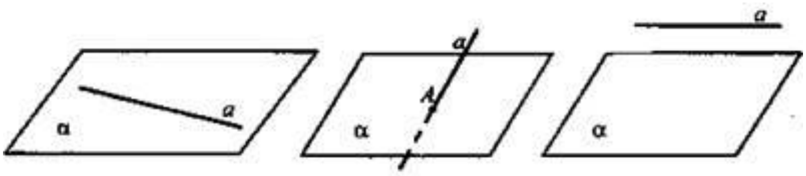


Рис. 1

Показать на предметах обстановки классной комнаты прямые, параллельные плоскости пола.
На модели куба (рис. 2) укажите плоскости, параллельные прямой DC, прямой DD1.

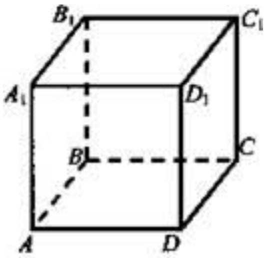


Рис. 2

Как установить параллельность прямой и плоскости?
Обратите внимание на модель куба. DC || (AA1B1). В плоскости (AA1B1) имеется прямая AB || DC; DC || (A1B1C1). В плоскости (A1B1C1) имеется прямая D1C1 || DC. Сделайте предположение. Наличие в плоскости α прямой b || a является признаком, по которому можно сделать вывод о параллельности прямой a и плоскости α.
Теорема:
Дано: a, α; a ∉ α; b ∈ α; a || b (рис. 3).
Доказать, что a || α.

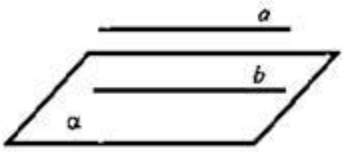


Рис. 3

Доказательство: По условию b ∈ α; b || a.
Предположим, что a ∩ α, тогда по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая b ∩ α, но это невозможно, так как b ∈ α. Следовательно, a ∩ α, поэтому a || α и теорема доказана.
Докажем два утверждения, которыми будем пользоваться при решении задач.
1. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.
Дано: $a, \alpha, \beta; a \parallel \alpha; \beta \cap \alpha = b$ (рис. 4).
Доказать: a || b.

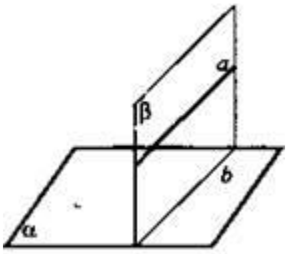


Рис. 4

Доказательство: По условию $a \in \beta;\ b \in \beta;\ b \in \alpha,\ a \parallel \alpha,$ значит, а || b, так как $a \parallel \alpha$ и $a \parallel b.$
2. Если одна из 2-х параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.
Дано: а || b; а; а || α (рис. 5).
Доказать: 1) b || α. 2) b ∈ α.

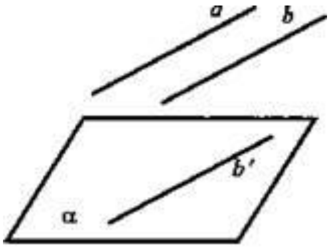


Рис. 5

Доказательство: По условию а || b и α || а, следовательно, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми $b \pitchfork \alpha,$ то есть b || α или b ∈ α.
 Задача № 186
Дано: $AB_1,\ \alpha;\ A \in \alpha;\ BB_1 \parallel CC_1;\ B_1 \in \alpha;\ C_1 \in \alpha;$ AC : CB = 3 : 2; BB1 = 20 см (рис. 6).
Найти: CC1.

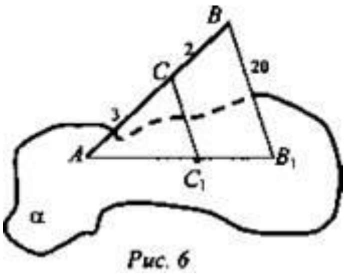


Рис. 6

Решение:
1. Докажем, что точки A, C1, B1 лежат на одной прямой. Точка A и BB1 определяют плоскость β. β ∈ α = AB1. Докажем, что C1 ∈ AB1. Пусть C1 ∉ β,
тогда $CC_1 \cap \beta = C.$ $\left.\begin{array}{l} CC_1 \parallel BB_1 \\ CC_1 \cap \beta \end{array}\right| \Rightarrow BB_1 \cap \beta,$ что противоречит BB1 ∈ β. CC1 ∩ β.
Следовательно, C1 ∈ AB1.

2. Так как $BB_1 \parallel CC_1$, то $\Delta ACC_1 \sim \Delta ABB_1$, тогда $AC : AB = CC_1 : BB_1$; $3 : 5 = CC_1 : 20$; $CC_1 = \frac{3 \cdot 20}{5} = 12$. (Ответ: 12 см.)
Задача № 20
Дано: α, ABCD - трапеция, MN - средняя линия; MN ∈ α (рис. 7).
Доказать: Пересекает ли BC и AD плоскость α.

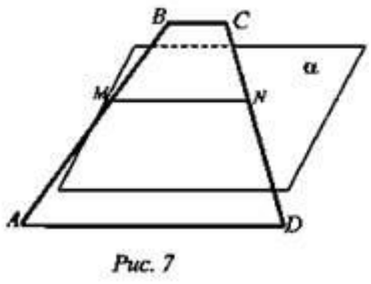


Рис. 7

Доказательство: 1. Пусть BC ∩ α, тогда $\left.\begin{array}{l} BC \cap \alpha \\ BC \parallel MN \end{array}\right| \Rightarrow MN \cap \alpha;$ получили противоречие, так как $MN \in \alpha \Rightarrow BC \not\cap \alpha.$
Аналогично доказывается, что $AD \not\cap \alpha$.
Задача № 18 а
Дано: A ∈ α; CC1 || BB1; AC = CB, BB1 = 7 см.
Найти: CC1.
Решение:
Доказательство того, что C1 ∈ AB1 дано в 18 (б). Так как C - середина AB, то CC1 - средняя линия ΔABB1 ⇒ CC1 = 3,5. (Ответ: 3,5 см.)
Задача № 19
Дано: ABCD - параллелограмм; AB ∩ α = K; BC ∩ α = M (рис. 8).
Доказать, что AD ∩ α; DC ∩ α.

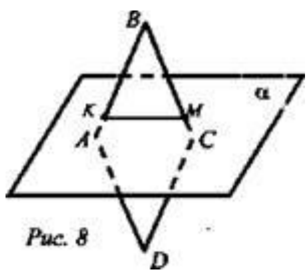


Рис. 8

Доказательство: $\left.\begin{array}{l} AB \cap \alpha \\ AB \parallel DC \end{array}\right| \Rightarrow$ по лемме DC ∩ α. Аналогично AD ∩ α.
Задача № 21
Дано: ΔABC и ΔABD не лежат в одной плоскости; MN || CD (рис. 9).
Доказать: MN ∩ (ABC); MN ∩ (ABD).

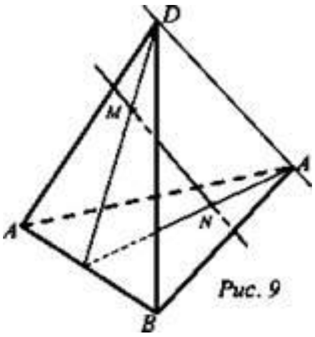


Рис. 9

Доказательство:

$\left.\begin{array}{l} D \in BD \\ C \in ABC \end{array}\right| \Rightarrow DC \cap ABD$ и $DC \cap ABC,\ MN \parallel DC,\quad C \in ABC.$ Следовательно, по лемме MN ∩ ABD и MN ∩ ABC. Что и требовалось

<u>. ЗАДАНИЕ</u>*:* *ПОСТРОИТЬ*

А) ПРЯМАЯ*MP* ПАРАЛЛЕЛЬНА ПЛОСКОСТИ *a* , ПРЯМАЯ МТ ПЕРЕСЕКАЕТ ЭТУ ПЛОСКОСТЬ В ТОЧКЕ *T* .

Б) ПЛОСКОСТЬ*a*ПЕРЕСЕКАЕТ ТРИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ *a*,*b* И *c*СООТВЕТСТВЕННО В ТОЧКАХ *A, B , C*, ЛЕЖАЩИХ НА ОДНОЙ ПРЯМОЙ .

В) ПЛОСКОСТЬ*a*ПЕРЕСЕКАЕТ ТРИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ *a*,*b* И *c* СООТВЕТСТВЕННО В ВЕРШИНАХ ТРЕУГОЛЬНИКА *ABC* .

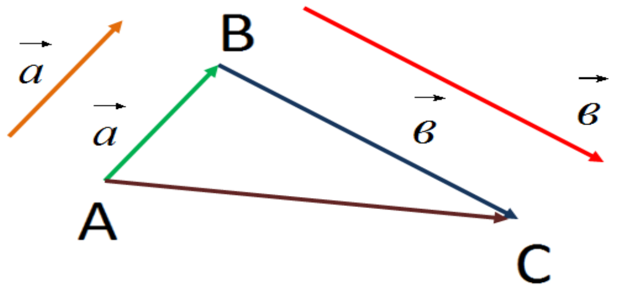
Критерии оценивания:

1. Объясняет признаки, свойства параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости;
2. применяет признаки параллельности и перпендикулярности плоскостей при решении задач.

Раздел 13. Прямоугольная система координат и векторы в пространстве
Тема 63. Векторы в пространстве и действия над ними.

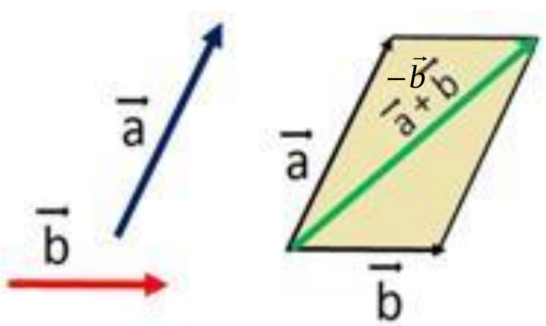
Суммой векторов $a\ (a_1; a_2; a_3)$ и $b\ (b_1; b_2; b_3)$ называется вектор $c\ (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2; a_3\ + b_3)$
Правило треугольника.
Сложение и вычитание векторов в пространстве вводится так же, как и на плоскости и подчиняется тем же законам.

Введем правило сложения двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$.Отложим от какой-нибудь точки *A* вектор $\vec{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки *B* отложим вектор $\vec{BC}$, равный $\vec{в}$. Вектор $\vec{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{в}$.
Это правило сложения векторов называется правилом треугольника.



$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{в}$$

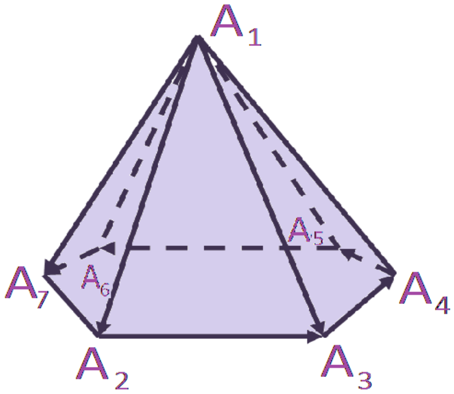
Для любых трех точек *A, B* и С имеет место равенство $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.
Правило параллелограмма.
Для сложения двух неколлинеарных векторов можно пользоваться также правилом параллелограмма, известным из курса планиметрии. Чтобы сложить два неколлинеарных вектора, нужно отложить их от одной точки и построить на них параллелограмм. Тогда вектор, выходящий из этой же точки, и содержащий диагональ параллелограмма, равен сумме двух данных векторов.



Разность векторов.
Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{в}$ равна вектору $\vec{a}$. Разность
$\vec{a} - \vec{в}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ можно найти по формуле $\vec{a} - \vec{в} = \vec{a} + (-\vec{в})$, где $(-\vec{в})$ – вектор, противоположный вектору $\vec{в}$.

Правило многоугольника.

Сформулируем правило многоугольника. Первый вектор складывается со вторым, затем их сумма — с третьим вектором и т. д. Из законов сложения векторов следует, что сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.



$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_5A_6} + \overrightarrow{A_6A_7} = \overrightarrow{A_1A_7}$$

Произведение вектора на число.

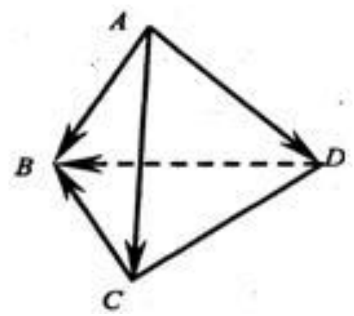
Произведением вектора a $(a_1; a_2; a_3)$ на число λ называется вектор λa $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$.

Абсолютная величина вектора λa равнаλa, а направление совпадает с направлением вектора a, если λ> 0, и противоположно направлению вектора a, если λ < 0.

IV. Бекіту / Закрепление:

Задача.

Дан тетраэдр ABCD. Найдите сумму:



а) $\vec{AB} + \vec{BД} + \vec{ДC} = \vec{AC}$

б) $\vec{AД} + \vec{ДC} + \vec{CB} = \vec{AB}$

в) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CД} + \vec{ДA} = \vec{0}$

2. Задача.(у доски)

Дано: $\mathrm{A}(2; 1; 4)$,

$\mathrm{B}(3; 0; -1)$,

$\mathrm{C}(1; -2; 0)$.

Найти: $2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3 \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

Решение

Находим координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$: $\{3-2; 0-1; -1-4\}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\{1; -1; -5\}$;

Затем находим координаты вектора $2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$: $\{2 \cdot 1; 2 \cdot (-1); 2 \cdot (-5)\}$

$2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}\{2; -2; -10\}$

Теперь находим аналогично координаты вектора $3 \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$: $\{3 \cdot (-2); 3 \cdot (-2); 3 \cdot 1\}$

$3 \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}\{-6; -6; 3\}$

Теперь находим сумму данных векторов, складывая соответствующие координаты:

$2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3 \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \{2 + (-6);\ -2 + (-6);\ -10 + 3\}$

$2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3 \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \{-4;\ -8;\ -7\}$.

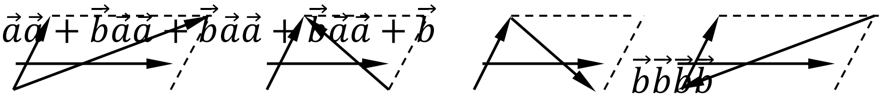
Ответ:$\{-4;\ -8;\ -7\}$.

3.Самостоятельная работа.

1 вариант

1) Найдите вектор $\vec{a} + b$ по правилу параллелограмма:

а) б) в) г)



Ответ:

2) Найдите сумму векторов: $\vec{a}$(4;2;-4)и $\vec{b}$(6;-4 ;10).

3) Умножьте вектор $\vec{a}(4; 2; -1)$ на –3.

4) Дано: $\vec{a}(2; 0; -3), \vec{b}(5; -1; 2)$. Найдите $\left|3\vec{a} - \vec{b}\right|$ 5)Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1}$.

Для совершенствования и закрепления умений и навыков решения заданий на действия с векторами нужно выполнить по учебнику задание № 12 стр. 75 (у доски); № 13 стр. 75 (в парах).

№ 12 (у доски)

Дано: $A(2; 1; 4)$,

$B(3; 0; -1)$,

$C(1; -2; 0)$.

Найти: $2 \cdot \overrightarrow{AB} + 3 \cdot \overrightarrow{BC}$

Решение

Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $\{3 - 2; 0 - 1; -1 - 4\}$

;

Затем находим координаты вектора $2 \cdot \overrightarrow{AB}$: $\{2 \cdot 1; 2 \cdot (-1); 2 \cdot (-5)\}$

$2 \cdot \overrightarrow{AB}\{2; -2; -10\}$

Теперь находим аналогично координаты вектора $3 \cdot \overrightarrow{BC}$: $\{3 \cdot (-2); 3 \cdot (-2); 3 \cdot 1\}$

$3 \cdot \overrightarrow{BC}\{-6; -6; 3\}$

Теперь находим сумму данных векторов, складывая соответствующие координаты: $2 \cdot \overrightarrow{AB} + 3 \cdot \overrightarrow{BC} = \{2 + (-6);\ -2 + (-6);\ -10 + 3\}$

$2 \cdot \overrightarrow{AB} + 3 \cdot \overrightarrow{BC} = \{-4;\ -8;\ -7\}$.

Ответ: $\{-4;\ -8;\ -7\}$.

№ 13 (в парах) – каждый учащийся решает по одной задаче, после выполнения решения, учащиеся обмениваются тетрадями и производят проверку правильности выполнения задачи, комментируя правильность решения в случае неверного решения (после выполнения данного задания каждый учащийся выставляет баллы от 1 до 5 тому учащемуся, которого проверял).

Дано: $\vec{a}(2; 0; -3)$,

$\vec{b}(5;-1;2)$.

Найти: 1) $|3\vec{a}-\vec{b}|$;   2) $|2\vec{a}+3\vec{b}|$.

Решение

<u>Первый случай</u>

Находим координаты вектора $3\vec{a}$: $\{3\cdot 2; 3\cdot 0; 3\cdot(-3)\}$

$3\vec{a}$: $\{6; 0; -9\}$;

Затем находим разность векторов $3\vec{a}-\vec{b}$: $\{6-5; 0-(-1); -9-2\}$

$3\vec{a}-\vec{b}$: $\{1; 1; -11\}$;

Теперь находим длину вектора $|3\vec{a}-\vec{b}|$: $\sqrt{\mathbf{1^2+1^2+(-11)^2}}=\sqrt{\mathbf{1+1+121}}=\sqrt{\mathbf{123}}$.

$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{\mathbf{123}}$.

<u>Второй случай</u>

Находим координаты вектора $2\vec{a}$: $\{2\cdot 2; 2\cdot 0; 2\cdot(-3)\}$

$2\vec{a}$: $\{4; 0; -6\}$;

Находим координаты вектора $3\vec{b}$: $\{3\cdot 5; 3\cdot(-1); 3\cdot 2\}$

$3\vec{b}$: $\{15; -3; 6\}$;

Затем находим сумму векторов $2\vec{a}+3\vec{b}$: $\{4+15; 0+(-3); -6+6\}$

$2\vec{a}+3\vec{b}$: $\{19; -3; 0\}$;

Теперь находим длину вектора $|2\vec{a}+3\vec{b}|$: $\sqrt{\mathbf{19^2+(-3)^2+0^2}}=\sqrt{\mathbf{361+9+0}}$

$=\sqrt{\mathbf{370}}$.

$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{\mathbf{370}}$.

Ответ: 1) $|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{\mathbf{123}}$;   **2)** $|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{\mathbf{370}}$.

Практическое выполнение заданий

Для повторения навыков нахождения координат вектора, длины вектора и действий над векторами необходимо выполнить тестовое задание.

Тестовое задание

Найдите сумму векторов: $\vec{a}(4;2;-4)$ и $\vec{b}(6;-4;10)$.

(2; -6; 6);   B) (2; -6;14);   C) (10; -2; 6);   D) (2; -2; 6);   E) (10; -2; -14)

Умножьте вектор $\vec{a}(4;2;-1)$ на –3:

A) (-12; -6; -3);   B) (12; -6; -3); C) (-12; 6; 3); D) (-12; -6; 3); E) (-12; 6; -3).

Найдите разность векторов: $\vec{a}(6;-2;2)$ и $\vec{b}(4;-7;5)$.

(-2; 5; -3);   B) (2; -5; 3);   C) (-2; -5; 3);   D) (2; 5; 7);   E) (2; 5; -3).

Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(2;-5;3)$ и $B(5;1;-2)$.

(3; -6; 5);   B) (3; 6;-5);   C) (-3; 6; -5);   D) (7; -4; 1);   E) (-3; 6; 5).

Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если$A(-1;-1;1)$ и $B(-3;1;\ 0)$.
4;   B) 9;   C) 5;   D) 3;   E) .

Вариант А
Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, если $A(2;-3;4),\ B(1;-2;2)$.
Даны векторы $\overrightarrow{AB}(-1;3;-3)$ и$\overrightarrow{BC}(4;-5;1)$. Найдите координаты и длинувектора$\overrightarrow{AC}$.

Вариант В
Даны векторы $\overrightarrow{AB}(-1;3;-3)$ и$\overrightarrow{BC}(4;-5;1)$. Найдите координаты и длинувектора$\overrightarrow{AC}$.
Даны векторы $\vec{a}(3;1;-2),\ \vec{b}(4;-1;-3)$. Найдите координаты вектора $2\vec{a}+\vec{b}$.
Найдитедлинувектора$\vec{a}-3\vec{b}$, если $\vec{a}(2;1;-5),\ \vec{b}(-3;0;1)$.

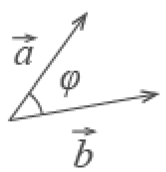
Вариант С
Даны векторы $\vec{a}(3;1;-2),\ \vec{b}(4;-1;-3)$. Найдите координаты вектора $3\vec{a}+2\vec{b}$.
Найдитедлинувектора$3\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}(2;1;-5),\ \vec{b}(-3;0;1)$.
Из точки A построен вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Найдите координаты точки B, если:
$A(3;1;-2), \vec{a}(1;-3;1)$.
Даны векторы $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ и$\overrightarrow{BC}(4;-1;1)$. Найдите координаты и длинувектора$\overrightarrow{AC}$.

Данный вид работы учащиеся выполняют в тетрадях, после чего учитель собирает тетради для проверки.

Критерии оценивания:
1. Выполняет сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число;
Вопросы для самоконтроля:
1. Что называется координатами вектора?
2. Как найти длину вектора?
3. Какие векторы называются коллиниарные?
4. Как найти сумму векторов?

Тема 65. Скалярное произведение векторов в координатах.
Векторы можно умножать не только на числа, но и друг на друга.

Скалярным произведением векторов называется произведение длин векторов на косинус угла между ними.
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$



Если векторы перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю.

А вот так скалярное произведение выражается через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\vec{a} \bullet \vec{b} = x_a \bullet x_b + y_a \bullet y_b$

Из формулы для скалярного произведения можно найти угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \bullet |\vec{b}|} = \frac{x_a \bullet x_b + y_a \bullet y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \bullet \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Определение 1. Скалярным произведением двух векторов называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Согласно определению, формула выглядит так: $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \bullet |\vec{b}| \cos\varphi.$ (1)

Если в задаче и длины векторов, и угол между ними преподнесены "на блюдечке с голубой каёмочкой", то условие задачи и её решение выглядят так:

Пример 1. Даны $\vec{a},\ \vec{b}$. Найти $\vec{a} \bullet \vec{b}$, если

$|\vec{a}| = 3;\ |\vec{b} = 8|;\ \varphi(\vec{a},\ \vec{b}) = \frac{\pi}{6}.$

Решение:

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 3 \bullet 8 \bullet \cos\frac{\pi}{6} = 3 \bullet 8 \bullet \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}.$

Сформулируем другое определение скалярного произведения двух векторов, эквивалентное определению 1.

Определение 2. Скалярным произведением двух векторов называется число (скаляр), равное произведению длины одного их этих векторов на проекцию другого вектора на ось, определяемую первым из указанных векторов. Формулы выглядят так:

$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_a \vec{b}$ (2)

или

$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_b \vec{a}$ (3)

Частое применение скалярного произведения векторов

Скалярное произведение двух векторов используется для расчёта работы постоянной силы.

Посмотрите ещё раз на рисунок в начале статьи. Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из начала координат в конец вектора *A* под действием постоянной силы *F* = *B*, образующей угол φ с перемещением *S* = *A*. Из физики известно, что работа силы *F* при перемещении *S* равна $W = FS\cos\varphi$. Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении её точки приложения равна скалярному произведению вектора силы *F* = *B* на вектор перемещения *S* = *A*.

Алгебраические свойства скалярного произведения векторов

$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (переместительное свойство)

$(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$ (сочетательное относительно числового множителя свойство)

$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$ (распределительное относительно суммы векторов свойство)
$\vec{a}\vec{a}>0$, если $\vec{a}$ - ненулевой вектор, и $\vec{a}\vec{a}=0$, если $\vec{a}$ - нулевой вектор.
Выражение скалярного произведения векторов через координаты перемножаемых векторов
Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами

$$\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$$

и

$$\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2),$$

то скалярное произведение этих векторов равно сумме попарных произведений их соответствующих координат, т.е.

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Геометрические свойства скалярного произведения векторов
1. Два вектора называют *ортогональными*, если скалярное произведение этих векторов равно нулю, т.е.

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

Ортогональностью в векторной алгебре называется перпендикулярность двух векторов.
2. Два ненулевых вектора составляют острый угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение положительно, а тупой угол - тогда и только тогда, когда их скалярное произведение отрицательно.:
<u>Пример 1</u>

Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}|=2,\quad |\bar{b}|=5,\quad \angle(\bar{a};\bar{b})=\dfrac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу $\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\angle(\bar{a};\bar{b})$. В данном случае:

$$\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\angle(\bar{a};\bar{b})=2\cdot5\cdot\cos\frac{\pi}{6}=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$$

Ответ: $\bar{a}\bar{b}=5\sqrt{3}$
<u>Пример 7</u>

Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известно, что $|\bar{a}|=4,\quad |\bar{b}|=2\sqrt{2},\quad \bar{a}\bar{b}=8$.
Решение: Используем формулу:

$$\cos\angle(\bar{a};\bar{b})=\frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{8}{4\cdot2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

На заключительном этапе вычислений использован технический приём – устранение иррациональности в знаменателе. В целях устранения иррациональности я домножил числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$.

Итак, если $\cos\angle(\overline{a};\overline{b})=\frac{\sqrt{2}}{2}$, то:

$\angle(\overline{a};\overline{b})=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$

Значения обратных тригонометрических функций можно находить по тригонометрической таблице. Хотя случается это редко. В задачах аналитической геометрии значительно чаще появляется какой-нибудь неповоротливый медведь вроде $\arccos\frac{5}{17}$, и значение угла приходится находить приближенно, используя калькулятор. Собственно, такую картину мы ещё неоднократно увидим.

Ответ: $\angle(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{4}\text{ рад.}=45^\circ$

Пример 2. Доказать, что вектор $\vec{c}=\vec{a}-\frac{\vec{b}\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)}{\overline{b^2}}$ ортогонален (перпендикулярен) вектору $\vec{b}$

Решение. Векторы ортогональны (перпендикулярны), если скалярное произведение этих векторов равно нулю. Перемножим векторы $\vec{c}$ и $\vec{b}$ как многочлены:

$$\vec{c}\bullet\vec{b}=\left(\vec{a}-\frac{\vec{b}\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)}{\overline{b^2}}\right)\bullet\vec{b}=\vec{a}\bullet\vec{b}-\frac{\vec{b}\bullet\vec{b}\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)}{\overline{b^2}}=$$

$$=\vec{a}\bullet\vec{b}-\vec{a}\bullet\vec{b}=0.$$

Итак, ортогональность (перпендикулярность) векторов доказана.

Пример 3. Даны длины двух векторов и угол между ними:

$|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ \measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Определить, при каком значении λ векторы $3\vec{a}+\lambda\vec{b}$ и $\vec{a}-2\vec{b}$ ортогональны (перпендикулярны).

Решение. Векторы ортогональны (перпендикулярны), если скалярное произведение этих векторов равно нулю. Перемножим векторы по правилу умножения многочленов:

$$\left(3\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=3\overline{a^2}-6\vec{a}\vec{b}+\lambda\vec{a}\vec{b}-2\lambda\overline{b^2}.$$

Теперь вычислим каждое слагаемое:

$$3\overline{a^2}=3\bullet\left|\vec{a}\right|^2=3\bullet9=27$$

$$6\vec{a}\vec{b}=6\bullet\left[\left|\vec{a}\right|\bullet\left|\vec{b}\right|\bullet\cos\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right]=$$

$$=6\bullet\left[6\bullet\frac{1}{2}\right]=18.$$

$$\lambda\vec{a}\vec{b}=\lambda\bullet\left[6\bullet\frac{1}{2}\right]=3\lambda$$

$2\lambda\vec{b}^2 = 2\lambda \bullet \left|\vec{b}\right|^2 = 2\lambda \bullet 4 = 8\lambda$.

Составим уравнение (равенство скалярного произведения векторов нулю), приведём подобные члены и решим уравнение:

$27 - 18 + 3\lambda - 8\lambda = 0$

$9 - 5\lambda = 0$

$5\lambda = 9$

$\lambda = \frac{9}{5} = 1,8.$

Пример 4. Даны векторы:

$\vec{a} = \left(1;\ \ 5;\ \ 1\right),\ \vec{b} = \left(1;\ -5;\ \ 2\right),$

$\vec{c} = \left(2;\ \ 1;\ \ \frac{3}{2}\right),\ \vec{d} = \left(0;\ \ 0;\ \ 1\right)$.

Вычислить скалярные произведения всех пар данных векторов. Какой угол (острый, прямой, тупой) образуют эти пары векторов?

Решение. Векторы даны в координатах, поэтому скалярные произведения векторов будем вычислять путём сложения произведений соответствующих координат.

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 1 \bullet 1 + 5 \bullet (-5) + 1 \bullet 2 = 1 - 25 + 2 = -22$.

Скалярное произведение векторов отрицательно, поэтому эти векторы образуют тупой угол.

$\vec{a} \bullet \vec{c} = 1 \bullet 2 + 5 \bullet 1 + 1 \bullet \frac{3}{2} = 2 + 5 + \frac{3}{2} = \frac{17}{2} = 8,5$.

Скалярное произведение векторов положительно, поэтому эти векторы образуют острый угол.

$\vec{a} \bullet \vec{d} = 1 \bullet 0 + 5 \bullet 0 + 1 \bullet 1 = 1$.

Скалярное произведение векторов положительно, поэтому эти векторы образуют острый угол.

$\vec{b} \bullet \vec{c} = 1 \bullet 2 + (-5) \bullet 1 + 2 \bullet \frac{3}{2} = 2 - 5 + 3 = 0$.

Скалярное произведение векторов равно нулю, поэтому эти векторы образуют прямой угол.

$\vec{b} \bullet \vec{d} = 1 \bullet 0 + (-5) \bullet 0 + 2 \bullet 1 = 2$.

Скалярное произведение векторов положительно, поэтому эти векторы образуют острый угол.

$\vec{c} \bullet \vec{d} = 2 \bullet 0 + 1 \bullet 0 + \frac{3}{2} \bullet 1 = \frac{3}{2}$.

Скалярное произведение векторов положительно, поэтому эти векторы образуют острый угол.

Критерии оценивания:

1.Находит скалярное произведение векторов

Вопросы для самоконтроля:
1. Что называется координатами вектора?
2. Как найти длину вектора?
3. Какие векторы называются коллиниарные?
4. Как найти сумму векторов?

Тема 66. Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты середины отрезка.

Сегодня на уроке мы начинаем изучать четвертый блок курса геометрии 10 класса “Декартовы координаты и векторы в пространстве”.
Какую тему созвучную с темой нашего урока мы изучали в 8 классе? Какое ключевое слово определяют эти две темы? **(Координаты).** Координаты на плоскости и в пространстве можно вводить бесконечным числом различных способов.
В общеобразовательном курсе изучается прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Иначе её называют Декартовой системой координат по имени французского ученого философа Рене Декарта (1596 – 1650) впервые введшего координаты в геометрию.
(Рассказ ученика об Рене Декарте.)
Рене Декарт родился в 1596 г. в городе Лаэ на юге Франции, в дворянской семье. Отец хотел сделать из Рене офицера. Для этого в 1613 г. он отправил Рене в Париж. Много лет пришлось Декарту пробыть в армии, участвовать в военных походах в Голландии, Германии, Венгрии, Чехии, Италии, в осаде крепости гугенотов Ла-Рошали. Но Рене интересовала философия, физика и математика. Вскоре по приезде в Париж он познакомился с учеником Виета, видным математиком того времени — Мерсеном, а затем и с другими математиками Франции. Будучи в армии, Декарт все свое свободное время отдавал занятиям математикой. Он изучил алгебру немецких, математику французских и греческих ученых.
После взятия Ла-Рошали в 1628 г. Декарт уходит из армии. Он ведет уединенный образ жизни с тем, чтобы реализовать намеченные обширные планы научных работ.
Философские взгляды Декарта не соответствовали требованиям католической церкви. Поэтому он переселился в Голландию, где прожил 20 лет, с 1629 по 1649 г., но из-за гонений протестантской церкви в 1649 г. переехал в Стокгольм. Но суровый северный климат Швеции оказался для Декарта губительным, и он умер от простуды в 1650 г.
Декарт был крупнейшим философом и математиком своего времени. В основе его философии лежал материализм. Самым известным трудом Декарта является его “Геометрия”. Декарт ввел систему координат, которой пользуются все и в настоящее время. Он установил соответствие между числами и отрезками прямой и таким образом ввел алгебраический метод в геометрию. Эти открытия

Декарта дали огромный толчок развитию как геометрии, так и другим разделам математики, оптики. Появилась возможность изображать зависимость величин графически на координатной плоскости, числа - отрезками и выполнять арифметические действия над отрезками и другими геометрическими величинами, а также различными функциями. Это был совершенно новый метод, отличавшийся красотой, изяществом и простотой. [2]

Р. Декарт — французский ученый (1596— 1650)

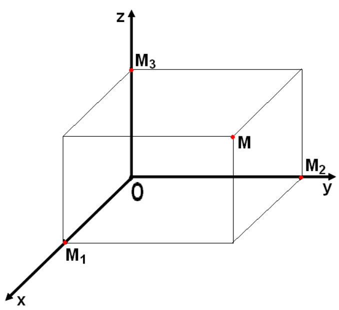
Сегодня на уроке мы продолжим изучение декартовой системы координат, и покажем, что координаты в пространстве вводятся также просто, как и координаты на плоскости.

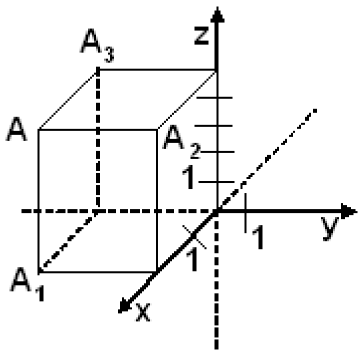
В общеобразовательном курсе изучается прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Иначе её называют Декартовой системой координат по имени французского ученого философа Рене Декарта (1596 – 1650) впервые введшего координаты в геометрию.

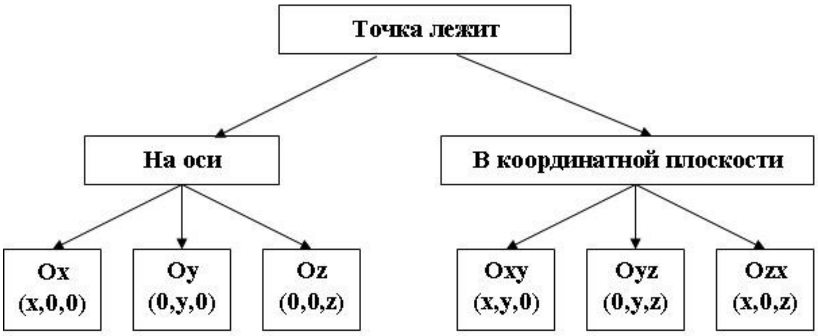
Три плоскости, проходящие через оси координат Ox и Oy, Oy и Oz, Oz и Ox, называются координатными плоскостями: Oxy, Oyz, Ozx.

В прямоугольной системе координат каждой точке M пространства сопоставляется тройка чисел – её координаты.

M (x,y,z), где x – абсцисса, y – ордината, z - аппликата.







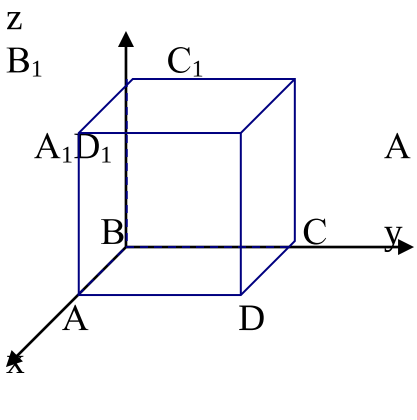
Координатная прямая – это прямая с выбранными на ней направлением, началом отсчета и единичным отрезком.
(На доске нарисована таблица, её необходимо заполнить вместе с учениками. Рассмотреть основные понятия декартовых координат, формулу расстояния между точками, формулы координат середины отрезка на плоскости, и попытаться учащимся самим сформулировать основные понятия и формулы в пространстве)

На плоскости	В пространстве
Определение.	Определение.
2 оси, ОУ- ось ординат, ОХ- ось абсцисс	3 оси, ОХ - ось абсцисс, ОУ – ось ординат, OZ - ось аппликат.
ОХ перпендикулярна ОУ	ОХ перпендикулярна ОУ, ОХ перпендикулярна OZ , ОУ перпендикулярна OZ.
(O;O)	(O;O;O)
Направление, единичный отрезок	Направление, единичный отрезок
Расстояние между точками. $d = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$	Расстояние между точками. d = v (x2 - x1)? + (y2 - y1)? + (z2 – z1)?
Координаты середины отрезка. $x = \frac{x1 + x2}{2}$; $y = \frac{y1 + y2}{2}$	Координаты середины отрезка. $x = \frac{x1 + x2}{2}$; $y = \frac{y1 + y2}{2}$; $z = \frac{z1 - z2}{2}$

Для беседы используются рисунки:
Вопросы для заполнения первой части таблицы.
1. Сформулируйте определение декартовой системы координат?
2. Попробуйте сформулировать определение декартовой системы координат в пространстве?
3. Назовите оси координат на плоскости? Назовите оси координат в пространстве? Название, какой оси мы не изучали? (Знакомство с новым словом *“аппликата”)*
4. Какие плоскости рассматриваются в планиметрии (в пространстве)?
5. Назовите координату начала координат на плоскости (в пространстве)?
6. Какие еще компоненты должна иметь система координат на плоскости и в пространстве?
7. Как задается координата точки на плоскости и в пространстве?

Вывод:
Расскажите, как вводится, декартова система координат в пространстве и из чего она состоит?
При беседе построить рисунок фронтально-диметрической проекции осей.
Рассмотреть положение осей в соответствии с черчением.
Построить точку с заданными координатами А (2; - 3).
Построить точку с заданными координатами А (1; 2; 3).
Рассмотреть построение на доске. Работа по карточкам (2 человека у доски).
Работа с классом: задача № 3 из учебника, страница 287, устно. [1]
Вопросы для заполнения второй части таблицы.
1. Запишите формулу расстояния между точками на плоскости.
2. Как бы вы записали формулу расстояния между точками в пространстве?
Докажем её справедливость (вывод формулы - п. 154, стр. 273) [1]
Опережающее задание - вывод формулы на доске учащимся.
Работа по карточкам 2 человека у доски.
Найти длину отрезка:
А (1;2;3;) и В (-1; 0; 5)
А (1;2;3) и В (х; 2 ;-3)
Работа с классом: Задача № 5 на странице 288 [1].
Вопросы для заполнения третьей части таблицы.
1. Как запишется формулы координат середины отрезка?
2. Как бы вы записали формулы координат середины отрезка?
Докажем её справедливость (вывод формулы п. -154 стр., 273) [1].
Опережающее задание - вывод формулы координат середины отрезка у доски.
Работа с классом. Устно.
Найдите координаты точки М - середины отрезка
А(2;3;2), В (0;2;4) и С (4;1;0)
АС
АВ
Является ли точка В серединой отрезка АС?

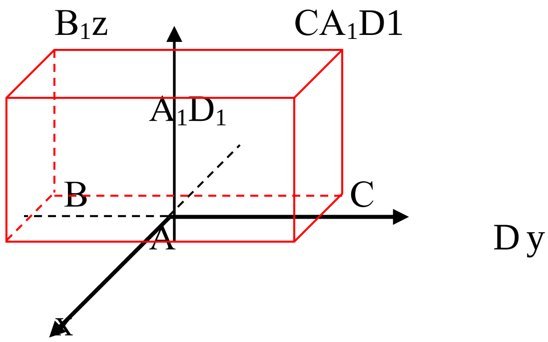
<u>*Задача 1.*</u> Дан куб с ребром, равным 4. Определите координаты его вершин.



Ответы:

А (4;0;0) A_1 (4;0;4)
В (0;0;0) B_1 (0;0;4)
С (0;4;0) C_1 (0;4;4)
D (4;4;0) D_1 (4;4;4)

<u>*Задача 2.*</u> Дан прямоугольный параллелепипед, измерения которого равны 6;4;4. Определите координаты его вершин.



Ответы:

A (2;-3;0) A_1 (2;-3;4)
B (-2;-3;0) B_1 (-2;-3;0)
C (-2;3;0) C_1 (-2;3;4)
D (2;3;0) D_1 (2;3;4)

Пример.
3)Найдите координаты середины отрезка: а) *AB*, если *A*(1, 2, 3) и *B*(-1, 0, 1); б) *CD*, если *C*(3, 3, 0) и *D*(3, -1, 2).
(Ответ: а) (1, 1, 2); б) (3, 1, 1).)

Задача .1) Даны точки A(1; -2; -3), B(2; -3; 0), C(3; 1; -9), D(-1; 1; -12). Вычислить расстояние между 1). A и C, 2). B и D, 3). C и D.

2) Вычислить расстояния от начала координат O до точек A(4; -2; -4), B(-4; 12; 6), C(12; -4; 3), D(12; 16; -15).

3) Доказать, что треугольник с вершинами A(3; -1; 2), B(0; -2; 2), C(-3; 2; 1) равнобедренный.

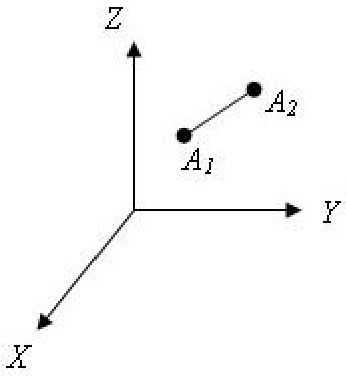
Критерии оценивания:
1. Изображает вектор на плоскости и в пространстве, описывает её;
2. находит координаты середины отрезка в пространстве.

Вопросы для самоконтроля:
1. **Как вводится, декартова система координат? Из чего она состоит?**
2. **Как определяются координаты точки в пространстве?**
3. **Чуму равна координата начала координат?**
4. **Чему равно расстояние от начала координат до заданной точки?**
5. **Назовите формулу координат середины отрезка и расстояния между точками в пространстве?**

Тема 68. Координаты серединыотрезка, расстояниямеждудвумяточками.

Сегодня на уроке мы продолжим изучение декартовой системы координат, и покажем, что координаты в пространстве вводятся также просто, как и координаты на плоскости.
В общеобразовательном курсе изучается прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Иначе её называют Декартовой системой координат по имени французского ученого философа Рене Декарта (1596 – 1650) впервые введшего координаты в геометрию.

Расстояниемеждуточками



Есть две произвольные точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ и $A_2(x_2;y_2;z_2)$

Тогда расстояние между точками A_1 и A_2 вычисляется так:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

<u>Пример 1:</u>

На оси OX найти точку, равноудалённую от точек A(2;-4;5) и B(-3;2;7).

<u>Решение:</u>

Пусть т. M – искомая точка. Так как т. M лежит на оси Ox, то она имеет координаты (x,0,0). По условию задачи .;.

Приравняем эти равенства и возведём в квадрат:

$(x-2)^2+41=(x+3)^2+53$. Решая это уравнение, получим:

10x=-17, x=-1,7. Значит координаты т.M будут (-1,7;0;0)

<u>Ответ:</u> M (-1,7;0;0)

Координаты точки C(x,y,z), делящий отрезок между точками $M_1(x_1;\ y_{1;}\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_{2;}\ z_2)$ в заданном отношении λ определяется по формулам:

В частности, при λ=1 получаются формулы середины отрезка:

Координаты середины отрезка в пространстве

Есть две произвольные точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ и $A_2(x_2;y_2;z_2)$. Тогда серединой отрезка A_1A_2 будет точка Cс координатами x, y, z, где

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

<u>Пример 2:</u>

Точка C (2;3;6) является серединой отрезка AB. Определить координаты точки A, если B(7;5;8).

<u>Решение:</u>

$x_1=4-7=-3$; $y_1=6-5=1$; $z_1=12-8=4$

<u>Ответ:</u>A(-3;1;4)

На плоскости	В пространстве

Определение.	Определение.
2 оси, ОУ- ось ординат, ОХ- ось абсцисс	3 оси, ОХ - ось абсцисс, ОУ – ось ординат, OZ - ось аппликат.
ОХ перпендикулярна ОУ	ОХ перпендикулярна ОУ, ОХ перпендикулярна OZ , ОУ перпендикулярна OZ.
(О;О)	(О;О;О)
Направление, единичный отрезок	Направление, единичный отрезок
Расстояние между точками. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	Расстояние между точками. d = v (x2 - x1)? + (y2 - y1)? + (z2 – z1)?
Координаты середины отрезка. $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$	Координаты середины отрезка. $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \frac{z_1 - z_2}{2}$

Для беседы используются рисунки:

Вопросы для заполнения первой части таблицы.

1. Сформулируйте определение декартовой системы координат?
2. Попробуйте сформулировать определение декартовой системы координат в пространстве?
3. Назовите оси координат на плоскости? Назовите оси координат в пространстве? Название, какой оси мы не изучали? (Знакомство с новым словом *“аппликата”)*
4. Какие плоскости рассматриваются в планиметрии (в пространстве)?
5. Назовите координату начала координат на плоскости (в пространстве)?
6. Какие еще компоненты должна иметь система координат на плоскости и в пространстве?
7. Как задается координата точки на плоскости и в пространстве?

Вывод:

Расскажите, как вводится, декартова система координат в пространстве и из чего она состоит?

При беседе построить рисунок фронтально-диметрической проекции осей.

Рассмотреть положение осей в соответствии с черчением.

Построить точку с заданными координатами А (2; - 3).

Построить точку с заданными координатами А (1; 2; 3).

Рассмотреть построение на доске. Работа по карточкам (2 человека у доски).

Работа с классом: задача № 3 из учебника, страница 287, устно. [1]

Вопросы для заполнения второй части таблицы.

1. Запишите формулу расстояния между точками на плоскости.
2. Как бы вы записали формулу расстояния между точками в пространстве?

Докажем её справедливость (вывод формулы - п. 154, стр. 273) [1]

Опережающее задание - вывод формулы на доске учащимся.

Работа по карточкам 2 человека у доски.

Найти длину отрезка:

А (1;2;3;) и В (-1; 0; 5)

А (1;2;3) и В (х; 2 ;-3)

Работа с классом: Задача № 5 на странице 288 [1].

Вопросы для заполнения третьей части таблицы.

1. Как запишется формулы координат середины отрезка?
2. Как бы вы записали формулы координат середины отрезка?

Докажем её справедливость (вывод формулы п. -154 стр., 273) [1].

Опережающее задание - вывод формулы координат середины отрезка у доски.

Работа с классом. Устно.

Найдите координаты точки М - середины отрезка

А(2;3;2), В (0;2;4) и С (4;1;0)

АС

АВ

Является ли точка В серединой отрезка АС?

Пример.

В прямоугольной системе координат трехмерного пространства дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известно, что $C_1(1, 1, 0)$, а $M(4, 2, -4)$ - середина диагонали BD_1. Найдите координаты точки *A*.

Решение.

Диагонали параллелограмма пересекаются в одной точке, и эта точка является серединой каждой из этих диагоналей. Таким образом, мы можем утверждать, что точка *M* является серединой отрезка AC_1. Из формул для нахождения координат середины отрезка имеем

$$x_M = \frac{x_A + x_{C_1}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_A = 2 \cdot x_M - x_{C_1} = 2 \cdot 4 - 1 = 7$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{C_1}}{2} \quad \Rightarrow \quad y_A = 2 \cdot y_M - y_{C_1} = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$z_M = \frac{z_A + z_{C_1}}{2} \quad \Rightarrow \quad z_A = 2 \cdot z_M - z_{C_1} = 2 \cdot (-4) - 0 = -8$$

Итак, точка *A* имеет координаты $(7, 3, -8)$.

Ответ:

$(7, 3, -8)$.

Пример 2.

Найти расстояние между точками A(-1, 3, 3) и B(6, 2, -2).

Решение.

$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2} =$

$= \sqrt{(6 - (-1))^2 + (2 - 3)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Ответ: AB = $5\sqrt{\boxed{3}}$.

Примечание: задачи разбирают в программе Geogebra, затем решаются на доске и делается сравнительный анализ.

1)Найдите координаты ортогональных проекций точек $A(1, 3, 4)$ и $B(5, -6, 2)$ на: а) плоскость Oxy;

б) плоскость Oyz;

в) ось Ox;

г) ось Oz.

(Ответ: а) (1, 3, 0), (5, -6, 0); б) (0, 3, 4), (0, -6, 2); в) (1, 0, 0), (5, 0, 0); г) (0, 0, 4), (0, 0, 2).)

2) На каком расстоянии находится точка $A(1, -2, 3)$ от координатной плоскости:

а) Oxy;

б) Oxz;

в) Oyz?

(Ответ: а) 3; б) 2; в) 1)

3)Найдите координаты середины отрезка: а) AB, если $A(1, 2, 3)$ и $B(-1, 0, 1)$; б) CD, если $C(3, 3, 0)$ и $D(3, -1, 2)$.

(Ответ: а) (1, 1, 2); б) (3, 1, 1).)

Задача .1) Даны точки A(1; -2; -3), B(2; -3; 0), C(3; 1; -9), D(-1; 1; -12). Вычислить расстояние между 1). A и C, 2). B и D, 3). C и D.

2) Вычислить расстояния от начала координат O до точек A(4; -2; -4), B(-4; 12; 6), C(12; -4; 3), D(12; 16; -15).

3) Доказать, что треугольник с вершинами A(3; -1; 2), B(0; -2; 2), C(-3; 2; 1) равнобедренный.

4) Доказать, что треугольник с вершинами $A_1(3; -1; 6)$, $A_2(-1; 7; -2)$, $A_3(1; -3; 2)$ прямоугольный.

5) Даны три вершины A(3; -4; 7), B(-5; 3; -2), C(1; 2; -3) параллелограмма ABCD. Найти его четвертую вершину D, противоположную B.

6) Даны три вершины A(3; -1; 2), B(1; 2; -4), C(-1; 1; 2) параллелограмма ABCD. Найти его четвертую вершину D.

Критерии оценивания:

1. Определяет расстояние между двумя точками;.
2. применяет при решении задач уравнение сферы.

Вопросы для самоконтроля:

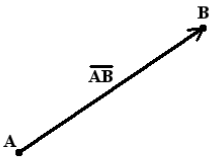
1. **Чемотличаетсяпрямоугольная система координат в пространстве от прямоугольнойсистемы координат наплоскости?**
2. **Назовитеформулунахождениярасстояниямеждудвумяточками, и серединыотрезка?**
3. **Как вводится, декартова система координат? Из чего она состоит?**

4. **Как определяются координаты точки в пространстве?**
5. **Чуму равна координата начала координат?**
6. **Чему равно расстояние от начала координат до заданной точки?**
7. **Назовите формулу координат середины отрезка и расстояния между точками в пространстве?**

Тема 68. Координаты вектора в пространстве

Определение вектора

Определение. Вектор - это направленный отрезок, то есть отрезок, имеющий длину и определенное направление. Графически вектора изображаются в виде направленных отрезков прямой определенной длины. (рис.1)



Обозначение вектора

Вектор началом которого есть точка A, а концом - точка B, обозначается AB (рис.1). Также вектора обозначают одной маленькой буквой, например $\boxed{a}$.

Длина вектора

Определение. Длина направленного отрезка определяет числовое значение вектора и называется длиной вектора или модулем вектора AB.

Для обозначения длины вектора используются две вертикальные линии слева и справа |AB|.

Нулевой вектор

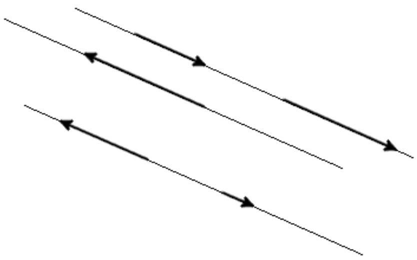
Определение. Нулевым вектором называется вектор, у которого начальная и конечная точка совпадают.

Нулевой вектор обычно обозначается как 0.

Длина нулевого вектора равна нулю.

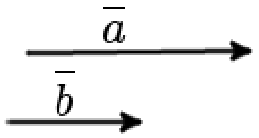
Коллинеарные вектора

Определение. Вектора, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой называют коллинеарными векторами (рис. 2).



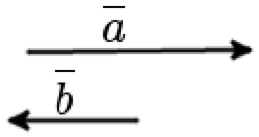
Сонаправленные вектора

Определение. Два коллинеарных вектора $\boxed{a}$ и $\boxed{b}$ называются сонаправленными векторами, если их направления совпадают: $\boxed{a}\uparrow\uparrow\boxed{b}$ (рис. 3).



Противоположно направленные вектора

Определение. Два коллинеарных вектора a и b называются противоположно направленными векторами, если их направления противоположны: a↑↓b (рис. 4).



Компланарные вектора

Определение. Вектора, параллельные одной плоскости или лежащие на одной плоскости называют компланарными векторами. (рис. 5).

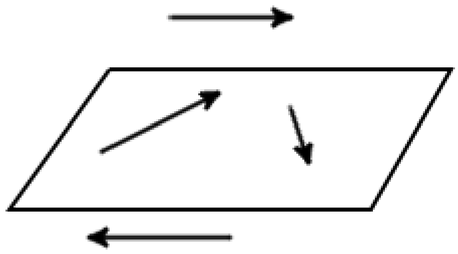


рис. 5

Всегда возможно найти плоскости параллельную двум произвольным векторам, по-этому любые два вектора всегда компланарные.

Равные вектора

Определение. Вектора a и b называются равными, если они лежат на одной или параллельных прямых, их направления совпадают, а длины равны (рис. 6).

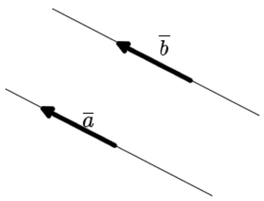


рис. 6

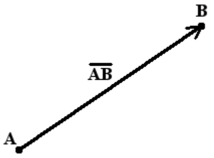
То есть, два вектора равны, если они коллинеарные, сонаправленые и имеют равные длины:

a = b, если a↑↑b и |a| = |b|.

Единичный вектор

Определение. Единичным вектором или ортом - называется вектор, длина которого равна единице.

*Основное соотношение.*Чтобы найти координаты вектора AB, зная координаты его начальной точек A и конечной точки B, необходимо из координат конечной точки вычесть соответствующие координаты начальной точки.



Формулы определения координат вектора заданного координатами его начальной и конечной точки

Формула определения координат вектора для плоских задач

В случае плоской задачи вектор AB заданный координатами точек $A(A_x ; A_y)$ и $B(B_x ; B_y)$ можно найти воспользовавшись следующей формулой

$AB = \{B_x - A_x ; B_y - A_y\}$

Формула определения координат вектора для пространственных задач

В случае пространственной задачи вектор AB заданный координатами точек $A(A_x ; A_y ; A_z)$ и $B(B_x ; B_y ; B_z)$ можно найти воспользовавшись следующей формулой

$AB = \{B_x - A_x ; B_y - A_y ; B_z - A_z\}$

Формула определения координат вектора для n -мерного пространства

В случае n-мерного пространства вектор AB заданный координатами точек $A(A_1 ; A_2 ; ... ; A_n)$ и $B(B_1 ; B_2 ; ... ; B_n)$ можно найти воспользовавшись следующей формулой

$AB = \{B_1 - A_1 ; B_2 - A_2 ; ... ; B_n - A_n\}$

Примеры для пространственных задач

Пример 4. Найти координаты вектора AB, если A(1; 4; 5), B(3; 1; 1).

Решение: AB = {3 - 1; 1 - 4; 1 - 5} = {2; -3; -4}.

Пример 5. Найти координаты точки B вектора AB = {5; 1; 2}, если координаты точки A(3; -4; 3).

Решение:

$AB_x = B_x - A_x \Rightarrow B_x = AB_x + A_x \Rightarrow B_x = 5 + 3 = 8$

$AB_y = B_y - A_y \Rightarrow B_y = AB_y + A_y \Rightarrow B_y = 1 + (-4) = -3$

$AB_z = B_z - A_z \Rightarrow B_z = AB_z + A_z \Rightarrow B_z = 2 + 3 = 5$

Ответ: B(8; -3; 5).

Пример 6. Найти координаты точки A вектора AB = {5; 1; 4}, если координаты точки B(3; -4; 1).

Решение:

$AB_x = B_x - A_x \Rightarrow A_x = B_x - AB_x \Rightarrow A_x = 3 - 5 = -2$

$AB_y = B_y - A_y \Rightarrow A_y = B_y - AB_y \Rightarrow A_y = -4 - 1 = -5$

$AB_z = B_z - A_z \Rightarrow A_z = B_z - AB_z \Rightarrow A_z = 1 - 4 = -3$

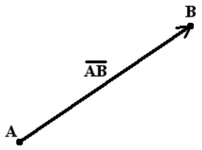
Ответ: A(-2; -5; -3).

Определение длины вектора

Определение.

Длина направленного отрезка определяет числовое значение вектора и называется длиной вектора или модулем вектора AB.

Для обозначения длины вектора используются две вертикальные линии слева и справа |AB|.



Основное соотношение. Длина вектора $|\boxed{a}|$ в прямоугольных декартовых координатах равна квадратному корню из суммы квадратов его координат.

Формулы длины вектора

Формула длины вектора для плоских задач

В случае плоской задачи модуль вектора $\boxed{a} = \{a_x ; a_y\}$ можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$|\boxed{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Формула длины вектора для пространственных задач

В случае пространственной задачи модуль вектора $\boxed{a} = \{a_x ; a_y ; a_z\}$ можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$|\boxed{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Примеры вычисления длины вектора для пространственных задачи

Пример 3. Найти длину вектора $\boxed{a} = \{2; 4; 4\}$.

Решение: $|\boxed{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$.

Пример 4. Найти длину вектора $\boxed{a} = \{-1; 0; -3\}$.

Решение: $|\boxed{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 0 + 9} = \sqrt{10}$.

Определение.

Сложение векторов (сумма векторов) $\boxed{a} + \boxed{b}$ есть операция вычисления вектора $\boxed{c}$, все элементы которого равны попарной сумме соответствующих элементов векторов $\boxed{a}$ и $\boxed{b}$, то есть каждый элемент вектора $\boxed{c}$ равен:

$c_i = a_i + b_i$

Формулы сложения и вычитания векторов для пространчтвенных задач

В случае пространственной задачи сумму и разность векторов $\boxed{a} = \{a_x ; a_y ; a_z\}$ и $\boxed{b} = \{b_x ; b_y ; b_z\}$ можно найти воспользовавшись следующими формулами:

$\boxed{a} + \boxed{b} = \{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}$

$\boxed{a} - \boxed{b} = \{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\}$

Примеры пространственных задач на сложение и вычитание векторов

Пример 3. Найти сумму векторов $\boxed{a} = \{1; 2; 5\}$ и $\boxed{b} = \{4; 8; 1\}$.

Решение:

$\boxed{a} + \boxed{b} = \{1 + 4; 2 + 8; 5 + 1\} = \{5; 10; 6\}$

Пример 4. Найти разность векторов $\boxed{a} = \{1; 2; 5\}$ и $\boxed{b} = \{4; 8; 1\}$.

Решение:

$\boxed{a} - \boxed{b} = \{1 - 4; 2 - 8; 5 - 1\} = \{-3; -6; 4\}$

ормула умножения вектора на число для пространственных задач

В случае пространственной задачи произведение вектора $\vec{a} = \{a_x ; a_y ; a_z\}$ и числа k можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$k \cdot \vec{a} = \{k \cdot a_x ; k \cdot a_y ; k \cdot a_z\}$

Свойства вектора умноженного на число

Если вектор $\vec{b}$ равен произведению ненулевого числа k и ненулевого вектора $\vec{a}$, то есть $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$, тогда:

$\vec{b} \parallel \vec{a}$ - вектора $\vec{b}$ и $\vec{a}$ параллельны

$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, если $k > 0$ - вектора $\vec{b}$ и $\vec{a}$ сонаправленные, если число $k > 0$

$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, если $k < 0$ - вектора $\vec{b}$ и $\vec{a}$ противоположно направленные, если число $k < 0$

$|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$ - модуль вектора $\vec{b}$ равен модулю вектора $\vec{a}$ умноженному на модуль числа k

Пример умножения вектора на число для пространственных задачи

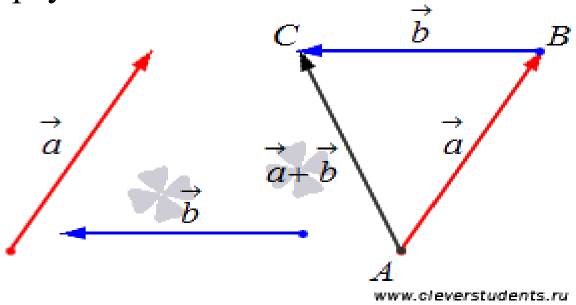
Пример 2. Найти произведение вектора $\vec{a} = \{1; 2; -5\}$ на -2.

Решение: $(-2) \cdot \vec{a} = \{(-2) \cdot 1; (-2) \cdot 2; (-2) \cdot (-5)\} = \{-2; -4; 10\}$.

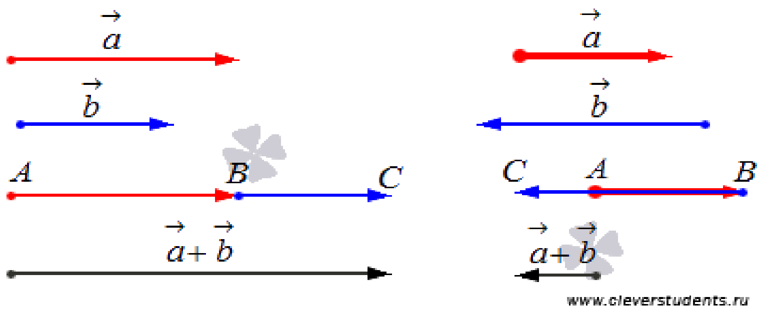
Операция сложения двух векторов - правило треугольника.
Покажем как происходит сложение двух векторов.

Сложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ происходит так: от произвольной точки A откладывается вектор $\vec{AB}$, равный $\vec{a}$, далее от точки B откладываеься вектор $\vec{BC}$, равный $\vec{b}$, и вектор $\vec{AC}$ представляет собой сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Такой способ сложения двух векторов называется правилом треугольника.

Проиллюстрируем сложение не коллинеарных векторов на плоскости по правилу треугольника.

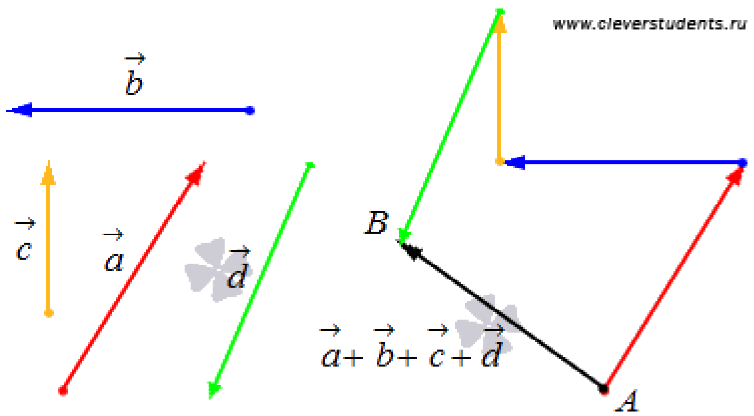


А на чертеже ниже показано сложение сонаправленных и противоположно направленных векторов.



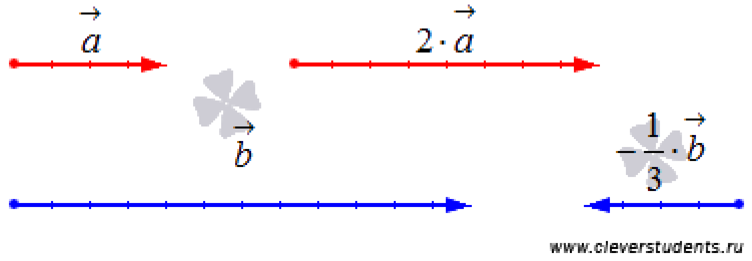
Сложение нескольких векторов - правило многоугольника.
Основываясь на рассмотренной операции сложения двух векторов, мы можем сложить три вектора и более. В этом случае складываются первые два вектора, к полученному результату прибавляется третий вектор, к получившемуся прибавляется четвертый и так далее.
Сложение нескольких векторов выполняется следующим построением. От произвольной точки А плоскости или пространства откладывается вектор, равный первому слагаемому, от его конца откладывается вектор, равный второму слагаемому, от его конца откладывается третье слагаемое, и так далее. Пусть точка В - это конец последнего отложенного вектора. Суммой всех этих векторов будет вектор $\overrightarrow{AB}$.

Сложение нескольких векторов на плоскости таким способом называется *правилом многоугольника.* Приведем иллюстрацию правила многоугольника.



Абсолютно аналогично производится сложение нескольких векторов в пространстве.
Операция умножения вектора на число.
Сейчас разберемся как происходит умножение вектора на число.
Умножение вектора на число k соответствует растяжению вектора в k раз при k > 1 или сжатию в $\frac{1}{k}$ раз при 0 < k < 1, при k = 1 вектор остается прежним (для отрицательных k еще изменяется направление на противоположное). Если произвольный вектор умножить на ноль, то получим нулевой вектор. Произведение нулевого вектора и произвольного числа есть нулевой вектор.

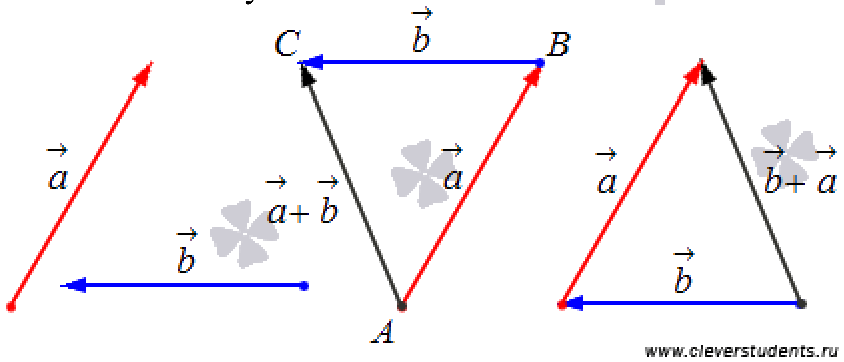
К примеру, при умножении вектора $\vec{a}$ на число 2 нам следует вдвое увеличить его длину и сохранить направление, а при умножении вектора $\vec{b}$ на минус одну треть следует уменьшить его длину втрое и изменить направление на противоположное. Приведем для наглядности иллюстрацию этого случая.



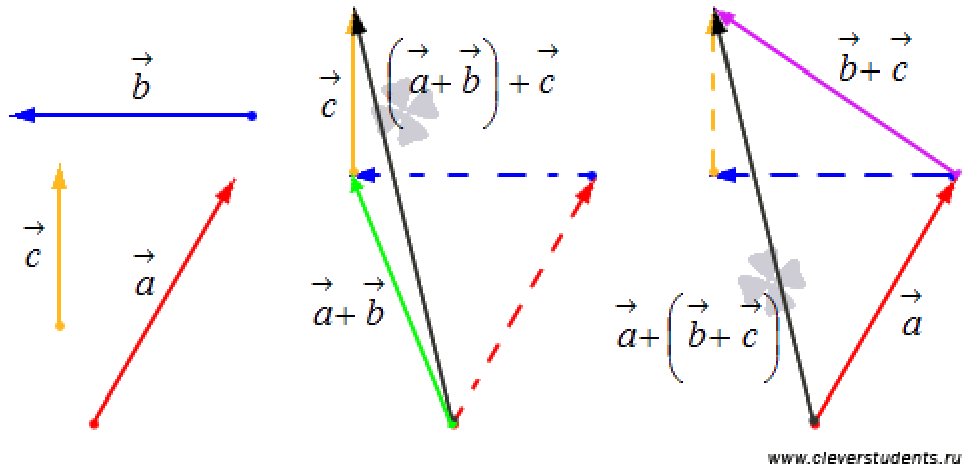
Свойства операций над векторами.
Итак, мы определили операцию сложения векторов и операцию умножения вектора на число.

При этом для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и произвольных действительных чисел λ, μ можно при помощи геометрических построений обосновать *следующие свойства операций н*ад векторами. Некоторые из них очевидны.

Свойство коммутативности $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.



Свойство ассоциативности сложения $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c} = \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$



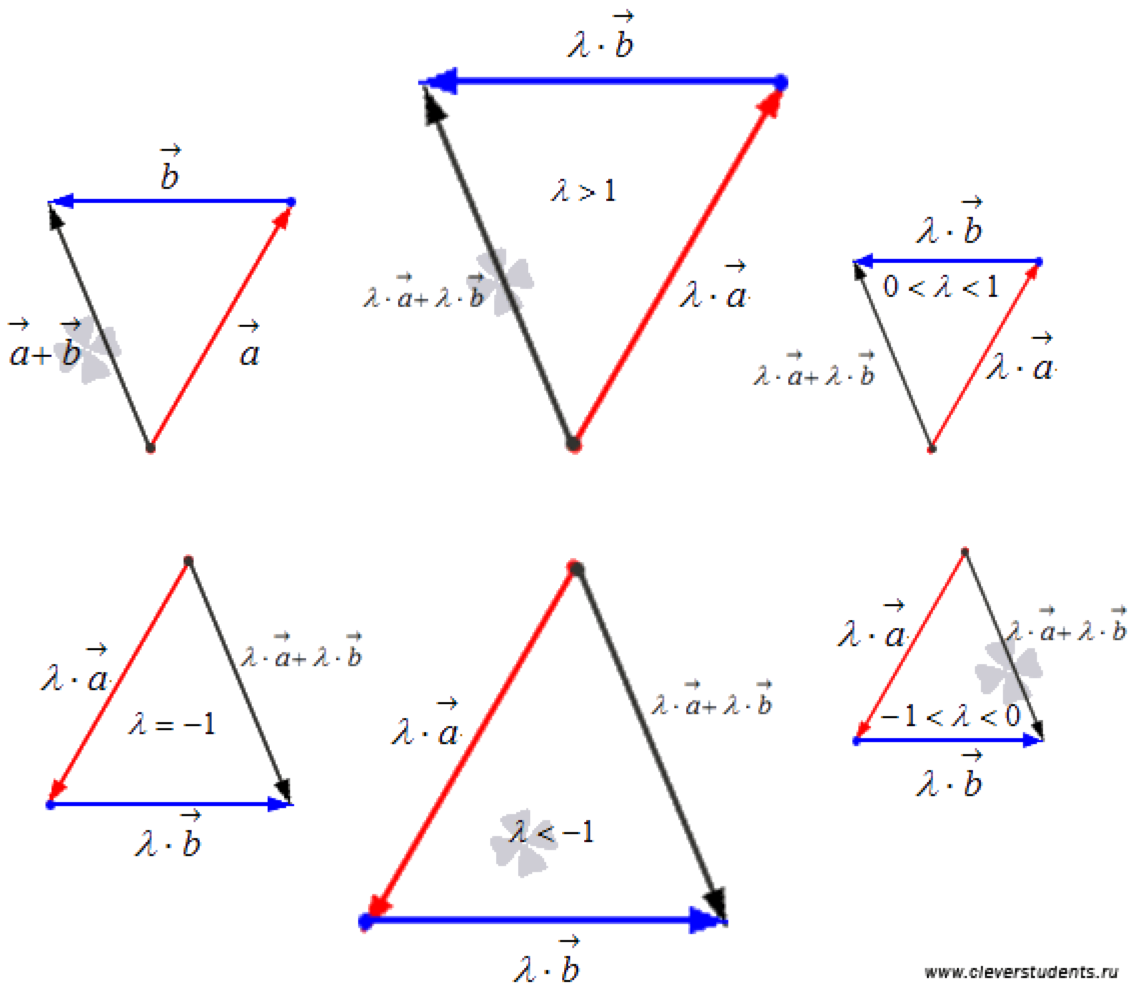
Существует нейтральный элемент по сложению, которым является нулевой вектор $\vec{0}$, и $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. Это свойство очевидно.

Для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор $-\vec{a}$ и верно равенство $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.. Это свойство очевидно без иллюстрации.

Сочетательное свойство умножения $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\left(\mu\cdot\vec{a}\right)$. К примеру, растяжение вектора в 6 раз можно произвести, если сначала его растянуть вдвое и полученный вектор растянуть еще втрое. Аналогичного результата можно добиться, например, сжав вектор вдвое, а полученный вектор растянуть в 12 раз.

Первое распределительное свойство $(\lambda+\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$.. Это свойство достаточно очевидно.

Второе распределительное свойство $\lambda\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$.. Это свойство справедливо в силу подобия треугольников, изображенных ниже.



Нейтральным числом по умножению является единица, то есть, $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$. При умножении вектора на единицу с ним не производится никаких геометрических преобразований.
Рассмотренные свойства дают нам возможность преобразовывать векторные выражения.

Свойства коммутативности и ассоциативности операции сложения векторов позволяют складывать векторы в произвольном порядке.

Операции вычитания векторов как таковой нет, так как разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть сумма векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$.

Учитывая рассмотренные свойства операций над векторами, мы можем в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, выполнять преобразования так же как и в числовых выражениях.

Свойства векторов, заданных координатами
Координаты нулевого вектора равны нулю.
Координаты равных векторов соответственно равны.
Координаты вектора суммы двух векторов равны сумме соответствующих координат этих векторов.
Координаты вектора разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов.
Координаты вектора произведения данного вектора на число равны произведениям соответствующих координат этого вектора на данное число.

Определение 9.7.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, который обозначается $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и получается следующим образом.

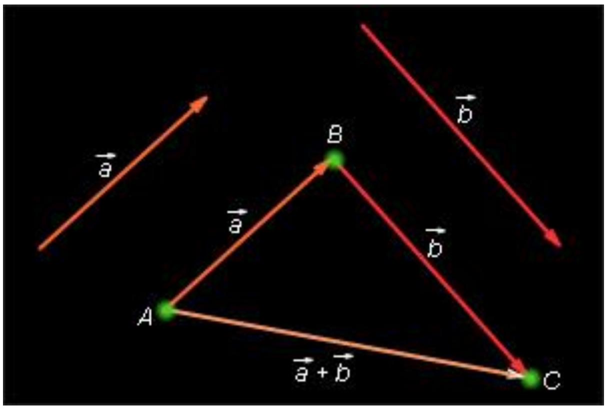


Рисунок 9.1.4

Отложим от произвольной точки *A* вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Теперь от точки *B* отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор и называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c} = \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*.

Для сложения двух неколлинеарных векторов можно воспользоваться *правилом параллелограмма*, известным из курса планиметрии (рис. 9.1.5).

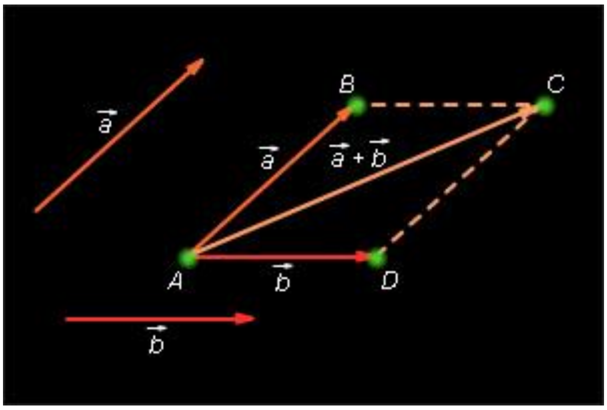


Рисунок 9.1.5

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон);

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательный закон).

Определение 9.8.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$. Обозначается разность векторов так: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, где $(-\vec{b})$ – вектор, противоположный вектору $\vec{b}$ (рис. 9.1.6).

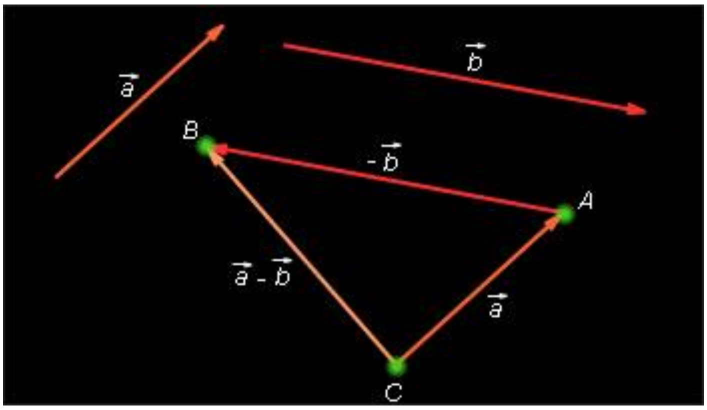


Рисунок 9.1.6

Теорема 9.2.

Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.

Доказательство этого утверждения следует из закона сложения векторов.

Определение 9.9.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причем при $k > 0$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, а при $k < 0$ – противонаправлены. Произведением любого числа на нулевой вектор является по определению нулевой вектор.

Из этого определения следует, что векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны. Кроме того, произведение любого вектора на число 0 есть нулевой вектор.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел k и l справедливы равенства:

$$(kl)\vec{a} = k\left(l\vec{a}\right)$$

(сочетательный закон);

$$k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

(первый распределительный закон);

$$\left(k + l\right)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$

(второй распределительный закон).

Вопросы для самоконтроля:

1. Числа, которые определяют положение точки, называются …?

2. Величина, которая задается своей длиной и направлением, называется …?

3. Вектора, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых, называются …?

4. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется …?

5. Чтобы найти координаты вектора нужно

6. При умножении векторов на число

7. При сложении векторов …?

8. Формула нахождения длины вектора $|\overrightarrow{AB}|$?

9. Формула нахождения координат вектора?

10. Формула нахождения координаты середины вектора $\overrightarrow{AB}$?

Раздел 14. Многогранники.

Тема 70. Понятие многогранника. Призма и ее элементы, виды призм.Развертка, площадь боковой и полной поверхности призмы

Определение. Многограником называется тело, поверхностью которого является объединение конечного числа многоугольников.

Многоугольники, которые образуют поверхность многограника, называются *гранями,* общие стороны граней – *ребрами*, общие точки ребер – *вершинами* многограника. Многограник обозначают буквами, которые поставлены у всех его вершин.

Пог числу граней различают четырехграник (треугольная пирамида), пятигранник, восьмигранник(октаэдр). Например: ABCDEF

Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не лежащие в одной грани, называется *диагональю многогранника.* Например: AF – диагональ октаэдр

Определение 3. Многогранник называется выпуклым, если он расположен целиком по одну сторону от любой из плоскостей, содержащих его грани

Многогранник – это *тело, граница которого состоит из кусков плоскостей* (*многоугольников*). Эти многоугольники называются *гранями*, их стороны – *рёбрами,* их вершины – *вершинами многогранника.* Отрезки, соединяющие две вершины и не лежащие на одной грани, называются *диагоналями многогранника.* Многогранник – *выпуклый*, если все его диагонали расположены внутри него

Примеры многогранников

Рассмотрим следующие примеры многогранников:

1. Тетраэдр *ABCD* – это поверхность, составленная из четырех треугольников: *ABC*, *ADB*, *BDC* и *ADC* (рис. 1).

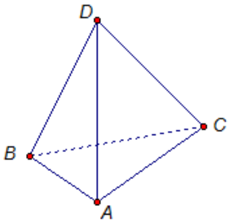


Рис. 1

2. Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – это поверхность, составленная из шести параллелограммов (рис. 2).

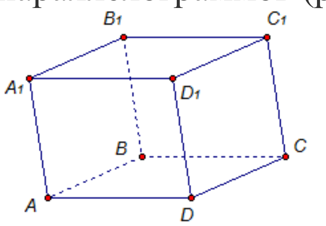


Рис. 2

<u>Всего существует ПЯТЬ правильных многогранников.</u>

ТЕТРАЭДР – правильный многогранник, составленный из 4 равносторонних треугольников.

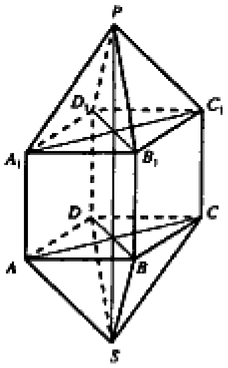
ГЕКСАЭДР, или КУБ, – правильный многогранник, составленный из 6 квадратов.

ОКТАЭДР – правильный многогранник, составленный из 8 равносторонних треугольников
ДОДЕКАЭДР – правильный многогранник, составленный из 12 правильных пятиугольников.
ИКОСАЭДР – правильный многогранник, составленный из 20 правильных треугольников.
Названия этих многогранников пришли из Древней Греции, и в них указывается число граней:
«эдра» - грань
«тетра» - 4
«гекса» - 6
«окта» - 8
«икоса» - 20
«додека» - 12
Характеристика Эйлера :
Число граней плюс число вершин минус число рёбер в любом многограннике равно 2.
Г + В - Р = 2

Изучая любые многогранники, естественнее всего подсчитать, сколько у них граней, сколько рёбер и вершин. Подсчитаем и мы число указанных элементов правильных многогранников и занесём результаты в таблицу (раздаточный материал).Работа на карточках . Проверим результаты заполнения таблицы

Правильный многогранник	Число граней	Число вершин	Число ребер	Г+В-Р
Тетраэдр	4	4	6	
Куб	6	8	12	
Октаэдр	8	6	12	
Додекаэдр	12	20	30	
Икосаэдр	20	12	30	

. Задача . Определите количество граней, вершин и рёбер многогранника, изображённого на рисунке. Проверьте выполнимость формулы Эйлера для данного многогранника.



Решение : $Г=12, \quad В=10, \quad Р=20, \quad Г+В-Р=12+10-20=2$

Таблица № 1

Правильный многогранник	Число		
	граней	вершин	рёбер
Тетраэдр	4	4	6
Куб	6	8	12
Октаэдр	8	6	12
Додекаэдр	12	20	30
Икосаэдр	20	12	30

Таблица № 2

Правильный многогранник	Число	
	граней и вершин (Г + В)	рёбер (Р)
Тетраэдр	4 + 4 = 8	6

Куб	6 + 8 = 14	12
Октаэдр	8 + 6 = 14	12
Додекаэдр	12 + 20 = 32	30
Икосаэдр	20 + 12 = 32	30

Но можно рассмотреть сумму чисел в двух столбцах, хотя бы в столбцах «грани» и «вершины» (Г + В). Составим новую таблицу своих подсчётов (см. табл. № 2). Вот теперь закономерности может не заметить только «слепой». Сформулируем её так: «Сумма числа граней и вершин равна числу рёбер, увеличенному на 2 », т.е.
Г + В = Р + 2

Трехгранный и многогранный углы

В курсе стереометрии вы знакомы пока лишь с одним видом пространственных углов – двугранным.

Двугранный угол, образован прямой и двумя полуплоскостями с общей границей, непринадлежащими одной плоскости.

На сегодняшнем уроке мы с вами познакомимся с новым типом пространственных углов - многогранными углами.

Эти углы не похожи на те, что вы изучали раньше, хотя в повседневной жизни вы часто сталкиваетесь с ними.

Вы узнаете, что такое трехгранный и многогранный угол, его ребра, грани и плоские углы.

Мы изготовим модель многогранного угла и с помощью нее рассмотрим его свойства.

Сформулируем теорему о сумме плоских углов многогранного угла и научимся применять изученные свойства к решению задач.

Двугранный угол.

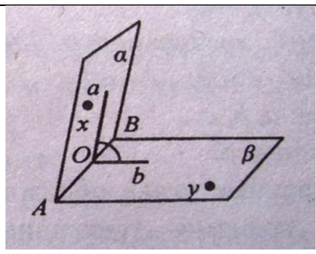
Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой (рис. 398). Полуплоскости называются гранями, а ограничивающая их прямая — ребром двугранного угла

Определение трехгранного угла

Пусть в пространстве заданы три выходящие из одной точки луча

ОА, ОВ, ОС, не лежащие в одной плоскости.
Каждая пара лучей образует плоский угол.
Часть пространства, ограниченная тремя плоскими углами АОВ, ВОС, СОА называется трехгранным углом и обозначается ОАВС, начиная с вершины О.
Лучи ОА, ОВ, ОС-ребра трехгранного угла.

Многогранные углы (тематическая таблица)

<table>
<tr>
<td>Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой. Элементы.
Полуплоскости называются гранями, а ограничивающая их прямая – ребром двугранного угла.</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>Линейным углом двугранного угла называется пересечение двугранного угла и плоскости, перпендикулярной его ребру.</td>
<td>Двугранный угол – (α, AB, β),
AB – ребро,
α, β – грани.
$a \subset \alpha$, $a \perp AB$,
$b \subset \beta$, $b \perp AB$,
$a \cap b = 0$,
$\angle(a,b)$ – линейный угол</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Мера двугранного угла считается равной мере соответствующего ему линейного угла.
Все линейные углы данного двугранного угла равны между собой.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Величина двугранного угла находится в пределах от 0^0 до 180^0</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">


</td>
</tr>
<tr>
<td>Трехгранным углом (abc) называется фигура, составленная из трех плоских углов (ab), (bc), (ac).
Грани трехгранного угла
$\angle(ab)$, $\angle(bc)$, $\angle(ac)$.
Ребра: a, b,c.
Вершина: S.
Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называются двугранными углами трехгранного угла.</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

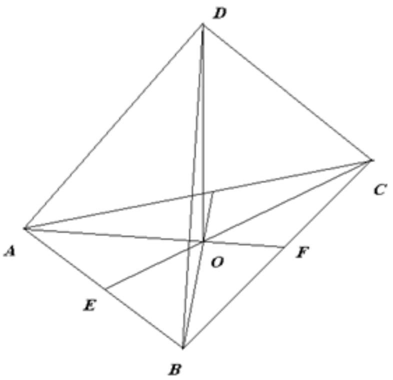
<table>
<tr><td colspan="2"><u>Свойство.</u> В трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.</td></tr>
<tr><td>Многогранным углом называется фигура, составленная из n плоских углов.
Грани многогранного угла:
$\angle(ab)$, $\angle(bc)$, $\angle(cd)$, …, $\angle(na)$.
Ребра: a, b, c, d, m, …, n.
Вершина: М.
Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 2π.</td><td>
</td></tr>
</table>

Понятие призмы и виды призм

Призма – это многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников. Многоугольники называются основаниями призмы, а отрезки соединяющие соответствующие вершины называютсябоковыми ребрами призмы.

Решение задач –

№1. Найдите высоту правильного тетраэдра с ребром 10 см.



Дано: АВСД – правильный тетраэдр,
AB = 10 см
Найти: высоту тетраэдра
Решение.
1) AF – медиана ΔABC, значит BF = ______

2) Из ΔABF по теореме_______найдем AF
$AF_2= AB_2– BF_2$

AF=________

3) O делит отрезок AF в отношении 2 :1, поэтому AO = ______________________
4) Из ΔADO по теореме Пифагора найдем DO
DO_2= ____________
DO = ____________
Ответ: ______см

Критерии оценивая:

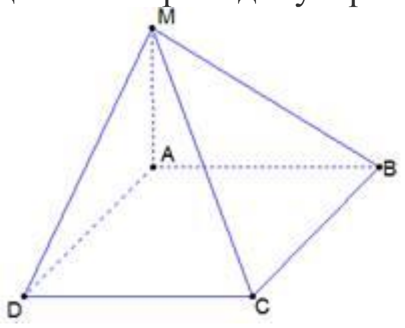
1. Раскрывает содержание понятия многогранника и его элементов;
2. объясняет свойства многогранников по видам.
3. Изображает многогранники и выполняет их развёртки;
4. определяет виды правильных многогранников;

Вопросы для самоконтроля:
1.Назовите определение многогранников?
2. Назовите основные многогранники?

Тема 72. Пирамида и ее элементы, виды пирамид. Развертка, площадь боковой и полной поверхности пирамиды

Пример пирамиды

Рассмотрим четырехугольную пирамиду *PABCD*(рис. 2).
P – вершина пирамиды.
ABCD – основание пирамиды.
PA – боковое ребро.
AB – ребро основания.
Из точки *P* опустим перпендикуляр *PH* на плоскость основания *ABCD*. Проведенный перпендикуляр является высотой пирамиды.



Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если:
ее основание – правильный многоугольник;
отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

Пояснение на примере правильной четырехугольной пирамиды

Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду *PABCD* (рис. 3).
P – вершина пирамиды. Основание пирамиды *ABCD* – правильный четырехугольник, то есть квадрат. Точка *O*, точка пересечения диагоналей, является центром квадрата. Значит, *PO* – это высота пирамиды.

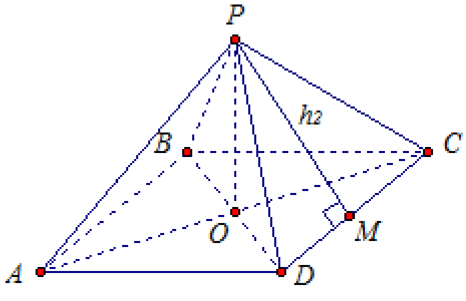
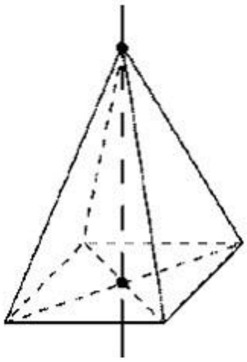


Рис. 3

Пояснение: в правильном n-угольнике центр вписанной и центр описанной окружности совпадает. Этот центр и называется центром многоугольника. Иногда говорят, что вершина проектируется в центр.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой* и обозначается h_a.



Свойства правильной пирамиды

1. все боковые ребра правильной пирамиды равны;
2. боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Доказательство этих свойств приведем на примере правильной четырехугольной пирамиды.

Дано: *PABCD* – правильная четырехугольная пирамида,

ABCD – квадрат,

PO – высота пирамиды.

Доказать:

1. $PA = PB = PC = PD$
2. $\Delta ABP = \Delta BCP = \Delta CDP = \Delta DAP$ *См. Рис. 4.*

Рис. 4

Запишите элементы пирамиды:

основание

вершина

ребра

грани

ребра основания

высота (дать определение) – ***перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости ее оснавания ,высота пирамиды***

Итак: мы рассмотрели определение пирамиды, элементы, построение пирамиды. .Правильная пирамида и ее свойства.

Определение: Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является *правильный многоугольник* и *вершина* пирамиды проектируется *в центр основания.*

Элементы правильной пирамиды такие же, как и у всех пирамид: основание, вершина, боковые ребра, боковые грани, высота.

Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины пирамиды, *называется апофемой*.

Этот термин употребляется только для правильной пирамиды, хотя у неправильной пирамиды также есть высоты боковых граней.

Элементы правильной пирамиды обладают следующими свойствами:

боковые ребра равны;

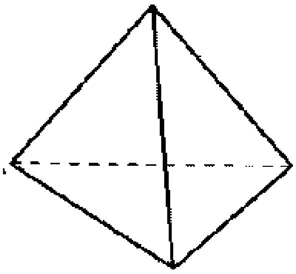
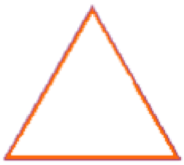
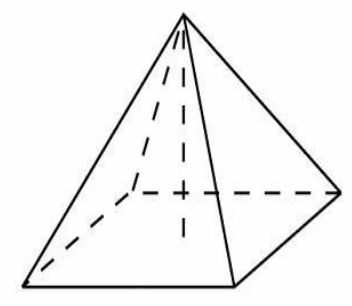
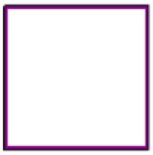
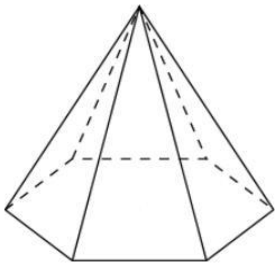
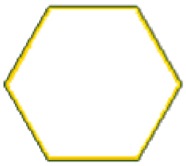
боковые грани – равнобедренные треугольники;

боковые грани равны;

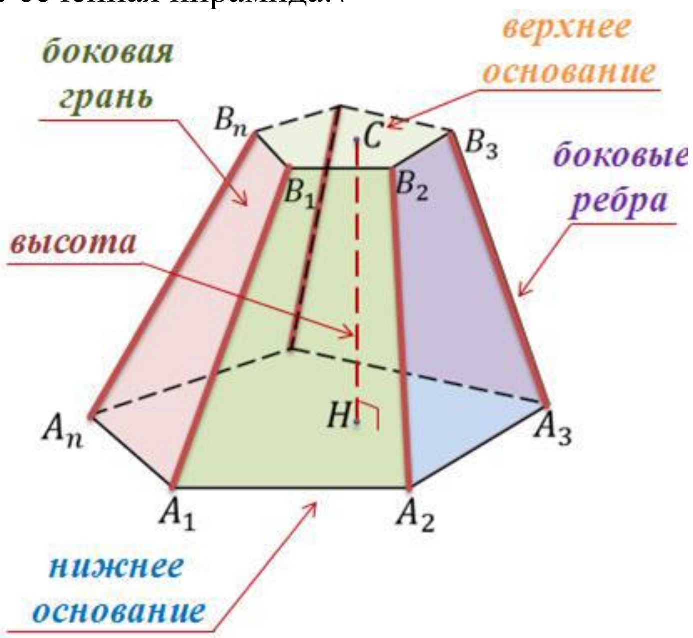
апофемы раны;

двугранные углы при основании равны.

Некоторые виды правильных пирамид

 *Треугольная правильная пирамида*  *Основание – правильный (равносторонний) треугольник*	 *Четырехугольная правильная пирамида*  *Основание – квадрат*	 *Шестиугольная правильная пирамида*  *Основание – правильный шестиугольник*

Усеченная пирамида.\



Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию пирамиды.

Правильной усеченной пирамидой называется часть правильной пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию пирамиды.
Основания усеченной пирамиды – подобные многоугольники.
Боковые грани – трапеции.
Высотой усеченной пирамиды называется расстояние между ее основаниями.
Диагональю усеченной пирамиды называется отрезок, соединяющий ее вершины, не лежащие в одной грани.
Диагональным сечением называется сечение усеченной пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.
Усеченная пирамида называется правильной, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию.
Основания правильной усеченной пирамиды - правильные многоугольники, а боковые грани - равнобедренные трапеции. Высоты этих трапеций называются апофемами.

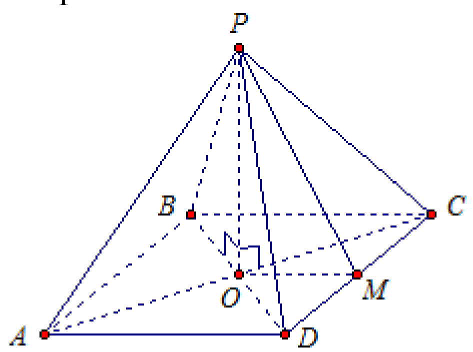


Рис. 6

1. Решение задачи на четырехугольную пирамиду

Задача № 1 В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12 см, а апофема – 15 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

Задача № 2 В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 12 см, а апофема – 15 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

Критерии оценивания:

1. Применяет формулы площади боковой и полной поверхности многогранников при решении задач.

Вопросы для самоконтроля:

1. **Какая пирамида называется правильной?**
2. **Являются ли равными боковые ребра правильной пирамиды?**
3. **Чем являются боковые грани правильной пирамиды?**
4. **Что называется апофемой?**
5. **Сколько высот в пирамиде? Сколько апофем в пирамиде?**

Раздел 15. Тела вращения и их элементы

Тема 72. Цилиндр и его элементы. Развертка, площадь боковой и полной поверхности цилиндра.

Древний термин "цилиндр" происходит от греческого слова "Kylindros" - килиндрос, то есть "вращаю", "катаю" или "валик", "каток ".

Определение: Цилиндром называется фигура , полученная вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Элементы цилиндра:

Круги L и L1– основания цилиндра;

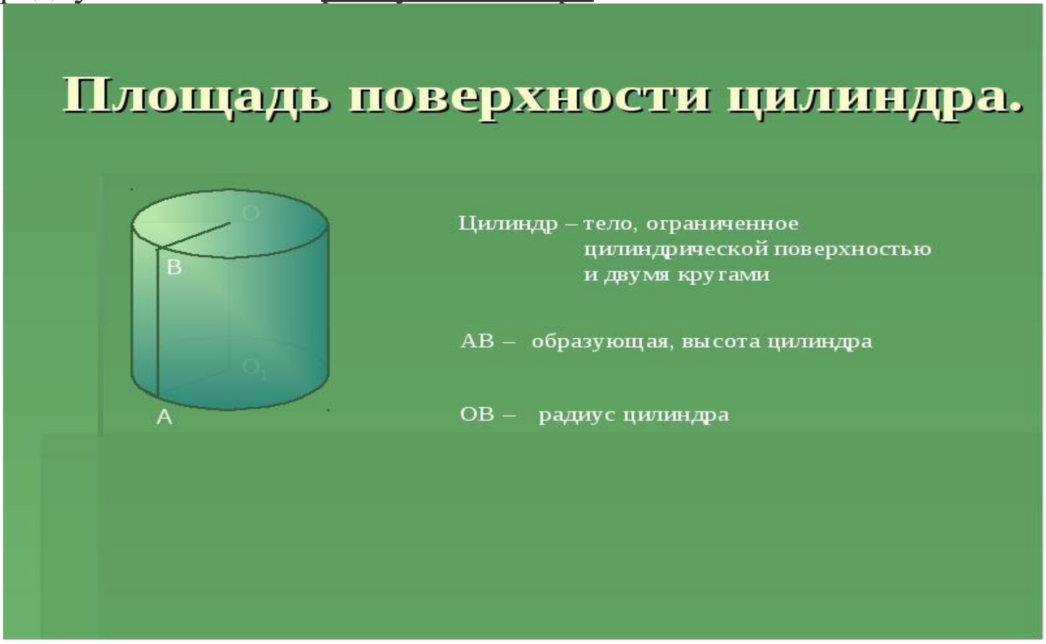
цилиндрическая поверхность – боковая поверхность цилиндра;

прямая OO1– ось цилиндра;

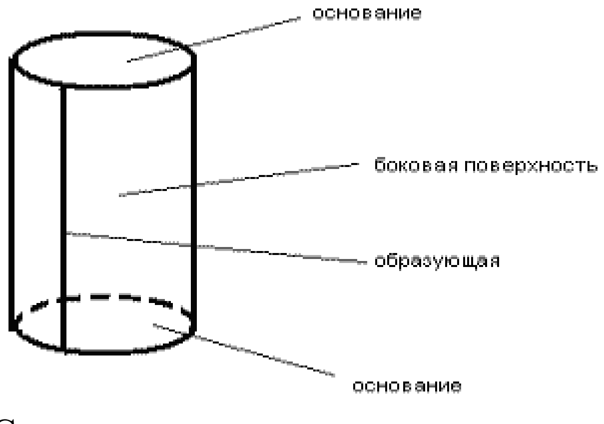
образующие цилиндрической поверхности – образующие цилиндра;

длина образующей – высота цилиндра;

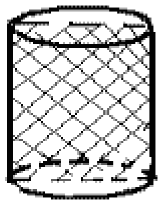
радиус основания – радиус цилиндра.

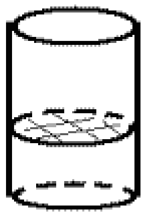


Сечение цилиндра, проходящее через ось, называется осевым и является прямоугольником. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной основаниям, есть круг, равный основаниям.



Сечение цилиндра, проходящее через ось, называется осевым и является прямоугольником. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной основаниям, есть круг, равный основаниям.



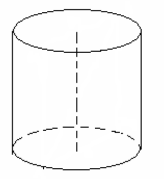


Определение цилиндра

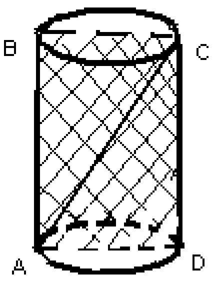
Цилиндр можно получить вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

2.Элементы цилиндра.
Основания цилиндра – равные круги, расположенные в параллельных плоскостях
Высота цилиндра - это расстояние между плоскостями его оснований.
Радиус цилиндра – это радиус его основания.
Ось цилиндра – это прямая, проходящая через центры основания цилиндра (ось цилиндра является осью вращения цилиндра).
Образующая цилиндра - это отрезок соединяющий точку окружности верхнего основания с соответственной точкой окружности нижнего основания. Все образующие параллельны оси вращения и имеют одинаковую длину, равную высоте цилиндра.
Образующая цилиндра при вращении вокруг оси образует боковую (цилиндрическую) поверхность цилиндра.

3.Виды цилиндров
Наклонные цилиндры, прямые цилиндры



Решение задач по готовым чертежам



Дано: цилиндр,
r=4, h=6

ABCD-осевое сечение
Найти: AC, Sос.сеч.
Решение: Рассмотрим треугольник ACD:

$\angle D = 90^0, DC = 6, AD = 2r = 8;$

по теореме Пифагора $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$

$AC = \sqrt{8^2 + 6^2}$ $AC = \sqrt{100} = 10$
Sос.сеч =ADCD
Sос.сеч =6*8=48.
Ответ:10;48.

Ответь на вопросы: . «Закончи предложения»
Тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг одной из его сторон, называется …
Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются … цилиндра
Отрезки, соединяющие соответствующие точки оснований называются … цилиндра.
Цилиндр, изучаемый в школьном курсе геометрии - …
… цилиндра называется радиус его основания.
Расстояние между плоскостями оснований называется … цилиндра.
В прямом круговом цилиндре высота всегда равна …
Прямая, соединяющая центры оснований цилиндра, называется … цилиндра.
Сечение цилиндра, проходящее через ось, называется … и является …
При сечении цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его оси, сечением цилиндра является
Критерии оценивания:
1.Определяет цилиндр и его элементы;
2. распознает на чертежах и моделях тела вращения;
3. изображает тела вращенияна плоскости и различает развёртки тел вращений.
4. применяет формулы площади боковой поверхности тел вращения при решении задач
Вопросы для самоконтроля:
1.Назовите определение цилиндра?
2.Назовите основные элементы цилиндра?
3.Назовите осевое сечение цилиндра?

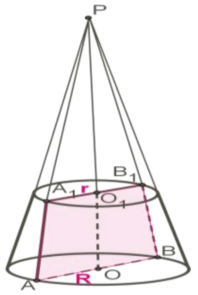
Тема 72. Конус и его элементы. Развертка, площадь боковой и полной поверхности конуса.

Лекцию пишите еще по презентации обязательно там смотрите:

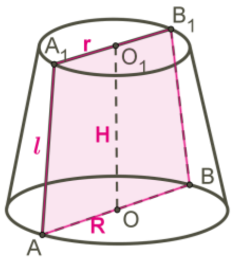
Определение: *Конусом называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов*

Усечённый конус

Если провести сечение конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса, то эта плоскость разбивает конус на две части, одна из которых — конус, а другую часть называют усечённым конусом.



Также усечённый конус можно рассматривать как тело вращения, которое образовалось в результате вращения прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны (которая перпендикулярна к основанию трапеции) или в результате вращения равнобедренной трапеции вокруг высоты, проведённой через серединные точки оснований трапеции.



OO1 — ось конуса и высота конуса.
AA1 — образующая конуса.
Круги с центрами O и O1 — основания усечённого конуса.
AO и A1O1 — радиусы оснований конуса.
Осевое сечение конуса — это сечение конуса плоскостью, которая проходит через ось OO1 конуса.
Осевое сечение конуса — это равнобедренная трапеция.
AA1B1B — осевое сечение конуса.

Боковая поверхность определяется как разность боковой поверхности данного конуса и отсечённого конуса:

1)Если высота конуса равна 15, а радиус основания 8, то образующая конуса равна:
2) Диаметр конуса равен 4 см, высота 6 см. Найти образующую конуса и боковую поверхность.
3) Образующая конуса равна 30 см, образует с плоскостью основания угол 30^0. Найти высоту конуса

Решить задачи

Образующая конуса равна 25 см, а радиус основания – 7 см. Найдите его объем. Прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 17 см, а один из катетов – 8 см, вращается около этого катета. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Критерии оценивания:

1. Определяетконусиегоэлементы**;**
2. распознаетначертежахимоделяхтелавращения**;**
3. изображаеттелавращениянаплоскостииразличаетразвёрткителвращений**.**
4. Применяетформулыплощадибоковойповерхностителвращенияприрешениизадач

Вопросы для самоконтроля:

1.Назовите определение конуса?

2.Назовите основные элементы конуса?

3.Назовите осевое сечение конуса?

Тема 77. Сфера, шар и их элементы. Площадь поверхности сферы. Сечения тел вращений плоскостью.

Слова“шар” и “сфера” происходят от одного и того же греческого слова “сфайра” - мяч. Повторим определение шара и понятий, связанных с ним (показ на проекционном экране).

Все новые для вас определения, сформулированные сегодня на уроке, вы найдёте в пункте 58 учебника. Их надо выучить.

Итак, тема сегодняшнегоурока Сфера.

Запишите тему сегодняшнего урока в тетрадях.

Цели: Я уверена, что вы неоднократно встречались в жизни не только со сферой, но и с шаром. Сегодня на уроке

Какая геометрическая фигура у вас ассоциируется со сферой? (окружность).

Как бы вы сформулировали определение сферы? – *Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.*

Привести примеры окружающей обстановки, дающей представление о сфере.

Как называется данная точка? – центр сферы

Как называется данное расстояние? – радиус сферы. Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также назы*радиусом сферы.*

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр, называется диаметром.

А что такое шар? – Тело, ограниченноесферой, называетсяшаром.

Чем он отличается от сферы? Давайте разберемся в этом вопросе, а для этого воспользуемся презе*Шар содержит все точки пространства, которые расположены от точки O на расстоянии, нерасположены от точки O на расстоянии, не превышающем R, и не содержит других точек.*

Можно ли сферу и шар отнести к телам вращения? - Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра, а шар – вращением полукруга вокруг его диам

Задание 1 группе:

Сфера, радиус которой равен 10 см, пересечена плоскостью. Расстояние от центра сферы до этой плоскости равно 8 см. Найдите длину окружности, получившейся в сечении.

(12π см)

Задание 2 группе:

Шар, радиус которого 41 дм, пересечен плоскость на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения. (1600π дм^2)

24. Найдите площадь сечения шара радиуса 41 см, проведенного на расстоянии 9 см от центра.

25. Сферу на расстоянии 8 см от центра пересекает плоскость. Радиус сечения равен 15 см. Найдите площадь сферы.

26. Шар с центром в точке O касается плоскости в точке A. Точка B лежит в плоскости касания. Найдите объем шара, если AB = 21 см, BO = = 29 см.

Вариант 1.

1. В цилиндре радиуса 5 см проведено параллельное оси сечение, отстоящее от неё на расстояние 3см. Найдите высоту цилиндра, если площадь указанного сечения равна 64см2.

2. Угол при вершине осевого сечения конуса с высотой 1м равен 60. Чему равна площадь сечения конуса, проведённого через две образующие, угол между которыми равен 45?

3. В усечённом конусе диагональ осевого сечения равна 10м, радиус меньшего основания 3м, высота 6м. Найдите радиус большего основания.

Вариант 2.

1. В цилиндре с высотой 6см проведено параллельное оси сечение, отстоящее от неё на расстояние 4см. Найдите радиус цилиндра, если площадь указанного сечения равна 36см 2.

2. Угол при вершине осевого сечения конуса с высотой 1м равен 120. Чему равна площадь сечения конуса, проведённого через две образующие, угол между которыми равен 60?

3. В усечённом конусе диагональ осевого сечения равна 10м, радиусы оснований 2м и 4м. Найдите высоту конуса.

Анализ работы проведём на следующем уроке, после того как я ваши работы проверю. А пока посмотрите, какие ответы вы должны были получить

Критерии оценивания:

1. Определяет, сферу, шар и их элементы;
2. распознает на чертежах и моделях тела вращения;
3. изображает тела вращенияна плоскости и различает развёртки тел вращений.
4. Применяет формулы площади боковой поверхности тел вращения при решении задач

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое шар?

2.Что такое шаровая поверхность или сфера?

3. Что такое радиус, диаметр, хорда шара?

4.Какие точки называются диаметрально противоположными?

5. Что является сечением шара плоскостью, удалённой от центра шара на расстояние, меньшее радиуса шара?

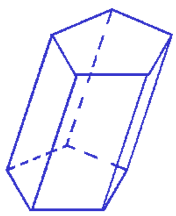
6. Какая плоскость называется диаметральной плоскостью шара?

7.Что такое большой круг, большая окружность?

Раздел 16. Объемы тел

Тема 78 Общие свойства объемов тел.

Наклонная призма



Объем наклонной призмы

$$V=S_{nc}a,$$

где S_{nc} - площадь перпендикулярного сечения наклонной призмы, a - боковое ребро.

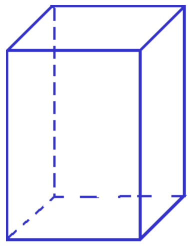
Прямая призма

Объем прямой призмы

$$V=S_{осн}a,$$

где $S_{осн}$ - площадь основания прямой призмы, a - боковое ребро.

Прямоугольный параллелепипед

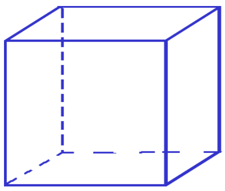


Объем прямоугольного параллелепипеда

$$V=abc,$$

где a,b,c - измерения прямоугольного параллелепипеда.

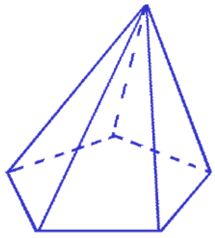
Куб



$$V=a^3$$

где a - ребро куба.

Пирамида

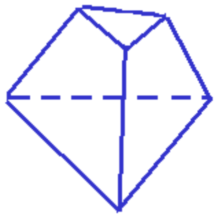


Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}H$$

где $S_{осн}$ - площадь основания, H - высота.

Усеченная пирамида



Объем усеченной пирамиды

$$V=\frac{H}{3}\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)$$

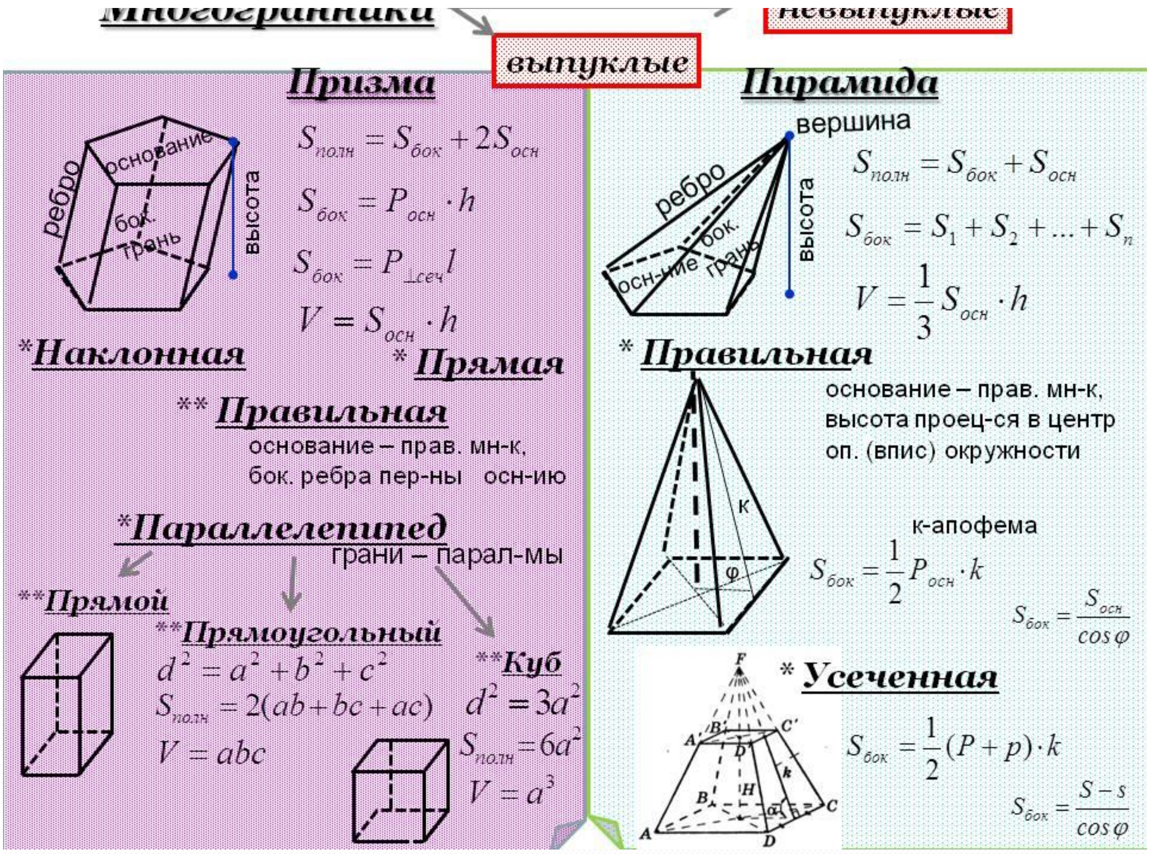
где S_1 , S_2 - площади оснований усеченной пирамиды, H - её высота.

Объем любого многогранника можно вычислить по формуле: $V=S_{осн}H$.

(Vпризмы = Sосн.· h,Vпарал. = abc или Vпарал. = Sосн.· h, Vпирам. = $\frac{1}{3}$ Sосн.· h, V = $\frac{1}{3}h(S+S_1+\sqrt{SS_1})$

Решение задач:

1. Основанием пирамиды МАВС служит треугольник со сторонами АВ=5 см, ВС=12 см, АС=13 см. Найдите объем пирамиды, если МВ⊥АВС и МВ=10 см. (Ответ. 30см^3)
2. Основание пирамиды- равнобедренный треугольник АВС, в котором АВ=ВС=13 см, АС=10 см. Каждое боковое ребро пирамиды образует с ее высотой угол в 30º. Вычислите объем пирамиды.(ответ . 845√3



Решение задач

Прямоугольная призма.

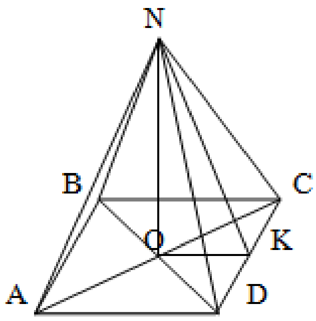
- Задача №1
- Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, AA_1=12см, AD=8см, DC=9см.
- Найти: Sполн
- Решение:

1) ΔABC-прямоугольный, $CA^2=BC^2+AB^2$, $CA^2=145$, CA=12(см)
2) ΔC_1CA-прямоугольный, $C_1A^2=CA^2+C_1C^2$, C_1A=17(см).
3) Sполн=Sбок+2Sосн

Sосн=BA*BC, Sосн= 8*9=72(см²),
Sбок=Pосн*h, Sбок=34*12=408(см²),
Sполн=408+2*72=552(см²)

Решите задачу:

Задача №1.



Высота и сторона основания правильной четырехугольной пирамиды соответственно равны 24 и 14.

Найдите: а) апофему пирамиды;

б) площадь боковой поверхности;

в) площадь полной поверхности.

Задача № 2.

Площадь поверхности куба равна 18. Найдите его диагональ.

Задача № 3

Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота 10.

Задача № 4

Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.

Критерии оценивания: 1. Объясняет свойства объемов пространственных тел;

Вопросы для самоконтороля:

1. ***Как вычислить площадь полной поверхности пирамиды***
2. ***Как вычислить площадь боковой поверхности призмы?***

Тема 80. Объем цилиндра. Объемы конуса и усеченного конуса.

Название тела	Формула площади бок. поверхности	Формула площади полной поверхности	Формула объема
Цилиндр	$S_{бок} = 2\pi RH$	$S = 2\pi R(H + R)$	$V = \pi R^2 H$
Конус	$S_{бок} = \pi RL$	$S = \pi R(L + R)$	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$
Усеченный конус	$S_{бок} = \pi L(R + r)$	$S = \pi L(R + r) +$ $+ \pi R^2 + \pi r^2$	$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$
Шар		$S = 4\pi R^2 = \pi d^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$

Вопросы для самоконтроля:

1. **Чтоназываетсяцилиндрическойповерхностью?.**
2. **Чтоназываетсяцилиндром?**
3. **Чтоназываетсяобразующейцилиндра?**
4. **Чтоназываетсявысотойцилиндра**
5. **Чтоназываетсярадиусомцилиндра**
6. **Какиевидысеченияцилиндрамырассмотрели**?

Тема 81. Объем шара и его частей.Обязательная контрольная работа

1 Вариант	2 Вариант	3 Вариант
1.**Решить уравнение:** $3\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ **2.Найти производные следующих функций:** а) $f(x) = 3x^{-2}$ б) $y=(x^4-x-1)^4$ в) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ г) $y=-5\cos 3x$ **3.Вычислить**	1.**Решить уравнение:** $\cos^2 2x - 2\cos 2x - 3 = 0$ **2.Найти производные следующих функций:** а) $f(x) = 4x^{-3}$ б) $y=\sqrt{x^3 + 1}$ в) $y=\frac{1-5x^5}{1+5x^5}$ г) $y = 2x^3(x^6 - 1)$ **3.Вычислить**	1.**Решить уравнение:** $\sin\frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **2.Найти производные следующих функций:** а) $f(x) = 2x^{\frac{1}{3}}$ б) $y=(9-x^2)^4$

определенный интеграл, применив формулу Ньютона-Лейбница $$\int_0^2 4x^2+6x$$ **4. Решите уравнение:** а) $2^{1-3x}=16$ б) $4^x-3\cdot 2^x=40$ в) $\log_6(x+2)=2$ г) $\lg^2 x-3\lg x+2=0$ **5. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если его длина 6 см, ширина – 7 см, а диагональ – 11 см.**	**определенный интеграл, применив формулу Ньютона-Лейбница** $$\int_1^0 sin3x\,dx$$ **4.Решите уравнение:** а) $2^{x-15}=\frac{1}{16}$ б) $3^{x+1}-4\cdot 3^{x-2}=69$ в) $\log_2\frac{1}{32}=x$ г) $\log_2(x^2-3x+10)=3$ **5. Найдите объем усеченной пирамиды, площади оснований которой 28 см² и 7 см², а высота равна 3 см.**	в) $y=\frac{3-x}{x^2}$ г) $y=\frac{1}{3}\sin 6x$ **3.Вычислить определенный интеграл, применив формулу Ньютона-Лейбница** $\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx$ **4.Решите уравнение:** а) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1}=5$ б) $3^{x+1}-4\cdot 3^{x-2}=69$ в) $\log_{\frac{1}{4}}8=x$ г) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6=0$ **5.Образующая конуса равна 25 см, а радиус основания – 7 см. Найдите его объем.**
4 вариант	**5 вариант**	**вариант**
1.**Решить уравнение:** $2\sin^2 x-5\sin x-3=0$ **2.Найти производные следующих функций:** а) $f(x)=2x^{\frac{1}{4}}$ б) $y=\sqrt{2x^2-3x}$ в) $y=\frac{2+x^3}{2x}$ г) y=2cos5x **3.Вычислить определенный интеграл, применив формулу Ньютона-Лейбница** $$\int_{-2}^{2}(3x+5)dx$$ **4. Решите уравнение:** а) $6^{2x-16}=\frac{1}{36}$	1.**Решить уравнение:** $\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x=0$ **2.Найти производные следующих функций:** а) $y=x^3+6x$ б) $y=(x^2-3x)(2x-1)$ в) $y=\cos 2x$ г) $y=\frac{x^2-1}{x+2}$ **3.Вычислить определенный интеграл, применив формулу Ньютона-Лейбница** $\int_3^1(5x^2-3x)dx$ **4. Решите уравнение:** а) $9^{x-6}=\frac{1}{3}$ б) $2\cdot 4^{x+1}-2^{x+1}-1=0$.	**1.Решить уравнение:** $\sin x-\frac{1}{2}=0$ **2.Найти производные следующих функций:** а) $f(x)=4x^5-3{,}5x^2+2x+2\pi$ б) $g(x)=(2x+5)(x^4-1)$ в) $y=(x+9)^4$ г) $y=\frac{x^2-3x+1}{x}$ **3.Вычислить определенный интеграл, применив формулу Ньютона-Лейбница**

б) $2^{2x}-6\cdot 2^{x}+8=0$ в) $\log_6(x+2)=2$ г) $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3$ 5. **Найдите объём правильной пирамиды, если боковое ребро равно 3см, а сторона основания – 4см.**	В) $\log_x(4)=2$ Г) $\log_2(x-3)+\log_2(2x+1)=2$ 5. **Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм. Найдите боковую поверхность и объём цилиндра.**	$\int_4^{-1}(2x^3-4x)dx$ **4. Решите уравнение:** **а)** $3^{7+x}=3.$ б) $5^x-14\cdot 5^{x-1}+3\cdot 5^{x+1}=66$ в) $\log_{27}9=x$ г) $\log_3(3x-5)=\log_3(x-3)$ 5. **Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, если его длина равна 6 см, ширина – 7 см, а диагональ – 11 см.**

КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Результат обучения за кретит № 1

РО 5.1 Находить значение выражений, содержащих обратные тригонометрические функции, тригонометрических уравнений и неравенств.

Вариант № 1	**Вариант №2**
Задание 1 Упростите выражение : $\frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\cos 3\alpha}$	**Задание 1** Упростить выражение: $\frac{\sin 11\alpha - \sin \alpha}{\cos 11\alpha + \cos \alpha}$
Задание 2 Вычислите: $arctg\sqrt{3} - arcctg(-1) + arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3})$	**Задание 2** Вычислите,: $arccos1 + arcsin(-\frac{1}{2}) - arctg0$
Задание 3. Решить простейшее тригонометрическое уравнение: а) $\sin\frac{x}{2} = -1$ б) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ в) $\mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$	**Задание 3.** Решить простейшее тригонометрическое уравнение: а) $\mathrm{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ б) $2\cos x - 1 = 0$; в)–2sinx = $\sqrt{2}$
Задание 4. Решить уравнения по свойствам: а) cosx + cos5x = 0 б) $\cos^2 2x - 2\cos 2x - 3 = 0$ в)6 $sin^2x - 3\ sinxcosx - cos^2x = 1$;	**Задание 4.** Решить уравнения по свойствам: а)sinx + sin5x = 0 б) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$; в) $3\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$;

Вариант №3	**Вариант №4**
Задание 1 Упростить выражение: $\frac{\sin 3\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha}$	**Задание 1** Упростить выражение cos45°*cos15°
Вычислите: $arcctg\sqrt{3} + arcctg(-1) - arcctg(-\frac{\sqrt{3}}{3})$;	Вычислите: $arccos(-\frac{1}{2}) + arcsin(-\frac{1}{2}) - arctg1$;
Решить простейшее тригонометрическое уравнение: **а)** $\mathrm{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ б) $\sin\frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **в)** $\cos\frac{x}{2} = -1$	Решить простейшее тригонометрическое уравнение:: **а)** $\mathrm{tg}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ б) $\sin\frac{x}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ в)– 2cosx = 1
.Решить уравнения по свойствам:	Решить уравнения по свойствам:

а) $\cos^2 2x - 2\cos 2x - 3 = 0$ **б)** $\sin 2x \cdot \cos x = \cos 2x \cdot \sin x$ **в)** $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 6.$	а) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$; **б)** $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$ в) $4\sin^2 x - 2\sin x \bullet \cos x = 3$

Результат обучения за кредит № 2

РО 2 Преобразовывать алгебраические выражения

1 вариант	2 вариант
Задание 1 15б Запишите многочлен: $(x^3 -5x)x - (4x^3 - 3x^2 + 6x^4) - 6x$ стандартном виде. *Дескриптор:* Обучающийся: - выполняет умножение многочлена на одночлен; - раскрывает скобки и приводит подобные слагаемые; - записывает многочлен в стандартном виде.	**Задание 1 15б** Запишите многочлен: $(x^5 -2x)x^2 - (x^7 - 3x^3 + 6x^4) - 2x$ стандартном виде. *Дескриптор:* Обучающийся: - выполняет умножение многочлена на одночлен; - раскрывает скобки и приводит подобные слагаемые; - записывает многочлен в стандартном виде.
Задание 2 15б Разделить и найти остаток от деления $2x^6 - x^5 + 12x^3 - 72x^2 + 3$ на $x^3 + 2x^2 - 1$ *Дескриптор*: Обучающийся - использует алгоритм деления многочленов; - выполняет деление многочлена на многочлен «уголком»; - находит остаток от деления многочленов.	**Задание 2 15б** Разделить и найти остаток от деления $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ на $2x + 3$ *Дескриптор:* Обучающийся - использует алгоритм деления многочленов; - выполняет деление многочлена на многочлен «уголком»; - находит остаток от деления многочленов.
Задание 3 20б Найти корни уравнения $5x^4+5x^3+x^2-11$ на $x-1$, используя схему Горнера *Дескриптор: Обучающийся* - составляет схему Горнера; - находит неполное частное; - находит остаток от деления. - находит корни уравнения	**Задание 3 20б** Найти корни уравнения $2x^4 - 3x^3 - x^2 + 4x + 13$ на x-1.используя схему Горнера *Дескриптор: Обучающийся* - составляет схему Горнера; - находит неполное частное; - находит остаток от деления. - находит корни уравнения
Задание 4 15б Вычислите значение числового выражения: А) $\sqrt[3]{128 \bullet 8}$ - $0{,}5 \bullet \sqrt[10]{1024}$ *Дескрипторы:*	**Задание 4** 15б Вычислите значение числового выражения: А) $\sqrt[3]{54 \bullet 32}$ - $\sqrt[4]{8 \bullet 162} + \sqrt[3]{42\frac{7}{8}}$

Обучающийся - использует свойство степени; - применяет свойства корня n-ой; - вычисляет значение числового выражения	*Дескрипторы*: Обучающийся - использует свойство степени; - применяет свойства корня n-ой; - вычисляет значение числового выражения
Задание 5. 20б Представьте выражение в виде степени с основанием x: $\frac{x^2\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^2}}}{\sqrt[15]{x^4}}$ Дескриптор: Обучающийся – применяет свойство корня n-ой степени для преобразования выражения; - представляет выражение в виде степени с основанием x.	**Задание 5.** 20б Представьте выражение в виде степени с основанием x: $\frac{x^5\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[12]{x^5}}$ Дескриптор: Обучающийся – применяет свойство корня n-ой степени для преобразования выражения; - представляет выражение в виде степени с основанием x.
Задание 6. 15б Решите уравнение $\sqrt{x^2+2x+10}$ = 2x -1 Дескрипторы: Обучающийся - находит область допустимых значений уравнения; - возводит обе части уравнения в квадрат; - приводит уравнение к квадратному уравнению; - решает квадратное уравнение и находит его корни; - находит корни иррационального уравнения с учетом области допустимых значений	**Задание 6.** 15б Решите уравнение $\sqrt{-x^2-3x+4}$ = -2 Дескрипторы: Обучающийся - находит область допустимых значений уравнения; - возводит обе части уравнения в квадрат; - приводит уравнение к квадратному уравнению; - решает квадратное уравнение и находит его корни; - находит корни иррационального уравнения с учетом области допустимых значений

Результат обучения за кредит № 3

РО 3 Решать показательные и логарифмические уравнения, системы уравнений и неравенств.

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
Задание 1 Вычислить $2\log_6 27-\log_6 81-2\log$ *Дескриптор:* Обучающийся: -использует	**Задание 1** $2\log_2 8+\log_3\frac{27}{16}-\log_3$ *Дескриптор:* Обучающийся: -использует	**Задание 1** $2\log_2 6+\log_2\frac{35}{9}-\log_2 35$ *Дескриптор:* Обучающийся: -использует	**Задание 1** $3\log_2 4+\log_2\frac{15}{16}-\log$ *Дескриптор:* Обучающийся: -использует

определение логарифма; - использует свойства логарифмов; - вычисляет значение выражений.	определение логарифма; - использует свойства логарифмов; - вычисляет значение выражений.	определение логарифма; - использует свойства логарифмов; - вычисляет значение выражений.	определение логарифма; - использует свойства логарифмов; - вычисляет значение выражений.
Задание 2 Вычислите: а) $\log_{\sqrt{3}} 27$ *Дескриптор*: Обучающийся -использует определение логарифма; - использует свойства логарифмов; - вычисляет значение выражений.	**Задание 2** Вычислите: а) $\log_{\frac{\sqrt{6}}{2}} \frac{8}{27}$ *Дескриптор*: Обучающийся -использует определение логарифма; - использует свойства логарифмов; - вычисляет значение выражений.	**Задание 2** Вычислите: а) $\log_{\sqrt{2}}(\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9})$ *Дескриптор*: Обучающийся использует определение логарифма; - использует свойства логарифмов; - вычисляет значение выражений.	**Задание 2** Вычислите: а) $\log_9(\log_4 \sqrt[3]{4})$ *Дескриптор:* Обучающийся использует определение логарифма; - использует свойства логарифмов; - вычисляет значение выражений.
Задание 3 $5^x - 14 \cdot 5^{x-1} + 3 \cdot 5^{x+1} = 66$ *Дескриптор:* *Обучающийся* -упрощает выражение, применяя свойства степени; - применяет метод решения однородного уравнения; - использует метод замены переменной; - находит корни квадратного уравнения; - возвращается к замене переменной; - находит корни	**Задание 3** $7^{2x+1} - 8 \cdot 7^x + 1 = 0$ *Дескриптор:* *Обучающийся* -упрощает выражение, применяя свойства степени; - применяет метод решения однородного уравнения; - использует метод замены переменной; - находит корни квадратного уравнения; - возвращается к замене переменной;	**Задание 3** $9^{x+1} - 3 \cdot 3^{x+3} - 27 \cdot 3^{x-2} + 27 = 0$ *Дескриптор:* *Обучающийся* -упрощает выражение, применяя свойства степени; - применяет метод решения однородного уравнения; - использует метод замены переменной; - находит корни квадратного уравнения; - возвращается к замене переменной; - находит корни	**Задание 3** $5 \cdot 2^{2x+2} + 3 \cdot 2^{2x-1} = 86.$ *Дескриптор:* *Обучающийся* -упрощает выражение, применяя свойства степени; - применяет метод решения однородного уравнения; - использует метод замены переменной; - находит корни квадратного уравнения; - возвращается к

данного уравнения.	- находит корни данного уравнения.	данного уравнения.	замене переменной; - находит корни данного уравнения.
Задание 4 Решите систему уравнений методом подстановки: $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 4^{x+y^2}=16 \end{cases}$ Дескриптор: *Обучающийся* - выражает одну переменную через другую; - использует метод подстановки; - приводит второе уравнение системы к одному основанию; - находит решение системы.	**Задание 4** Решите систему неравенств. $\begin{cases} 3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^x-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+1> \\ 2^{x^2-3x}\le 16. \end{cases}$ *Дескрипторы*: Обучающийся приводит к одному основанию оба неравенства системы; - применяет свойства показательной функции; - получает систему линейных неравенств; - изображает решение каждого неравенства на числовой прямой; - находит пересечение промежутков; - определяет решение системы неравенств.	**Задание 4** Решите систему неравенств. $\begin{cases} 4^x-5\cdot 2^x+4\le 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1}>\frac{1}{4}. \end{cases}$ *Дескрипторы:* Обучающийся приводит к одному основанию оба неравенства системы; - применяет свойства показательной функции; - получает систему линейных неравенств; - изображает решение каждого неравенства на числовой прямой; - находит пересечение промежутков; - определяет решение системы неравенств.	**Задание 4** Решите систему уравнений методом замены: $\begin{cases} 3^x-4^y=65, \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^y=5. \end{cases}$ *Дескрипторы*: Обучающийся - делает замену переменной; - выражает одну переменную через другую; - использует метод подстановки; - приводит второе уравнение системы к одному основанию; - находит решение системы
Задание 5. $\log_4(x-3)-1=\log_4(x-6)$ Дескриптор: Обучающийся -определяет область допустимых значений; - применяет свойства логарифма суммы/ степени основания логарифма;;	**Задание 5.** $\log_2\left(x^2-3x+10\right)=3$ Дескриптор: Обучающийся определяет область допустимых значений; - применяет свойства логарифма	**Задание 5.** $\log_5(x)+\log_5(x-4)=1$ Дескриптор: Обучающийся определяет область допустимых значений; - применяет свойства логарифма суммы/ степени основания	**Задание 5.** $\log_2(x-3)+\log_2(2x$ Дескриптор: Обучающийся определяет область допустимых значений; - применяет свойства логарифма

- записывает равносильное уравнение; - находит корни уравнения.	суммы/ степени основания логарифма;; - записывает равносильное уравнение; - находит корни уравнения.	логарифма;; - записывает равносильное уравнение; - находит корни уравнения.	суммы/ степени основания логарифма;; - записывает равносильное уравнение; - находит корни уравнения.

Результат обучения за кредит № 4

РО 4 Знать основы теории вероятности, действия над комплексными числами, нахождение знания предела функции

<table>
<tr><th>1 вариант</th><th>2 вариант</th><th>3 вариант</th></tr>
<tr>
<td>Задание 1
1. Приняв математическое ожидание $M(X) = 4{,}1$, определи значение x_3.
Случайная величина X распределена следующей закономерностью:
<table><tr><td>x_i</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,3</td><td>0,3</td><td></td></tr></table>
Заполни пропуски:
1.Если $\mathrm{M}(X) = 2$ и $\mathrm{M}(X^2) = 5$, то D(X) =
2.Если дисперчияD(X) = 1, то среднеквадратическое отклонение σ(X) =</td>
<td>1. Приняв математическое ожидание $M(X) = 4{,}1$, определи значение x_3.
Случайная величина X распределена следующей закономерностью:
<table><tr><td>x_i</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,3</td><td>0,3</td></tr></table>
Заполни пропуски:
1. Если $\mathrm{M}(X) = 5$ и $\mathrm{M}(X^2) = 27$, то D(X) =
2. Если дисперчияD(X) = 36, то среднеквадратическое отклонение σ(X) =</td>
<td>2. Приняв математическое ожидание $M(X) = 4{,}1$, определи значение x_3.
Случайная величина X распределена следующей закономерностью:
<table><tr><td>x_i</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,3</td><td>0,3</td></tr></table>
Заполни пропуски:
1. Если $\mathrm{M}(X) = 3$ и $\mathrm{M}(X^2) = 15$, то D(X) =
2. Если дисперчияD(X) = 100, то среднеквадратическое отклонение σ(X) =</td>
</tr>
<tr>
<td>Задание 2 Действия над комплексными числами. Выполнение упражнений.
1.Вычислите: $z_1 + 2z_2$ $z_1 = 1 + i$ $z_2 = 1 - i$

2.Извлеките корень из комплексного числа $\sqrt{8i - 15}$

Дескриптор:</td>
<td>Задание 2 Действия над комплексными числами. Выполнение упражнений.
1.Вычислите: $5(z_1 + z_2)$ $z_1 = 3 + 2i$ $z_2 = 4 - 3i$

2.Извлеките корень из комплексного числа $\sqrt{-5 - 12i}$
Дескриптор:</td>
<td>Задание 2 Действия над комплексными числами. Выполнение упражнений.
Вычислите: $5z_1 - 2z_2$ $z_1 = 2 + i$ $z_2 = 2 - 2i$

2.Извлеките корень из комплексного числа $\sqrt{7 - 24i}$</td>
</tr>
</table>

Обучающийся Извлекает корень из отрицательного числ	Обучающийся Извлекает корень из отрицательного числ	*Дескриптор*: Обучающийся Извлекает корень из отрицательного числ
Задание 3 Вычислите предел функции: $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-3x+1}{2x-2}$ *Дескриптор: Обучающийся* **Дескриптор:** *Обучающийся* - преобразует и раскладывает на множители числитель или знаменатель и сокращает дроби; - выполняет преобразования, используя свойства пределов; - вычисляет значение предела.	**Задание 3** Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-6x+5}$ *Дескриптор: Обучающийся* - преобразует и раскладывает на множители числитель или знаменатель и сокращает дроби; - выполняет преобразования, используя свойства пределов; - вычисляет значение предела.	**Задание 3** Вычислить предел $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ *Дескриптор: Обучающийся* -- преобразует и раскладывает на множители числитель или знаменатель и сокращает дроби; - выполняет преобразования, используя свойства пределов; - вычисляет значение предела.

Результат обучения за кредит № 5

РО 5 Вычислять производные функции

1 вариант	**2 вариант**
Задание 1 А) Найдите производные функций: **15б** $\mathbf{У = -15x^4 + x^{\frac{1}{4}} - \frac{2}{x^3}}$ **Дескриптор:** *Обучающийся* - находит производные функций с натуральным показателем; - находит производные степенных функций с целым показателем; - находит производные степенных функций с рациональным показателем. В) Найдите значение производной функции **20б** $y = (x^3-1)(x^2 + x + 1)$ в точке $x_0 = 1$ **Дескриптор:** *Обучающийся* - использует правило дифференцирования произведения; - находит производные каждого множителя; - находит производную произведения функций; - находит значение производной функции в точке $x_0 = 1$ С) Найдите производную функции: **20 б**	**Задание 1** А) Найдите производные функций: **10б** $\acute{o}=\frac{1}{3}\tilde{o}^3-\frac{1}{4}\tilde{o}^2+2\tilde{o}+3$ **Дескриптор:** *Обучающийся* - находит производные функций с натуральным показателем; - находит производные степенных функций с целым показателем; - находит производные степенных функций с рациональным показателем. В) Найдите значение производной функции $y=\frac{2+x^3}{2x}$ в точке $x_0 = 1$ **Дескриптор:** *Обучающийся* - использует правило дифференцирования частного; - находит производные каждого множителя; - находит значение производной функции в точке $x_0 = 1$

$y=\dfrac{5x^2-2x-4}{2x}$ **Дескриптор:** *Обучающийся* - *использует правило дифференцирования частного;* - находит производные элементарных функций; - находит производную частного функций.	С) Найдите производную функции: $y=(x^2+2)(x^3+1)$ **Дескриптор:** *Обучающийся* - *использует правило дифференцирования произведения;* - находит производные элементарных функций; - находит производную произведения функций.
Задание 2 Найдите производную сложной функции: **15б** А) У=$\left(7x^2-3\right)^5$ **Дескриптор:** *Обучающийся* - использует правило дифференцирования сложной функции; - *использует правило дифференцирования суммы;* - находит производную функции. В) y = arccos2x +3cos(5x+6) **15б** **Дескриптор:** *Обучающийся* - *использует правило дифференцирования сложной функции;* - находит производные обратных тригонометрических функций; - *использует правило дифференцирования суммы;* - находит производную функции.	**Задание 2** Найдите производную сложной функции: А) $y=\sqrt{x^3+1}$ **Дескриптор:** *Обучающийся* - использует правило дифференцирования сложной функции; - *использует правило дифференцирования суммы;* - находит производную функции. В) y= ln2x + 3tg$\frac{x}{3}$ **Дескриптор:** *Обучающийся* - использует правило дифференцирования сложной функции; - *использует правило дифференцирования суммы;* - находит производную функции.
Задание 3 **Найти критические точки: 15б** $f(x)=-3x^{-2}+13x-12$ **Дескриптор:** *Обучающийся:* - находит производную функции; - находит критические точки; - определяет знаки производной в интервалах; - находит промежутки монотонности функции.	**Задание 3** **Найти промежутки возрастания и убывания функции: 15б** $f(x)=x^2-6x+5$ **Дескриптор:** *Обучающийся:* - находит область определения функции; - находит производную функции; - определяет знаки производной в интервалах; - находит промежутки монотонности функции.

Результат обучения за кредит № 6

РО 6 Находить первообразную функции, неопределенный и определенный интеграл.

1 вариант	2 вариант
Задание 1 Напишите общий вид	**Задание 1**

<table>
<tr><td>первообразных функции:

1. $f(x)=2-x^3+\frac{1}{x^3}$
2. $f(x)=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$
Дескриптор: Обучающийся
- использует таблицу первообразных;
- находит первообразную заданных функций</td><td>Напишите общий вид первообразных функции:

1. $f(x)=\frac{2}{\cos^2 2x}+9x^8$
2. $f(x)=\frac{5}{2\sqrt{3-4x}}+\frac{1}{(x+3)^4}$
Дескриптор: Обучающийся
- использует таблицу первообразных;
- находит первообразную заданных функций</td></tr>
<tr><td>Задание 2
Вычислить неопределенный интеграл.
1. $\int\frac{5dx}{sin^2 3x}$
2. $\int(4\mathrm{x}+5)^3dx$
3. $\int\cos(5x+2)\,dx$
Дескриптор Обучающийся
- применяет табличные интегралы;
- выполняет преобразование тригонометрических выражений;
- применяет правила вычисления интегралов
- находит интеграл.</td><td>Задание 2 Вычислить неопределенный интеграл.
1. $\int\left(\frac{-5}{\sin^2 x}+2x^3\right)dx$
2. $\int\frac{1}{3}x^2dx$
3. $\int(5cos3x+\ 2x^2-3)dx$

Дескриптор Обучающийся
- применяет табличные интегралы;
- выполняет преобразование тригонометрических выражений;
- применяет правила вычисления интегралов
- находит интеграл.</td></tr>
<tr><td>Задание 3 Вычислить определенный интеграл
1. $\int_{-3}^{2}(2\mathrm{x}+\mathrm{x}^3)\,\mathrm{dx}$
2. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx$
3. $\int_{-3}^{1}(2x^2+3x-1)dx$
Дескриптор: Обучающийся
- выбирает соответствующий метод для нахождения интеграла;
- применяет формулу Ньютона-Лейбница;
- находит значение интеграла</td><td>Задание 3 3 Вычислить определенный интеграл
1.. $\int_{-1}^{1}(x^3+2x-1)dx$

2. $\int_{1}^{2}\left(\frac{4}{x}-5x^4+2\sqrt{x}\right)$
3. $\int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{6}dx$

Дескриптор: Обучающийся
- выбирает соответствующий метод для нахождения интеграла;
- применяет формулу Ньютона-Лейбница;
- находит значение интеграла</td></tr>
<tr><td>Задание 4</td><td>Задание 4</td></tr>
</table>

$y''+5y'+6y=0$ *Дескриптор:*Обучающийся - составляет характеристическое уравнение; - определяет корни характеристического уравнения; - подставляет найденные значения в формулу общего решения линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами; - находит общее решение.	$y''+25y=0$ *Дескриптор:*Обучающийся - составляет характеристическое уравнение; - определяет корни характеристического уравнения; - подставляет найденные значения в формулу общего решения линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами; - находит общее решение.
Результат обучения за кредит № 6 **РО** Находить первообразную функции, неопределенный и определенный интеграл.	
Вариант 4	**3 вариант**
Задание 1 Напишите общий вид первообразных функции: 1. $f(x)=(2x-3)^5$ **2. f(x) =** $\frac{2}{x^4}-\frac{x3}{5}-2x+2$ Дескриптор: *Обучающийся* - использует таблицу первообразных; - находит первообразную заданных функций	**Задание 1** Напишите общий вид первообразных функции: **1. f(x) =** $\frac{1}{3\sin^2(2-3x)}+\frac{x^3}{3}$ **2. f(x) =** $\frac{3}{(5-2x)^4}$ Дескриптор: *Обучающийся* - использует таблицу первообразных; - находит первообразную заданных функций
Задание 2 **1.** $\int(6cos4x+\ 3x^5-1)dx$ **2.** $\int 4(5-6x)^3dx$ **3.** $\int\frac{5dx}{\sqrt{5x-7}}$ Дескриптор *Обучающийся* - применяет табличные интегралы; - выполняет преобразование тригонометрических выражений; - применяет правила вычисления интегралов - находит интеграл.	**Задание 2** **1.** $\int(7\text{x}+3)^5dx$ **2.** $\int(3sin2x-\ 5x^9+4)dx$ **3.** $\int\frac{3dx}{(8-7x)^4}$ Дескриптор *Обучающийся* - применяет табличные интегралы; - выполняет преобразование тригонометрических выражений; - применяет правила вычисления интегралов - находит интеграл.
Задание 3	**Задание 3**

1. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} -7\sin 3x\,dx$ **2.** $\int_{-1}^{2} (9x^2 - x - 2)\,dx$ **3.** $\int_{-3}^{4} \sqrt{x-3}\,dx$ Дескриптор: *Обучающийся* - выбирает соответствующий метод для нахождения интеграла; - применяет формулу Ньютона-Лейбница; - находит значение интеграла	1. $\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{6}{\cos^2 2x}\,dx$ 2. $\int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2)\,dx$ 3. $\int_{-5}^{1} \sqrt{2+x}\,dx$ Дескриптор: *Обучающийся* - выбирает соответствующий метод для нахождения интеграла; - применяет формулу Ньютона-Лейбница; - находит значение интеграла
Задание 4 $y'' + 8y' + 16y = 0$ *Дескриптор:*Обучающийся - составляет характеристическое уравнение; - определяет корни характеристического уравнения; - подставляет найденные значения в формулу общего решения линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами; - находит общее решение.	**Задание 4** $4y'' + 12y' + 9y = 0$ *Дескриптор:*Обучающийся - составляет характеристическое уравнение; - определяет корни характеристического уравнения; - подставляет найденные значения в формулу общего решения линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами; - находит общее решение.

Результат обучения за кредит № 7

РО 7 Знать аксиомы стереометрии, определение вектора и действия над векторами в пространстве.

1 вариант	**2 вариант**
Задание 1 Построить точку в пространстве B(4; 2; -5)	**Задание 1** Построить точку в пространстве A(-1; 3; -5)
Задание 2 В параллелограмме *ABCD* диагонали пересекаются в точке *O*. *A* (1; 3; –1), *O* (0; 1,5; 0). Тогда координаты точки *C* равны…	**Задание** Даны два вектора $\vec{a}(2;-3;4)$ и $\vec{b}(-1;-2;-5)$. Найти сумму, разность, длину, скалярное произведение и угол между ними.

Задание 3 Даны координаты точек: A (1; –1; –4), B (–3; –1; 0), C (–1; 2; 5), D (2; –3; 1). Тогда косинус угла между прямыми AB и CD равен…	**Задание** Даны координаты точек: C (3; –2; 1), D (–1; 2; 1), M (2; –3; 3), N (–1; 1; –2). Тогда косинус угла между прямыми CD и MN равен
Задание 4 Вычислить координаты середины отрезка АВ, если А(-10; 2; 3) и В(0; 16; -7). И найти медиану	**Задание 4** Даны три точки А(1; 5; -3), В(6; 4; -3) и С(2; 0; -3). Вычислить: 1. Длину медианы АМ 2. Периметр ΔАВС 3. Косинус угла С
Задание 5 Даны три точки $A(1;1;1)$, $B(2;2;1)$, $C(2;1;2)$. Найти угол $\varphi = \angle BAC$.	**Задание 5** Даны векторы $\vec{a}(\frac{3}{5};\frac{1}{3};1)$ и $\vec{b}(\frac{1}{4};\frac{3}{8};\frac{1}{2})$. Вычислить координаты вектора $\vec{m} = 15\vec{a} - 8\vec{b}$.
Результат обучения за кредит № 7 **РО 7** Знать аксиомы стереометрии, определение вектора и действия над векторами в пространстве.	
Вариант 4	**3 вариант**
Задание 1 Построить точку в пространстве А(4; 5; 1)	**Задание 1** Построить точку в пространстве **В**$(-3;2;7)$
Задание 2 - Найдите длину отрезка CD и координаты его середины, если C (-2;1;5), D (4;0;6).	**Задание 2** Даны векторы $\bar{a}(0; 4; -7)$ и $\bar{b}(7; -9; 1)$. Найти $3\bar{a} - 2\bar{b}$ и $-\bar{a} + 4\bar{b}$ - находит интеграл.
Задание 3 Вычислить периметр треугольника АВС,	**Задание 3** Вычислить угол между векторами $\vec{a}(3;3;0)$

если A(0; -1; 5), B(-10; 4; 0), C(2; 0; 2)	и $\vec{b}(3;0;0)$:
Задание 4 Даны три точки A(-1; 3; -5), B(4; 2; -5) и C(0; -2; -5). Вычислить: 1. Длину медианы AM 2. Периметр ∆ABC 3. Косинус угла C	**Задание 4** Найдите cos A, если дан треугольник ABC, заданный координатами своих вершин:A(-6;4;-2), B(0;-2;8),C(8;-6;2).
Задание 5 Треугольник ABC задан координатами его вершин A(3;–4;2), B(–3;2;–4), C(1;3; –1). Найти длину медианы CM.	**Задание 5** Даны $\vec{a}\{1;-2;0\}$; $\vec{в}\{3;-6;0\}$; $\vec{c}\{0;-3;4\}$.Найдите координаты вектора $\vec{p}=2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{в}-\vec{c}$.

Тестер «Мтематика» пәні бойынша
Тест по «Математика» (1курс)

1 Нұсқа
Вариант 1

1 Сұрақ
Вопрос 1
Для функций *f(x)*=3*x* +4, найдитеf(-3)
A) -5
B) 4
C) -2
D) 0
E) 10

2 Сұрақ
Вопрос 2
Для функций и *g(x)= 2x–* $\frac{1}{3}$, найдите g($\frac{2}{3}$);
A) 1
B) 4
C) -2
D) 0
E) 10

3 Сұрақ
Вопрос 3
Частный случай уравнения sin x = 1
A) X = $\frac{\pi}{2}+2\pi\kappa, \kappa \in Z$
B) X = $\pi+\pi\kappa, \kappa \in Z$

C) X = $\pi + 2\pi\kappa, \kappa \in Z$

D) X =. $\frac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z$.

E) 1

4 Сұрақ

Вопрос 4

Вычислите значения $arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$

A) 45^0

B) 35^0

C) 30^0

D) 0

E) 90^0

5 Сұрақ

Вопрос 5

Решите тригонометрическое уравнение:$\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$

A) $x_1 = -\pi/4 + \pi k$; $x_2 = -\arctan 3 + \pi n$.

B) $x = 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $n, k \in Z$.

C) X =. $x = arctg\frac{3}{2} + \pi k$, $k \in Z$ ..

D) 1

6 Сұрақ

Вопрос 6

Запишите многочлен в стандартном виде: 12 + 3c8bc^2 - c2a

A) 24c^3b - 2ac +12

B) 12 + 24cb - 2ac

C) 12 + 3*8b*c^3 - c*2a

D) 2ac -24cb^2 +12

E) 12 - 24cb + 2ac

7 Сұрақ

Вопрос 7

Частное и остаток от деления многочлена $x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 22$ на многочлен x-2 равны

A) $x^3 + 2x^2 + 2x - 5$: остаток 22

B) $x^3 + x^2 + 4x + 11$: остаток 0

C) $x^3 - x^2 + 2x - 5$: остаток 2

D) $x^3 - x^2 + 2x + 3$: остаток (-12)

E) $x^3 + x^2 + 3x - 11$: остаток 4

8 Сұрақ

Вопрос 8

Упростить выражение **:** $\sqrt[3]{\sqrt{m^3}}$

A) $\sqrt[6]{m}$
B) $\sqrt[3]{m}$
C) $\sqrt{m}$
D) m^2
E) m^6

9 Сұрақ
Вопрос 9

Вычислите $6+\sqrt[4]{256}$

A) 100
B) 22
C) 10
D) 70
E) 20

10 Сұрақ
Вопрос 10

Упростите выражение $((x^2)^2)^4$

A) x^8
B) x^{16}
C) x^{10}
D) x^{256}
C) x^{11}

11 Сұрақ
Вопрос 11

Решить уравнение $5^{x-1}=125$
A) -4
B) 2
C) 0
D) 4
E) 1

13Сұрақ
Вопрос13
Решить уравнение $\log_2(x-1) = 3$
A) 9
B) 10
C) 8
D) -1
E) 3

14Сұрақ
Вопрос 15
Вычислить: $3^{\log_3 27}$
A) 3
B) 27

C) 9
D) 1
E) 81

15Сұрақ
Вопрос 15
Вычислите значение выражения: $\frac{12!}{9!}$
A) 1300
B) 1320
C) -1,333
D) 1,333
E) 1

16Сұрақ
Вопрос 16
Сколькими способами можно расставить на полке 6 различных книг:

A) 720
B) 840
C) 1,3
D) 1,3
E) 1

17 Сұрақ
Вопрос 17
Найдите мнимую и действительную часть :z=2−3i

A) Rez = 2, Imz = -3
B) Rez = 2, Imz = 3
C) Rez = 0, Imz = -3
D) Rez = -3, Imz = 2
E) Rez = -3, Imz = --2

18 Сұрақ
Вопрос 18
Вычислите$(\boldsymbol{8+6i})+(\boldsymbol{6+4i})$
A) 14 + 10i
B) 12 + i
C) 10 + i
D) 12 - 10i
E) 14 + 4i

19Сұрақ
Вопрос 19
Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)$
A) 7
B) 13
C) 12
D) 10

E) 2

20 Сұрақ

Вопрос 20

Найдите производную функции: f(x)=cos7x

A) 7cos7x
B) -7cos7x
C) -7sin7x
D) 7sin7x
E) 7cosx

21Сұрақ

Вопрос 21

Найдите производную функции $f(x) = 17x^3 – 12x^2 - 4x + 1$

A) $51x^2-12x+0$
B) $21x^2-12x+1$
C) $21x^2-24x$
D) $51x^2-24x-4$
E) $21x^2-12x^2-4$

22 Сұрақ

Вопрос 22

Какая из данных функций является первообразной для функции $y=2x^3-3x^2$?

A) $3x^2-6x$;
B) $0,5x^4-x^3+5$
C) x^3
D) $\frac{x^4}{2} - x^3$
E) $2x^6+x$

23Сұрақ

Вопрос 23

Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$

A) $-\frac{1}{2} ctg 2x + C$
B) $\frac{1}{2} tg 2x + C$
C) $ctg 2x + C$
D) $tg 2x + C$
E) $\frac{1}{2} tgx + C$

24Сұрақ

Вопрос 24

Найдите неопределенный интеграл: $\int (7x + 3)^5 dx$

A) $\frac{(7x+3)^6}{6} + C$

B) $\frac{5(7x+3)^4}{2}+C$

C) $\frac{(7x+3)}{42}+C$

D) $\frac{(7x+3)^6}{42}+C$

E) $5(7x + 3)^4 + C$

25Сұрақ

Вопрос 25

Найти интеграл . $\int_4^9 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

A) 2
B) 0
C) 11
D) 1
E) 3

26Сұрақ

Вопрос 26

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется

A) Кубом
B) прямоугольником
C) параллелепипедом
D) пирамидой
E) нет верного ответа

27 Сұрақ

Вопрос 27

A (x_1; y_1; z_1), B (x_2; y_2; z_2). Тогда координаты точки – середины отрезка AB**равны**…

A) $(x_2 - x_1;\ \ y_2 - y_1;\ \ z_2 - z_1);$

B) $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2};\ \frac{z_1+z_2}{2}\right);$

C) $\left(\frac{x_1+x_2}{3};\ \frac{y_1+y_2}{3};\ \frac{z_1+z_2}{3}\right).$

D) 0

E) 1

28Сұрақ

Вопрос 28

Какое утверждение **верное**?

A) $\cos\ (\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}) = \dfrac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{\vec{a}\vec{b}}.$

B) $\cos\ (\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$

C) $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$

D) все ответы верные

E) нет верного ответа

29Сұрақ

Вопрос 29

Решите задачу: Дано: конус, h = 8 см,l = 10см.Найдите: радиус

A) 6см

B) 10см

C) 5 см

D) 3см

E) 8см

30Сұрақ

Вопрос 30

Площадь боковой поверхности цилиндра **можно**вычислить по формуле…

A) $S_{\text{бок}} = 2\pi RH;$

B) $S_{\text{бок}} = \pi R^2 H;$

C) $S_{\text{бок}} = \pi RH.$

D) $S_{\text{бок}} = RH$

E) $S_{\text{бок}} = H$

2 Нұсқа
Вариант 2

1 Сұрақ
Вопрос 1

Для функции $f(x)=x^3+2$, найдите f(2);

A) 10
B) 8
C) 5
D) 4
E) 6

2 Сұрақ
Вопрос 2

Для функции $g(x)=2x-5$, найдите g(-2)
A) -9
B) -1
C) 1
D) 0
E) 6

3 Сұрақ
Вопрос 3

Решите уравнение: 2cosx–1=0

A) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$
B) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$
C) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$
D) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$
E) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

4Сұрақ
Вопрос 4

Решите уравнение $sin^2 x + 5 sin x - 6 = 0.$
A) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$
B) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$
C) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

D) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

E) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

5 Сұрақ

Вопрос 5

Многочлен называется ......, если он сохраняет свой вид при одновременной замене x на y и y на x.

A) однородным
B) симметричным
C) квадратным
D) неполным
E) нет верного ответа

6 Сұрақ

Вопрос 6

Если многочлены равны $3x^n + bx^4 + x^2 + 5$ и $3x^6 + 2x^4 + ax^2 + 5$

A) n = 6 b = 2 a = 1
B) n = 3 b = 2 a = 5
C) n = 3 b = -2 a = 2
D) n = -6 b = -2 a = 0
E) n = 3 b = -2 a = 3

7Сұрақ

Вопрос 7

Вычислите $29\cdot 16^{\frac{1}{4}} - 15.$

A) 131
B) 43
C) 73
D) 101.
E) 0

8Сұрақ

Вопрос 8

Упростить: $\dfrac{\left(x^{-4}\right)^5}{x^4\cdot x^{-31}}$

A) x^7
B) x
C) x^3
D) x^5
E) x^{20}

9 Сұрақ

Вопрос 9

Решите уравнение: $3^x = \dfrac{1}{27}$

A) 9

B) 5
C) 1
D) $\frac{1}{3}$.
E) -3

10Сұрақ
Вопрос 10

Реши уравнение: $2^x \cdot 2 + 2^x = 6$.

A) 5
B) 2
C) 4
D) 1
E) 3

11Сұрақ
Вопрос 11

Реши уравнение: $\log_3 (2x + 1) = 2$

A) 5
B) 0
C) 8
D) -1
E) 4

12Сұрақ
Вопрос 12

Реши уравнение: $\log_3 (2x – 1) + \log_3 (x + 3) = 2$.

A) $\frac{3}{2}$;3
B) $\frac{2}{3}$;–4
C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{3}{2}$; -4
E) 0; -3

13Сұрақ
Вопрос 13

Вычислить размещение A^3_6 :

A) 18
B) 220
C) 120
D) 330
E) 360

14Сұрақ

Вопрос 14

Сколькими способами можно составить список из 7 учеников?

A) 7
B) 49
C) 5040
D) 540
E) 1204

15Сұрақ

Вопрос 15

Найдите мнимую и действительную часть :$\boldsymbol{z}$=−7+$\boldsymbol{i}$

A) Rez = -7, Imz = 1
B) Rez = 7, Imz = 0
C) Rez = 0, Imz = 7
D) Rez = -7, Imz = -1
E) Rez = 0, Imz = -1

15Сұрақ

Вопрос 15

Вычислите: . $(\mathbf{5}-\boldsymbol{i})-(\mathbf{6}-\mathbf{2}\boldsymbol{i})$

A) i - 1
B) 2i +1
C) 1 +2i
D) -1-2i
E) 2i

16Сұрақ

Вопрос 16

Вычислить предел $\lim_{\mathrm{x}\to 2}(3\mathrm{x}+2)$

A) 7
B) 8
C) 12
D) 10
E) 2

17Сұрақ

Вопрос 17

Найти критические точки функции$f(x)=x^2+4x$

A) $x_{min}=-2$
B) $x_{min}=2$
C) $x_{max}=-2$
D) $x_{max}=2$
E) $x_{max}=0$

18Сұрақ

Вопрос 18

Найдите производную функции: $f(x) = \sin x + x^2$

A) $-\cos x$

B) $\cos x - 2x$

C) $2x - \cos x$

D) $2x + \cos x$

E) $\cos x - x^3$

19Сұрақ

Вопрос 19

Какая из данных функций является первообразной для функции y=7x^6-15x^4?

A) $2x^7 - 5x^3$;

B) x^7-3x^5

C) x^7-x^5-1

D) 0

E) 1

20 Сұрақ

Вопрос 20

Какая из данных функций является первообразной для функции y=-4sin2x?

A) $\sin 4x$;

B) $2 + 2\cos^2 x$;

C) $1 - 2\cos^2 x$.

D) 4cos2x

E) $2\cos 2x$

21Сұрақ

Вопрос 21

Вычислите интеграл: $\int_{-2}^{1} \left(4x^3 + 6x\right)dx$

A) -22

B) 24

C) 26

D) -34

E) -24

22Сұрақ

Вопрос 22

Вычислить определенный интеграл: $\int_{-3}^{2} (2x - 3)dx$

A) -20

B) 20

C) 0

D) -40

E) 40

23Сұрақ
Вопрос 23

Даны векторы $\vec{a}$ (4;-3;2) и $\vec{b}$ (0;6:-4)   Найти $\vec{a}$ + $\vec{b}$

A) (4;3;-2)
B) (-4;-3;1)
C) (-4;-3;-1)
D) (4;3;1)
E) (-4;3;-1)

24Сұрақ
Вопрос 24

Даны точки А(3; 0; -1) и В(2; -6; 0). Укажите координаты вектора АВ

A) (0; 0; 0)
B) (6; 0; 0)
C) (1; 6; -1)
D) (-1; -6; 1)
E) (1;2;-3)

25 Сұрақ
Вопрос 25

Апофема - это высота ...

A) высота правильной пирамиды
B) высота боковой грани правильной пирамиды
C) высотабоковой грани любой пирамиды
D) высотабоковой грани любой призмы
E) высотабоковой грани любой конуса

26Сұрақ
Вопрос 26

Площадь боковой поверхности конуса можно вычислить по формуле…

A) $S_{\text{бок}} = \pi Rl;$
B) $S_{\text{бок}} = \pi RH;$
C) $S_{\text{бок}} = \pi lH.$
D) $S_{\text{бок}} = \pi R^2 H;$
E) $S_{\text{бок}} = 2\pi RH;$

27Сұрақ
Вопрос 27

Дано: конус, *h=3 см,* *r*=1,5 см.Найти: V.

A)2,25π см^3
B) 2,20см
C) 2,25 см
D) 22,5см^3
E) 225см^3

28Сұрақ
Вопрос 28

Высота конуса равна 8, а диаметр основания – 30. Найдите образующую конуса.

A) 7
B) 14
C) 17
D) 11
E) 8

29Сұрақ
Вопрос 29
Высота конуса равна 12, а диаметр основания – 10. Найдите образующую конуса.

A) 13
B) 17
C) 11
D) 8
E) 7

30 Сұрақ
Вопрос 30
Назовите формулу вычисления объема цилиндра:
A) $\pi R^2 L$
B) $\pi R^2 H$.
C) $2\pi RH$.
D) $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.
E) πRL

3 Нұсқа
Вариант 3

1 Сұрақ
Вопрос 1
Найти значения функции в заданных точках: $f(x)= 3x^2-7$, $x=-3$

A) 20
B) 4
C) -2
D) 0
E) 10

2 Сұрақ

Вопрос 2

Найти значения функции в заданных точка $f(x)=7x^3+5$, x= 0

A) 20
B) 4
C) 5
D) 0
E) 10

3 Сұрақ

Вопрос 3

Вычислите: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

A) 45^0
B) 60^0
C) 30^0
D) 25^0
E) 120^0

3 Сұрақ

Вопрос 3

Решить простейшее тригонометрическое уравнение: $2\cos x-\sqrt{3}=0$

A) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$
B) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$
C) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$
D) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$
E) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

4 Сұрақ

Вопрос 4

Решить уравнение sinx + sin5x = 0

A) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$
B) $\frac{\pi n}{3}, n \ni z, \frac{\pi}{6}+\pi n, n \ni z$
C) $\frac{\pi n}{2}, n \ni z, \frac{\pi}{3}+\pi n, n \ni z$
D) $\pi n, n \ni z, \frac{\pi}{3}+\pi n, n \ni z$

E) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n \in Z$

5 Сұрақ
Вопрос 5

Укажите многочлен стандартного вида:

A) $3x^2 + 7$;

B) $3x + 7^2$;

C) $7xy – 2xy$;

D) $3x + y + 0,2x$;

E) среди предложенных вариантов многочлена стандартного вида нет.

6 Сұрақ
Вопрос 6

Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение $(a^2 - a + 7) – (a^2 + a + 8)$.

A) - 1;

B) - 2a – 1;

C) 15;

D) - 2a + 15;

E) другой ответ.

7 Сұрақ
Вопрос 7

Указать степень многочлена: $6a^2bc+5a^3bc$

A) 1
B) 9
C) 5
D) 4
E) 11

8 Сұрақ
Вопрос 8

Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{27\cdot125\cdot8}$
A) 15
B) 30
C) 60
D) 18
E) 10

9Сұрақ
Вопрос 9

Упростить: $\dfrac{\left(z^{2}\right)^{-6}}{z^{-4}\cdot z^{-9}}$

A) z^3
B) z^5
C) z
D) z^2
E) 1

10 Сұрақ
Вопрос 10

Решить уравнение $\left(\frac{3}{7}\right)^{x}=\frac{7}{3}$.
A) 0
B) 3
C) 1
D) -1
E) 4.

11 Сұрақ
Вопрос 11

Решить уравнение $3^{x}=\sqrt{81}$.

A) 3
B) 1
C) 4
D) -1
E) 2.

12 Сұрақ
Вопрос 12

Вычислите: $81^{log_9 15}$
A) 125
B) 225
C) 25
D) 15
E) 81

13Сұрақ
Вопрос 13

Найдите значение выражения: $\log_2 7-\log_2 63+\log_2 36$
A) 8
B) -2,5
C) 2
D) 1
E) 0

14 Сұрақ

Вопрос 14

Вычислите значение выражения: $\frac{14!}{12!}$

A) 182
B) 2!
C) 1,2!
D) 2
E) 32

15 Сұрақ

Вопрос 15

Вычислить размещение A^3_{10} :

A) 720
B) 620
C) 120
D) 130
E) 740

16 Сұрақ

Вопрос 16

Модуль комплексного числа $z = 6 + 8i$ равен…

A) 10
B) 6
C) 14
D) 8
E) 2

16 Сұрақ

Вопрос 16

Произведение комплексных чисел $z_1 = 4 - i$ и $z_2 = 3 - 7i$ равно …

A) $5 - 30i$
B) $5 - 26i$
C) $19 - 30i$
D) $19 - 26i$
E) 5-31i

17 Сұрақ

Вопрос 17

Вычислите $\lim_{x \to 3} (x^2 - 5x + 3)$

A) – 3
B) $\frac{1}{6}$
C) – 4
D) 8
E) 0

18 Сұрақ

Вопрос 18

Найдите производную функции: $f(x) = 2(2x + 5)^4$.

A) $(2x + 5)^5$

B) $\frac{4}{5}(2x + 5)^5$

C) $8(2x + 5)^3$

D) $\frac{2}{5}(2x + 5)^5$

E) $16(2x + 5)^3$

19 Сұрақ

Вопрос 19

Найдите производную функции: $f(x) = (5+2x)(x-3)$

A) 2x-11

B) 2x-1

C) -4x-21

D) 4x-1

E) 4x+1

20 Сұрақ

Вопрос 20

Найдите первообразные f(x)=5

A) 4x

B) -6

C) 5x

D) -5x

E) -5

21 Сұрақ

Вопрос 21

Вычислить неопределенный интеграл $\int(x^5-4x^3+x-1)dx$

A) $x^3+x^4+x^2+1+C$

B) $x^2-x^4+x^5+1+C$

C) $x^{66}-x^4+x^{22}-x+C$

D) $12x^2-14x^4+1x+x^4+C$

E) $\frac{x^6}{6} - x^4 + \frac{x^2}{2} - x + c$

22 Сұрақ

Вопрос 22

Вычислите интеграл: $\int_{-2}^{1}\left(4x^3 + 6x\right)dx$

A) -22

B) 24

C) 26

D) -34

E) -24

23 Сұрақ

Вопрос 23

$\vec{a}\{m; n; k\}$. Тогда **верно**, что…

A) $|\vec{a}| = \sqrt{m+n+k}$;

B) $|\vec{a}| = \sqrt{m^2+n^2+k^2}$;

C) $|\vec{a}| = \sqrt{mnk}$.

D) все ответы верны

E) нет верного ответа

24 Сұрақ
Вопрос 24

Скалярное произведение векторов $\vec{m}\{m_1; m_2; m_3\}$ и $\vec{n}\{n_1; n_2; n_3\}$ равно…
A) $m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3$
B) $(n_1 - m_1)^2 + (n_2 - m_2)^2 + (n_3 - m_3)^2$
C) $m_1m_2m_3 + n_1n_2n_3$.
D) $n_1n_2n_3$.
E) $(n_1 - m_1)^2 + (n_2 - m_2)^2$

25Сұрақ
Вопрос 25
Умножьте вектор $\vec{a}(4; 2; -1)$ на –3:
A) (-12; -6; -3);
B) (12; -6; -3);
C) (-12; 6; 3);
D) (-12; -6; 3);
E) (-12; 6; -3).

26Сұрақ
Вопрос 26

Измерения прямоугольного параллелепипед равны 6 см, 8 см и 3 см. Тогда площадь полной поверхности параллелепипеда равна…
A) 77
B) 144
C) 62
D) 122
E) 40

27 Сұрақ
Вопрос 27
Образующая конуса равна 10, а диаметр основания – 12. Найдите высоту конуса.

A) 7

B) 8

C) 6

D) 12

E) 4

28 Сұрақ
Вопрос 28

Площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра равна 12π, а высота цилиндра равна 3. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

A) 24π
B) 16π
C) 22π
D) 20π
E) 10π

29 Сұрақ
Вопрос 29
Определите площадь полной поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований равны 6 см и 10 см, образующая равна 3 см.
A) 212π $см^2$
B) 224π $см^2$
C) 220π $см^2$
D) 316π $см^2$
E) 210π $см^2$

30Сұрақ
Вопрос 30

Найдите объём шара, диаметр которого равен 6 см.
A) 32π $см^3$
B) $\frac{16\pi}{3}$ $см^3$
C) $\frac{9\pi}{2}$ $см^3$
D) $\frac{32\pi}{3}$ $см^3$
E) 36π $см^3$

4 Нұсқа
Вариант 4

1 Сұрақ
Вопрос 1

Найдите значения функции в заданных точках: f(x)=$\sqrt{x^2-3x+1}$; x = 0

A) -5
B) 4
C) -2
D) 1
E) 10

2 Сұрақ
Вопрос 2

Решить уравнение $ctgx=1$

A) $(-1)^n \frac{\pi}{3}+\pi n \ n-целое$

B) $\frac{\pi}{4}+\pi n \ n-целое$

C) $\frac{\pi}{3}+\pi n \ n-целое$

D) $\frac{\pi}{2}+\pi n \ n-целое$

E) $(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n \ n-целое$

3 Сұрақ

Вопрос 3

Решить простейшее тригонометрическое уравнение: – 2cosx = 1

A) $(-1)^n \dfrac{\pi}{3} + \pi n \ n - целое$

B) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n \ n - целое$

C) $\pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \ni z$

D) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n \ n - целое$

E) $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n \ n - целое$

4Сұрақ

Вопрос 4

Выполните деление многочленов: $(2x^3 + 5x^2 - 3x) : (2x - 1)$

A) $x^2 + 3x$

B) $2x^2 + 2{,}5x - 1{,}5$

C) $2x - 1$

D) $2x^3 + 5x^2 - 3x$

E) 1

5Сұрақ

Вопрос 5

Привести многочлен к стандартному виду: $aaaa - bbbbb$

A) $a^4 - b^5$

B) $4a - 5b$

C) $a^4 \cdot b^5$

D) 1

E) $ab - ab - ab - ab - b$

6 Сұрақ
Вопрос 6
Выполните умножение одночлена на многочлен: $3x(x^2-5x+4)$

A) $3x^3-15x^2+12x$
B) x^2-5x+4
C) $3x^2-15x+12$
D) 0
E) 3x

7 Сұрақ
Вопрос 7
Найдите числовое значение выражения $\sqrt[5]{27}\sqrt[5]{9}+\dfrac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{5}}$.

A) 8
B) 2
C) -3
D) -5
E) -8

8Сұрақ
Вопрос 8
Какое из данных равенств неверно:
A) $\sqrt[3]{125}=5;$
B) $\sqrt[21]{1}=1;$
C) $\sqrt[4]{256}=4;$
D) $\sqrt[3]{2\dfrac{10}{27}}=-1\dfrac{1}{3}.$
E) 7^2=49

9 Сұрақ
Вопрос 9
Найдите числовое значение выражения $\sqrt[7]{16}\sqrt[7]{-8}+\dfrac{\sqrt[3]{-25}}{\sqrt[3]{0,2}}$.

A) 5;
B) 2;
C) -7;
D) -5
E) -2

10 Сұрақ
Вопрос 10

Решите уравнение: . $3^{6-x} = 3^{3x-2}$

A) 2
B) 5
C) 3
D) 7
E) 4

11 Сұрақ
Вопрос 11

Вычислите: $81^{log_9 15}$

A) 125
B) 225
C) 25
D) 15
E) 81

12 Сұрақ
Вопрос 12

Вычислите $\log_6 30 - \log_6 \frac{5}{6}$

A) 2
B) 1
C) 4
D) 5
E) 6

13 Сұрақ
Вопрос 13

Решите уравнение: $\log_5(2x-3) = \log_5(x+1)$

A) 3
B) 4
C) 2
D) -1
E) $-\frac{3}{2}$

14Сұрақ
Вопрос 14

Найти математическое ожидание от функции z=x+2y-5, если M(x)=2, M(y)=3

A) M(z)=0
B) M(z)=3
C) M(z)=8

D) M(z)=9
E) M(z)=5

15Сұрақ
Вопрос 15
Найти дисперсию случайной величины z=3x-2y+14, если D(x)=2, D(y)=1

A) D(z)=18
B) D(z)=28
C) D(z)=15
D) D(z)=16
E) D(z)=14

16Сұрақ
Вопрос 16
Действительной частью суммы двух комплексных чисел $z_1 = 5 + 10i$ и $z_2 = 7 + 5i$ является число:

A) 15
B) 12
C) 27
D) 5
E) 6

17Сұрақ
Вопрос 17
Если $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 5i$, то $z_1 + z_2$ равно

A) $3 + 2i$
B) $3 - 8i$
C) $1 + 2i$
D) $1 - 8i$
E) $1 + 8i$

18 Сұрақ
Вопрос 18
Дана функция $f(x) = 5x^2 - 3x^6$. Найдите $f'(1)$

A) -6
B) 2
C) -8
D) 0
E) 4

19 Сұрақ
Вопрос 19
Найдите производную функции f(x) = $(7 - 2x)^4$.
A) -4$(7 - 2x)^{-3}$
B) -8$(7 - 2x)^3$
C) 8$(7 - 2x)^3$
D) $(7 - 2x)^2$.

E) 8

20 Сұрақ
Вопрос 20
Найти точки max и min для функции f(x) = x^2-x

A) $x = \frac{1}{2}$ – точка min
B) x = 0 – точка min
C) x = 1- точка max
D) $x = \frac{1}{2}$ - точка max
E) нет точек max и min

21 Сұрақ
Вопрос 21
Укажите первообразную функции f(x) = 2x + $4x^3$ – 1.
A) $x^2 + x^4 - x$
B) $2x^2 + 4x^4$
C) $2 + 12x^2$
D) d)x^2+x^4.
E) $x^3 + x$

22 Сұрақ
Вопрос 22
Вычислить неопределенный интеграл: $\int(3x^2 + 2)dx$

A) $x^3 + 2 + C$
B) $x^3 + 2x^2$
C) $x^3 - 2x^2$
D) d)$x^3 + 2x$
E) $x^3 - 2x$

23 Сұрақ
Вопрос 23
Вычислите: $\int_1^4 3x^2dx$

A) 64
B) 65
C) 63
D) 62
E) 61

24Сұрақ
Вопрос 24

Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(2; -5; 3)$ и $B(5; 1; -2)$.

A) (3; -6; 5);
B) (3; 6;-5);
C) (-3; 6; -5);
D) (7; -4; 1);
E) (-3; 6; 5).

24Сұрақ
Вопрос 24
Даны точки А(4; 5; 1) и В(0; 9; -8). Чему равна длина отрезка АВ?

A) $\sqrt{113}$

B) $\sqrt{42}$

C) $\sqrt{32}$

D) $\sqrt{81}$

E) $2\sqrt{32}$

25Сұрақ
Вопрос 25
К многогранникам относятся:
A) параллелепипед
B) призма
C) пирамида
D) все ответы верны
E) правильная пирамида

26Сұрақ
Вопрос 26
Вершины многогранника обозначаются:
A) а, в, с, д ...
B) А, В, С, Д ...
C) ав, сд, ас, ад ...
D) АВ, СВ, АД, СД ...
E) нет верного ответа

27Сұрақ
Вопрос 27
Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если его длина 6 см, ширина – 7 см, а диагональ – 11 см.

A) 126 см^3;

B) 252 см^3;

C) 164 см^3;

D) другой ответ.

E) нет верного ответа

28Сұрақ

Вопрос 28

Площадь поверхности шара равна 36π см^2. Найдите его объём.

A) 18π см^3
B) 32π см^3
C) 12π см^3
D) 36π см^3
E) 40π см^3

29Сұрақ

Вопрос 29

Образующая конуса равна 10см, а высота 8см. Найти объём конуса.

A) 120π см^3
B) 360π см^3
C) 96π см^3
D) 288π см^3
E) 384π см^3.

30 Сұрақ

Вопрос 30

Назовите элемент, не принадлежащий цилиндру

A) Вершина
B) Образующая
C) Радиус
D) Высота
E) диаметр

5 Нұсқа

Вариант 5

1 Сұрақ
Вопрос 1
Линейная функция задана формулой y=10x-7, найдите значение функции при x=3
A) 25
B) 23
C) 20
D) 32
E) 22

2 Сұрақ
Вопрос 2
Решить уравнение $6tg^2x + tgx - 1 = 0$
A) $\frac{\pi}{4} + \pi n \; n - целое$
B) $x_1 = arctg\frac{1}{3} + \pi n, \quad x_2 = arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n \; n - целое$
C) $\frac{\pi}{3} + \pi n \; n - целое$
D) $x_1 = \frac{1}{3} + \pi n, \quad x_2 = \left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n \; n - целое$
E) $x_1 = arcctg\frac{1}{3} + \pi n, \quad x_2 = arcctg\left(\frac{1}{2}\right) + \pi n \; n - целое$

3 Сұрақ
Вопрос 3
Найдите значения выражений: $arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
A) $\frac{5\pi}{6}$
B) $\frac{\pi}{6}$
C) $-\frac{\pi}{6}$
D) $\frac{2\pi}{3}$
E) $\frac{\pi}{2}$

4 Сұрақ
Вопрос 4
Решить тригонометрическое уравнение: $2\cos x - \sqrt{3} = 0$

A) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n \; n - целое$
B) $\frac{\pi}{4} + \pi n \; n - целое$

C) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n \ni z$

D) $\frac{\pi}{2}+\pi n \ n-целое$

E) $(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n \ n-целое$

5 Сұрақ

Вопрос 5

Приведите многочлен к стандартному виду: $2x^2y^3 - xy^3 - x^4 - x^2y^3 + xy^3 + 2x^4$.

A) $x + x^2y$
B) $x^2 + xy^3$
C) x^2y^3
D) $x^4 + x^2y^3$
E) $x + x^2y$

5 Сұрақ

Вопрос 5

Разделить многочлен $2x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 612$ на двучлен $x + 4$ используя схему Горнера.

A) $2x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 612 = (2x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 32x + 128)*(x + 4) + 100$
B) $2x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 612 = (2x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 32x + 128)*(x + 4) + 103$.
C) $2x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 612 = (2x^3 - 3x^2 - 8x - 32x)*(x + 4) + 0$.
D) $2x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 612 = (2x^3 - 3x^2 - 8x - 32x)*(x + 4) + 102$.
E) $2x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 612 = (2x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 32x + 128)*(x + 4) + 0$.

6 Сұрақ

Вопрос 6

Найдите корень уравнения $\sqrt{x-2}=5$:

A) 7
B) 12
C) ±7
D) 27
E) 5

7Сұрақ

Вопрос 7

Упростить выражение $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^5}}$ **:**

A) $\sqrt[3]{a}$

B) $\sqrt[15]{a}$

C) $\sqrt[5]{a}$
D) a^3
E) a^5

8 Сұрақ
Вопрос 8

Найдите значение выражения $\frac{\left(\sqrt[4]{5}\right)^4}{15}$**:**

A) 3
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{\sqrt[4]{5}}{3}$
D)5
E) 0

9Сұрақ
Вопрос 9

Решите уравнение: $5^{x+2} = 125$

A) 7
B) 12
C) 1
D) 2
E) 5

10 Сұрақ
Вопрос 10

Решите уравнение:$4^x - 3\cdot2^x + 2 = 0$

A) $x_1 = 2, x_2 = 0$
B) $x_1 = 1, x_2 = 2$
C) $x_1 = -1, x_2 = 0$
D) $x_1 = 1, x_2 = 0$
E) $x_1 = -2, x_2 = -1$

11 Сұрақ
Вопрос 11
Вычислите: $8^{\log_2 5}$

A) 25
B) 2
C) 8
D)5

E) 125

12Сұрақ
Вопрос 12
Вычислите: $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$
A) 25
B) 2
C) 1
D)5
E) 12

13Сұрақ
Вопрос 13
Решите уравнение: $\log_5(x-4)=2$
A) 3
B) 21
C) 29
D)5
E) 12

14Сұрақ
Вопрос 14
Формула, по которой вычисляется дисперсия
A) 2
B) $M(x^2)-M(x)$
C) $M(x^2)-(M(x))^2$
D) $(M(x))^2-M(x^2)$
E) $(M(x))-M(x)$

15Сұрақ
Вопрос 15
Найти DZ для случайной величины Z, если Z=6X+2Y .DX=3, DY=5

A) 2
B) 128
C) 130
D) 100
E) 102
16Сұрақ
Вопрос 16
Если комплексное число *z* задано в виде $z = 6 + 9i$, то число *9* называют:

A) действительной частью *z*;
B) мнимой частью*z*;
C) мнимой единицей;
D) аргументом числа *z*.
E) Нет верного ответа

17Сұрақ

Вопрос 17

Для числа 4+5i выберите сопряжённое число

A) -4+5i

B) -4-5i

C) 4-5i

D) -4+5i

E) 4+5i

18Сұрақ

Вопрос 18

Найти производную $(2x^3-3x)(4x^6-2)$

A) $84x^6-72x^8-12x^2+6$

B) $(72x^8)/(84x^6+12x^2-6)$

C) $42x^8-86x^6+5x^2-98$

D) $72x^8-84x^6-12x^2+6$

E) $14x^8-64x^6-31x^2+21$

19 Сұрақ

Вопрос 19

Найдите $f'(x)$, если $f(x)=(3x-2)^6$.

A) $6(3x-2)^6$;

B) $18(3x-2)^5$;

C) $6x^5$;

D) 6

E) $18x^2$

20Сұрақ

Вопрос 20

Найдите производную функции $y=\frac{1}{3}x^3+x^2+2$.

A) $y=x^2+2x+2$;

B) $y=x^2+x$

C) $y=x^2+2x$;

D) $y = 2$

E) $y = x^3$

21Сұрақ

Вопрос 21

Найдите значение $f'(2)$, $f(x)=3x^2$

A) 14

B) 8

C) 16

D) 14

E) 12

22Сұрақ

Вопрос 22

Найдите первообразную функции $f(x) = x^7$

A) 3

B) x^7

C) 0

D) $8x^8$

E) $\frac{x^8}{8}$

23Сұрақ

Вопрос 23

Найдите общий вид первообразной для функций f(x)=sinx

A) cosx + 1

B) -cosx + C

C) sinx + C

D) -sinx + C

E) cosx + C

24Сұрақ

Вопрос 4

Найти интеграл: $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

A) 0

B) 2

C) 5

D) 1

E) 4

25Сұрақ

Вопрос 25

Найдите интеграл $\int \cos 10x dx$

A) $10\sin x$

B) $\frac{1}{10}\sin x$

C) $10\cos x$

D) $\frac{1}{10}\sin 10x$

E) $-\cos 10x$

26Сұрақ

Вопрос 26

Вычислить размещение A^3_5 :

A) 15

B) 20

C)40

D) 60

E)80

27Сұрақ
Вопрос 27
Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если его длина 2 см, ширина – 6 см, а диагональ – 7 см.

A) 36 см^3;
B) 48 см^3;
C) 42 см^3;
D) другой ответ.
E) 30 см^3;

27Сұрақ
Вопрос 27

Полная поверхность конуса 450π см^2, а его радиус 9 см. Найдите объём конуса.
A) 1080π см^3
B) 1060π см^3
C) 1200π см^3
D) 1000π см^3
E) 1120π см^3.

28Сұрақ
Вопрос 28
Объём конуса равен 320π см^3, а радиус основания 8 см. Найдите длину образующей конуса.
A) 18 см
B) 24 см
C) 22 см
D) 17 см
E) 16 см

29Сұрақ
Вопрос 29

Площадь поверхности шара равна 81π см^2. Найдите его объём.
A) 180π см^3
B) 121π см^3
C) 121,5π см^3
D) 122,5π см^3
E) 130,5π см^3.

30Сұрақ
Вопрос 30

Радиусы оснований усеченного конуса 2 дм и 5 дм, образующая 4 дм. Найти $S_{бок.\ п.}$

A) 28π см^2

B) 121π $см^3$
C) 121,5π $см^3$
D) 12π $см^3$
E) 13,5π $см^3$.

6 Нұсқа
Вариант 6

1 Сұрақ
Вопрос 1
Линейная функция задана формулой y=15x-1, найдите значение функции при x=2
A) 25
B) 23
C) 29
D) 32
E) 22

2Сұрақ
Вопрос 2
Вычислить: $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

A) π

B) $\frac{\pi}{3}$

C) $\frac{\pi}{2}$

D) $\frac{\pi}{4}$

E) 3π

3 Сұрақ

Вопрос 3

Какими двумя способами можно решить тригонометрические уравнения?

A) Линейным и алгебраическим
B) Алгебраическим и приведением подобных слагаемых
C) Алгебраическим и тригонометрическими преобразованием
D) Все ответы верны
E) Нет верного ответа

4 Сұрақ

Вопрос 4

Найти производную $(3x^2-2)(2x^3-5x)$

A) $65x+6-98x^4$
B) $74x-3+58x^4$
C) $31x-54x^3+10$
D) $31x-54x^3+10$
E) $30x^4-57x^2+10$

5 Сұрақ

Вопрос 5

Найдите производную функции $y=x-x^3+7$.
A) $y=1-3x^2$;
B) $y=3x^2-1$;
C) $y=1-x^2$;
D) $y = 1$
E) $y = -2x$

6 Сұрақ

Вопрос 6

Что представляет собой число i:
A) число, квадратный корень из которого равен – 1;
B) число, квадрат которого равен – 1
C) число, квадратный корень из которого равен 1
D) число, квадрат которого равен 1
E) нет верного ответа

7 Сұрақ

Вопрос 7

Из предложенных чисел выберите чисто мнимое число:

A) z = 5 - 3i;
B) z = 75i;
C) z = 32;
D) z = 0;
E) нет верного ответа

8 Сұрақ
Вопрос 8

Числа a+bi и a-bi называются:

A) сопряженными;
B) противоположными;
C) обратными;
D) мнимыми.
E) нет верного ответа

9 Сұрақ
Вопрос 9

Найдите $f'(x)$, если $f(x)=(3x+4)^6$.

A) $18(3x+4)^5$;
B) $18(3x+4)^6$;
C) $6(3x+4)^5$;
D) 6
E) 18x

10Сұрақ
Вопрос 10

Найдите производную функции $y=12x-x^2+x^4$.

A) $y=12-x+x^3$;
B) $y=12-2x+4x^3$;
C) $y=-x-x^3$;
D) y=12x
E) $y=x^2$

11Сұрақ
Вопрос 11

Найдите корень уравнения $\sqrt{x-3}=6$**:**

A) 39
B) 9
C) ± 15
D) 15
E) 6

12 Сұрақ

Вопрос 12

Вычислить $7 \cdot 5^{\log_5 2} =$

A) 14
B) 2
C) 7
D) 5
E) -2

13 **Сұрақ**

Вопрос 13

Решите равнение $\log_5 x + \log_5 3 = \log_5 12$.

A) 0
B) 9
B) 4
C) 15
D) 1

14 Сұрақ

Вопрос 14

Производной функции $y=4x^7$ является

A) $7x^6$
B) $28x^6$
C) $8x^6$
D) $27x^6$
E) 47

15 Сұрақ

Вопрос 15

Найдите производную функции: $f(x) = (5+2x)(x-3)$

A) 2x-11
B) 2x-1
C) 4x-11
D) 4x-1
E) 4x+1

16 Сұрақ

Вопрос 16

Найдите производную функции $f(x) = -17x^3 + 12x^2 - 4x + 1$

A) -51x2+12x+0
B) $-21x^2+12x+1$
C) $-21x^2-24x$
D) $-51x^2+24x-4$
E) $-21x^2-12x^2-4$

17 Сұрақ

Вопрос 17

Найдите значение $f'(2)$, $f(x) = 6x^2$

A) 14
B) 8
C) 16

D) 28
E) 24

18 Сұрақ
Вопрос 18
Вычислите f‘(0) + f’(-1), если f(x) = $13x^2 - 7x + 5$
A) -40
B) -10
C) 12
D) 25
E) 30

19 Сұрақ
Вопрос 19
Найти точки экстремума функции y = $4x-x^2$
A) x = 2 - точка max
B) нет точек экстремума
C) x = 0 –точка min
D) x = 1- точка max
E) E) x = 0– точка min, x = 2 - точка max

20 Сұрақ
Вопрос 20
Найти производную функции $y=x^2+3x-1$
A) x-1
B) 3x-1
C) $2x^2-1$
D) 2x+3
E) $2x^2+3x$

21 Сұрақ
Вопрос 21
Найти интеграл . $\int_4^9 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

A) 2
B) 0
C) 11
D) 1
E) 3

22 Сұрақ
Вопрос 22
Найти интервалы монотонности функции y = x^2-2x

A) на $(-\infty;1]$ -убывает на $(1;\infty)$- возрастает
B) на $(-\infty;0]$ -убывает на $[0;\infty)$- возрастает

C) на $\left(-\infty;1\right]$ - возрастает на $\left(1;\infty\right)$- убывает
D) на $\left(-\infty;0\right]$ - возрастает на $\left(0;\infty\right)$- убывает
E) возрастает на всей числовой прямой

23 Сұрақ
Вопрос 23
Точкой, в которой выполняются необходимые условия существования экстремума функции $y = 3x^4 - 4x^3$ но экстремума нет, является:

A) $x = -1$
B) $y = -1$
C) $x = 0$
D) $x = 1$
E) $y = 0$

24 Сұрақ
Вопрос 24
Найти критические точки функции $f(x) = x^2 - 4x$

A) $x_{min} = -2$
B) $x_{min} = 2$
C) $x_{max} = -2$
D) $x_{max} = 2$
E) $x_{max} = 0$

25 Сұрақ
Вопрос 25
Реши данное уравнение :$2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$

A) 5
B) 2
C) 4
D) 1
E) -2

26 Сұрақ
Вопрос 26
Реши уравнение: $2^x \cdot 2 + 2^x = 6$.

A) 5
B) 2
C) 4
D) 1
E) 3

27 Сұрақ

Вопрос 27

Решите равнение $\log_5 x + \log_5 3 = \log_5 12$.

A) 0

B) 9

C) 4

D) 15.

E) 1

28Сұрақ

Вопрос 28

Решите уравнение: $2^{3-2x} = 32$

A) -1

B) 1

C) 0

D) 2

E) 4

29 Сұрақ

Вопрос 29

Вычислите интеграл: $\int_{-2}^{1}\left(4x^3 + 6x\right)dx$

A) -22

B) 24

C) 26

D) -34

E) -24

30 Сұрақ

Вопрос 30

Реши уравнение: $4^x + 2^x = 12$.

A) $\log_2 5$

B) $\log_3 4$

C) $\log_2 4$

D) $\log_2 3$

E) $\log_3 2$

7Нұсқа
Вариант 7

1 Сұрақ
Вопрос 1
Решите уравнение: 2cosx–1=0

A) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

B) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

C) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

D) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

E) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

3Сұрақ
Вопрос 3
Вычислите $29\cdot 16^{\frac{1}{4}}-15.$
A) 131
B) 43
C) 73
D) 101.
E) 0

4 Сұрақ
Вопрос 4
Упростите $-7c^8\,(-0,4c^3)^2$
A) $-1,12c^{14}$

B) $0,28c^{14}$
C) $0,28c^{8}$
Д) $1,12c^{12}$
E) $0,28c^{9}$

5 Сұрақ
Вопрос 5

Упростите выражение: $\frac{24в^2c}{3a^6} : \frac{16вc}{a^5}$

A) 1

B) $\frac{\hat{a}}{2}$

C) $\frac{\hat{a}}{2\grave{a}}$

Д) $\frac{1}{2\grave{a}}$

E) $\frac{\hat{a}}{\grave{a}}$

6 Сұрақ
Вопрос 6

Упростите выражение $\left(\frac{3a+1}{a^2-3a}+\frac{3a-1}{a^2+3a}\right)\cdot\frac{a^2-9}{a^2+1}$

A) $6a$

B) $\frac{6}{a}$

C) $\frac{6}{a-в}$

Д) $\frac{в}{a-в}$

E) $a+3$

7 Сұрақ
Вопрос 7

Сократите дробь $\frac{18x^6y^5}{9x^5y^8}$

A) $\frac{2}{xy}$

B) $\frac{9x}{y}$

C) $\frac{2x}{y^3}$

Д) $\frac{9y}{x}$

E) $\frac{9x}{y^3}$

8 Сұрақ
Вопрос 8

Упростите: $\frac{3a-9}{a+2}:\frac{a^2-9}{a^2-4}$

A) $\frac{3(a-3)^3}{(a+2)^2(a-2)}$

B) 1

C) $\frac{3(a-2)}{a+3}$

Д) *a-2*

E) a^2-2

9 Сұрақ
Вопрос 9

Найдите $f^{/}(x)$, если $f(x)=(4-x)^{15}$.

A) $(4-x)^{14}$;

B) $-15(4-x)^{14}$;

C) $4(4-x)^{14}$;

D) 4

E) $15x^2$

10 Сұрақ
Вопрос 10

Вычислить: (3-i) + (-1+2i)

A) 2+i;

B) 4+3i;

C) 2+3i;

D) -3-2i.

E) $15x^2$

11 Сұрақ
Вопрос 11

Чему равна разность комплексных чисел z1 = 3 + i и z2 = 3 - i.

A) 0

B) 2

C) 6

D) 2i

E) - 2i

12 Сұрақ
Вопрос 12

Скажите число, сопряженное числу - 5 – 2i.

A) - 5 + 2i

B) 5 – 2i

C) 5 + 2i
D) - 2 – 5 i
E) - 2i

13Сұрақ
Вопрос 13
Производная функции $y = (\cos x - \sin x)$равна …
A) –cos x
B) cosx+sinx
C) sin x − cos x
D) -sinx+cosx
E) -sinx- cosx

14 Сұрақ
Вопрос 14
Производная функции y=5cos3x равна
A) -15sinx
B) 15sin3x
C) -15sin3x
D) -5sin3x
E) -15cos3x

15 Сұрақ
Вопрос 15
Найдите значение выражения $\sqrt[3]{x} = 5$**:**
A) 5
B) 125
C) ±15
D) 15
E) -5

16 Сұрақ
Вопрос 16
Упростить выражение $\sqrt[3]{\sqrt{m^3}}$ **:**
A) $\sqrt[6]{m}$
B) $\sqrt[3]{m}$
C) $\sqrt{m}$
D) m
E) -5

17Сұрақ
Вопрос 17
Вычислите $\log_2 28 + \log_2 \frac{4}{7}$.
A) 4
B) 2
C) 7
D) 14

E) 28

18 Сұрақ
Вопрос 18
Вычислите: $log_3 \frac{1}{81}$
A) 3
B) -4
C) 4
D) -3
E) 9

19 Сұрақ
Вопрос19
Вычислите: $log_{27} 9$
A) $\frac{2}{3}$
B) 3
C) 2
D) 1
E) 0

20 Сұрақ
Вопрос 20
Производной функции y=$5x^6$ является
A) 5x
B) 30 x^6
C) 30 x^5
D) $6x^5$
E) 6

21 Сұрақ
Вопрос 21
Найти производную функции: $f(x)=2x^2+1$
A) 2
B) 4x
C) 4
D) 0
E) 2x

22 Сұрақ
Вопрос 22
Вычислите: $5^{\log_5 11}$
A) 5
B) 25
C) 11
D) 0
E) 1

23 Сұрақ

Вопрос 23

Найдите производную функции: $f(x) = 3\sin x + x^2$

A) $2x + 3\cos x$
B) $\cos x - 2x$
C) $2x - 3\cos x$
D) $-\cos x$
E) $\cos x - x^3$

24 Сұрақ
Вопрос 24
Найти критические точки функции $f(x) = x^2 + 8x$
A) $x_{min} = -4$
B) $x_{min} = 4$
C) $x_{max} = -4$
D) $x_{max} = 4$
E) $x_{max} = 0$

25 Сұрақ
Вопрос 25
Дана функция $f(x) = 5x^2 - x^6$. Найдите $f'(1)$
A) -6
B) 2
C) -8
D) 0
E) 4

26 Сұрақ
Вопрос 26
Найти точки max и min для функции f(x) = x^2-x
A) $x = \frac{1}{2}$ – точка min
B) x = 0 – точка min
C) x = 1- точка max
D) $x = \frac{1}{2}$ - точка max
E) нет точек max и min

27Сұрақ
Вопрос 27
Вычислить C^2_9

A) 31
B) 34
C) 36
D) 38
E) 26

28 Сұрақ

Вопрос 28

Найти критические точки функции и показать какая эта точка, максимум ли минимум: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

A) $x_{min} = -1$
B) $x_{min} = 1$
C) $x_{max} = -1$
D) $x_{max} = 1$
E) $x_{max} = 0$

29 Сұрақ

Вопрос 29

Найти наибольшее и наименьшее значения функции f(x)= 2x+1 на интервале $[4,6]$

A) f(x) = 9
f(x) = 13
B) f(x) = 4
f(x) = 13
C) f(x) = 13
f(x) = 10
D) f(x) = 9
f (x) = 11
E) f(x) = 13
f(x) = 11

30 Сұрақ

Вопрос 30

Сколькими способами можно составить список из 7 учеников?

A) 7
B) 49
C) 5040
D) 540
E) 1204

8Нұсқа
Вариант 8

1 Сұрақ
Вопрос 1
Производная функции $f(x)=14x^2+1$ равна
A) 14x+x
B) 0
C) 28x
D) 28x + x
E) 28x–x

2 Сұрақ
Вопрос 2

Вычислить: (4-2i) – (-3+2i)

A) 1-4i;
B) 7-4i
C) 1
D) 7
E) 2 - 3i

3 Сұрақ
Вопрос 3
Скажите число, сопряженное числу z = - 2 -3i.

A) 2 - 3i
B) - 2 + 3i
C) 2 + 3i
D) – 3 - 2i
E) 2i

4 Сұрақ
Вопрос 4
Найдите модуль комплексного числа z = 3 - 4i.

A) 1
B) 7
C) 1
D) 5
E) 0

5 Сұрақ
Вопрос 5
Найти производную $(2x^3-3x)(4x^6-2)$
A) $84x^6-72x^8-12x^2+6$
B) $(72x^8)/(84x^6+12x^2-6)$
C) $42x^8-86x^6+5x^2-98$

D) $72x^8-84x^6-12x^2+6$
E) $14x^8-64x^6-31x^2+21$

6 Сұрақ
Вопрос 6
Найти производную $(3x^2-2)(2x^3-5x)$
A) $65x+6-98x^4$
B) $74x-3+58x^4$
C) $31x-54x^3+10$
D) $31x-54x^3+10$
E) $30x^4-57x^2+10$

7 Сұрақ
Вопрос 7
Вычислите: $81^{log_9 15}$
A) 125
B) 225
C) 25
D) 15
E) 81

8Сұрақ
Вопрос 8
Решите уравнение: $2^{3-2x} = 32$
A) -1
B) 1
C) 0
D) 2
E) 4

9 Сұрақ
Вопрос 9
Вычислите применив свойства: $\log_{45} 9 + \log_{45} 5 =$
A) 1
B) 9
C) 5
D) 45
E) 0

10Сұрақ
Вопрос 10
Дана функция $f(x) = 5x^2 - 3x^6$. Найдите $f'(-1)$
A) -6
B) 2
C) -8
D) 8

E) 4

11 Сұрақ
Вопрос 11
Дана функция $f(x) = x^2 + 5x$. Найдите $f'(1)$
A) 3
B) 4
C) 6
D) 7
E) 5

12 Сұрақ
Вопрос 12
Вычислите значение выражения: $\frac{14!}{12!}$
A) 182
B) 2!
C) 1,2!
D) 2
E) 32

13 Сұрақ
Вопрос 13
Укажите первообразнуюфункции f(x) = 2x + 4x^3 – 1.
A) $x^2 + x^4 - x$
B) $2x^2 + 4x^4$
C) $2 + 12x^2$
D) x^2+x^4.
E) X

14 Сұрақ
Вопрос 14
Вычислите интеграл: $\int_{-2}^{1} (4x^3 + 6x)dx$

A) -22
B) 24
C) 26
D) -34
E) -24

15 Сұрақ
Вопрос 15
Найдите производную функции f(x) = $(3x - 4)^6$

A) $-18(3x - 4)^5$
B) $6(3x - 4)^5$

C) $18(3x-4)^5$
D) $(3x-4)^7$.
E) 18x+4

16 Сұрақ
Вопрос 16
Вычислите $3\log_3 2 - \log_3 \frac{8}{9}$.

A) 4
B) 2
C) -2
D) -4
E) 0

17 Сұрақ
Вопрос 17
Найдите производную функции $y = 5 + 8x^7 + \frac{5}{4}x^4$.

A) $y' = 5x + x^8 + \frac{1}{4}x^5$
B) $y' = 56x^6 + 5x^3$
C) $y' = 5x + 15x^6 + 5x^3$
D) $y' = x^8 + 5x^3$
E) $y'=x^7+5$

17 Сұрақ
Вопрос 17
Упростите выражение $\frac{\sqrt[7]{x^9}}{\sqrt[7]{x^2}}$.

A) $x \cdot \sqrt[7]{x^4}$
B) $x^2 \cdot \sqrt[7]{x^4}$
C) x
D) x^7
E) x^9

18 Сұрақ
Вопрос 18
Решить уравнение lg (2-5x) = 1

A) $-\frac{8}{5}$
B) 2

C) $\frac{5}{8}$

D) 5

E) 0

19 Сұрақ
Вопрос 19
Решите равнение $\log_5 x + \log_5 3 = \log_5 12$.

A) 0
B) 9
C) 4
D) 15.
E) 1

20 Сұрақ
Вопрос 20
Вычислите $\log_2 28 + \log_2 \frac{4}{7}$.

A) 4
B) 2
C) 7
D) 14
E) 28

21 Сұрақ
Вопрос 21
Вычислите: $(81^{\frac{1}{4}} - 64^{\frac{1}{6}}) : 121^{\frac{1}{2}}$

A) 1
B) 3
C) $\frac{1}{11}$
D) 0
E) 5

22 Сұрақ
Вопрос 22
Решите уравнение . $2^{x^2-6x+8} = 2^3$

A) 5;1
B) $-5;-1$
C) $5;-1$.
D) $-5;1$
E) $-6;-1$

23 Сұрақ
Вопрос 23

Возведите в степень: $\left(\dfrac{3a^2b^3}{m^4}\right)^2$.

A) $\dfrac{6a^4b^6}{m^{16}}$.
B) $\dfrac{9a^4b^6}{m^8}$.
C) $\dfrac{2a^4b^2}{m^4}$.
D) $\dfrac{9a^2b^6}{m^8}$.
E) $\dfrac{6a^4b^6}{m^8}$.

24Сұрақ
Вопрос 24

Найдите производные функции: $f(x)=(1+x-x^2)^4$

A) $4(1-2x)$
B) $4(1+x-x^2)^3$
C) $4(1+x-x^2)^3(1-2x)$
D) $1-2x$
E) $-4(1-2x)$

25 Сұрақ
Вопрос 25

Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x-1}{5x^2+5x+2}$.

A) $\frac{3}{5}$
B) ***1***
C) ***0***
D) ***-1***
E) ∞

26 Сұрақ
Вопрос 26

Функция, заданная формулой . $y=a^x$, где a>0, a≠1, называется
A) Логарифмической функцией
B) Показательной функцией
C) Степенной функцией
D) Тригонометрической функцией
E) Нет верного ответа

2.

27 Сұрақ
Вопрос 27
В первый день путешественник прошел 60 км пути, что составляет 15 % всего пути, которое он должен пройти. Сколько всего километров должен пройти путешественник?

A) 300 км
B) 400 км
C) 350 км
D) 120км
E) 450 км

28 Сұрақ
Вопрос 28
Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, называется

A) Неполным
B) Квадратным
C) Иррациональным
D) Неравенством
E) Пропорцией

29 Сұрақ
Вопрос 29
Даны векторы $\vec{a}$ (4;-3;2) и $\vec{b}$ (0;6:-4) Найти $\vec{a} + \vec{b}$

A) (-4;-3;1)

B) (4;3;-2)

C) (-4;-3;-1)

D) (4;3;1)

E) (-4;3;-1)

30 Сұрақ
Вопрос 30
Как называется действие по нахождению производной?

A) Интегрирование
B) Дифференцирование
C) Клонирование
D) Хлорирование
E) Дискредитирование

9 Нұсқа
Вариант 9

1 Сұрақ
Вопрос 1

Найдите значение выражения $\frac{\left(\sqrt[4]{5}\right)^4}{15}$

A) 3
B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{\sqrt[4]{5}}{3}$
D)2
E) 5

2 Сұрақ
Вопрос 2

Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x} = 4$

A) 12
B) 64
C) ±64
D)±12.
E) 5

3Сұрақ
Вопрос 3

Упростить выражение $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^5}}$

A) $\sqrt[3]{a}$
B) $\sqrt[15]{a}$
C) $\sqrt[5]{a}$
D) a
E) a^5

4 Сұрақ
Вопрос 4

Вычислите значение выражения $\frac{1}{5}a - (3a + 2в - a)$, при $a = 4$ и $в = 3$

A) $14\frac{4}{5}$
B) -13
C) -13,2
Д) -14
E) 13

5Сұрақ
Вопрос 5

Упростите: $4(x-1)^2 + 8x$
A) $4x^2 – 4$
B) $4x^2 + 18x + 4$
C) $x^2 + 4$
Д) $4x^2 + 4$
E) $x^2 + 4$

6 Сұрақ
Вопрос 6

Найдите остаток от деления многочлена x^3 - $19x + 30$ на двучлен $x - 2$.
A) -16+
B) 20
C) 15
Д) -14
E) -10

7 Сұрақ
Вопрос 7
Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые: 3x – (x+3):
A) 2x-3
B) 2x+3
C) 4x+3
D)2x
E) 2x+2

8 Сұрақ
Вопрос 8
Решите уравнение cos2x = 0.
A) $x=\frac{\pi}{2}+\pi\kappa, \kappa\epsilon Z$;
B) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\kappa, \kappa\epsilon Z$
C) $\pi+2\pi\kappa, \kappa\epsilon Z$;
D) $\frac{\pi}{2}\kappa, \kappa\epsilon Z$
E) 0

9 Сұрақ
Вопрос 9
Решите уравнение -3sinx =1.
A) $x=(-1)^{\kappa}\arcsin\frac{1}{3}+\pi\kappa, \kappa\epsilon Z$;
B) $x=(-1)^{\kappa+1}\arcsin\frac{1}{3}+2\pi\kappa, \kappa\epsilon Z$;
C) $x=(-1)^{\kappa}\arcsin\frac{1}{3}+2\pi\kappa, \kappa\epsilon Z$;
D) $x=(-1)^{\kappa+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi\kappa, \kappa\epsilon Z$.
E) Нет ответа

10 Сұрақ
Вопрос 10
Решите уравнение tg $x=\sqrt{3}$.
A) x = $\frac{\pi}{3}+\pi\kappa, \kappa\epsilon Z$;
B) x = $\frac{\pi}{3}+2\pi\kappa, \kappa\epsilon Z$;

C) x = $\frac{\pi}{6}+\pi\kappa, \kappa\epsilon Z;$

D) x = $\frac{\pi}{6}+2\pi\kappa, \kappa\epsilon Z.$

E) Нет ответа

11Сұрақ

Вопрос 11

Чему равен квадрат мнимой еденицы?

A) -1

B) 0

C) 1

D) 4

E) 2

12Сұрақ

Вопрос 12

Какой буквой обозначается комплексное число?

A) z

B) d

C) k

D) u

E) r

13Сұрақ

Вопрос 13

Комплексно-сопряженным для числа 7-2i является:

A) 2i

B) 7+2i

C) -2+7i

D) -7+2i

E) 7

14Сұрақ

Вопрос 14

Решить уравнение $\left(\frac{3}{7}\right)^x=\frac{7}{3}$.

A) 0;

B) 3;

C) 1;

D) -1;

E) 4.

15Сұрақ

Вопрос 15

При каком значении x $8^{x+2}=1$?

A) 2

B) 0

C) -2

D) 1

E) -1

16Сұрақ
Вопрос 16
Решите уравнение $\log_5 x=1$.
A) 5
B) 25
C) 2
D) 1
E) -1

17Сұрақ
Вопрос 17
Как выглядит простейшее логарифмическое уравнение?
A) $\log_a x = b$
B) $\log_a a = 1$
C) 3log = b
D) $\log_b x = a$
E) -1

18 Сұрақ
Вопрос 18

Какой из интегралов нельзя вычислять с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

A) $\int_0^2 (x-1)xdx$

B) $\int_0^2 \frac{xdx}{(x-1)^2}$

C) $\int_0^2 \sqrt{x+1}xdx$

D) $\int \frac{xdx}{(x+1)^2}$

E) $\int_0^2 xdx$

19Сұрақ
Вопрос 19
Найти интеграл . $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
A) $tgx + C$
B) $\ln|\sin x| + C$
C) $-\ln|\sin x| + C$

D) $\ln|\cos x| + C$

E) $ctgx + C$

20 Сұрақ

Вопрос 20

Формула Ньютона-Лейбница

A) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

B) $\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$

C) $F'(x) = f(x)dx$

D) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

E) Нет верного ответа

21 Сұрақ

Вопрос 21

Найдите первообразные $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

A) 2x+C

B) $\sqrt{2x}$ +C

C) -2x

D) $2\sqrt{x}$ +C

E) $2\sqrt{x^2}$ +C

22 Сұрақ

Вопрос 22

Площадь полной поверхности пирамиды.

A) 2Sбок.+ Sосн.

B) 2Sбок.+ 2Sосн.

C) Sбок.+ Sосн.+

D) Sбок.+ 2Sосн.

E) 3Sбок.+ 2Sосн.

23 Сұрақ

Вопрос 23

Какая фигура не может быть в основании пирамиды?

A) Трапеция

B) Круг.

C) Треугольник.

D) Квадрат.

E) N-угольник

23 Сұрақ

Вопрос 23

Радиус основания цилиндра равен 2 см, высота – 5 см, тогда площадь боковой поверхности равна:

A) 40π
B) 10π;
C) 20π;
D) 4π
E) 10

24 Сұрақ

Вопрос 24

В цилиндре осевым сечением является квадрат, а площадь основания равна 16π кв.дм. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

A) 80π;
B) 96π;
C) 64π;
D) 32π
E) 32

25 Сұрақ

Вопрос 25

Вращением какой геометрической фигуры может быть получен цилиндр?

A) параллелограмм
B) треугольник
C) круг
D) квадрат
E) овал

26 Сұрақ

Вопрос 26

Диаметр основания конуса 16 см, длина его высоты 8 см. Найти длину образующей.

A) $8\sqrt{2}$см
B) $10\sqrt{2}$см
C) $2\sqrt{6}$см;
D) 4 см.
E) 6см

27 Сұрақ

Вопрос 27

Площадь основания конуса.

A) $S=2\pi r^2$
B) $S=2\pi r$
C) $S=\pi r^2$
D) $S=2\pi rh$
E) $S=2\pi$

28Сұрақ

Вопрос 28

Определение конуса

A) Тело, ограниченное поверхностью и кругами.
B) Тело, ограниченное конической поверхностью и двумя кругами.

C) Тело, ограниченное конической поверхностью и кругами.
D) Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом.
E) Нет верного ответа

29 Сұрақ
Вопрос 29

Вычислить $\frac{15!}{12!}$
A) 12 • 13 • 14 • 15=32760
B) 13 • 14 • 15=2730
C) 12 • 13 • 14=2184
D) 14 • 15=210
E) Нет верного ответа

30 Сұрақ
Вопрос 30
Сколько различных перестановок можно образовать из слова «слон»?
A) 6
B) 4
C) 24
D) 8
E)

10 Нұсқа
Вариант 10

1 Сұрақ
Вопрос 1
Упроститевыражение (4a – 7b)+ (2a-b) + (5a-6b):
A) 2a+2b
B) a-3b
C) a-2b
D) a+2b
E) 2b

2 Сұрақ
Вопрос 2
Упростите выражение 4y(y-1)-3y(2y+4) и найдите его значение при y=-1:
A) 16
B) 18
C) 14
D) 10
E) 12

3 Сұрақ
Вопрос 3

Решите уравнение: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

A) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

B) $\pm\frac{5\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

C) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$

D) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

E) нет верного ответа

4 Сұрақ
Вопрос 4

Решите уравнение: $\cos 2x=\frac{1}{2}$

A) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

B) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

C) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in Z$

D) $\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi n, n\in Z$

E) нет верного ответа

5 Сұрақ
Вопрос 5

Решите уравнение: $tgx=-1$

A) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

B) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$

C) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

D) $\pm\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

E) нет верного ответа

6 Сұрақ
Вопрос 6

Результатом произведения чисел (3+6i)(3-6i) является число:
A) 28
B) 45
C) 45i
D) 40
E) 20

7 Сұрақ

Вопрос 7

Чему равен модуль комплексного числа z = 5 – 3i:

A) √17

B) √34

C) √6

D) 17

E) 6

8 Сұрақ

Вопрос 8

Какое число не является мнимой единицей:

A) 7i

B) 2i

C) 4

D) 3

E) 5

9 Сұрақ

Вопрос 9

Найти х, если $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64}$.

A) 5;

B) 4;

C) 6;

D) -4;

E) -6.

10 Сұрақ

Вопрос 10

Решить уравнение $6^{x-3} = 36$.

A) 7;

B) 4;

C) 1;

D) 5;

E) 2.

11Сұрақ

Вопрос 11

Решить неравенство $5^x > 125$.

A) $(\infty; 4)$;

B) $(3; \infty)$;

C) $(-\infty; +\infty)$;

D) $[3; +\infty)$;

E) $(-1; +\infty)$

12 Сұрақ

Вопрос 12

Решить неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \frac{1}{81}$.

A) $(-\infty; +\infty)$;

B) $[4; +\infty)$;

C) $(-\infty; 4]$;

D) $(-\infty; +\infty)$;

E) $(-\infty; 4)$.

13Сұрақ

Вопрос 13

Определение апофемы.

A) Высота грани пирамиды.

B) Высота боковой грани правильной пирамиды.

C) Высота боковой грани пирамиды.

D) Высота грани правильной пирамиды.

E) Нет верного ответа

14Сұрақ

Вопрос 14

Что представляет собой боковая грань пирамиды?

A) Параллелограмм

B) Круг

C) Прямоугольник

D) Треугольник

E)Нет верного ответа

15Сұрақ

Вопрос 15

Высота конуса равна 4, а длина образующей — 5. Найдите диаметр основания конуса.

A) 3;

B)12;

C)6;

D)18;

E) верного ответа нет.

16Сұрақ

Вопрос 16

Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1,2,3,4?

A) 16

B) 24

C) 12

D) 6

E) 0

17Сұрақ

Вопрос 17

Сочетание вычисляется по формуле

A) $P_n = n!$

B) $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

C) P(A)= $\frac{m}{n}$

D) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

E) верного ответа нет.

18 Сұрақ

Вопрос 18

Случайная величина задана следующим рядом распределения

X	-1	0	1	2
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти математическое ожидание

A) 0,7
B) 1
C) 2,8
D) 3
E) 0

19Сұрақ

Вопрос 19

Чему равен $\lim_{x\to 0}\frac{3x+25}{x^2+5}$?

A) 3
B) 5
C) 0
D) 25
E) 1

20Сұрақ

Вопрос 20

Чему равен $\lim_{x\to 0}\left(\frac{7+x}{6+x^3}-\frac{5+x^2}{6+x^2}\right)$?

A) 2/3
B) 1/30
C) 1
D) ∞
E) 0

21Сұрақ

Вопрос 21

Найдите неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{\sin^2 2x}$

A) $-\frac{1}{2}ctg2x$ + C

B) $\frac{1}{2}tg2x + C$

C) $ctg2x + C$

D) $tg2x + C$

E) $\frac{1}{2}tgx + C$

22Сұрақ

Вопрос 22

Найти критические точки функции и показать какая эта точка, максимум или минимум: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

$A) x_{min} = -1$

B) $x_{min} = 1$

$C) x_{max} = -1$

D) $x_{max} = 1$

E) $x_{max} = 0$

23Сұрақ

Вопрос 23

Найти наибольшее и наименьшее значения функции f(x)= 2x+1 на интервале $[4,6]$

A) f(x) = 9
f(x) = 13

B) f(x) = 4
f(x) = 13

C) f(x) = 13
f(x) = 10

D) f(x) = 9
f (x) = 11

E) f(x) = 13
f(x) = 11

24 Сұрақ

Вопрос 24

Упростить: $\frac{(x^{-4})^5}{x^4 \cdot x^{-31}}$

A)x^7

B) x

C)x^3

D)x^5

E)x^{20}

25 Сұрақ

Вопрос 25

Даны векторы $\vec{a}$ (4;-3;2) и $\vec{b}$ (0;6:-4)   Найти $\vec{a}$ + $\vec{b}$

A) (4;3;-2)

B) (-4;-3;1)

C) (-4;-3;-1)

D) (4;3;1)

E) (-4;3;-1)

26 Сұрақ

Вопрос 26

Дано: конус, *h=3 см,* *r*=1,5 см.Найти: V.

A) 2,25π см^3
B) 2,20см
C) 2,25см
D) 22,5см^3
E) 225см^3

27 Сұрақ
Вопрос 27
Высота конуса равна 12, а диаметр основания – 10. Найдите образующую конуса.
A)13
B)17
C)11
D)8
E)7

28 Сұрақ
Вопрос 28
Найти интеграл: $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

A)0
B)2
C)5
D)1
E)4

29 Сұрақ
Вопрос 29
Найдите интеграл $\int \cos 10x dx$

A) $10\sin x$
B) $\frac{1}{10}\sin x$
C) $10\cos x$
D) $\frac{1}{10}\sin 10x$
E) $-\cos 10x$

30 Сұрақ
Вопрос 30
Вычислите интеграл $\int_0^1 (1-2x)^6 dx$.

A) $\frac{1}{14}$
B) $\frac{1}{7}$
C) 0;
D) 1

E) 14

Тематика рефератов и докладов

1. Понятие функции и способы её задания.
2. Простейшие преобразования графиков функций.
3. Свойства функций.
4. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение.
5. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму или разность.
6. Основные свойства и графики тригонометрических функций.
7. Обратные тригонометрические функции.
8. Способы решения тригонометрических уравнений и их систем.
9. Решение тригонометрических неравенств.
10. Понятие предела функции в точке и непрерывность функции.
11. Производная. Правила вычисления производных.
12. Физический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной
13. Производная сложной функции.
14. Производная тригонометрических функций.
15. Приближенные вычисления функций.
16. Признаки возрастания и убывания функции. Критические точки и экстремумы.
17. Исследование функции с помощью производной и построение графика.
18. Первообразная. Правила нахождения первообразных. Таблица первообразных.
19. Площадь криволинейной трапеции.
20. Определённый интеграл. Формула Ньютона – Лейбница.
21. Применение интеграла.
22. Степень с произвольным действительным показателем. Свойства степени. Действия.
23. Логарифм и его свойства. Натуральные логарифмы.
24. Показательная функция, её свойства и график.
25. Решение показательных уравнений и неравенств.
26. Логарифмическая функция, её график и свойства.
27. Решение логарифмических уравнений и неравенств.
28. Решение систем логарифмических уравнений.
29. Решение иррациональных уравнений и их систем.
30. Решение иррациональных неравенств.
31. Основные элементы комбинаторики. Бином Ньютон.
32. Применение теории комбинаторики и бинома Ньютона в теории вероятностей.
33. Условия вероятности. Независимые события.
34. Случайная величина. Теоремы сложение и умножение вероятностей.
35. Аксиомы стереометрии. Простейшие следствия аксиом.
36. Параллельность прямых и плоскостей.
37. Параллельность плоскостей. Свойства параллельных плоскостей.

38.Перпендикулярность прямых в пространстве.
39.Теорема о трех перпендикулярах.
40.Признак перпендикулярности двух плоскостей.
41.Двугранный угол.
42.Векторы в пространстве.
43.Применение векторов к решению задач.
44.Плоские углы. Теорема о сумме плоских углов.
45.Призма. Сечение призм.
46.Параллелепипед. Виды его. Свойства параллелепипеда.
47.Пирамида.
48.Вычисление площадей призм и пирамид.
49.Вычисление объёмов многогранников.

Цилиндр и его элементы. Сечение цилиндра. Площадь цилиндра

Вопросы для итогового контроля

1. Уравнения. Типы уравнений.
2. Неравенства, свойства неравенств.
3. Системы уравнений и неравенств.
4. Числовая функция и способы её задания. График функции
5. Простейшие преобразование графиков функций
6. Свойства функций
7. Предел функции в точке. Непрерывность функции в точке и на промежутке
8. Обобщение понятия угла. Определение тригонометрических функций
9. Тождественные преобразования тригонометрических функций.
10. Формулы сложения аргументов. Формулы сложения одноименных функций
11. Формулы приведения
12. Формулы двойных и половинных аргументов
13. Свойства и графики тригонометрических функций
14. Обратные тригонометрические функции
15. Простейшие тригонометрические уравнения и их решения. Способы решения тригонометрических уравнений
16. Решение систем тригонометрических уравнений
17. Решение тригонометрических неравенств.
18. Степень с произвольным действительным показателем
19. Степенная функция, ее свойства и график
20. Показательная функции, свойства и графики
21. Логарифм и его свойства
22. Логарифмическая функция, свойства и график
23. Решение логарифмических уравнений и неравенств
24. Решение задач по применению показательной и логарифмической функции
25. Понятие о производной
26. Правила вычисления производных
27. Производная сложной функции
28. Касательная к графику функций. Геометрический и механический смысл производной
29. Признаки возрастания и убывания функции
30. Экстремумы функции. Исследование функции на экстремум
31. Наибольшее и наименьшее значение функции
32. Вторая производная и ее физический смысл
33. Выпуклость, вогнутость, точка перегиба
34. Применение производной к исследованию функции
35. Понятие дифференциала. Вычисление дифференциала
36. Первообразная. Таблица первообразных
37. Неопределённый интеграл и его свойства.
38. Правила нахождения первообразных
39. Площадь криволинейной трапеции

40. Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница
41. Основные понятия и аксиомы стереометрии. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве
42. Перпендикулярность прямых и плоскостей
43. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Проекция наклонной на плоскость
44. Угол между прямой и плоскостью
45. Угол между плоскостями
46. Двугранный угол
47. Декартова система координат в пространстве. Расстояние между точками. Понятие вектора в пространстве
48. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами
49. Понятие о многогранниках. Трехгранный и многогранный углы
50. Призма. Сечение призм
51. Параллелепипед. Виды его. Свойства параллелепипеда
52. Пирамида. Усеченная пирамида
53. Площади поверхности призм и пирамид
54. Объемы многогранников. Свойство объемов
55. Цилиндр и его элементы. Сечение
56. Площадь поверхности цилиндра
57. Конус. Сечение конуса
58. Усеченный конус. Площадь поверхности усеченного конуса
59. Площадь поверхности конуса
60. Шар и сфера. Касательная к сфере и ее свойства
61. Площадь сферы
62. Объём цилиндра, конуса, шара и сферы
63. Диаграммы Эйлера - Вена
64. Перестановки. Размещения. Сочетания.
65. Статистическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности.
66. Независимые события. Случайная величина.
67. Условная вероятности
68. Случайные события

Список рекомендуемой литературы

Негізгі

Основная:

Абылкасымова А.Е. и др. Алгебра и начала анализа.Учебник для 10 классов. Алматы. «Мектеп» 2013 г
Абылкасымова А.Е. и др. Алгебра и начала анализа. Учебник для 11 классов. Алматы. «Мектеп» 2013 г
Гусев В. И др. Геометрия. Учебник для 11 классов. Алматы. «Мектеп» 2011 г.
Кайдасов и др. Геометрия.Учебник для 10 класса. Алматы. «Мектеп» 2011 г.
В.И. Смирнов. Курс высшей математики. Москва 1974г.
Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Издательство ЧеРо 1997г.
АВ.Т.Лисичкин, И.Л. Соловейчик. Математика. Москва 1991г.
Л.Д. Кудрявцев. Математический анализ. Москва 1971г.
А.Г. Курош. Курс высшей алгебры. Москва. 1971г.
В.Е. Гмурман. Теория вероятности и математической статистики. Москва. 1997г.
Гмурман В.Е. Теорию вероятностей и математическая статистика. — М. Высшая школа, 1999.
Гмурман В.Е. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. — М. Высшая школа, 1999. 1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление (в 2-х томах) - М. Наука, Математический анализ:1967, 1978, 1985, 1986 гг. – 1031 с. - 2710 экз.

Қосымша

Дополнительная:

Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа (в 2-х томах).- М. Наука, 1960, 1968 гг. - 903 с. - 38 экз.
Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х томах) - М. Наука, 1962, 1970 гг. - 2063 с. - 78 экз.
Шнейдер В.Е. и др. Краткий курс высшей математики (в 2-х томах). - М. Наука, 1978. - 384 с. – 280 экз.
Мантуров О.В., Матвеев Н.И. Курс высшей математики. - М. Наука,1980 г. - 480 с. - 299 экз.
Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. - М. Наука , 1973 г. – 720 с. – 155 экз.
ЗапорожецГ.Н. Руководство к решению задач по математическому анализу. - М. Высшая школа, 1966 г. –460 с. -256 экз.
Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. – М. Наука, 1983г. -175 с. - 112 экз.
Сборник задач по математике для втузов (под ред. Ефимова А.В.) - М. Наука, 1981, 1986 гг. - 836 с. - 120 экз.

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - М. Наука, 1979,1985 гг. -127 с. - 107 экз.
Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1976, 1982 гг. - 488 с. -77 экз.
Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. - М.: Наука, 1969, 1976, 1985 гг. - 320 с. -45 экз