КГКП «Костанайский политехнический высший колледж»
Управления образования акимата Костанайской области

Учебно-методический комплекс По дисциплине «Математика для экономистов»

Специальность 04110100 «Учет и аудит» (по отраслям)

Подготовила преподаватель : Молдахаликова А.В.

Содержание

<u>Элементы векторной алгебры</u>.

Векторы на плоскости и в пространстве . Действие над векторами. Разложение вектора по базису. Прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве. Действия над векторами, заданными координатами. Скалярное произведение. Угол между векторами Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов.

Упорядоченную совокупность ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) n вещественных чисел называют *n-мерным вектором*, а числа x_i ($i = \overline{1,n}$) - *компонентами,* или *координатами,* вектора.

Если, например, некоторый автомобильный завод должен выпустить в смену 50 легковых автомобилей, 100 грузовых, 10 автобусов, 50 комплектов запчастей для легковых автомобилей и 150 комплектов для грузовых автомобилей и автобусов, то производственную программу этого завода можно записать в виде вектора (50, 100, 10, 50, 150), имеющего пять компонент. Векторы обозначают жирными строчными буквами или буквами с чертой или стрелкой наверху, например, **а** или $\overline{a}$. Два вектора называются *равными*, если они имеют одинаковое число компонент и их соответствующие компоненты равны.

Компоненты вектора нельзя менять местами, например, (3, 2, 5, 0, 1) ≠ ≠ (2, 3, 5, 0, 1).

Произведением вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на действительное число λ называется вектор $\lambda\, \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Суммой векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется вектор $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.

N-мерное векторное пространство $\mathbf{R}^n$ определяется как множество всех n-мерных векторов, для которых определены операции умножения на действительные числа и сложение.

Экономическая иллюстрация n-мерного векторного пространства: *пространство благ* (*товаров*). Под *товаром* мы будем понимать некоторое благо или услугу, поступившие в продажу в определенное время в определенном месте. Предположим, что существует конечное число наличных товаров n; количества каждого из них, приобретенные потребителем, характеризуются набором товаров

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где через x_i обозначается количество i-го блага, приобретенного потребителем. Будем считать, что все товары обладают свойством произвольной делимости, так что может быть куплено любое неотрицательное количество каждого из них. Тогда все возможные наборы товаров являются векторами пространства товаров $C = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \geq 0, i = \overline{1,n} \}$.

Система $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ n-мерных векторов называется *линейно зависимой*, если найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что выполняется равенство $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_m \mathbf{e}_m = 0$; в противном случае данная система векторов называется *линейно независимой*, то есть указанное равенство возможно лишь в случае, когда все $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. Геометрический смысл линейной зависимости векторов в $\mathbf{R}^3$, интерпретируемых как направленные отрезки, поясняют следующие теоремы.

Теорема 1. Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Теорема 2. Для того, чтобы два вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.

Теорема 3. Для того, чтобы три вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.

Тройка некомпланарных векторов **a, b, c** называется *правой*, если наблюдателю из их общего начала обход концов векторов **a, b, c** в указанном порядке кажется совершающимся по часовой стрелке. В противном случае **a, b, c** - *левая тройка*. Все правые (или левые) тройки векторов называются *одинаково ориентированными.*

Тройка $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарных векторов в $\mathbf{R}^3$ называется *базисом*, а сами векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ - *базисными*. Любой вектор **a** может быть единственным образом разложен по базисным векторам, то есть представлен в виде

$$\mathbf{a} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3, \qquad (1.1)$$

числа x_1, x_2, x_3 в разложении (1.1) называются *координатами* вектора **a** в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и обозначаются $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$. Если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ попарно перпендикулярны и длина каждого из них равна единице, то базис называется *ортонормированным*, а координаты x_1, x_2, x_3 - *прямоугольными.* Базисные векторы ортонормированного базиса будем обозначать **i, j, k.**

Будем предполагать, что в пространстве $\mathbf{R}^3$ выбрана правая система декартовых прямоугольных координат $\{0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Векторным произведением вектора **a** на вектор **b** называется вектор **c**, который определяется следующими тремя условиями:

1. Длина вектора **c** численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b,** т. е. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}\hat{\ }\mathbf{b})$.

2. Вектор **c** перпендикулярен к каждому из векторов **a** и **b.**

3. Векторы **a, b** и **c**, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку.

Для векторного произведения **c** вводится обозначение $\mathbf{c} = [\mathbf{ab}]$ или $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Если векторы **a** и **b** коллинеарны, то $\sin(\mathbf{a}\hat{\ }\mathbf{b}) = 0$ и $[\mathbf{ab}] = 0$, в частности, $[\mathbf{aa}] = 0$. Векторные произведения ортов: $[\mathbf{ij}] = \mathbf{k}$, $[\mathbf{jk}] = \mathbf{i}$, $[\mathbf{ki}] = \mathbf{j}$.

Если векторы **a** и **b** заданы в базисе **i, j, k** координатами $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, то

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{i}\,(a_2b_3 - a_3b_2) - \bar{j}\,(a_1b_3 - a_3b_1) + \bar{k}\,(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Если векторное произведение двух векторов **a** и **b** скалярно умножается на третий вектор **c,** то такое произведение трех векторов называется *смешанным произведением* и обозначается символом **a b c.**

Если векторы **a, b** и **c** в базисе **i, j, k** заданы своими координатами $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$, то

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение имеет простое геометрическое толкование - это скаляр, по абсолютной величине равный объему параллелепипеда, построенного на трех данных векторах.

Если векторы образуют правую тройку, то их смешанное произведение есть число положительное, равное указанному объему; если же тройка **a, b, c** - левая, то $\mathbf{a\,b\,c} < 0$ и $V = -\,\mathbf{a\,b\,c}$, следовательно $V = |\mathbf{a\,b\,c}|$.

Координаты векторов, встречающиеся в задачах первой главы, предполагаются заданными относительно правого ортонормированного базиса. Единичный вектор, сонаправленный вектору **a**, обозначается символом $\mathbf{a}^{o}$. Символом **r=OM** обозначается радиус-вектор точки M, символами a, AB или $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{AB}|$ обозначаются модули векторов **a** и **AB.**

Элементы линейной алгебры.

Понятие матрицы, основные свойства матриц. Операции над матрицами. Определители 2-го ,3-го порядков, их свойства, вычисление. Экономическая интерпретация. Минор, алгебраическое дополнение. Системы линейных уравнений. Матричная запись систем уравнений. Решение систем линейных уравнений. Метод обратной матрицы. Формула Крамера. Метод Гаусса **.**Матрицы появились в середине XIX века в связи с практической потребностью решения различного рода задач, прежде всего связанных с исследованием систем линейных уравнений. Матрицей называется прямоугольная таблица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

состоящая из m строк и n столбцов. Элементами матриц могут быть различные объекты (числа, функции и т.п.); мы ограничимся знакомством с некоторыми простейшими операциями над числовыми матрицами. Матрица имеет, как уже указывалось, m строк и n столбцов, говоря иначе m×n. Числа m и n могут быть любыми натуральными. Различают несколько особых случаев:
1) m=1, n 1. Матрица в этом случае называется матрицей - строкой и имеет вид $A = (a_1,\ a_2,\ \dots\ ,a_n)$

2) m 1, n=1. В этом случае матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$ и называется матрицей - столбцом;
3) Если m=n, то матрица называется квадратной (порядка n). В квадратной матрице выделяют ***главную диагональ*** (элементы, расположенные "на диагонали", проведенной из левого верхнего в правый нижний угол) и ***побочную диагональ*** (элементы, расположенные "на диагонали", проведенной из правого верхнего в левый нижний угол);
4) Если все элементы матрицы равны 0, то такая матрица называется нуль - матрицей и обозначается O . Часто для краткой записи матрицы употребляют обозначение $\mathbf{A} = \|\mathbf{a}_{ij}\|$

Индексы i и j определяют "адрес" элемента $\mathbf{a}_{ij}$ (как ряд и место в кинозале). Например, символ $\mathbf{a}_{23}$ означает, что этот элемент находится во второй строке и в третьем столбце матрицы.

Преобразование матрицы, заключающееся в замене ее строк столбцами, называется транспонированием. Другими словами, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

то транспонированной к A матрицей будет матрица A^T

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что матрица - строка транспонируется в матрицу - столбец и наоборот, порядок (m×n) матрицы при транспонировании меняется на обратный (n×m), а "двойное" транспонирование дает ту же самую матрицу $(A^T)^T=A$.

Квадратная матрица порядка n называется диагональной, если все ее элементы, кроме, может быть, элементов главной диагонали равны нулю. Таким образом, матрица

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ будет диагональной.

Диагональная матрица называется единичной, если все ее диагональные элементы равны 1, т.е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица является матричным аналогом единицы во множестве действительных чисел, так же как нуль - матрица - матричный аналог нуля.

Квадратная матрица, сохраняющая свой вид при транспонировании, называется симметрической. Для симметрической матрицы справедливо соотношение

$$A^T=A.$$

В симметрической матрице элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали одинаковы. Симметрической будет, например, любая диагональная матрица.

Матрицы A и B называются ***равными***, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны между собой. Например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

и $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ отвечают данному определению и являются равными A = B. Матрица $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ не равна ни матрице A, ни матрице B, хотя она имеет те же размеры, что и A и B и состоит из тех же элементов. ***Произведением матрицы*** A на некоторое действительное число m называется матрица mA составленная из элементов матрицы A, умноженных на число m.

Из определения вытекает, что, во-первых, матрицы A и mA имеют одинаковый порядок и, во-вторых, что если все элементы некоторой матрицы имеют общий множитель, то его можно вынести за матричные скобки. Например, $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 \\ -6 & 15 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Операция умножения матрицы на число подчиняется следующим простым законам:

1). mA= Am;

2). (mn)A = m(nA) = n(mA);

3). 0A = O;

4). $(mA)^T = mA^T$.

Суммой двух матриц A и B одного и того же порядка называется матрица C, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B, т.е.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots\dots\dots & & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Операция сложения матриц обладает следующими свойствами:
1) A + B = B + A(коммутативность);

2) (A+B)+C= A+ (B + C)(ассоциативность);

3) m(A + B) = mA + mB (дистрибутивность по отношению к умножению на действительное число);

4) O + A = A ;

5) (A + B)’ = A ’ + B’ .

Последней операцией над матрицами, которую мы рассмотрим в данном разделе, будет умножение матриц. Вначале сформулируем предварительное понятие.

Матрицы A и B (***порядок следования важен!***) называются ***согласованными***, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Таким образом, если порядок матрицы A равен m×n , то порядок согласованной с ней матрицы B должен быть равен n×k (отметим, что ***квадратные матрицы одного порядка всегда согласованы***).

Перемножать можно только согласованные матрицы.

Произведением двух согласованных матриц A и B называется матрица C, элементы которой рассчитываются по формуле $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ \ldots \ + a_{in}b_{nj}$

Например, если требуется получить элемент c_{21} , то нужно вторую строку матрицы A "умножить" на первый столбец матрицы B. Рассмотрим конкретные матрицы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Число столбцов матрицы A и число строк матрицы B равны 2, значит, A и B согласованы.

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+2\cdot 4 & 1\cdot 3+2\cdot 7 \\ 3\cdot(-2)+4\cdot 4 & 3\cdot 3+4\cdot 7 \\ 5\cdot(-2)+6\cdot 7 & 5\cdot 3+6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 17 \\ 10 & 37 \\ 32 & 51 \end{pmatrix}.$$

Найти в этом случае произведение BA невозможно, т.к. матрицы B и A не согласованы. Отсюда следует, что операция умножения матриц, вообще говоря, не коммутативна. Можно показать, что в общем случае даже когда произведения AB и BA определены, коммутативность не выполняется.
Пусть A - матрица - строка из 3-х элементов, а B - матрица - столбец из 3-х элементов. Тогда A и B согласованы и, в результате умножения A на B получится число. Матрицы B и A также согласованы, но в результате их умножения получится квадратная матрица 3-го порядка.
Вместе с тем встречаются квадратные матрицы одного порядка, для которых выполняется коммутативность. Такие матрицы называются коммутирующими.

Отметим другие свойства умножения матриц.
1) Умножение матриц ассоциативно: (AB) C = A (BC) .

2) Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения:

(A + B) C= AC + BC.

3) Умножение матриц коммутативно относительно умножения на действительное число:

m(AB) = (mA) B = A (mB).

4) Произведение двух матриц может быть нуль - матрицей, хотя ни один из сомножителей нуль - матрицей не является. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, умножение двух матриц обладает некоторыми свойствами, не характерными для умножения чисел, поэтому при действиях с матрицами нужно проявлять осмотрительность и аккуратность

Определители 2-го ,3-го порядков, их свойства, вычисление.

Всякой квадратной матрице можно поставить в соответствие действительное число, называемое определителем или детерминантом этой матрицы.

Для определителя матрицы А применяются различные обозначения. Укажем наиболее употребимые: detA, Δ , или развернутое, указывающее на связь с данной матрицей

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Прямые скобки, заменяющие круглые (матричные), указывают на то, что имеется в виду именно определитель матрицы, т.е. единственное число, а не сама матрица А.

Рассмотрим определитель 2-го порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$. Чтобы найти значение этого определителя надо перемножить элементы главной диагонали и отнять от полученного числа произведение элементов побочной диагонали, т.е. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. (2)

Например, определитель $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 10 + 8 = 18.$

Определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ вычисляется по формуле

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (3)$$

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 9 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 7 \cdot 1 \cdot 7 - 7 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 9 - 2 \cdot 2 \cdot 7 =$

$= 72 + 6 + 49 - 84 - 9 - 28 = 6$.

Для того чтобы определить правило вычисления определителей порядка выше, чем 3, введем сначала некоторые новые объекты.

Пусть нам дана квадратная матрица порядка n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Рассмотрим все возможные произведения по n элементов этой матрицы, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца, т.е. произведений вида:

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\dots a_{nq_n}, \qquad (5)$$

где индексы q_1, q_2,..., q_n составляют некоторую перестановку из чисел 1, 2,..., n. Число таких произведений равно числу различных перестановок из n символов, т.е. равно n!. Знак произведения (4.4) равен $(-1)^{q,}$ где q - число инверсий в перестановке вторых индексов элементов.

Определителем n -го порядка, соответствующим матрице (4), называется алгебраическая сумма n! членов вида $a_{1q_1}a_{2q_2}\dots a_{nq_n}$.

2. Свойства определителей

1. Определитель не меняется при транспонировании.

2. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

3. Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.

4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число k, то сам определитель умножится на k.

6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

7. Если все элементы i-й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{ij} = b_j + c_j$ $(j=\overline{1,n})$, то определитель равен сумме определителей, у которых все строки, кроме i-ой, - такие же, как в заданном определителе, а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j, в другом - из элементов c_j.

8. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Замечание. Все свойства остаются справедливыми, если вместо строк взять столбцы.

3. Способы вычисления определителей.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя d n-го порядка называется определитель порядка n-1, который получается из d вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя d называется его минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} будем обозначать A_{ij}. Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. (6)

Способы практического вычисления определителей, основанные на том, что определитель порядка n может быть выражен через определители более низких порядков, дает следующая теорема.

Теорема (разложение определителя по строке или столбцу).

Определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения. Иначе говоря, имеет место разложение d по элементам i-й строки

$$d = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} \quad (i = \overline{1,n}) \qquad (7)$$

или j- го столбца

$$d = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (7a)$$

В частности, если все элементы строки (или столбца), кроме одного, равны нулю, то определитель равен этому элементу, умноженному на его алгебраическое дополнение.

3. Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Delta = \det A$.

Квадратная матрица A называется *невырожденной,* или *неособенной*, если ее определитель отличен от нуля, и *вырожденной,* или *особенной*, если $\Delta = 0$.

Квадратная матрица B называется *обратной* для квадратной матрицы A того же порядка, если их произведение A B = B A = E, где E - единичная матрица того же порядка, что и матрицы A и B.

Теорема. Для того, чтобы матрица А имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Матрица, обратная матрице А, обозначается через A^{-1}, так что $B = A^{-1}$. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij}.

Вычисление обратной матрицы по формуле (1) для матриц высокого порядка очень трудоемко, поэтому на практике бывает удобно находить обратную матрицу с помощью метода элементарных преобразований (ЭП). Любую неособенную матрицу А путем ЭП только столбцов (или только строк) можно привести к единичной матрице Е. Если совершенные над матрицей А ЭП в том же порядке применить к единичной матрице Е, то в результате получится обратная матрица. Удобно совершать ЭП над матрицами А и Е одновременно, записывая обе матрицы рядом через черту. Отметим еще раз, что при отыскании канонического вида матрицы с целью нахождения ее ранга можно пользоваться преобразованиями строк и столбцов. Если нужно найти обратную матрицу, в процессе преобразований следует использовать только строки или только столбцы.

Решение систем линейных уравнений. Метод обратной матрицы. Формула Крамера. Метод Гаусса.

Система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь a_{ij} и b_i ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) - заданные, а x_j - неизвестные действительные числа. Используя понятие произведения матриц, можно переписать систему (5.1) в виде:

$$AX = B, \qquad (2)$$

где $A = (a_{ij})$ - матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных системы (5.1), которая называется *матрицей системы,* $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ - векторы-столбцы, составленные соответственно из неизвестных x_j и из свободных членов b_i.

Упорядоченная совокупность n вещественных чисел $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ называется *решением системы* (5.1), если в результате подстановки этих чисел вместо соответствующих переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ каждое уравнение системы обратится в арифметическое тождество; другими словами, если существует вектор $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ такой, что $AC \equiv B$.

Система (5.1) называется *совместной,* или *разрешимой,* если она имеет по крайней мере одно решение. Система называется *несовместной,* или *неразрешимой*, если она не имеет решений.

Матрица

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

образованная путем приписывания справа к матрице A столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей системы.*

Вопрос о совместности системы (5.1) решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги матриц A и $\overline{A}$ совпадают, т.е. $r(A) = r(\overline{A}) = r$.

Для множества M решений системы (1) имеются три возможности:

1) $M = \varnothing$ (в этом случае система несовместна);

2) M состоит из одного элемента, т.е. система имеет единственное решение (в этом случае система называется *определенной*);

3) M состоит более чем из одного элемента (тогда система называется *неопределенной*). В третьем случае система (1) имеет бесчисленное множество решений.

Система имеет единственное решение только в том случае, когда $r(A) = n$. При этом число уравнений - не меньше числа неизвестных ($m \geq n$); если $m > n$, то $m-n$ уравнений являются следствиями остальных. Если $0 < r < n$, то система является неопределенной.

Для решения произвольной системы линейных уравнений нужно уметь решать системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных, - так называемые *системы крамеровского типа*:

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n1} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n. \end{array} \qquad (3)$$

Системы (3) решаются одним из следующих способов:

1) методом Гаусса, или методом исключения неизвестных;

2) по формулам Крамера;

3) матричным методом.

2. Метод Гаусса

Исторически первым, наиболее распространенным методом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, или метод последовательного исключения неизвестных. Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему, равносильную данной. При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя элементарные преобразования над ее строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

3. Формулы Крамера

Метод Крамера состоит в том, что мы последовательно находим *главный определитель системы* (5.3), т.е. определитель матрицы A

$$\Delta = \det (a_{ij})$$

и *n вспомогательных определителей* Δ_i ($i=\overline{1,n}$), которые получаются из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы Крамера имеют вид:

$$\Delta \cdot x_i = \Delta_i (i = \overline{1,n}). \qquad (4)$$

Из (4) следует правило Крамера, которое дает исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы (5.3): если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_i = \Delta_i / \Delta.$$

Если главный определитель системы Δ и все вспомогательные определители $\Delta_i = 0$ ($i = \overline{1,n}$), то система имеет бесчисленное множество решений. Если главный определитель системы $\Delta = 0$, а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна

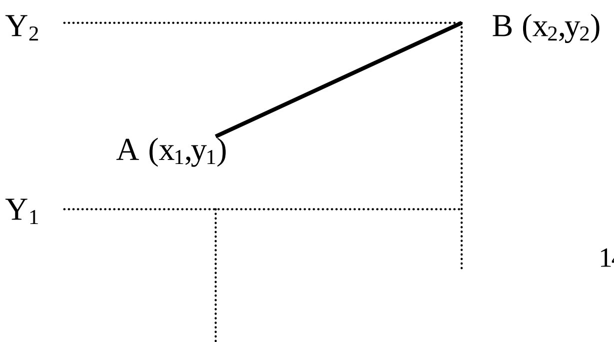
1. **Контрольные вопросы:**

2. Что называется геометрическим вектором ?
3. Что называется модулем вектора ?
4. Какие вектора называются коллинеарными ?
5. Какие вектора называются компланарными ?
6. Какие вектора называются равными ?
7. Линейные операции над векторами: умножение вектора на число и сложение векторов, их свойства.
8. Правила сложения векторов.
9. Арифметическое определение вектора.
10. Проекция вектора на ось. Координаты вектора в трехмерном пространстве.
11. Выражение модуля через координаты.
12. Направляющие косинусы вектора.
13. Линейные операции над векторами в координатной форме.
14. Условие коллинеарности векторов.
15. Какое произведение векторов скалярным ?
16. Перечислите свойства скалярного произведения векторов.
17. Выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов.
18. Условие перпендикулярности векторов.
19. Векторное произведение векторов.
20. Свойства векторного произведения векторов.
21. Выражение векторного произведения через координаты перемножаемых векторов.
22. Физический смысл векторного произведения.
23. Смешанное произведение векторов, его свойства.
24. Выражение векторного произведения через координаты перемножаемых векторов.
25. Что называется порядком определителя?
26. Что называется минором элемента a_{ij} ?
27. Дайте определение алгебраического дополнения элемента a_{ij} .
28. Как вычисляются определители 2-го и 3-го порядков?
29. Разложение определителя по элементам строки или столбца.
30. Перечислите свойства определителя.
31. В чем заключается метод понижения порядка?
32. Как привести определитель к треугольному виду?
33. Дайте определение матрицы.
34. Какая матрица называется нулевой, квадратной, треугольной, диагональной, единичной?

35. Какая матрица называется вырожденной (невырожденной) ?
36. Что называется суммой матриц ?
37. Что получается в результате умножения матрицы на число ?
38. Какая матрица называется транспонированной ?
39. Как перемножаются матрицы ?
40. Какая матрица называется обратной и каково условие ее существования?
41. Какие уравнения называются матричными и как они решаются?
42. Что называется минором k-го порядка ?
43. Что называется рангом матрицы ?
44. Какие преобразования матрицы называются элементарными ?
45. Какие матрицы называются эквивалентными ?
46. Дайте определение системы линейных уравнений и ее основных понятий.
47. Какие системы называются неоднородными?
48. Что называются решением системы?
49. Какие системы называются совместными?
50. Какие системы называются несовместными?
51. Какие системы называются определенными?
52. Какие системы называются неопределенными?
53. В чем заключается решение систем методом Крамера?
54. Как находятся определители в формулах Крамера?
55. Каков алгоритм нахождения неизвестных при решении систем матричным методом?
56. Какие системы называются однородными?
57. Теорема о существовании нетривиального решения однородной системы.
58. Теорема Кронекера-Капели (о совместности неоднородной системы).
59. Какие преобразования системы называются элементарными ?
60. Каков алгоритм решении систем методом Гаусса.

Раздел 2. Аналитическая геометрия

Линии первого порядка.
Уравнение линии на плоскости.
Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой .
Линии первого порядка.
Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
Общее уравнение прямой.
Пересечение прямых.
Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Общее уравнение плоскости.
Кривые второго порядка.
Экономическая интерпритация



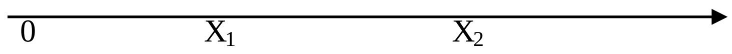


рис.1

Рассмотрим прямоугольную систему координат XOY.

Если в условии задачи сказано «дана точка», то это значит, что координаты точки известны. Если же в задаче будет дано задание «найти точку», то это означает, что следует определить ее координаты. Фраза «дан отрезок прямой» означает, что координаты концов этого отрезка известны. Координаты точки записываются в скобках рядом с названием точки, причем *всегда на первом месте в прямоугольной системе координат записывается абсцисса точки, а на втором – ее ордината*. Например, если x_1 – абсцисса точки A, а y_1 – ее ордината, то это записывается так: A (x_1,y_1).

У точки, лежащей на оси абсцисс, ордината равна нулю; у точки, лежащей на оси ординат, абсцисса равна нулю. Обе координаты начала координат равны нулю.

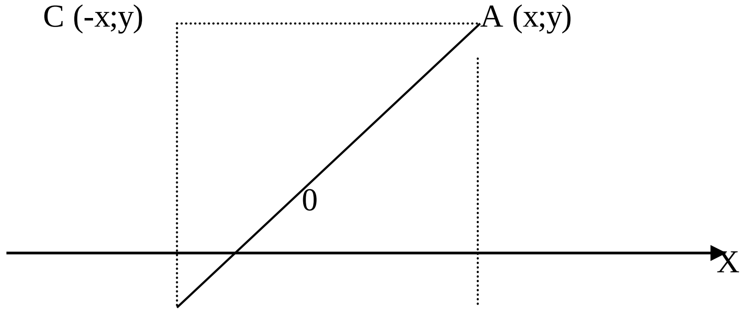
1. Расстояние d между точками A (x_1,y_1) и B (x_2,y_2) плоскости определяется по формуле:

$$\mathbf{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \qquad \mathbf{(1)}$$

__Определение 1__. Две точки M_1 и M_2 называются симметричными относительно прямой, если отрезок M_1M_2 перпендикулярен этой прямой, причем его середина лежит на этой прямой.

__Определение 2__. Две точки M_1 и M_2 называются симметричными относительно точки O, если точка O является серединой отрезка M_1M_2.

а) Точка B, симметричная точке A (x, y) относительно оси OX, имеет абсциссу такую же, как и точка A, а ординату, равную по абсолютной величине ординате точки A, но противоположную ей по знаку. Значит точка B имеет координаты x и (-y), т.е. B (x; -y) (рис. 3).



B (x; -y)

D (-x; -y)

Рис.3

б) Точка C, симметричная точке A (x, y) относительно оси OY, будет иметь ординату такую же, как и точка A, а абсцисса точки C будет по абсолютной величине равна абсциссе точки A, но противоположна ей по знаку. Значит точка C имеет координаты (-x) и y: т.е. C (-x; y) (рис..3)

в) Точка D, симметричная точке A (x; y) относительно начала координат, будет иметь абсциссу и ординату, равные по абсолютной величине абсциссе и ординате точки A, но противоположные им по знаку, т.е. координаты точки D будут равны: (-x) и (-y): D (-x; -y) (рис.3).

Деление отрезка в заданном отношении. Координаты середины отрезка.

Если x_1 и y_1 – координаты точки A, а x_2 и y_2 – координаты точки B, то координаты x и y точки C, делящей отрезок AB в отношении

$$\lambda = \frac{AC}{CB}$$, определяются по формулам:

$$\mathbf{x} = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ ; \quad \mathbf{y} = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad \mathbf{(2)}$$

Если $\lambda=1$, то точка D (x_0, y_0) делит отрезок AB пополам, и тогда *координаты x_0 и y_0 середины отрезка* AB находятся по формулам:

$$\mathbf{x_0} = \frac{x_1+x_2}{2}\ ; \quad \mathbf{y_0} = \frac{y_1+y_2}{2} \qquad \mathbf{(3)}$$

Площадь треугольника по известным координатам его вершин A (x_1; y_1), B (x_2; y_2), C (x_3; y_3) вычисляется по формуле:

$$S = \pm \frac{1}{2} \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right] \qquad \mathbf{(4)}$$

Выражение вида $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ равно $x_1y_2 - x_2y_1$ и называется определителем второго порядка

.

<u>**Замечание**</u>: если в формуле (4) выражение в скобках получается отрицательным, то коэффициент ½ берем со знаком минус, в противном случае со знаком плюс.

Тема 1. Уравнения прямых на плоскости.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

В прямоугольных координатах уравнение прямой на плоскости задается в одном из следующих видов:

1.Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y=kx+b, \qquad (5)$$

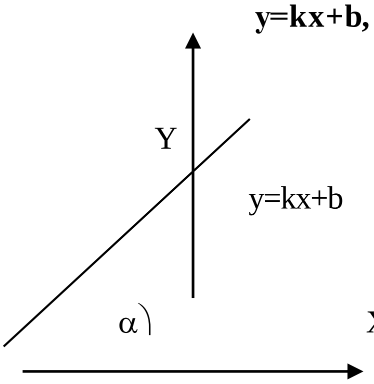


рис.1

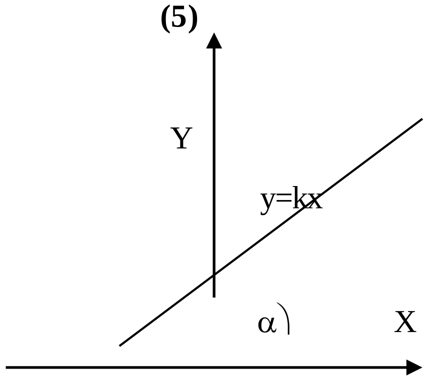


рис.2

где k – угловой коэффициент прямой, т.е. тангенс угла α, который прямая образует с положительным направлением оси Ох, причем этот угол отсчитывается от оси Ох к прямой против часовой стрелки (рис.1), где k=tg α.

В формуле (5) в – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат. При в=0 уравнение (5) примет вид $y=kx$ и эта прямая проходит через начало координат (рис.2). Уравнением (5) может быть определена любая прямая на плоскости, не перпендикулярная оси Ох.

Исследование общего уравнения прямой.

Общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ (6)

Частные случаи общего уравнения прямой:

а) Если C=0, уравнение (6) будет иметь вид $Ax+By=0$ или

$y = -\dfrac{A}{B}x$ - прямая проходит через начало координат;

б) Если в общем уравнении (6) B=0, то уравнение примет вид $Ax+C=0$, или

$x = -\dfrac{C}{A} = a$ - прямая параллельна оси Оу;

в) Если в общем уравнении (6) A=0, то уравнение примет вид $By+C=0$, или

$y = -\dfrac{C}{} = b$ - прямая параллельна оси Ох;

В

г) При С=0 и А=0 уравнение (6) принимает вид Ву=0 или ***y=0*** ***– это уравнение оси Ох;***

д) При С=0 и В=0 уравнение (6) примет вид Ах=0 или

x=0 ***– это уравнение оси Оy.***

Уравнение прямой в отрезках на осях

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{b}} = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{(7)}$$

где а – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Ох;

в – величина отрезка , отсекаемого прямой на оси Оу.

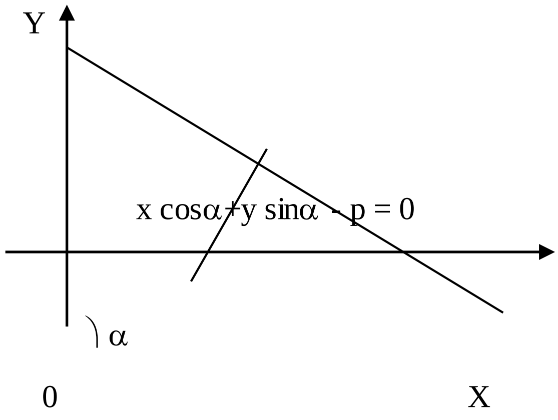
Каждый из этих отрезков отложен от начала осей координат.

Особенности этого уравнения такие: в левой части уравнения между дробями стоит знак плюс, величины а и в могут быть как положительными, так и отрицательными, правая часть уравнения равна единице, величины а и в не могут равняться нулю.

Нормальное уравнение прямой.

$$\mathbf{x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0} \qquad \mathbf{(8)}$$

Здесь р – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а α – угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси Ох.



Отсчитывается этот угол от оси Ох против часовой стрелки. Для приведения общего уравнения прямой (6) к нормальному виду обе его части надо умножить на нормирующий множитель.

$$N = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (9)$$

причем перед дробью следует выбрать знак, противоположный знаку свободного члена С в общем уравнении прямой (6).

Особенности нормального уравнения прямой: сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице, свободный член отрицателен, а правая часть его равна нулю.

Примеры с решениями

Пример 1. Общее уравнение прямой 4x – 3y + 12 = 0 представить в виде: 1) с угловым коэффициентом;

2) в отрезках на осях; 3) в нормальном виде.

Построить эту прямую.

Решение.

1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид y = kx + в. Чтобы данное уравнение преобразовать к этому виду, разрешим его относительно y: 3y = 4x + 12;

$$y = \frac{4}{3}x + 4, \text{ здесь } k = \frac{4}{3} \text{ и } b = 4.$$

2) Уравнение прямой в отрезках на осях имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ (*)$$

Чтобы данное уравнение 4x – 3y + 12 = 0 привести к виду (*), перенесем свободный член в правую часть уравнения: 4x – 3y = -12. Теперь обе части уравнения разделим на (-12), тогда

$$\frac{4x}{-12} - \frac{3y}{-12} = \frac{-12}{-12}$$

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$$

3) Чтобы привести уравнение к нормальному виду, обе его части следует умножить на нормирующий

множитель $N = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, выбрав перед корнем

знак, противоположный знаку свободного члена в общем уравнении прямой. В данном примере свободный член в общем уравнении прямой равен (+12), поэтому перед корнем в нормирующем множителе должен быть выбран противоположный знак, т.е. знак минус.

Имеем A = 4; B = -3, тогда

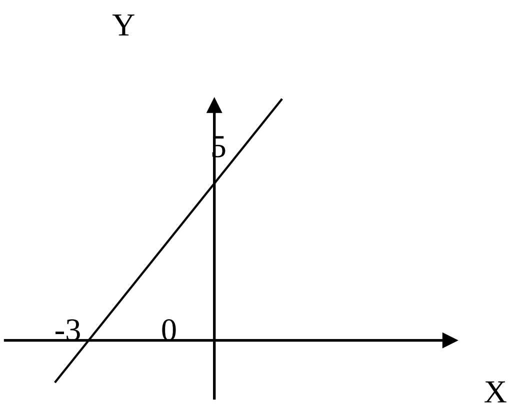
$$N = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{16+9}} = -\frac{1}{5}$$

Умножив обе части уравнения $4x - 3y + 12 = 0$ на $(-1/5)$, приведем это уравнение к нормальному виду

$$-\frac{4}{5}x - 3\left(-\frac{1}{5}\right)y + 12\left(-\frac{1}{5}\right) = 0$$

или

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} = 0$$

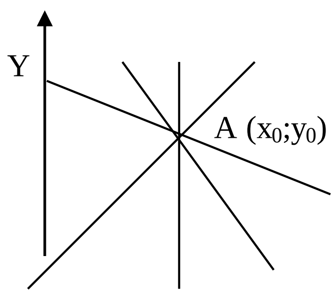


В пункте 2 мы получили $a = -3$, $в = 4$ – отрезки на осях Ох и Оу, зная эти отрезки построим данную прямую.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении и прямой, проходящей через две данные точки.

1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_0,y_0)$ в данном направлении, определяемом угловым коэффициентом k, имеет вид: $\mathbf{y - y_0 = k\,(x - x_0)}$ **(10)**

Это уравнение определяет пучок прямых, проходящих через точку А (x_0,y_0), которая называется центром пучка. (рис.)



2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки: А (x_1,y_1) и В (x_2,y_2), записывается так:

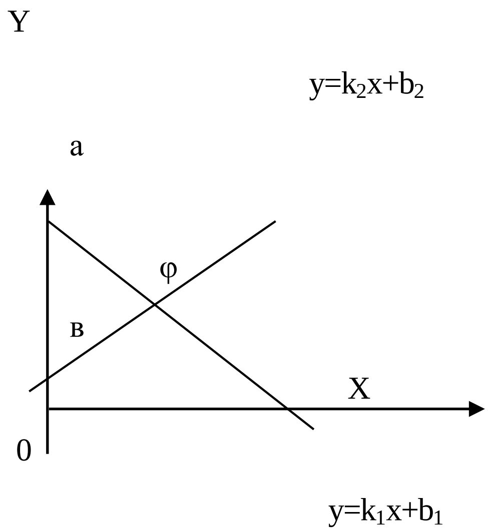
$$\frac{\mathbf{y - y_1}}{\mathbf{y_2 - y_1}} = \frac{\mathbf{x - x_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}} \qquad (11)$$

3. Угловой коэффициент прямой, проходящий через две данные точки определяется по формуле:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (12)$$

<u>Угол между двумя прямыми.</u>

Углом между прямыми а и в называется угол, на который надо повернуть первую прямую а вокруг точки пересечения этих прямых против движения часовой стрелки до совпадения ее со второй прямой в.



Если две прямые $y=k_1x+в_1$ и $y=k_2x+в_2$ (13)

заданы с угловыми коэффициентами, то угол между ними φ определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \qquad (14)$$

Если уравнения прямых заданы в общем виде

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (15)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то угол φ между ними определяется по формуле

$$\mathbf{tg\,\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}} \qquad \mathbf{(16)}$$

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Определение точки пересечения двух прямых.

1. *Условия параллельности двух прямых:*

а) Если прямые заданы уравнениями (13):

$y=k_1x+в_1$ и $y=k_2x+в_2$ с угловыми коэффициентами, то необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в равенстве их угловых коэффициентов:

$$\mathbf{k_1=k_2} \qquad \mathbf{(17)}$$

б) Если прямые заданы уравнениями в общем виде (15), необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в том, что коэффициенты при соответствующих текущих координатах в их уравнениях пропорциональны, т.е.

$$\frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{A_2}} = \frac{\mathbf{B_1}}{\mathbf{B_2}} \qquad (18)$$

2. *Условия перпендикулярности двух прямых:*

а) Если прямые заданы уравнениями (13) с угловым коэффициентом, то необходимое и достаточное условие их перпендикулярности заключается в том, что их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, т.е.

$$\mathbf{k_2} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k_1}} \qquad (19)$$

или это условие можно записать в виде $\mathbf{k_1*k_2=-1}$ (20)

б) Если уравнения прямых заданы в общем виде (15), то необходимое и достаточное условие их перпендикулярности заключается в выполнении равенства

$$\mathbf{A_1A_2 + B_1B_2 = 0} \qquad (21)$$

3. Координаты точки пересечения двух прямых находят, решая систему уравнений (15)

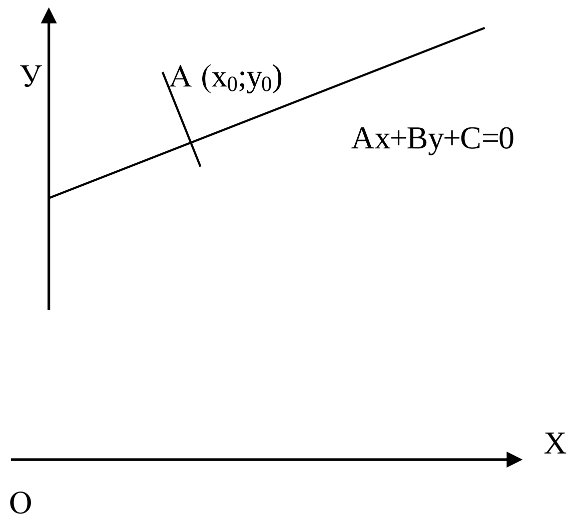
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \qquad (15)$$

Прямые (15) пересекаются в том и только в том случае, когда $A_1B_2-A_2B_1\neq0$

Расстояние от данной точки до данной прямой.

Расстояние от точки А (x_0,y_0) до прямой $Ax+By+C=0$ есть длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Она определяется по формуле:

$$\mathbf{d} = \frac{|\mathbf{Ax_0 + By_0 + C}|}{\sqrt{\mathbf{A^2 + B^2}}}$$

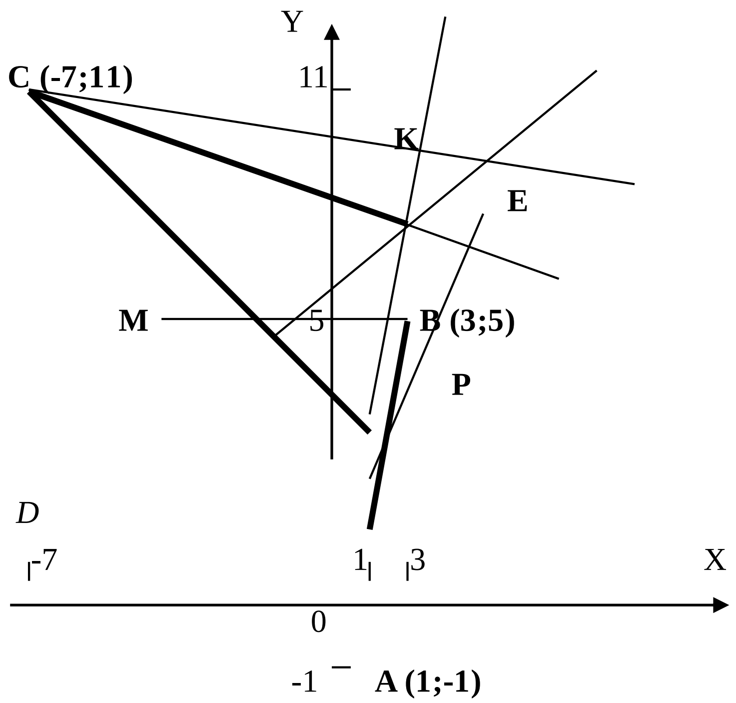


Пример 1. Дан треугольник с вершинами: А (1;-1); В (3;5); С (-7;11). Найти:

1) Уравнение стороны АС; 2) Угол А;
3) Уравнение высоты ВД; 4) Длину медианы СМ;

4) Точку пересечения высот треугольника;
6) Длину высоты ВД.
Сделать чертеж.

Решение. Построим этот треугольник по трем вершинам.



1. Уравнение стороны АС найдем по формуле:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Здесь (x_1, y_1) координаты точки A (1;-1), а (x_2, y_2) – координаты точки C (-7;11).

$$\frac{y-(-1)}{11-(-1)} = \frac{x-1}{-7-1}\ ; \quad \frac{y+1}{11+1} = \frac{x-1}{-8} \Rightarrow$$

$$\frac{y+1}{12} = \frac{x-1}{-8}\ ; \quad y+1 = -\frac{12}{8}(x-1) \Rightarrow$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - 1; \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \quad (AC)$$

или $3x + 2y - 1 = 0$ (AC)

2. Угол A найдем по формуле:

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\ ; \quad \text{здесь} \quad k_1 = k_{AB} = 3, \quad k_2 = k_{AC} = -\frac{3}{2}$$

т. е. $tg\,\angle A = \frac{9}{7} \approx 1{,}3$

значит $tg\,\angle A = 1{,}3 \Rightarrow \angle A = arc\,tg\,1{,}3 \approx 52°$

3. Уравнение высоты BD найдем по формуле уравнения пучка прямых: $y-y_0=k(x-x_0)$. Здесь (x_0, y_0)=точка B (3;5), $k=k_{BD}$. Нужно найти угловой коэффициент высоты k_{BD}. По условию перпендикулярности

$$k_{BD} = -\frac{1}{k_{AC}}, \text{ т.к. } BD \perp AC$$

Но $k_{AC} = -\frac{3}{2}$, $\Rightarrow k_{BD} = -\frac{1}{-3/2} = \frac{2}{3}$

$$\boxed{k_{BD} = \frac{2}{3}}$$

Тогда $y - 5 = \frac{2}{3}(x-3)$; т.е. $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}*3 + 5$

или $y = \frac{2}{3}x + 3$ (BD). уравнение высоты BD

3

4. Длину медианы СМ найдем по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Но прежде найдем координаты точки М. СМ – медиана и точка М является серединой стороны АС.

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + (-7)}{2} = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1 + 11}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

точка М (-3;5) Тогда длина СМ будет:

$$d_{CM} = |CM| = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(-3+7)^2 + (5-11)^2} =$$

$$= \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = \sqrt{4*13} = 2\sqrt{13} \text{ (см)}$$

$|CM| = 2\sqrt{13} \approx 7{,}2$ см

5. Все три высоты треугольника пересекаются в одной точке. Поэтому достаточно найти точку пересечения двух высот. Найдем уравнение высоты СК. Так как ΔABC у нас тупоугольный, то высоту СК опускаем из точки С на продолжение стороны АВ.

$CK \perp AB \Rightarrow k_{CK} = -\dfrac{1}{k_{AB}}$, но $k_{AB} = 3$, Значит $k_{CK} = -\dfrac{1}{3}$

Уравнение высоты найдем по формуле уравнения пучка прямых, проведенных из точки С (-7; 11)

$y - y_0 = k_{CK}(x - x_C)$; =>

$$y - 11 = -\frac{1}{3}(x - (-7)); \qquad y - 11 = -\frac{1}{3}(x + 7)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{3} \text{ (CK)}$$

Решим уравнения высот ВД и СК как систему:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x + 3 \quad \text{(BD)} \\ y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{26}{3} \quad \text{(CK)} \end{cases}$$

или

$$+\begin{cases} 2x - 3y = -9 & (BD) \\ x + 3y = 26 & (CK) \end{cases}$$
$$\overline{3x = 17}$$

тогда $y = \frac{2}{3} * \frac{17}{3} + 3 = \frac{34 + 27}{9} = \frac{61}{9}$

$\boxed{x = \frac{17}{3}}$ $\boxed{y = \frac{61}{9}}$

Значит, точка пересечения высот имеет координаты:

точка E $\left(\frac{17}{3}; \frac{61}{9}\right)$

Тот же результат получим, если будем искать координаты точки E как пересечение высот ВД и AP.

Найдем уравнение высоты AP.

$AP \perp BC, \Rightarrow k_{AP} = -\frac{1}{k_{BC}}$

Угловой коэффициент BC найдем по формуле:

$$k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{11 - 5}{-7 - 3} = \frac{6}{-10} = -\frac{3}{5}$$

значит $k_{AP} = -\frac{1}{-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$

тогда уравнение AP будет: $y - y_0 = k_{AP}(x - x_A)$.

$y - (-1) = \frac{5}{3}(x - 1)$; $y + 1 = \frac{5}{3}x - \frac{5}{3}$;

$y = \frac{5}{3}x - \frac{5}{3} - 1$; $y = \frac{5}{3}x - \frac{8}{3}$ (AP) – уравнение высоты AP

Теперь решим уравнения высот AP и ВД как систему:

т.е. $\begin{cases} y = \frac{5}{3}x - \frac{8}{3} & (AP) \\ y = \frac{2}{3}x + 3 & (BD) \end{cases}$ => $-\begin{cases} 5x - 3y = 8 & (AP) \\ 2x - 3y = -9 & (BD) \end{cases}$

$$\overline{3x = 17;}$$

$$y = \frac{2}{3} * \frac{17}{3} + 3 = \frac{34 + 27}{9} = \frac{61}{9};$$

$$\boxed{x = \frac{17}{3}} \quad \boxed{y = \frac{61}{9}}$$

Значит, точка Е $\left(\frac{17}{3}; \frac{61}{9}\right)$, т.е. получили тот же результат.

6.Длину высоты ВД найдем как расстояние от точки В(3; 5) до прямой АС (имеющей уравнение 3х+2у-1=0) по формуле:

$$d_{BD} = \frac{|Ax_0 + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3*3 + 2*5 - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{18}{\sqrt{13}} = \frac{18\sqrt{13}}{13}$$

т.е. $d_{BD} = |BD| = \frac{18\sqrt{13}}{13} \approx 4{,}99$

Экономическая интерпритация

1. Бюджетное ограничение потребителя.

Допустим, индивидуум в течение некоторого периода времени собирается потратить весь свой доход I на приобретение двух благ, например, х-единиц продуктов питания и у-единиц одежды, цены которого равны Px и Py соответственно. Тогда выбираемые им величины х и у должны удовлетворять бюджетному ограничению

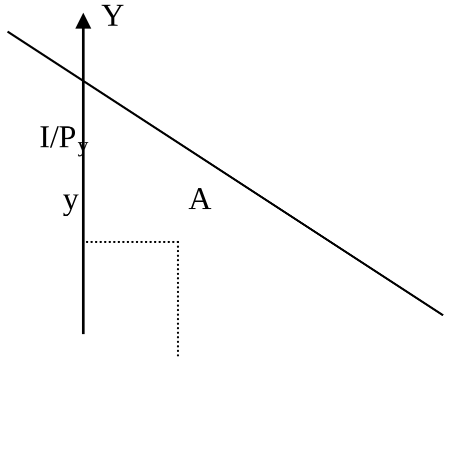
$$P_x x + P_y y = I \ (*)$$

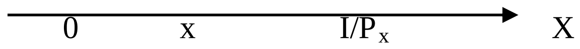
При известных ценах P_x, P_y и доходе I это уравнение определяет прямую линию на плоскости.

Или уравнение (*) можно привести к виду:

$$\frac{x}{\frac{I}{P_x}} + \frac{y}{\frac{I}{P_y}} = 1$$

Эта прямая называется бюджетной линией потребителя. По физическому смыслу х и у могут принимать только неотрицательные значения и поэтому рассматривается только та ее часть, которая лежит в первом квадрате.





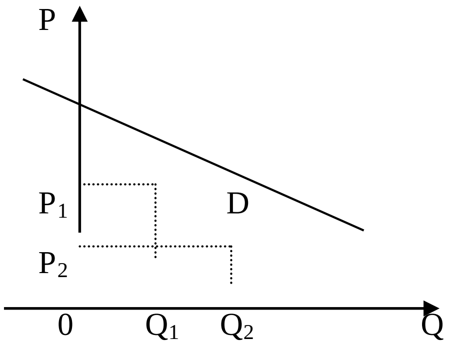
Потребитель может выбирать любую точку А на бюджетной линии. Она определяет его возможности. Каждая такая точка определяет допустимый набор благ (x;y), удовлетворяющий бюджетному ограничению.

2. Линейная модель спроса и предложения.

Рассмотрим рынок какого-либо товара, например, яблок.

Закон спроса: чем выше цена товара, тем меньше его количество желают и могут приобрести потребители.

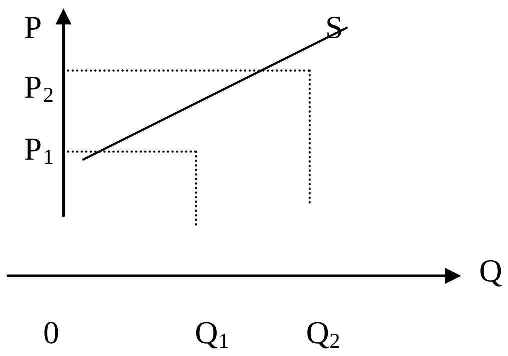
Если обозначить через p цену товара, а через Q – его количество, то из p↑ следует Q↓. (Из возрастания p следует убывание Q). Причем наклон линии спроса Д отрицательный.



В линейном случае уравнение линии спроса имеет вид:

$$Q=kp+b, \quad \text{где } k<0$$

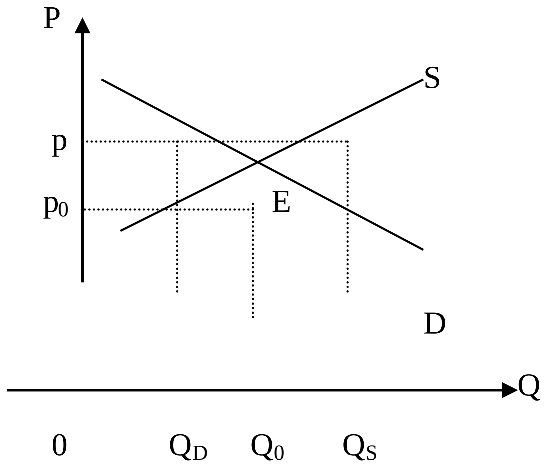
Закон предложения: чем выше цена товара, тем больше его количество желают и могут продать производители товара, т.е. из p↑ следует Q↑ (из возрастания p следует возрастание Q). Поэтому наклон линии предложения S положительный.



В линейном спросе уравнение линии предложения имеет вид $Q=kp+b$, где $k>0$.

3. Определение экономического равновесия.

На одном графике изобразим линию спроса D и линию предложения S. Так как наклон линии D отрицательный, а наклон линии S положительный, то прямые D и S пересекаются в некоторой точке E (Q_0,P_0).



При любой цене $P \neq P_0$ величина спроса Q_D не равна величине предложения Q_S. Значит, на рынке будет дефицит или излишек товара. И лишь при цене $P=P_0$ на рынке будет равновесие предложения и спроса: $Q_S=Q_D=Q_0$.

Если линия спроса D и линия предложения S заданы линейными уравнениями, то решая их как систему уравнений, можно найти равновесные значения объема Q_0 и цены P_0.

Аналитическая геометрия на плоскости.

Тема. Кривые второго порядка

1Окружность
2. Эллипс

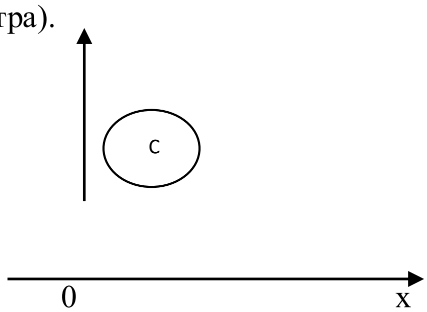
3. Гипербола

4. Парабола

Линией второго порядка называется множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, где хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля.

1. Окружность.

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).



Если R – радиус окружности, а точка C (a;в) – ее центр, то уравнение окружности имеет вид:

$$\mathbf{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2} \qquad \mathbf{(2)}$$

Уравнение (2) называется *нормальным уравнением окружности*. В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение (2) примет вид:

$\mathbf{x^2 + y^2 = R^2}$. Если в правой части уравнения (2) раскрыть скобки, то получится уравнение вида

$$\mathbf{x^2+y^2 + mx + ny + p = 0 \qquad (3),}$$

которое называется общим уравнением окружности.

Чтобы от уравнения (3) перейти к уравнению вида (2), нужно в левой части уравнения (3) выделить полный квадрат. Полезно помнить, что уравнение окружности содержит старшие члены x^2 и y^2 с равными коэффициентами и в нем отсутствует член с произведением x на y.

1. Уравнением плоскости в векторной форме.
2. Общее уравнение плоскости. Неполные уравнения плоскости.
3. Уравнение плоскости в отрезках.
4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
5. Общее уравнение прямой.
6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении.
7. Уравнение прямой в отрезках.
8. Угол между двумя прямыми на плоскости.
9. Каковы условия параллельности прямых на плоскости?
10. Каковы условия перпендикулярности прямых на плоскости?

11. Расстояние от точки до прямой ?

12. Общие уравнения прямой в пространстве.

13. Канонические уравнения прямой в пространстве. Направляющий вектор прямой.

14. Параметрические уравнения прямой в пространстве.

15. Угол между двумя прямыми в пространстве

16. Условие параллельности прямых в пространстве.

17. Условие перпендикулярности прямых в пространстве.

18. Угол между прямой и плоскостью.

19. Условие параллельности прямой и плоскости.

20. Условие перпендикулярности прямой и плоскости.

. Общий вид уравнения кривой второго порядка.

2. Каково определение окружности?

3. Каноническое уравнение окружности.

4. Сформулируйте определение эллипса.

5. Каноническое уравнение эллипса.

6. Основные понятия, характеризующие эллипс: фокусы, оси и полуоси эллипса, вершины.

7. Эксцентриситет эллипса, его возможные значения.

8. Сформулируйте определение гиперболы.

9. Каноническое уравнение гиперболы.

10. Основные понятия, характеризующие гиперболу: фокусы, действительная и мнимая оси и полуоси гиперболы, вершины.

11. Асимптоты и основной прямоугольник гиперболы.

12. Эксцентриситет гиперболы, его возможные значения.

13. Сформулируйте определение параболы.

14. Каноническое уравнение параболы.

15. Основные понятия, характеризующие гиперболу: параметр, фокус, директриса, ось гиперболы, вершина.

Раздел 3. Введение в анализ.

Функции и пределы. Числовая функция, свойства числовой функции.

Способы задания функции, график функции, свойства.

Понятие функции является одним из основных понятий современной математики. С этим понятием часто встречаются при изучении реальных процессов в природе, науке и технике. Понятие функции не является раз и навсегда данным. Это понятие возникло в XVIII веке и прошло сложный и трудный путь развития, на каждом этапе которого определялось по разному. С помощью различных функций могут быть описаны многие процессы и явления реального мира.

Определение1. Переменная величина y называется **функцией** от переменной величины x, если они связаны между собой так, что каждому рассматриваемому значению величины x соответствует единственное вполне определенное значение величины y.

Это определение в общих чертах было сформулировано гениальным русским математиком Н. И. Лобачевским

y=f(x), y=F(x)-функциональная зависимость x и y.

f, F - характеристики функции, x - *независимая* переменная (аргумент), y – *зависимая* переменная.

Совокупность всех значений независимой переменной x, для которых функция определена, называется области определения или областью существования функции.

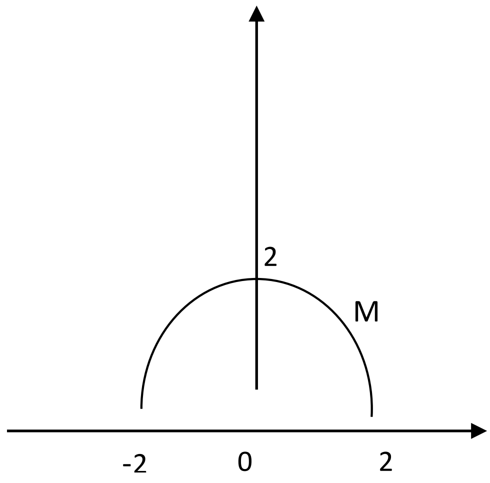
Пример: $y = \sqrt{4 - x^2}$ область определения функции

$$4 - x^2 \geq 0 \quad x^2 \leq 4 \quad |x| \leq 2$$
$$-2 \leq x \leq 2 \quad [-2; 2]$$

Чтобы наглядно представить поведение функции, строят ее график , рассматривая независимую переменную x и функцию y как прямоугольные координаты некоторой точки M на плоскости XOY.

Определение 2. Графиком функции y=f(x) называется множество всех точек M(x,y) плоскости XOY, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью.

Или иными словами говоря, график функции – линия, уравнением которой служит равенство, определяющее функцию. Например, $x^2+y^2=4$, $y\geq 0$



Рассматривают три способа задания функции: аналитический, табличный и графический.

1.Аналитический.

Способ задания функции при помощи формулы называется аналитическим.

$y = tgx^2 + 5$, $S = 4\pi R^2$, $y=kx$.

Этот способ является основным в мат. анализе, но на практике не удобен.

2. <u>Табличный способ задания функции.</u>

Функцию можно задать с помощью таблицы, содержащей значения аргумента и соответствующие им значения функции.

3. <u>Графический способ задания функции.</u>

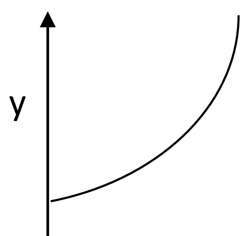
Функция $y=f(x)$ называется заданной графически, если построен ее график. Такой способ задания функции дает возможность определять значения функции только приближенно, так как построение графика и нахождение на нем значений функции сопряжено с погрешностями.

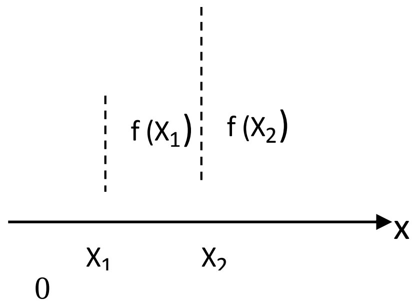
В математике часто обращаются к графической иллюстрации функции. Из трех рассматриваемых способов задания функции основным является аналитический способ.

Основные свойства функций.

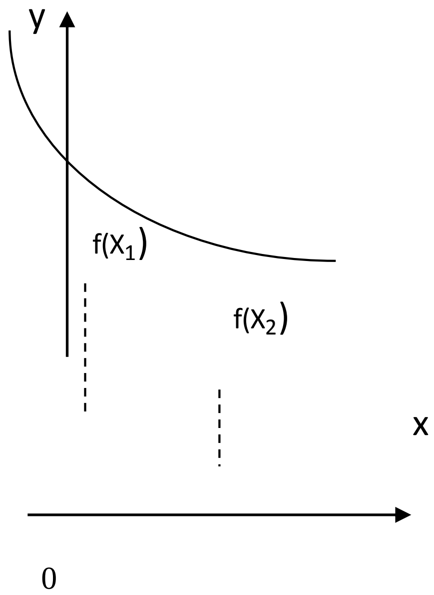
а) <u>Монотонные функции</u>.

<u>Определение 1</u>. Функция $y=f(x)$ называется **монотонно возрастающей**, если большему значению аргумента, соответствует большее значение функции, т.е. из неравенства $x_2>x_1$ следует $f(x_1) > f(x_2)$.





<u>Определение 2</u>. **Монотонно убывающая**:$x_2 > x_1$,$f(x_1) < f(x_2)$.

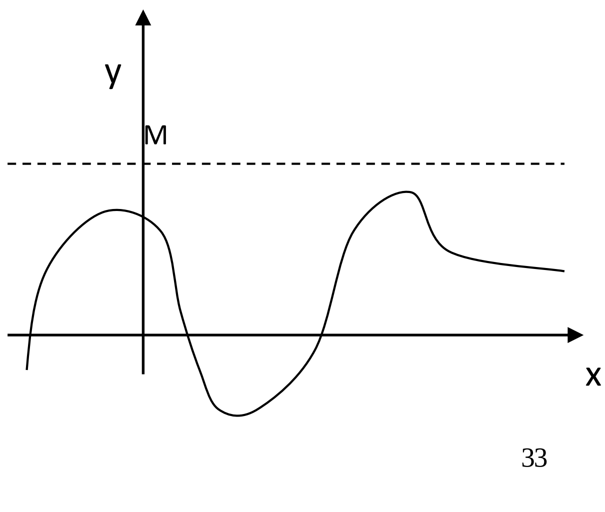


б) <u>Ограниченные и неограниченные функции</u>.

<u>Определение 3</u>. Функция $y=f(x)$ называется **ограниченной сверху,** если существует такое число M, что $f(x) \leq M$ для любого x.

<u>Определение 4</u>. Функция $y=f(x)$ называется **ограниченной снизу,** если существует такое число m, что $f(x) \geq m$ для любого x. Функция $y=f(x)$ называется **ограниченной**, если она ограничена сверху и снизу, т.е. если существуют такие числа m и M, что при любых значениях x выполняются неравенства : $m \leq f(x) \leq M$

Если чисел m и M не существует, то функция называется неограниченной.



m

- -

<u>Пример</u> : y=sinx, y=cosx - ограниченные, y=tgx и y=ctgx неограниченные.

в) При построении графиков функций важно учитывать симметрию графика и периодичность.

<u>Определение 5</u>. Функция $y=f(x)$ называется **четной**, если она не изменяет своего значения при изменении знака аргумента, то есть $f(-x)= f(x)$.

График четной функции симметричен относительно <u>оси ОУ</u>.

<u>Определение 6</u>. Функция $y=f(x)$ называется **нечетной,** если при изменении знака аргумента знак функции меняется на противоположный $f(-x)= -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно <u>начала координат</u>.

<u>Определение 7</u>. Функция $y=f(x)$ называется **периодической,** если существует положительное число Т (период функции) такое, что $f(x+T)= f(x)$.

Основные элементарные функции и их графики.

<u>Определение</u> : Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются **элементарными.**

Графики основных элементарных функций и их свойства приведены в таблице.

Функция называется **явной**, если она задана формулой, правая часть которой не содержит зависимой переменной.

$y=3x^2 - 5x + e^x$

$y=f(x)$ (1).

Функция называется **неявной**, если она задана уравнением не разрешенным относительно зависимой переменной.

$x^2+y^2=R^2$, $F(x;y)=0$ (2).

Совокупность значений аргумента x, для каждого из которых уравнение (2), имеет хотя бы один действительный корень y, представляет собой область существования соответствующей неявной функции.

$x^2+y^2 +R^2 =0.$

$y2= -x^2 -R^2$ (действительных значений нет)

Понятие обратной функции

Пусть y есть функция от аргумента x.

$$y=f(x) \qquad (1).$$

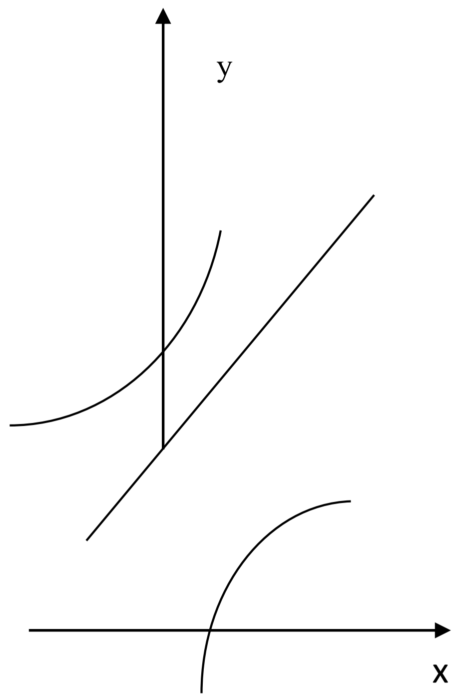
Если считать y – аргументом, а x – функцией, то x называется **обратной** функцией по отношению к y.

$$x=\varphi(y) \qquad (2).$$

$$y= f[(\varphi(y))] \qquad (3).$$

Иногда придерживаются стандартных обозначений **$y=\varphi(x)$..**

Функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ –обратные .
Ниже изображены их графики.



<u>Сложная функция.</u>

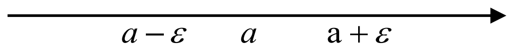
Пусть функция $y=f(u)$ есть функция от переменной u, а переменная u в свою очередь является функцией от переменной x $u=\varphi(x)$, тогда $y= f[(\varphi(x))]$ называется сложной функцией (или композицией функций, суперпозицией функций, функцией от функции).

Пределы функции и непрерывность

1. Предел функции.
2. Бесконечно малые величины.
3. Бесконечно большие величины.
4. Основные теоремы о пределах.
5. Раскрытие неопределенностей.
6. Замечательные пределы.

Задача о непрерывном начислении процентов.

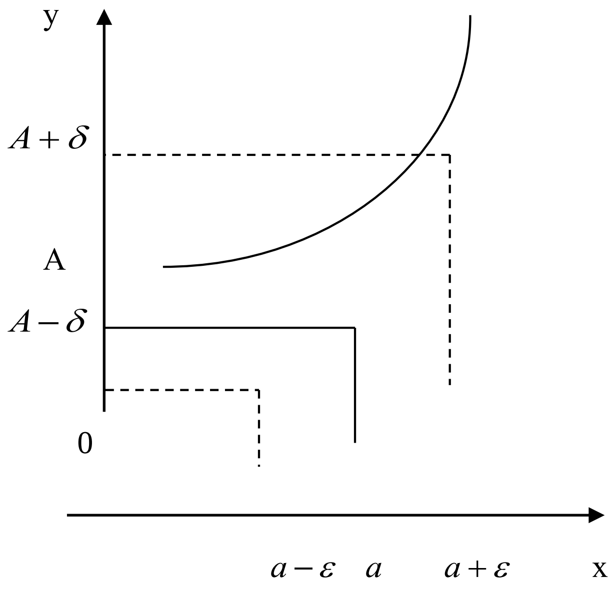
Пусть ε - любое положительное число, a – некоторое действительное число, тогда множество действительных чисел удовлетворяющих неравенствам $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$ или $|x-a|<\varepsilon$ называется ε-окрестностью точки a.



a – центр окрестности, ε - радиус окрестности.

Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) в точке x=a, если для каждого положительного наперед заданного сколь угодно малого числа ε>0 найдется такое положительное число $\delta>0$, что для всех x, отличных от a и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\varepsilon$, выполняется неравенство: $|f(x)-A|<\delta$. Число δ зависит от ε, при уменьшении ε уменьшается и δ.

Если А предел f(x) в точке $x=a$, то обозначают $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A.$ Таким образом, когда мы имеем функцию f(x), процесс изменения состоит в том, что значения аргумента приближаются к некоторой точке a, вследствии чего соответствующие значения функции приближаются к своему пределу А.



Если $|x-a|<\delta$, то $|f(x)-A|<\varepsilon$

2. Бесконечно малые величины.

Определение1. Переменная величина имеющая своим пределом 0, называется бесконечно малой.

$$\lim x = 0.$$

Определение 2. Переменная x называется бесконечно малой, если в процессе изменения ее абсолютная величина $|x|$ становится и остается меньше наперед заданного как угодно малого положительного числа ε, т.е. начиная с некоторого момента выполняется неравенство $|x| < \varepsilon$.

Приступая к изучению бесконечно малых, укажем на связь между бесконечно малой и величиной имеющей предел. **Теорема**: Если величина x имеет пределом число a, то она может быть представлена в виде $x = a + \alpha$, где α - бесконечно малая.

Основные теоремы о бесконечно малых.

1.Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых есть также величина бесконечно малая.

2.Произведение бесконечно малой на величину ограниченную есть также величина бесконечно малая.

Следствие 1: Произведение бесконечно малой на величину постоянную, есть бесконечно малая.

Следствие 2: Произведение конечного числа бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.

Следствие 3: Частное от деления бесконечно малой величины на величину имеющую предел, отличный от нуля, есть также бесконечно малая величина.

3.Бесконечно большие величины.

Определение: Переменная величина x называется бесконечно большой, если в процессе изменения ее абсолютная величина $|x|$ становится и остается больше любого наперед заданного как угодно большого положительного числа N>0, $|x|$>N.

Бесконечно большая величина предела не имеет, или условно говорят, что предел бесконечно большой величины есть ∞. $\lim x = \infty$.

Между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами существует связь: если x есть бесконечно малая, то $\frac{1}{x}$ бесконечно большая, и наоборот, если y бесконечно большая, то $\frac{1}{y}$ - бесконечно малая.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty; \qquad \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} = 0.$$

4.Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. Предел алгебраической суммы конечного числа слагаемых равен сумме пределов этих слагаемых.

$$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y.$$

Теорема 2. Предел произведения любого конечного количества сомножителей равен произведению их пределов.

$$\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y.$$

Теорема 3. Предел частного двух переменных равен частному их пределов если только предел знаменателя отличен от нуля.

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim cx = c \lim x.$$

Следствие 2 . Предел степени переменной равен той же степени предела переменной.

$$\lim (x)^n = \left(\lim x\right)^n.$$

Признаки существования предела.

Теорема 1. Переменная величина, заключенная между двумя переменными величинами имеющими общий предел, имеет тот же предел.

Теорема 2. Монотонная ограниченная переменная величина имеет предел. Эта теорема является признаком существования предела и принимается без доказательств.

5. Раскрытие неопределенностей.

Найти $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, если:

1) $f(a)=0$; $\varphi(a)=0$. $\frac{0}{0}$ -неопределенность.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$; $f(\infty)=\infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ – неопределенность

$\varphi(\infty)=\infty$

Операция нахождения пределов функции вида (1,2) называется раскрытием неопределенности.

Встречаются неопределенности вида: 3) $\infty - \infty$, 4) $0 \cdot \infty$, 1^{∞},...

6. Замечательные пределы.

Теорема1. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Этот предел называется *первым замечательным пределом.*

Теорема 2. Последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$, имеет предел заключенный между числами 2 и 3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

где e = 2,71828…

Этот предел называется вторым замечательным пределом

Тема 3. Непрерывность функции.

Понятие предела функции в точке позволяет рассмотреть важнейшее свойство функции – свойство непрерывности. Относительно функции это означает, что малое изменение аргумента вызывает малое изменение функции

1. Приращение аргумента и функции .
2. Основные теоремы о непрерывных функциях.
3. Односторонние пределы.
4. Точки разрыва и их классификация

1. Приращение аргумента и функции.

Непрерывность функции.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке $x=x_0$ и ее окрестности. Придадим аргументу новое значение x_1. Величина

x_1-x_0 называется *приращением* аргумента.

$$x_1-x_0=\Delta x,\quad x_1=x_0+\Delta x$$

Тогда функция y принимает соответствующее значение $f(x_1)$.:

$f(x_1)-f(x_0)=\Delta y$ – приращение функции.

$f(x_1)=\Delta y+f(x_0)$, $f(x_1)=y_0+\Delta y$

Определение1: Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \qquad (1)$$

Пример 1. Показать, что функция $y=x^2$ непрерывна в любой точке.

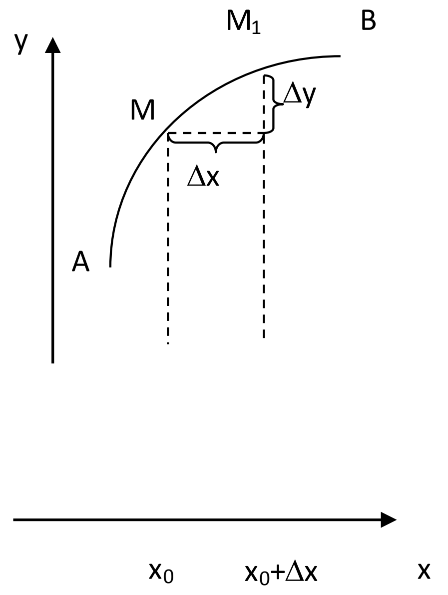
$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2-x^2=2x(\Delta x)+(\Delta x)^2$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 \right] = 0 + 0 = 0$$

$y=x^2$ – непрерывная функция в любой точке.

Поясним графически приращение функции.

Пусть кривая АВ есть график функции $y=f(x)$.Рассмотрим на этой кривой точку $M(x_0,y_0)$.



Дадим абсциссе x_0 приращение Δx, тогда ордината получит приращение Δy. Тогда М займет при этом положение $M_1(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$. $MC=\Delta x$, $M_1C=\Delta y$. Если $\Delta x\to 0$, то точка $M_1\to M$ следовательно и $\Delta y\to 0$. В таком случае $y=f(x)$ называется непрерывной при данном значении x_0.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

1. Эта функция определена в точке x_0.
2. Приращение функции в точке x_0 стремится к 0, когда приращение аргумента Δx стремится к 0.
   $\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0$.

Геометрически график непрерывной функции представляет собой сплошную линию.

Определение 3. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

1. Эта функция определена при $x=x_0$.
2. Предел функции в точке $x=x_0$ равен значению функции в точке x_0.

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0) \qquad (2)$$

Согласно определению предела функции условие 2 равносильно следующему: для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$,выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Условиями непрерывности функции являются следующие:

1. Функция $y=f(x)$ определена при $x=x_0$;

2. Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции;

3. Предел функции в точке $x=x_0$ равен значению функции в этой точке.

Определение 4. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на отрезке [а; в], если эта функция непрерывна в каждой точке этого отрезка.

2.Основные теоремы о непрерывных функциях.

Теорема 1. Алгебраическая сумма конечного числа функций непрерывных в некоторой точке x_0, является функцией непрерывной в той же точке.

Теорема 2. Произведение конечного числа функций, непрерывных в некоторой точке, является функцией непрерывной в той же точке.

Теорема 3. Частное от деления двух функций в некоторой точке, является функцией непрерывной в этой же точке, при условии, что знаменатель дроби не обращается в нуль.

3. Односторонние пределы.

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{x+x^2}{|x|}$$

Эта функция определена всюду, кроме $x=0$. При $x\to 0$ функция предела не имеет. Однако, если $x\to 0$, пробегает при этом ряд последовательных положительных значений, то $f(x)\to 1$.

$$\lim_{x\to +0}\frac{x+x^2}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{x(1+x)}{x}=\lim_{x\to +0}(1+x)=1$$

Если же $x\to 0$, пробегает при этом ряд последовательных отрицательных значений, то $f(x)\to -1$.

$$\lim_{x\to -0}\frac{x+x^2}{-x}=\lim_{x\to -0}\frac{x(1+x)}{-x}=-\lim_{x\to -0}(1+x)=-1$$

Таким образом, данная функция при $x\to 0$ не имеет предела, в том смысле понятия, который был установлен определением, приведенным ранее. Однако, определение предела можно изменить, введя дополнительное условие: все значения аргумента стремящиеся к a должны быть больше a или меньше a.

Определение. Число А называется правосторонним пределом или пределом справа функции $y=f(x)$ *в* точке $x=a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, что при $0<x-a<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=A;\quad A=f(a+0)$$

Определение. Число В называется левосторонним пределом или пределом слева функции $y=f(x)$ *в* точке $x=a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, что при $0<a-x<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-B|<\varepsilon$.

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = B; \quad B = f(a-0)$$

Правосторонние и левосторонние пределы называются <u>односторонними</u> пределами. В связи с этим обыкновенный предел называют иногда двусторонним. Все свойства предела функции распространяются и на односторонние пределы. Между пределом функции и односторонними пределами существует определенная связь.

Если оба односторонних предела существуют и равны между собой, то предел функции в точке существует.

Если оба односторонних предела существуют и неравны между собой, то предел функции в точке не существует.

4. Точки разрыва и их классификация.

<u>Определение</u>. Точки, в которых нарушаются условия непрерывности функции, называются точками разрыва функции. Разрыв в точке $x=x_0$ имеет место, если нарушено, хотя бы одно из трех условий непрерывности функции.

1) В точке $x=x_0$ функция $f(x)$ не имеет конечного предела.

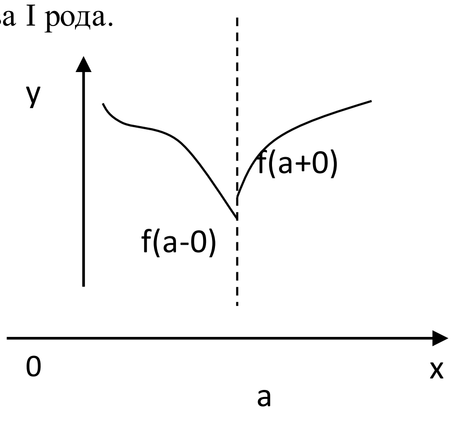
2) Функция не существует в x_0.

3) Предел функции в точке существует, но не совпадает с ее значением в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

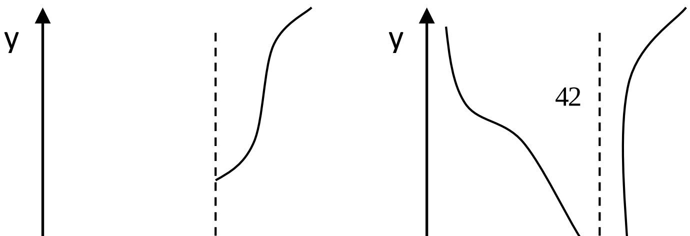
Различают три вида точек разрыва:

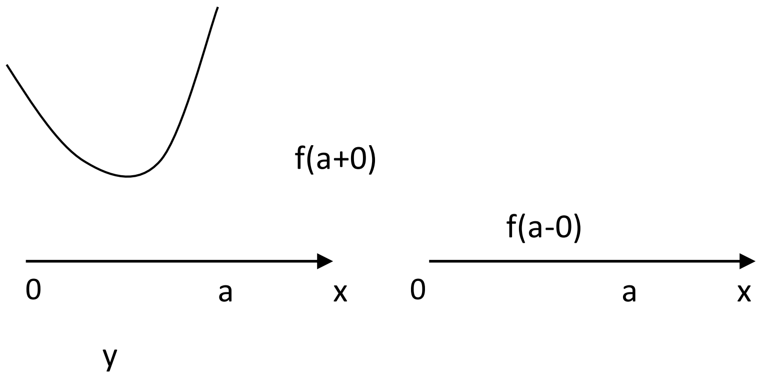
1) Точки разрыва I рода, 2) Точки разрыва II рода.
3) Устранимые точки разрыва.

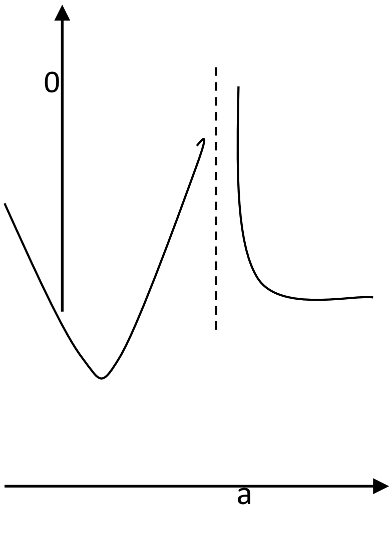
<u>Определение 1</u>. Если в точке x=a левосторонний, правосторонний пределы существуют, но не равны между собой, т.е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, то точка a называется точкой разрыва I рода.



<u>Определение 2</u>. Если в точке x=a не существуют левосторонний и правосторонний пределы, или оба одновременно, то точка a называется точкой разрыва II рода.







<u>Определение 3</u>. Если в точке x=a функция *f (x)* имеет левосторонний и правосторонний пределы и эти пределы равны между собой, но их значения не совпадают со значением функции в точке a, то точка a называется точкой "устранимого разрыва".

Контрольные вопросы:

1. Что называется приращением аргумента и приращением функции?
2. Дайте определение производной функции
3. Каков геометрический, физический, механический и экономический смысл производной?
4. Таблица производных.
5. Основные правила дифференцирования функции.
6. Сформулируйте основные правила дифференцирования сложной и обратной функций.
7. Записать уравнение касательной
8. Что называется нормалью к кривой?
9. Записать уравнение нормали
10. Как найти производную от неявно заданной функции?
11. Как найти производную от параметрически заданной функции?
12. Какую операцию называют логарифмическим дифференцированием?
13. Дайте определения гиперболических функций.
14. Производные гиперболических функций.

Раздел 4. Дифференциальное исчисление

Производная, области ее применения

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} \qquad \text{или} \qquad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием*** этой функции. Производная функции имеет несколько обозначений: $y',\ f'(x),\ \dfrac{dy}{dx}$.

Производная широко применяется при исследования различных по характеру динамических процессов.

***Физический смысл производной*:** если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса.

***Механический смысл производной*:** если $S = f(t)$ – зависимость пройденного пути при прямолинейном движении материальной точки от времени, то производная $S' = v$ – скорости движения.

***Геометрический смысл производной*:** производная y' в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x.

***Экономический смысл производной*:** производная от количества произведенной продукции по времени равна производительности труда.

Рассмотрим один из примеров применения производной (рис. 10.1).

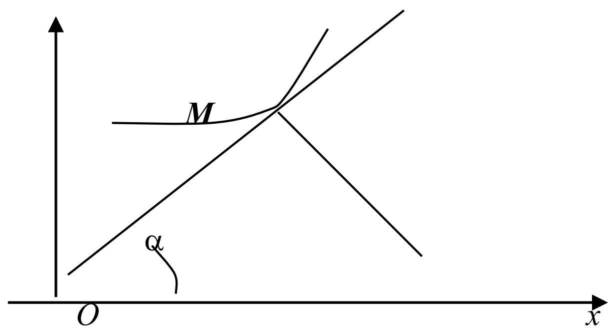


Рис. 10.1

Если $M(x_0, y_0)$ – точка касания к графику функции $y = f(x)$, то угловой коэффициент касательной есть $k = f\,'(x_0)$. Пользуясь уравнением прямой, 2проходящей через заданную точку в заданном направлении (см. формулу (5.11)) $y - y_0 = k\,(x - x_0)$, получаем ***уравнение касательной*** к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f\,'(x_0)\,(x - x_0) \qquad (10.1)$$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью*** к кривой. Тогда угловой коэффициент нормали равен $k_{норм.} = \; = -\dfrac{1}{k_{кас.}} = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ и ***уравнение нормали*** к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ будет иметь вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0) \qquad (10.2)$$

10.2. Правила дифференцирования. Таблица производных

Для нахождения производных элементарных функций (которые получаются из основных элементарных функций и постоянных с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции функций) надо знать правила дифференцирования и производные основных элементарных функций.

Правила дифференцирования:

$y = (u \pm v)$; $y' = u' \pm v'$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – функции.

$y = \dfrac{u}{v}$; $\quad y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

4. $y = u\cdot v$; $y' = u'v + v'u$,

5. $y = C\cdot u$; $y' = C\cdot u'$, где C – const

Таблица производных

$(x)' = 1$

$(C)' = 0$, (C – const)

$(x^n)' = n\,x^{n-1}$

4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $(a^x)' = a^x \ln a$

6. $(e^x)' = e^x$

9. $(\sin x)' = \cos x$

10. $(\cos x)' = -\sin x$

11. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

12. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ 15. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ 16. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Правило нахождения производной сложной функции формулируется в виде теоремы (которую приводим без доказательства).

Теорема. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x, т.е. $y' = f'(u)\cdot u'$.

10.3. Дифференцирование функций, заданных в различных формах

1. Если зависимость между аргументом x и функцией y представлена в виде уравнения

$$F(x;y) = 0, \tag{10.3}$$

то говорят, что функция задана в ***неявном*** виде.

Например: $3y - \ln y + 2x + \cos y - 1 = 0$ или $2^y - 6x + 7y - 9 = 0$

При неявном задании функции для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y: достаточно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию x, и затем полученное уравнение разрешить относительно y'.

3. Логарифмическое дифференцирование.

В некоторых случаях для нахождения производной необходимо заданную функцию сначала прологарифмировать. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют ***логарифмическим дифференцированием***.

Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная **обратной функции** равна обратной величине производной данной функции, т.е.

Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0.$ Тогда, по теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции, можно записать,

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$ где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = f'(x)\cdot \Delta x + \alpha\cdot\Delta x$

Слагаемое $f'(x)\cdot\Delta x$ называют ***главной частью*** приращения функции Δy.

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной

$$dy = f'(x)\Delta x \tag{11.1}$$

Если $y = x$, то $f'(x) = 1$ и $dx = \Delta x$. Тогда $dy = f'(x)dx$ (11.2)

11.2. Геометрический смысл дифференциала функции

Дифференциал функции есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда x получает приращение Δx. Обоснуем это утверждение с помощью рисунка 11.1.

Тема 12 Исследование функций с помощью производных

12.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c) = 0$.

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна оси *Ox* (рис. 12.1)

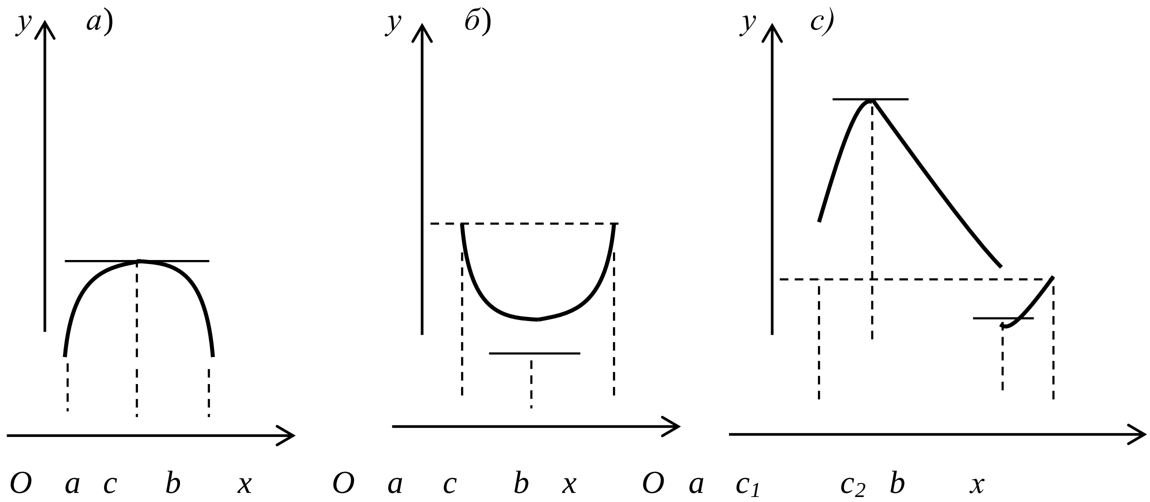


Рис. 12.1

Теорема Коши. Если функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причем $\varphi'(x)\neq 0$ для $x\in(a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c\in(a;b)$, такая, что выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \qquad (12.1)$$

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c\in(a;b)$, такая, что выполняется равенство

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad (12.2)$$

Формулу (12.2) называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой о конечном приращении***: приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a;b]$ равно приращению аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого отрезка.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: отношение $(f(b)-f(a))/(b-a)$ есть угловой коэффициент секущей *AB*, а величина $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой $x = c$, т.е на графике функции $y=f(x)$ найдется точка $C(c;f(c))$ в которой касательная к графику функции параллельна секущей *AB* (рис. 12.2).

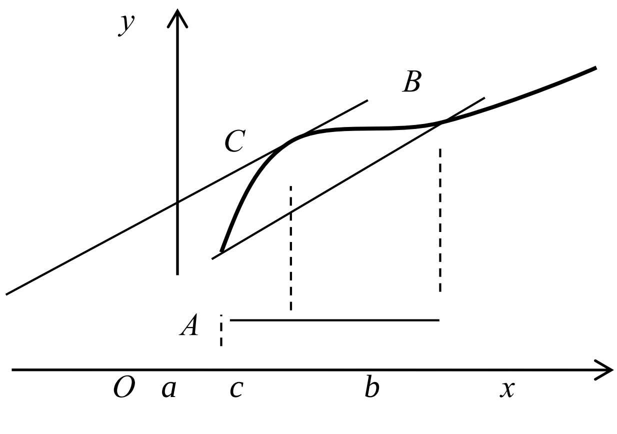


Рис. 12.2

Теорема (Правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a;b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши; тогда, если существует предел отношения $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x\to a$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \qquad (12.3)$$

Таким образом, предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.

Замечание 1. Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, теорему можно применить ещё раз:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \quad \text{и т. д.}$$

Замечание 2. Аналогичное правило (в виде теоремы) существует и для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \qquad (12.4)$$

Замечание 3. Правило Лопиталя доказывается для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, которые называют ***основными.*** Неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований. Для нахождения предела вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ удобно сначала прологарифмировать функцию $y=f(x)^{\varphi(x)}$.

12.2. Возрастание и убывание функций. Экстремум функции

Теорема (*достаточное условие возрастания функции*). Функция $y=f(x)$ будет возрастающей на $(a;b)$, если $f'(x)>0$ для всех $x\in(a;b)$

Теорема (*достаточное условие убывания функции*). Функция $y=f(x)$ будет убывающей на $(a;b)$, если $f'(x)<0$ для всех $x\in(a;b)$

Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции $y=f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0)\geq f(x)$, а значение $f(x_0)$ – ***максимумом*** функции.

Точка x_0 называется ***точкой минимума*** функции $y=f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0)\leq f(x)$, а значение функции в этой точке – ***минимумом***.

Максимум и минимум функции называются ***экстремумом*** функции.

Замечание 1. Экстремум функции часто называют ***локальным*** экстремумом, подчеркивая тот факт, что понятие экстремума связано лишь с достаточно малой окрестностью точки x_0.

Замечание 2. Функция может иметь экстремум только в тех точках, которые лежат внутри области определения функции.

Теорема (***необходимое условие экстремума***). Для того, чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 имела экстремум, необходимо, чтобы $f'(x_0) = 0$ или не существовала.

Точка x_0, в которой производная равна нулю или не существует называется ***критической точкой первого рода*** или ***стационарной***.

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в критической точке x_0 параллельна оси ОХ ($f'(x) = 0$), или оси ординат ($f'(x) = \infty$), или в этой точке нет определенной касательной.

Если в точке x_0 достигается экстремум, то эта точка критическая, но не каждая критическая точка является точкой экстремума. В критической точке функция **может** иметь экстремум. Для выяснения вопроса – является критическая точка экстремальной или нет – надо применить достаточное условие экстремума.

Теорема (***первое достаточное условие экстремума***). Функция $y = f(x)$ в критической точке x_0 будет иметь максимум, если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “–”, (минимум, если $f'(x)$ меняет знак с “–” на “+”). Если $f'(x)$ не меняет знак, то экстремума нет.

Схема исследования функции на экстремум с помощью первого достаточного условия:

Найти область определения функции;

Найти производную $y' = f'(x)$;

Найти критические точки: а) $y' = 0$, б) y' терпит разрыв;

Разбить область определения функции на интервалы с помощью критических точек;

Найти знаки производной y' в каждом интервале;

Сделать вывод о характере монотонности функции в каждом интервале и о наличии экстремумов;

Найти экстремальные значения функции.

Теорема (***второе достаточное условие экстремума***). Функция $y = f(x)$ в критической точке x_0 будет иметь максимум, если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, (минимум, если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$).

Схема исследования функции на экстремум с помощью второго достаточного условия:

1. Найти производную $y' = f'(x)$;

2. Найти критические точки;

3. Найти производную второго порядка;

4. Найти знаки производной y'' в критических точках и сделать вывод о характере экстремумов.

12.3. Выпуклость функции. Точки перегиба

Если на некотором интервале любая касательная, проведенная к кривой, лежит выше кривой, то кривая называется ***выпуклой вверх*** (***выпуклой***), а если касательная лежит ниже кривой, то кривая называется ***выпуклой вниз*** (***вогнутой***).

Точка на кривой называется ***точкой перегиба***, если при переходе через неё кривая меняет свою выпуклость на вогнутость или наоборот.

В точке перегиба касательная пересекает график.

Теорема. Если вторая производная $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) для всех $x \in (a,b)$, то график функции $y = f(x)$ на этом интервале будет выпуклым (вогнутым).

Теорема (***необходимое условие точки перегиба***). Если x_0 – абцисса точки перегиба, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

Определение. Точка x_0, в которых $f''(x_0) = 0$ или не существует, называется ***критической точкой второго рода.***

Теорема (***достаточное условие точки перегиба***). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет свой знак, то точка (x_0, y_o) есть точка перегиба графика функции.

Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции называется такая прямая, к

которой как угодно близко приближается точка кривой при неограниченном удалении точки от начала координат.

Кривая может приближаться к своей асимптоте, оставаясь с одной стороны от асимптоты или пересекая её бесчисленное множество раз.

1. ***Вертикальная асимптота***. Если при $x=a$ график функции имеет бесконечный разрыв, т.е. хотя бы один из пределов функции слева или справа от этой точки равен бесконечности, т.е. $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

2. ***Наклонная асимптота***. Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx+b$, где параметры k и b определяются формулами:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\ ,\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] \qquad (12.5)$$

Если $k = 0$, то из уравнения наклонной асимптоты получаем ***горизонтальную асимптоту*** $y = b$. То есть, если существует конечный предел функции $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ есть горизонтальная асимптота.

Общая схема исследования функции

Для полного исследования функции и построения её графика, можно к рассмотренным выше этапам добавить дополнительные элементы. Таким образом, предлагается следующий алгоритм действий:

Найти область определения функции;

Определить (если существуют) точки разрыва функции и её односторонние пределы в этих точках;

Исследовать функцию на четность;

Найти интервалы монотонности функции и экстремумы;

Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба;

Найти асимптоты;

Найти точки пересечения графика функции с осями координат и, если нужно, дополнительные точки для построения графика;

Построить график функции.

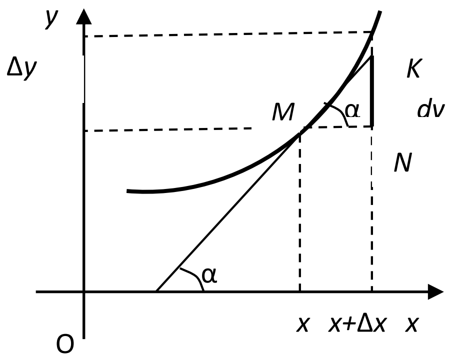


Рис. 11.1

Возьмем на графике функции $y = f(x)$ произвольную точку $M(x,y)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке M, которая образует угол α с осью Ox. Тогда $f'(x) = tg\alpha$. Из прямоугольного треугольника MKN $KN = MN \cdot tg\alpha = \Delta x tg\alpha = f'(x)\Delta x$, т.е. $dy = KN$ – приращению касательной.

11.3. Приближённые вычисления с помощью дифференциала

Как уже известно, приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде $\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x,$ или $\Delta y = dy + \alpha\cdot\Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

При достаточно малых значениях $\Delta x = x - x_0$ можно пренебречь слагаемым $\alpha\cdot\Delta x$ и получим $\Delta y \approx dy$ или $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, откуда

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \tag{11.3}$$

Таким образом, зная точные значения функции и ее производной в точке x_0, можно приближенно найти значения функции в окрестности этой точки.

11.4. Производные высших порядков

1. Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется ***производной первого порядка***.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется ***производной второго порядка*** и обозначается y'' или $\left(f''(x), \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right), \dfrac{dy'}{dx} \right)$. Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется ***производной третьего порядка*** $y''' = (y'')'$.

Производная n-го порядка (или ***n-й производной***) называется производная от производной (n–1)-го порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' \tag{11.4}$$

Производные порядка выше первого называются ***производными высших порядков***.

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначаются римскими цифрами или числами в скобках (y^V или $y^{(5)}$ – производная пятого порядка).

2. Рассмотрим механический смысл производной второго порядка.

Пусть материальная точка M движется прямолинейно по закону $S = f(t)$. Производная S_t' равна скорости точки в данный момент времени: $S_t' = V$.

Пусть в момент времени t скорость точки равна V, а в момент $t + \Delta t$ скорость равна $V + \Delta V$, т.е. за промежуток времени Δt скорость изменилась на величину ΔV. Из физики известно, что отношение $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ равно **среднему ускорению** движения точки за время Δt.

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется ***ускорением*** (мгновенным) точки M в данный момент t: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = a$, то есть $V' = a.$

Но $V = S'_t$. Поэтому $S''_t = a.$

Вторая производная от пути по времени есть величина ускорения прямолинейного движения точки.

3. Производные высших порядков от функций, заданных в параметрическом виде

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

Производная y'_x находится по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ (см.(10.4)).

Найдем производную второго порядка.

Из определения второй производной следует, что

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

т.е.

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \qquad (11.5)$$

Аналогично получаем $$y'''_{xx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t},\ y^{IV}_{xxxx} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}, \dots \qquad (11.6)$$

11.5. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая функция. Тогда её первый дифференциал $dy = f'(x)dx$.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется её ***вторым дифференциалом*** (или ***дифференциалом второго порядка***) и обозначается d^2y или $d^2 f(x)$: $d^2 y = d(dy)$.

Найдем выражение второго дифференциала функции $y = f(x)$. Так как $dx = \Delta x$ не зависит от x, то при дифференцировании считаем dx постоянным: $d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' \cdot dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2$, т.е.

$$d^2y = f''(x)dx^2 \qquad (11.7)$$

Здесь через dx^2 обозначается $(dx)^2$.

Дифференциалом n-го порядка *называется* ***дифференциал от дифференциала (n–1)-го порядка***: $d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)(dx)^n$ или

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \qquad (11.8)$$

Из определения дифференциалов высших порядков следует другое обозначение производных высших порядков:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте теорему Ролля, Коши, Лагранжа
2. Каков геометрический смысл теоремы Ролля?
3. Каков геометрический смысл теоремы Лагранжа?
4. Как по правилу Лопиталя раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$?
5. Достаточные условия возрастания и убывания функций.
6. Какие точки кривой называются критическими точками первого рода?
7. Какая точка называется точкой минимума функции?
8. Какая точка называется точкой максимума?

2. Что называется экстремумом функции?
3. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке?
4. Какие точки кривой называются критическими точками второго рода?
5. Как найти точки перегиба графика функции?
6. Необходимое и достаточное условие перегиба
7. Что называется асимптотой графика функции? Виды асимптот
8. Общая схема исследования функции

Раздел 5. Интегральное исчисление

Основные методы интегрирования

Функция F(x), дифференцируемая в данном промежутке X, называется *первообразной для функции* f(x), *или интегралом от* f(x), если для всякого x $\in$ X справедливо равенство:

$$F'(x) = f(x). \qquad (8.1)$$

Нахождение всех первообразных для данной функции называется ее *интегрированием. Неопределенным интегралом функции* f(x) на данном промежутке X называется множество всех первообразных функций для функции f(x); обозначение -

$$\int f(x)\,dx.$$

Если F(x) - какая-нибудь первообразная для функции f(x), то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (8.2)$$

где C - произвольная постоянная.

Непосредственно из определения получаем основные свойства неопределенного интеграла и список табличных интегралов:

1) $d\int f(x)=f(x)dx$,
2) $\int df(x)=f(x)+C$,
3) $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$ (a=const),
4) $\int(f(x)+g(x))dx= \int f(x)dx+ \int g(x)dx$.

Список табличных интегралов

1. $\int x^{\mu}\,dx = x^{\mu+1}/(\mu + 1) +C$ $(\mu \neq -1)$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| +C$.
3. $\int a^x\,dx = a^x/\ln a + C$ $(a>0,\ a\neq 1)$.
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$.
5. $\int \sin x\,dx = \cos x + C$.
6. $\int \cos x\,dx = - \sin x + C$.
7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = - \operatorname{ctg} x + C$.

Для интегрирования многих функций применяют *метод замены переменной,* или *подстановки,* позволяющий приводить интегралы к табличной форме.

Если функция f(z) непрерывна на $[\alpha, \beta]$, функция z=g(x) имеет на [a,b] непрерывную производную и $\alpha \le g(x) \le \beta$, то

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(z)\, dz, \qquad (8.3)$$

причем после интегрирования в правой части следует сделать подстановку z=g(x).

Для доказательства достаточно записать исходный интеграл в виде:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(g(x))\, dg(x).$$

Например:

1) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int (\ln x)' \frac{dx}{\ln^2 x} = \int \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$;

2) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{(\sin x)'dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{d\sin x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z + C = \operatorname{arctg}(\sin x) + C$.

Пусть u = f(x) и v = g(x) - функции, имеющие непрерывные производные. Тогда, по правилу дифференцирования произведения,

$$d(uv)= udv + vdu \text{ или } udv = d(uv) - vdu.$$

Для выражения d(uv) первообразной, очевидно, будет *uv*, поэтому имеет место формула:

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{8.4}$$

Эта формула выражает правило *интегрирования по частям*. Оно приводит интегрирование выражения $udv=uv'dx$ к интегрированию выражения $vdu=vu'dx$.

Пусть, например, требуется найти $\int x \cos x\, dx$. Положим $u = x$, $dv = \cos x\, dx$, так что $du=dx$, $v=\sin x$. Тогда

$$\int x \cos x\, dx = \int x\, d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например,

$$\int x^k \ln^m x\, dx,\ \int x^k \sin bx\, dx,\ \int x^k \cos bx\, dx,\ \int x^k e^{ax}\, dx$$

и другие, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Понятие определенного интеграла вводится следующим образом. Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $f(x)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на *n* частей точками $a = x_0 < x_1 <\ldots<x_n = b$. Из каждого интервала (x_{i-1}, x_i) возьмем произвольную точку ξ_i и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой*, а ее предел при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, если он существует и конечен, называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ от *a* до *b* и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{8.5}$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой на отрезке* $[a, b]$, числа *a* и *b* носят название *нижнего и верхнего предела интеграла*.

Для определенного интеграла справедливы следующие свойства:

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$;

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, ($k = \text{const}$, $k\in\mathbf{R}$);

5) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

6) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

7) $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ ($\xi\in[a,b]$).

Последнее свойство называется *теоремой о среднем значении*.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда на этом отрезке существует неопределенный интеграл

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

и имеет место *формула Ньютона-Лейбница*, связывающая определенный интеграл с неопределенным:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (8.6)$$

Геометрическая интерпретация: определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой y= f(x), прямыми x = a и x = b и отрезком оси *Ox*.

Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от разрывных (неограниченных) функций называются *несобственными. Несобственные интегралы I рода* - это интегралы на бесконечном промежутке, определяемые следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (8.7)$$

Если этот предел существует и конечен, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *сходящимся несобственным интегралом от* f(x) *на интервале* [a,+∞), а функцию f(x) называют *интегрируемой на бесконечном промежутке* [a,+∞). В противном случае про интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ говорят, что он *не существует, или расходится*.

Аналогично определяются несобственные интегралы на интервалах (-∞, b] и (-∞, +∞):

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^A f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_A^b f(x)dx.$$

Определим понятие интеграла от неограниченной функции. Если f(x) непрерывна для всех значений *x* отрезка [a,b], кроме точки *c*, в которой f(x) имеет бесконечный разрыв, то *несобственным интегралом II рода от* f(x) *в пределах от a до b* называется сумма:

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_a^{c-\lambda} f(x)dx + \lim_{\mu \to 0} \int_{c+\mu}^b f(x)dx,$$

если эти пределы существуют и конечны. Обозначение:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \int_a^{c-\lambda} f(x)dx + \lim_{\mu \to 0} \int_{c+\mu}^b f(x)dx. \qquad (8.8)$$

<u>Экономическая интерпретация к разделу 1</u>

Пример 1. В таблице указано количество единиц продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах 1 и 2 в магазины M_1, M_2 и M_3, причем доставка единицы продукции с каждого молокозавода в магазин M_1 стоит 50 ден. ед., в магазин M_2 - 70, а в M_3 - 130 ден. ед. Подсчитать ежедневные транспортные расходы каждого завода.

Молокозавод	Магазин		
	M_1	M_2	M_3
1	20	35	10
2	15	27	8

Решение. Обозначим через A матрицу, данную нам в условии, а через B - матрицу, характеризующую стоимость доставки единицы продукции в магазины, т.е.,

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix}, \ B = (50,\ 70,\ 130).$$

Тогда матрица затрат на перевозки будет иметь вид:

$$AB^{T} = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\cdot 50 + 35\cdot 70 + 10\cdot 130 \\ 15\cdot 50 + 27\cdot 70 + \ 8\cdot 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4750 \\ 3680 \end{pmatrix}.$$

Итак, первый завод ежедневно тратит на перевозки 4750 ден. ед., второй - 3680 ден.ед.

Пример 2. Швейное предприятие производит зимние пальто, демисезонные пальто и плащи. Плановый выпуск за декаду характеризуется вектором **X** = (10, 15, 23). Используются ткани четырех типов T_1, T_2, T_3, T_4. В таблице приведены нормы расхода ткани (в метрах) на каждое изделие. Вектор **C** = (40, 35, 24, 16) задает стоимость метра ткани каждого типа, а вектор **P** = (5, 3, 2, 2) - стоимость перевозки метра ткани каждого вида.

Изделие	Расход ткани			
	T_1	T_2	T_3	T_4
Зимнее пальто	5	1	0	3
Демисезонное пальто	3	2	0	2
Плащ	0	0	4	3

1. Сколько метров ткани каждого типа потребуется для выполнения плана ?
2. Найти стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида.
3. Определить стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана.
4. Подсчитать стоимость всей ткани с учетом ее транспортировки.

Решение. Обозначим через А матрицу, данную нам в условии, т. е.,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

тогда для нахождения количества метров ткани, необходимой для выполнения плана, нужно вектор **X** умножить на матрицу А:

$$\mathbf{X}\ A = (10{,}15,\ 23) \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \left(10\cdot 5 + 15\cdot 3,\ 10\cdot 1 + 15\cdot 2,\ 23\cdot 4,\ 10\cdot 3 + 15\cdot 2 + 23\cdot 3\right) =$$

= (95, 40, 92, 129).

Стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида, найдем, перемножив матрицу А и вектор $\mathbf{C}^{T}$:

$$A\,\mathbf{C}^{T} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 40 + 1\cdot 35 + 0\cdot 24 + 3\cdot 16 \\ 3\cdot 40 + 2\cdot 35 + 0\cdot 24 + 2\cdot 16 \\ 0\cdot 40 + 0\cdot 35 + 4\cdot 24 + 3\cdot 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 283 \\ 222 \\ 144 \end{pmatrix}.$$

Стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана, определится по формуле:

$$\mathbf{X}\,A\,\mathbf{C}^{T} = (10,15,23)\begin{pmatrix}283\\222\\144\end{pmatrix} = 10\cdot 283 + 15\cdot 222 + 23\cdot 144 = 9472.$$

Наконец, с учетом транспортных расходов вся сумма будет равна стоимости ткани, т. е. 9472 ден. ед., плюс величина

$$\mathbf{X}\,A\,\mathbf{P}^{T} = (95,\ 40,\ 92,\ 129)\begin{pmatrix}5\\3\\2\\2\end{pmatrix} = 95\cdot 5 + 40\cdot 3 + 92\cdot 2 + 129\cdot 2 = 1037.$$

Итак, $\mathbf{X}\,A\,\mathbf{C}^{T} + \mathbf{X}\,A\,\mathbf{P}^{T} = 9472 + 1037 = 10509$ (ден. ед).

Экономическая интерпретация

Пример 1. Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

Тип заготовки	Способ раскроя		
	1	2	3
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

Записать в математической форме условия выполнения задания.

Решение. Обозначим через x, y, z количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Тогда при первом способе раскроя x листов будет получено $3x$ заготовок типа А, при втором - $2y$, при третьем - z.

Для полного выполнения задания по заготовкам типа А сумма $3x + 2y + z$ должна равняться 360, т.е.

$$3x + 2y + z = 360.$$

Аналогично получаем уравнения

$$x + 6y + 2z = 300$$
$$4x + y + 5z = 675,$$

которым должны удовлетворять неизвестные x, y, z для того, чтобы выполнить задание по заготовкам Б и В. Полученная система линейных уравнений и выражает в математической форме условия выполнения всего задания по заготовкам А, Б и В. Решим систему методом исключения неизвестных. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее с помощью элементарных преобразований к треугольному виду.

$$\begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 300\\ 3 & 2 & 1 & 360\\ 4 & 1 & 5 & 675\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 300\\ 0 & -16 & -5 & -540\\ 0 & -7 & 2 & 15\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 300\\ 0 & 16 & 5 & 540\\ 0 & -14 & 4 & 30\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 300\\ 0 & 16 & 5 & 540\\ 0 & 2 & 9 & 570\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 300\\ 0 & 2 & 9 & 570\\ 0 & 16 & 5 & 540\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 300\\ 0 & 2 & 9 & 570\\ 0 & 0 & -67 & -4020\end{pmatrix}.$$

Следовательно, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{aligned} x + 6y + 2z &= 300,\\ 2y + 9z &= 570,\\ -67z &= -4020. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим $z = 60$; подставляя найденное значение z во второе уравнение, получим $y = 15$ и, наконец, из первого имеем $x = 90$. Итак, вектор C (90, 15, 60) есть решение системы.

Пример 2. На предприятии имеется четыре технологических способа изготовления изделий А и Б из некоторого сырья. В таблице указано количество изделий, которое может быть произведено из единицы сырья каждым из технологических способов.

Записать в математической форме условия выбора технологий при производстве из 94 ед. сырья 574 изделий А и 328 изделий Б.

Изделие	Выход из единицы сырья			
	I	II	III	IV
А	2	1	7	4
Б	6	12	2	3

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 количество сырья, которое следует переработать по каждой технологии, чтобы выполнить плановое задание. Получим систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 94,\\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 &= 574,\\ 6x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 328. \end{aligned}$$

Решаем ее методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 94\\ 2 & 1 & 7 & 4 & 574\\ 6 & 12 & 2 & 3 & 328\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 94\\ 0 & -1 & 5 & 2 & 386\\ 0 & 6 & -4 & -3 & -236\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 94\\ 0 & -1 & 5 & 2 & 386\\ 0 & 0 & 26 & 9 & 2080\end{pmatrix}.$$

Имеем: r (A) = r (A) = 3, следовательно, число главных неизвестных равно трем, одно неизвестное x_4 - свободное. Исходная система равносильна следующей:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 94 - x_4,\\ -x_2 + 5x_3 &= 386 - 2x_4,\\ 26x_3 &= 2080 - 9x_4. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = 80 - 9/26\ x_4$, подставляя x_3 во второе уравнение, будем иметь: $x_2 = 14 + 7/26 x_4$ и, наконец, из первого уравнения получим: $x_1 = -12/13\ x_4$. С математической точки зрения система имеет бесчисленное множество решений, т. е.

неопределенна. С учетом реального экономического содержания величины x_1 и x_4 не могут быть отрицательными, тогда из соотношения $x_1 = -12/13\ x_4$ получим: $x_1 = x_4 = 0$. Тогда вектор (0, 14, 80, 0) является решением данной системы.

Экономическая интерпритация к разделу 2

1. Бюджетное ограничение потребителя.

Допустим, индивидуум в течение некоторого периода времени собирается потратить весь свой доход I на приобретение двух благ, например, x-единиц продуктов питания и y-единиц одежды, цены которого равны Px и Py соответственно. Тогда выбираемые им величины x и y должны удовлетворять бюджетному ограничению

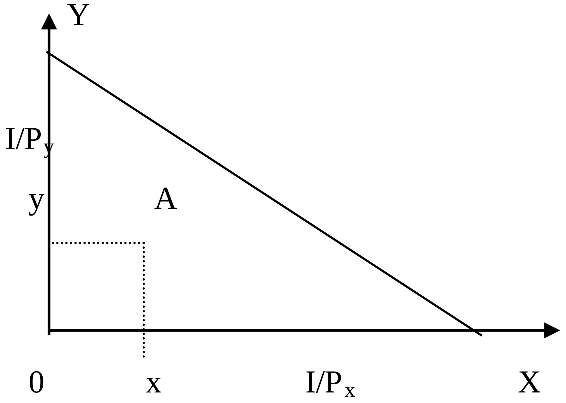
$$P_x x + P_y y = I \quad (*)$$

При известных ценах P_x, P_y и доходе I это уравнение определяет прямую линию на плоскости.

Или уравнение (*) можно привести к виду:

$$\frac{x}{\dfrac{I}{P_x}} + \frac{y}{\dfrac{I}{P_y}} = 1$$

Эта прямая называется бюджетной линией потребителя. По физическому смыслу x и y могут принимать только неотрицательные значения и поэтому рассматривается только та ее часть, которая лежит в первом квадрате.



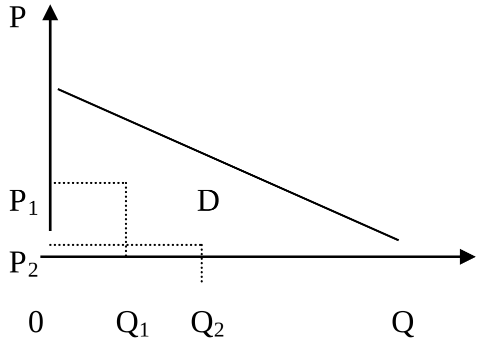
Потребитель может выбирать любую точку A на бюджетной линии. Она определяет его возможности. Каждая такая точка определяет допустимый набор благ (x;y), удовлетворяющий бюджетному ограничению.

2. Линейная модель спроса и предложения.

Рассмотрим рынок какого-либо товара, например, яблок.

Закон спроса: чем выше цена товара, тем меньше его количество желают и могут приобрести потребители.

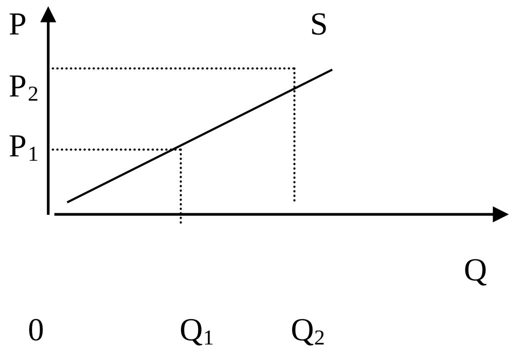
Если обозначить через p цену товара, а через Q – его количество, то из p↑ следует Q↓. (Из возрастания p следует убывание Q). Причем наклон линии спроса Д отрицательный.



В линейном случае уравнение линии спроса имеет вид:

$$Q=kp+b, \quad \text{где } k<0$$

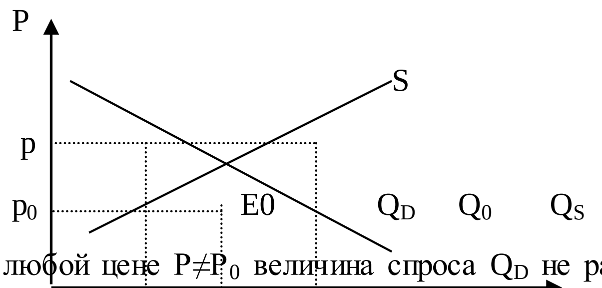
Закон предложения: чем выше цена товара, тем больше его количество желают и могут продать производители товара, т.е. из p↑ следует Q↑ (из возрастания p следует возрастание Q). Поэтому наклон линии предложения S положительный.



В линейном спросе уравнение линии предложения имеет вид $Q=kp+b$, где $k>0$.

3. Определение экономического равновесия.

На одном графике изобразим линию спроса D и линию предложения S. Так как наклон линии D отрицательный, а наклон линии S положительный, то прямые D и S пересекаются в некоторой точке E (Q_0,P_0).



При любой цене $P \neq P_0$ величина спроса Q_D не равна величине предложения Q_S. Значит, на рынке будет дефицит или излишек товара. И лишь при цене $P=P_0$ на рынке будет равновесие предложения и спроса: $Q_S=Q_D=Q_0$.

Если линия спроса D и линия предложения S заданы линейными уравнениями, то решая их как систему уравнений, можно найти равновесные значения объема Q_0 и цены P_0.

Экономическая интерпритация к разделу 3

Применение функций в экономике.

Понятие функции является центральным для всей математики. Самой простой и наиболее часто используемой является линейная функция $y=кх+в$.

Если функция возрастает с ростом х, то угловой коэффициент положителен (к>0). Если значение функции убывает с ростом х, то угловой коэффициент отрицателен (к<0). Чем больше угловой коэффициент к, тем быстрее изменяется линейная функция.

Предположим, что некоторая фирма производит продукцию, которую продает по цене 100 у. ед. за одну штуку. Ежедневные продажи составили 20, 30, 15, 10, 18 штук Подсчитаем ежедневный доход 2000, 3000, 1500, 1000, 1800. Если дневной объем продаж обозначить через х, а соответствующий доход через у, то связь выразится простой формулой у=100х.

Функции находят широкое применение в экономической теории и экономике. Микроэкономика занимается анализом деятельности отдельных звеньев хозяйственной системы.

Это могут быть отдельные фирмы, предприятия, рынки конкретных видов товаров и услуг и т.п. Одним из важнейших вопросов микроэкономики является изучение взаимодействия спроса и предложения. Спрос на данный товар – это потребность в определенном количестве товара, ограниченная действующими ценами и платежеспособностью потребителя. Предложение можно определить как количество товара, которое может быть предоставлено на рынке для продажи по данной цене. Выпуск дополнительной продукции требует дополнительных затрат. Чтобы заинтересовать к этому производителя, надо предложить ему повышенную цену, т.е. предложение является функцией цены.

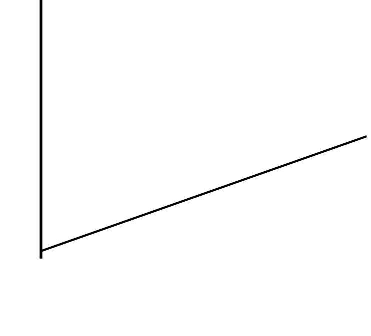
$$S=f(p).$$

S-(supply) предложение, P-(price) цена.

Записанная функция является сильным упрощением действительности. Чем ближе математическая модель к действительности, тем она сложнее и тем точнее предсказания, которые можно с ее помощью сделать. Экономическая теория подсказывает, что предложение товара растет с ростом цены. Действительно, чем выше цена на товар, тем больше число производителей стремится предложить этот товар на рынке. Следовательно функция предложения является возрастающей функцией:

$$P = aS + b \qquad (a>0)$$

a и b – параметры определяемые эмпирически.

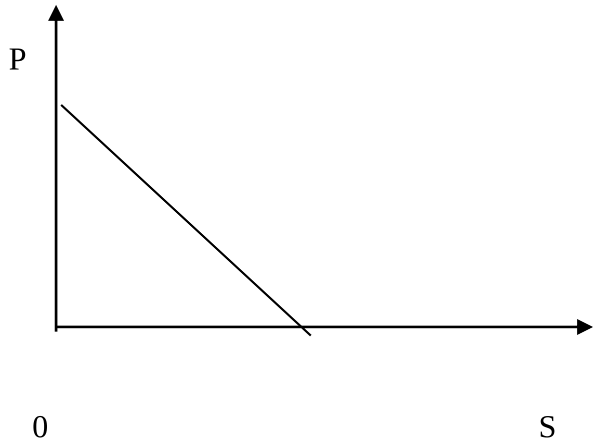


В отличие от кривой предложения кривая спроса является убывающей функцией. Если цена на товар растет, то количество проданного товара будет уменьшаться.

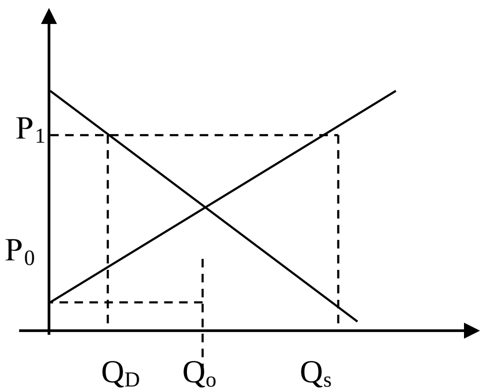
$$P = cD + d \qquad (c<0)$$

P – цена;

D - спрос, a и d параметры



В микроэкономике представляет интерес точка пересечения кривых спроса и предложения. Эта точка называется точкой равновесия, а соответствующая ей цена – равновесной ценой. Такие названия связаны с тем обстоятельством, что в точке равновесия спрос приходит в соответствие с предложением, т.е. весь произведенный товар находит своего покупателя.



Q – количество товара, P – цена.

Если рыночная цена P_1 больше равновесной цены, Po, количество товара Qs отвечающее предложению, больше количества товара Q_D, отвечающего спросу, т.е. предложение превышает спрос. Продукция оседает на складах. Это будет побуждать производителей уменьшать цену на продукцию, т.е. рыночная цена P_1 будет стремится к равновесной цене Po. Это явление известно как «давление рынка».

Макроэкономика занимается анализом экономической деятельности на национальном (государственном) уровне. Одним из важнейших макроэкономических показателей, характеризующим успехи хозяйственной деятельности, является национальный доход. Его подсчет представляет собой сложную задачу.

Задача о непрерывном начислении процентов.

Пусть первоначальный вклад в банк составил Q_0 денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно $p\%$ годовых. Необходимо найти размер вклада Q через t лет.

$$\frac{Q_0 \cdot p\%}{100\%} = \frac{Q_0 \cdot p}{100},$$

$$Q_1 = Q_0 + \frac{Q_0 \cdot p}{100} = Q_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

$$Q_2 = Q_1 + Q_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{p}{100} = Q_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) +$$

$$+ Q_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{p}{100} = Q_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) =$$

$$= Q_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

$$Q_t = Q_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t.$$

Если начислять проценты по вкладам не один раз в году, а n раз, то при том же ежегодном приросте $p\%$, процент начисления за $\frac{1}{n}$-ю часть года составит $\frac{p}{n}\%$, а размер вклада за t лет при nt начислениях составит

$$Q_t = Q_0\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt} \qquad (1)$$

По этой формуле можно начислить % для разных n, за каждое полугодие (n=2), ежеквартально (n=4), ежемесячно (n =12), каждый день (n=365), каждый час (n=8760) и т.д. т.е. $n \to \infty$. Тогда размер вклада за t лет составит

$$Q_t = \lim_{n\to\infty} Q_0\left[\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt}\right] = \qquad (2)$$

$$= Q_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}} = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}$$

Эта формула выражает показательный (экспоненциальный) закон роста (p>0) или убывания (при p<0). Ее можно использовать при непрерывном начислении процентов.

Чтобы почувствовать результаты расчетов по формулам , приведем **пример**: Q = 1 ден.ед.,. p = 5%, t = 20 лет.

Погрешность начисления суммы вклада по формуле (2) непрерывного начисления процентов по сравнению с формулой (1) сложных процентов, начисляемых ежегодно (n=1), при одной и той же процентной ставке (*p*=5%) оказалась незначительной (около 2,5%).

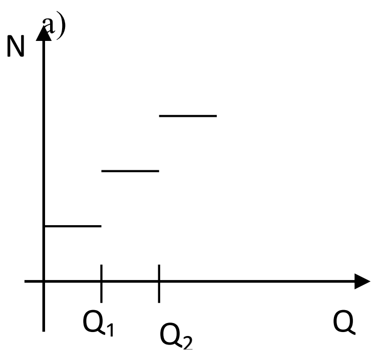
	Формула сложных % (1)					Формула непрерывного начисления % (2)
	n=1	n=2	n=4	n=12	n=365	
Размер вклада денежных единиц	2,6355	2,6851	2,7015	2,7126	2,7181	2,7182

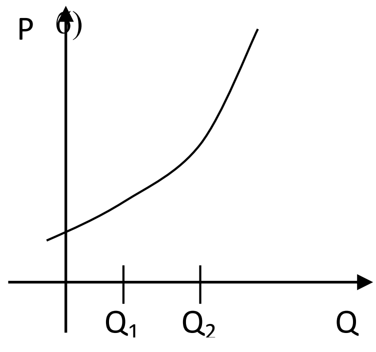
Хотя в практических финансово-кредитных операциях непрерывное начисление процентов применяется крайне редко, оно оказывается весьма эффективным при анализе сложных финансовых проблем, в частности, при обосновании и выборе инвестиционных решений.

Экономическая интерпретация непрерывности.

Большинство функций, используемых в экономике, являются непрерывными, и это позволяет высказывать вполне значимые утверждения экономического содержания.

1. Налоговая ставка N имеет примерно такой график, как на рис.1а.





На концах промежутка она разрыв на и разрывы эти 1-го рода. Однако сама величина подоходного налога Р (рис.2б) является непрерывной функцией годового налога Q. Отсюда вытекает, что если годовые доходы двух людей отличаются незначительно, то и различия в величинах подоходного налога, которые они должны уплатить, также не должны быть большие. Это обстоятельство воспринимается большинством людей как совершенно естественное, над которым они даже не задумываются -вот если бы это было не так . Когда это не так, т.е. когда результат непрерывно зависит от начальных данных, от параметров, характеризующих задачу (ситуацию), то тогда задача (ситуация) называется некорректной.

2. По своему смыслу такие функции, как функция спроса D(p), функция предложения S=S(p), непрерывно зависят от Р. Значит при малых колебаниях цен спрос и предложения также изменяются незначительно. При более глубоком анализе обнаруживаются чисто психологические причины, по которым спрос может изменяться скачкообразно. Например, так бывает при «пробитии» круглой суммы. Цена растет, растет, но люди терпят, и спрос уменьшается незначительно. И вот цена замерла около круглой цифры. Когда цена, наконец, превысит эту круглую цифру, может произойти скачкообразное уменьшение спроса. Это хорошо знают финансисты, работающие на валютных и других финансовых рынках.

Выводы.

Понятие непрерывности функции, также как и понятие предела является одним из основных понятий математического анализа. Непрерывная функция математически выражает свойство, с которым нам часто приходится встречаться на практике.

Прекрасными примерами непрерывной функции могут служить различные законы физики, биологии, математики, экономики.

Экономическая интерпритация к разделу 4

В экономических исследованиях для обозначения производных часто пользуются специфической терминологией. Например, если $f(x)$ есть производственная функция, выражающая зависимость выпуска какой-либо продукции от затрат фактора x, то $f'(x)$ называют *предельным продуктом*; если $g(x)$ есть функция издержек, т. е. функция $g(x)$ выражает зависимость общих затрат от объема продукции x, то $g'(x)$ называют *предельными издержками*.

Предельный анализ в экономике - совокупность приемов исследования изменяющихся величин затрат или результатов при изменении объемов производства, потребления и т.п. на основе анализа их предельных значений. Большей частью плановые расчеты, основывающиеся на обычных статистических данных, ведутся в форме суммарных показателей. При этом анализ заключается главным образом в вычислении средних величин. Однако в некоторых случаях оказывается необходимым более детальное исследование с учетом предельных значений. Например, при выяснении издержек производства зерна в районе на перспективу принимают во внимание, что издержки могут быть различными в зависимости, при прочих равных условиях, от предполагаемых объемов сбора зерна, так как на вновь вовлекаемых в обработку худших землях издержки производства будут выше, чем по району в среднем.

Если зависимость между двумя показателями v и x задана аналитически: $v = f(x)$ - то *средняя величина* представляет собой отношение v/x, а *предельная* - производную $\frac{dv}{dx}$.

Нахождение производительности труда. Пусть известна функция $u = u(t)$, выражающая количество произведенной продукции u за время работы t. Вычислим количество произведенной продукции за время $\Delta t = t_1 - t_0$: $\Delta u = u(t_1) - u(t_0) = u(t_0+\Delta t) - u(t_0)$. *Средней производительностью труда* называется отношение количества произведенной продукции к затраченному времени, т.е. $z_{ср.} = \Delta u/\Delta t$.

Производительностью труда рабочего $z(t_0)$ в момент t_0 называется предел, к которому стремится $z_{ср.}$ при $\Delta t \to 0$: $z = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Вычисление производительности труда, таким образом, сводится к вычислению производной: $z(t_0) = u'(t_0)$.

Издержки производства K однородной продукции есть функция количества продукции *x*. Поэтому можно записать $K = K(x)$. Предположим, что количество продукции увеличивается на Δx. Количеству продукции $x + \Delta x$ соответствуют издержки производства $K(x + \Delta x)$. Следовательно, приращению количества продукции Δx соответствует приращение издержек производства продукции $\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x)$.

Среднее приращение издержек производства есть $\Delta K/\Delta x$. Это приращение издержек производства на единицу приращения количества продукции.

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$ называется *предельными издержками производства*.

Если обозначить через *u(x)* выручку от продажи *x* единиц товара, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$ и называется *предельной выручкой*.

С помощью производной можно вычислить приращение функции, соответствующее приращению аргумента. Во многих задачах удобнее вычислять процент прироста (относительное приращение) зависимой переменной, соответствующий проценту прироста независимой переменной. Это приводит нас к понятию эластичности функции (иногда ее называют *относительной производной*). Итак, пусть дана функция $y = f(x)$, для которой существует производная $y' = f'(x)$. *Эластичностью функции* $y = f(x)$ относительно переменной *x* называют предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x}{y} f'(x).$$

Его обозначают $E_x(y) = x/y\, f'(x) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Эластичность относительно *x* есть приближенный процентный прирост функции (повышение или понижение), соответствующий приращению независимой переменной на 1%. Экономисты измеряют степень чуткости, или чувствительности, потребителей к изменению цены продукции, используя концепцию ценовой эластичности. Для спроса на некоторые продукты характерна относительная чуткость потребителей к изменениям цен, небольшие изменения в цене приводят к значительным изменениям в количестве покупаемой продукции. Спрос на такие продукты принято называть *относительно эластичным* или просто эластичным. Что касается других продуктов, потребители относительно нечутки к изменению цен на них, то есть существенное изменение в цене ведет лишь к небольшому изменению в количестве покупок. В таких случаях спрос *относительно неэластичен* или просто неэластичен. Термин *совершенно неэластичный* спрос означает крайний случай, когда изменение цены не приводит ни к какому изменению количества спрашиваемой продукции. Примером может служить спрос больных острой формой диабета на инсулин или спрос наркоманов на героин. И наоборот, когда при самом малом снижении цены покупатели увеличивают покупки до предела своих возможностей - тогда мы говорим, что спрос является *совершенно эластичным.*

Экономическая интерпритация к разделу 5

.Использование интегралов в экономических расчетах

Пример 3.42. Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией

$$f(t) = 3/(3t + 1) + 4.$$

Решение. Если непрерывная функция f(t) характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t, то объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2 будет выражаться формулой

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt .$$

В нашем случае

$$V = \int_2^3 \left(\frac{3}{3t+1} + 4\right)dt = (\ln(3t+1) + 4t)\Big|_2^3 = \ln 10 + 12 - \ln 7 - 8 = \ln 10/7 + 4.$$

Пример 3.43. Определить запас товаров в магазине, образуемый за три дня, если поступление товаров характеризуется функцией $f(t) = 2t + 5$.

Решение. Имеем:

$$V = \int_0^3 (2t+5)dt = \left(\frac{2t^2}{2} + 5t\right)\Big|_0^3 = 9 + 15 = 24 .$$

Пример 3.44. Пусть сила роста (см.6.1) описывается некоторой непрерывной функцией времени $\delta_t = f(t)$, тогда наращенная сумма находится как

$$S = P \exp \int_0^n \delta_t \, dt,$$

а современная величина платежа $P = S \exp(-\int_0^n \delta_t \, dt)$.

Если, в частности, δ_t является линейной функцией времени: $\delta_t = \delta_o + at$, где δ_o - величина силы роста для t = 0, *a* - годовой прирост, то

$$\int_0^n \delta_t \, dt = \int_0^n (\delta_o + at)dt = \delta_o n + an^2/2;$$

множитель наращения $\exp(\delta_o n + an^2/2)$. Если сила роста изменяется по геометрической прогрессии $\delta_t = \delta_o a^t$, где δ_o - начальное значение процентной ставки, a - годовой коэффициент роста, тогда

$$\int_0^n \delta_t \, dt = \int_0^n \delta_o a^t \, dt = \delta_o a^t /\ln a \Big|_0^n = \delta_o(a^n - 1)/\ln a;$$

множитель наращения $\exp(\delta_o(a^n - 1) / \ln a)$.

Предположим, что начальный уровень силы роста равен 8%, процентная ставка ежегодно увеличивается на 20% (a=1,2), срок ссуды 5 лет. Множитель наращения в этом случае составит $\exp(0{,}08\ (1{,}2^5 - 1)\ /\ \ln 1{,}2) \approx$ $\approx \exp 0{,}653953 \approx 1{,}921397$.

Пример 3.45. Выше при анализе непрерывных потоков платежей предполагалось, что годовая сумма ренты R равномерно распределяется на протяжении года. На практике, особенно в инвестиционных процессах, этот поток может существенно изменяться во времени, следуя какому-либо закону. Если этот поток непрерывен и описывается некоторой функцией $R_t = f(t)$, то общая сумма поступлений за время *n* равна $\int_0^n f(t)dt$.

В этом случае наращенная по непрерывной ставке за период от 0 до *n* сумма составит:

$$S = \int_0^n f(t)e^{\delta(n-t)}dt.$$

Современная величина такого потока равна

$$A = \int_0^n f(t)e^{-\delta t}dt.$$

Пусть функция потока платежей является линейной: $R_t = R_o + at$, где R_o - начальная величина платежа, выплачиваемого за единицу времени, в которой измеряется срок ренты. Вычислим современную величину A, пользуясь правилами интегрирования определенного интеграла:

$$A = \int_0^n (R_0 + at)\, e^{-\delta t}dt = \int_0^n R_0\, e^{-\delta t}dt + \int_0^n at\, e^{-\delta t}dt.$$

Обозначим $A_1 = \int_0^n R_0\, e^{-\delta t}dt$, $A_2 = \int_0^n at\, e^{-\delta t}dt$.

Имеем: $A_1 = R_0\int_0^n e^{-\delta t}dt = -R_o/\delta\, e^{-\delta t}\Big|_0^n = -R_o/\delta(e^{-\delta n} - e^o) = -R_o/\delta(e^{-\delta n} - 1) = R_o(e^{-\delta n} - 1)/\delta$. $A_2 = a\int_0^n t\, e^{-\delta t}dt$. Вычислим неопределенный интеграл $\int t\, e^{-\delta t}dt$ по частям: $u = t$, $dv = e^{-\delta t}dt \Rightarrow du = dt$, $v = \int e^{-\delta t}dt = -e^{-\delta t}/\delta$, тогда $\int t\, e^{-\delta t}dt = -t\, e^{-\delta t}/\delta + 1/\delta \int e^{-\delta t}dt = -t e^{-\delta t}/\delta\ (t+1/\delta) + C$. Следовательно, $A_2 = -a\, t e^{-\delta t}/\delta\ (t+1/\delta)\Big|_0^n = ((1 - e^{-\delta n})/\delta - n e^{-\delta n})a/\delta$.

Итак, исходный интеграл

$$A = A_1 + A_2 = R_o(e^{-\delta n} - 1)/\delta + ((1 - e^{-\delta n})/\delta - n e^{-\delta n})a/\delta.$$

Методические указания по выполнению контрольной работы

Порядок выполнения контрольной работы

При оформлении и выполнении контрольной работы необходимо соблюдать следующие правила:

1. Контрольная работа выполняется в учебной тетради синей пастой.
2. Решения задач необходимо сопровождать подробными пояснениями.
3. Контрольная работа, выполненная не по своему варианту, не зачитывается.

Студент должен выполнять контрольную работу по варианту, номер которого совпадает с порядковым номером по списку группы; числа, стоящие в столбцах приведенной ниже таблицы, означают номера задач, которые он должен решить.

Указания к выполнению контрольной работы

Вариант			
1	1	26	51
2	2	27	52
3	3	28	53
4	4	29	54
5	5	30	55
6	6	31	56
7	7	32	57
8	8	33	58
9	9	34	59
10	10	35	60
11	11	36	61
12	12	37	62
13	13	38	63
14	14	39	64
15	15	40	65
16	16	41	66
17	17	42	67
18	18	43	68
19	19	44	69
20	20	45	70
21	21	46	71
22	22	47	72
23	23	48	73
24	24	49	74
25	25	50	75

Примеры решения задач

Задача 1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(4; 3), B(16; -6), C(20; 16). Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты; 3) уравнение высоты СД и ее длину; 4) уравнение медианы AE и координаты точки К пересечения этой медианы с высотой СД; 5) уравнение прямой, проходящей через точку К параллельно стороне AB.

Решение.

1) Расстояние d между точками A(x_1; y_1) и B(x_2; y_2) определяется по формуле: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (1)

Применяя (1), находим длину стороны AB: $AB = \sqrt{(16-4)^2 + (-6-3)^2} = \sqrt{144+81} = 15$.

2) Уравнение прямой, проходящей через точки A(x_1; y_1) и B(x_2; y_2), имеет вид: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ (2)

Подставляя в (2) координаты точек A и B, получим уравнение стороны AB: $\frac{y-3}{-6-3} = \frac{x-4}{16-4}$; $\frac{y-3}{-9} = \frac{x-4}{12}$; $\frac{y-3}{-3} = \frac{x-4}{4}$

$4y - 12 = -3x + 12$; $3x + 4y - 24 = 0$ (AB).

Решив последнее уравнение относительно y, находим уравнение стороны AB в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом: $4y = -3x + 24$; $y = -\frac{3}{4}x + 6$, откуда $k_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Аналогично находится уравнение прямой BC и k_{BC}.

3) Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, имеет вид: $y - y_1 = k(x - x_1)$ (3).

Высота СД перпендикулярна стороне AB. Чтобы найти угловой коэффициент высоты СД, воспользуемся условием перпендикулярности прямых. Так как $k_{AB} = -\frac{3}{4}$, то $k_{СД} = \frac{4}{3}$. Подставив в (3) координаты точки C и найденный угловой коэффициент высоты , получим: $y - 16 = \frac{4}{3}(x - 20)$; $3y - 48 = 4x - 80$; $4x - 3y - 32 = 0$ (СД).

Чтобы найти длину высоты СД, определим сперва координаты точки Д – точки пересечения прямых AB и СД. Решая совместно систему $\begin{cases} 3x + 4y - 24 = 0 \\ 4x - 3y - 32 = 0 \end{cases}$ находим $x = 8$, $y = 0$, т.е. Д(8; 0). По формуле (1) находим длину высоты СД: $СД = \sqrt{(20-8)^2 + (16-0)^2} = 20$.

4) Чтобы найти уравнение медианы АЕ, определим сначала координаты точки Е, которая является серединой стороны ВС, применяя формулы деления отрезка на две равные части: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ (4). Следовательно, $x_E=\frac{16+20}{2}=18$; $y_E=\frac{-6+16}{2}=5$; Е(18; 5).

Подставив в (2) координаты точек А и Е, находим уравнение медианы: $\frac{y-3}{5-3}=\frac{x-4}{18-4}$; $\frac{y-3}{2}=\frac{x-4}{14}$; $x-7y+17=0$ (АЕ).

Чтобы найти координаты точки пересечения высоты СД и медианы АЕ, решим совместно систему уравнений $\begin{cases}4x-3y-32=0\\x-7y+17=0\end{cases}$, $x=11$, $y=4$; К(11; 4).

5) Так как искомая прямая параллельна стороне АВ, то ее угловой коэффициент будет равен угловому коэффициенту прямой АВ. Подставив в (3) координаты найденной точки К и угловой коэффициент $k_{AB}=-\frac{3}{4}$, получим $y-4=-\frac{3}{4}(x-11)$; $4y-16=-3x+33$; $3x+4y-49=0$ (КТ)

Задача 2. Найти указанные пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{arctg\,2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x+1}$

Решение:

1) непосредственная подстановка предельного значения аргумента х=2 приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители и сократим члены дроби на общий множитель (х-2), так как аргумент х только стремится к своему предельному значению 2, но не совпадает с ним, то множитель (х-2) отличен от нуля при $x\to 2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{9}{5}.$$

2) пусть $arctg\,2x=y$. Тогда $2x=tgy$; очевидно, что если $x\to 0$, то $y\to 0$. Тогда, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{arctg\,2x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{2tgy}{y}=2\lim\limits_{y\to 0}\frac{2tgy}{y}=2\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}=2$ (используем первый замечательный предел).

3) при $x\to\infty$ основание $\frac{2x-1}{2x+3}$ стремится к 1, а показатель степени 4х+1 стремится к бесконечности. Следовательно, имеем неопределенность вида 1^{∞}. Представим основание

в виде суммы 1 и некоторой бесконечно малой величины: $\frac{2x-1}{2x+3}=\frac{2x+3-4}{2x+3}=1+\frac{-4}{2x+3}$.

Тогда $\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x+1}=\underset{x\to\infty}{Lim}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{4x+1}$.

Положим $2x+3=-4y$; при $x\to+\infty$ переменная $y\to-\infty$. Выразим показатель степени через новую переменную y. Так как $2x=-3-4y$, то $4x+1=-8y-5$. Таким образом,

$$\underset{y\to-\infty}{Lim}\left(1+\frac{-4}{-4y}\right)^{-8y-5}=\underset{y\to-\infty}{Lim}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-8y-5}=\left[\underset{y\to-\infty}{Lim}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-8}\underset{y\to-\infty}{Lim}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-5}=e^{-8}1^{-5}=e^{-8}$$

(используем второй замечательный предел).

Задача 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: 1) по формуле Крамера; 2) с помощью обратной матрицы (матричным методом); 3) методом Гаусса. $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=3 \\ 2x_1+4x_2-3x_3=2 \\ 3x_1-x_2-3x_3=-7 \end{cases}$

Решение:

Проверяем совместность системы уравнений, для этого найдем ранг матрицы A и ранг расширенной матрицы B.

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=3 \\ 2x_1+4x_2-3x_3=2 \\ 3x_1-x_2-3x_3=-7 \end{cases}$$

Найдем ранг матрицы A и ранг расширенной матрицы B.

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \end{array}\right)$$

rang A = rang B = 3, значит система совместна

а) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-16$, $\Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix}=64$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix}=-16$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32, \quad x_1 = \frac{64}{-16} = -4, \quad x_2 = \frac{-16}{-16} = 1, \quad x_3 = \frac{32}{-16} = -2.$$

б) $AX = \tilde{\tilde{B}}$, $X = A^{-1}\tilde{\tilde{B}}$, $|A| = -16 \neq 0$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15$ $\quad A_{21} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16$ $\quad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 16$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6$

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}$$

Задача 4. Найти производные указанных функций:

а) $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2}$ б) $y = (x^3+2)\sin x$ в) $y = \frac{\arcsin x}{x^2 + e^x}$ г) $y = (x^2 - \mathrm{arcctg}x)^4$

Решение:

а) Перепишем данную функцию, введя дробные и отрицательные показатели: $y = x^3 - x^{-4} + 6x^{\frac{2}{3}}$.

Применяя правило дифференцирования алгебраической суммы и формулу дифференцирования степенной функции имеем:

$$y^1 = 3x^2 - (-4)x^{-5} + 6\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 3x^2 + \frac{4}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

б) Применяя формулу производной произведения двух функций имеем:

$y^1 = (x^3+2)^1\sin x + (x^3+2)(\sin x)^1 = 3x^2\sin x + (x^3+2)\cos x$

в) Применяем правило дифференцирования частного двух функций.

$$y^1=\frac{(\arcsin x)^1(x^2+e^x)-\arcsin x(x^2+e^x)^1}{(x^2+e^x)^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x^2+e^x)-\arcsin x(2x+e^x)}{(x^2+e^x)^2}=$$

$$=\frac{x^2+e^x\sqrt{1-x^2}\arcsin x(2x+e^{x)}}{\sqrt{1-x^2}(x^2+e^x)^2}$$

г) Данная функция является сложной: она может быть представлена так: $y=u^4$, где $u=x^2$-arctgx. Применяем правило дифференцирования сложной функции.

$y^1=4U^1U^1=4(x^2\text{-acctgx})^3(x^2\text{-acctgx})^1=4(x^2\text{-acctgx})^3\cdot\left(2x-\frac{1}{1+x^2}\right)$

Задача 5. Найти интеграл: $\int\left(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}\right)dx$

Решение.

Предварительно преобразуем подынтегральную функцию, затем применим свойства неопределенного интеграла и табличный интеграл.

$$\int\left(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}\right)dx=\int\left(4x^3-x^{\frac{1}{2}}+6\cdot x^{-2}\right)dx=4\int x^3dx-\int x^{\frac{1}{2}}dx+6\int x^{-2}dx=$$

$$=4\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+6\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=x^4-\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{6}{x}+C$$

Задача 4. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_2^3 3x^2dx$ б) $\int\limits_0^5\frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}}$

Решение:

Для вычисления определенного интеграла применяем формулу Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

а) $\int\limits_2^3 3x^2dx=\left[x^3\right]_2^3=27-8=19$

б) Сделаем замену переменной. Пусть $\sqrt[4]{3x+1}=Z$; тогда $3x+1=Z^4$ и $3dx=4Z^3dZ$ Определим пределы интегрирования для новой переменной Z . При $x=0$ переменная $Z_н=1$(нижней предел).

При $x=5$ переменная $Z_b=2$ (верхний предел). Следовательно.

$$\int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}}=\int_1^2 \frac{4Z^3dZ}{Z}=\int_1^2 4Z^2dZ=4\left[\frac{Z^3}{3}\right]_1^2=4\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{28}{3}$$

Контрольная работа 1

В задачах 1-25 даны координаты вершин треугольника АВС. **Найти:** 1) длину стороны АВ; 2) уравнения сторон АВ и ВС и их угловые коэффициенты; 3) уравнение высоты СД и ее длину; 4) уравнение медианы АЕ и координаты точки К пересечения этой медианы с высотой СД; 5) уравнение прямой, проходящей через точку К параллельно стороне АВ.

1. A(-8; -3), B(4; -12), C(8; 10).
2. A(-5; 7), B(7; -2), C(11; 20).
3. A(-12; -1), B(0; -10), C(4; 12).
4. A(-10; 9), B(2; 0), C(6; 22).
5. A(0; -2), B(12; -7), C(16; 15).
6. A(-9; 6), B(3; -3), C(7; 19).
7. A(1; 0), B(13; -9), C(17; 13).
8. A(-4; 10), B(8; 1), C(12; 23).
9. A(2; 5), B(14; -4), C(18; 18).
10. A(-1; 4), B(11; -5), C(15; 17).
11. A(-2; 7), B(10; - 2), C(8; 12).
12. A(-6; 8), B(6; -1), C(4; 13).
13. A(3; 6), B(15; -3), C(13; 11).
14. A(-10; 5), B(2; -4), C(0; 10).
15. A(-4; 12), B(8; 3), C(6; 17).
16. A(-3; 10), B(9; 1), C(7; 15).
17. A(4; 1), B(16; -8), C(14; 6).
18. A(-7; 4), B(5; -5), C(3; 9).

19. A(0; 3), B(12; -6), C(10; 8).

20. A(-5; 9), B(7; 0), C(5; 14).

21. A(2; -3), B(6; 1), C(4; 8).

22. A(5; -1), B(9; 3), C(7; 10).

23. A(1; -4), B(5; 0), C(3; 7).

24. A(-3; -6), B(1; - 2), C(-1; 5).

25. A(0; 4), B(4; 8), C(2; 15).

В задачах 26-50 найти указанные пределы.

26. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$ в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x^2-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$;

27. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$ в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x^5+2x^4+x^2-3x-10)}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}$

;

28. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{6+x-x^2}{x^3-27}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4+3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$ в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x^2+3x+2)}{x^3+2x^2-x-2}$;

29. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+2x}{2x^3+5}$ в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x^2-x-1)}{x^3+2x^2-x-2}$;

30. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$ в) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x^2+2x-3)}{x^3+4x^2+3x}$;

31. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{12-x-x^2}{x^3-27}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$ в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x^3-2x-1)}{x^4+2x+1}$;

32. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^4+x^2+1}{x^4+3x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4})$;

33. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$ в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$;

34. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$ в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$;

35. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$;

36. а) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{2x^2+9x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+5}{2x^3+2x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$;

37. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3x^2-10x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{1-2x-2x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$;

38. а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-5x-25}{x^2-25}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x+3}{5x^3+x^2-8}$ в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$;

39. а) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{2x^2+15x+28}{x^2+7x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+1}{7x^2-x+5}$ в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$;

40. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5x^2-16x+3}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-5x+7}{3x^2+4x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$;

41. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+1}{2x^2+x-6}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$;

42. а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+7}{x^2+x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$ в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$;

43. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$ в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$;

44. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$;

45.а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n4}$;

46.а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x}$. б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$;

47.а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$;

48.а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-2n^2}$;

49.а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+1}\right)^{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^2}$;

50.а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$;

В задачах 51-75 проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: 1) по формуле Крамера;

51. $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=7\\2x_1+3x_2+x_3=1\\3x_1+2x_2+x_3=6\end{cases}$

52 $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=3\\x_1+x_2+2x_3=-4\\4x_1+x_2+4x_3=-3\end{cases}$

53. $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=12\\x_1+2x_2+4x_3=6\\5x_1+x_2+2x_3=3\end{cases}$

54. $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=-4\\x_1+3x_2-x_3=11\\x_1-2x_2+2x_3=-7\end{cases}$

55. $\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=12\\3x_1+4x_2-2x_3=6\\2x_1-x_2-x_3=-9\end{cases}$

56. $\begin{cases}8x_1+3x_2-6x_3=-4\\x_1+x_2-x_3=2\\4x_1+x_2-3x_3=-5\end{cases}$

57. $\begin{cases}4x_1+x_2-3x_3=9\\x_1+x_2-x_3=-2\\8x_1+3x_2-6x_3=12\end{cases}$

58. $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=33\\7x_1-5x_2=24\\4x_1+11x_3=39\end{cases}$

59. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

60. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$

61. $\begin{cases} 5x + 8y - z = 7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$

62. $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 4x - 3y + z = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

63. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$

64. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \\ -4x - y + 3z = -3 \end{cases}$

65. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$

66. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$

67. $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$

68. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$

69. $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - 3y - z = 3 \\ x - y + 3z = -2 \end{cases}$

70. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$

71. $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-3y-2z=-3 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$

72. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=33 \\ 7x_1-5x_2=24 \\ 4x_1+11x_3=39 \end{cases}$

73. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=12 \\ 7x_1-5x_2+x_3=-33 \\ 4x_1+x_3=-7 \end{cases}$

74. $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=6 \\ 5x_2+4x_3=-20 \\ 3x_1-2x_2+5x_3=-22 \end{cases}$

75. $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=1 \\ 2x_1+x_2+x_3=-7 \\ 2x_1-x_2-3x_3=5 \end{cases}$

В задачах 26-50 найти производные $\frac{dy}{dx}$ заданной функции y.

26. а) $y=(x+1)e^{\sin x}$; б) $y=\frac{arctg\,2x}{1+4x^2}$;

27. а) $y=\ln\sqrt{2x^2+3}$; б) $y=(1+9x^2)\mathrm{arctg}3x$;

28. а) $y=\frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$; б) $y=\ln\sqrt{x^2+2x+5}$;

29. а) $y=(3x-\sqrt{x}+1)^5$; б) $y=\frac{1+16x^2}{arctg\,4x}$;

30. а) $y=\ln\sqrt{4x^2+1}$; б) $y=\cos 3xe^x$;

31. а) $y=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$; б) $y=\ln tg2x$;

32. а) $y=(x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}+2)^3$; б) $y=\frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$;

33. а) $y=\ln\sqrt{3x^2+1}$; б) $y=(x^3+2)2^{3x}$;

34. а) y=$\frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$; б) y=lnctg5x;

35. а) y=$(x^3-3\sqrt[3]{x^2}+1)^2$; б) y=$\frac{\sin 3x+1}{cos3x+1}$;

36. а) y=$\ln\sqrt{2x^2+5}$; б) y=$(1+4x^2)$arctg2x;

37. а) y=$\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; б) y=lncos3x;

38. а) y=$(x^3-3\sqrt[3]{x}+1)^5$; б) y=$\frac{3-\cos 5x}{3+\sin 5x}$;

39. а) y=$\ln\sqrt{2x^2+4x+1}$; б) y=$(x^2-4\sqrt{x}+3)^4$;

40. а) y=$\frac{e^{tgx}}{1+\cos^2 x}$; б) y=$\ln\sqrt{4x^2+x}$;

41. а) y=$\frac{2x}{(x-1)^2}$; б) y=$\frac{x^2-3}{x-2}$;

42. а) y=$\frac{1}{x}+4x^2$; б)y=$\frac{x}{x^2-1}$;

43. а)y=$\frac{1}{x^2-3x+2}$; б) y=$\frac{x}{\ln x}$;

44. а) y=$\frac{x}{x^2-1}$; б) y=$\frac{x}{x^2-3x-4}$;

45. а) y=$\frac{2+x}{e^x}$; б) y=$\frac{3-x^2}{x+2}$:

46. а) $y=\frac{2x^2}{x-1}$; б) $y=4x^2+\frac{5}{x}$;

47. а) y=$\frac{4x}{x^2+4}$; б) y=$\frac{2x}{x^2+4}$;

48. а) y=x^2-2lnx; б) y=$\frac{2x}{x^2-4}$;

49. а) $y=\dfrac{1}{x^2-x-2}$; б) $y=\dfrac{2-x^2}{x-1}$;

50. а) $y=\ln(4-x^2)$; б) $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$.

В задачах 51-75 найти указанные неопределенные интегралы и результаты интегрирования проверить дифференцированием.

51. а) $\int(2x-4\sqrt[3]{x}-1)dx$; б) $\int\sin^5 x\cos xdx$; в) $\int x\ln xdx$.

52. а) $\int(5x^4-\dfrac{1}{x^2}+2)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{1+25x^2}$; в) $\int x\sin xdx$.

53. а) $\int(x^5-\dfrac{1}{2x}+3)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{\sqrt[4]{3x-1}}$; в) $\int x\cos 2xdx$.

54. а) $\int(x^3-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+1)dx$; б) $\int cos^3x\sin xdx$; в) $\int xe^{3x}dx$.

55. а) $\int(x^4-5\sqrt[3]{x^2}+3)dx$; б) $\int\dfrac{x^2dx}{x^3+1}$; в) $\int x\sin 3xdx$.

56. а) $\int(x^2-\dfrac{3}{x^4}+2)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$; в) $\int 3x^2\ln xdx$.

57. а) $\int(x^3-4\sqrt[3]{x}-1)dx$; б) $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{2x^2+1}}$; в) $\int\ln xdx$.

58. а) $\int(6x^5-\dfrac{2}{x^3}+1)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{5x+1}}$; в) $\int x\sin 2xdx$.

59. а) $\int(4x^3-5\sqrt[3]{x^2}+1)dx$; б) $\int e^{2x^2}xdx$; в) $\int x\cos xdx$.

60. а) $\int(3x^2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+5)dx$; б) $\int\dfrac{xdx}{4x^2+1}$; в) $\int xe^{2x}dx$.

61. а) $\int\dfrac{arctg 3x}{1+9x^2}dx$; б) $\int(2x+1)e^{3x}dx$; в) $\int\dfrac{2x^3+2x^2+2x+1}{x^2+x+1}dx$;

62. а) $\int \frac{1-\sin 3x}{3x+\cos 3x}dx$; б) $\int x\sin(2x+1)dx$; в) $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+x+1}dx$;

63. а) $\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; б) $\int (3x-1)\sin x dx$; в) $\int \frac{2x^2+7x+7}{x^2+2x+5}dx$;

64. а) $\int \frac{1+\cos 2x}{2x+\sin 2x}dx$; б) $\int x\cdot arctg\ x\cdot dx$; в) $\int \frac{4x^2+7x+5}{x^2+2x+5}dx$;

65. а) $\int \frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx$; б) $\int x\cdot e^{-x}dx$; в) $\int \frac{2x^3+x+3}{x^2+x+1}dx$;

66. а) $\int \frac{arctg^3 2x}{1+4x^2}dx$; б) $\int (x+3)\sin 2x dx$; в) $\int \frac{x^2+3}{x^2+x+6}dx$;

67. а) $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$; б) $\int (2x-1)\sin 2x dx$ в) $\int \frac{x^2+11}{x^2-2x+10}dx$;

68. а) $\int \frac{2-3\sin 3x}{(2x+\cos 3x)^2}dx$; б) $\int (4x+5)e^{2x}dx$; в) $\int \frac{x^2-13x+40}{x^2-4x+13}dx$;

69. а) $\int \frac{arctg^5 2x}{1+4x^2}dx$; б) $\int (x-2)\cos 5x dx$; в) $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{x^2+x+1}dx$;

70. а) $\int \frac{2x+5\cos 5x}{(x^2+\sin 5x)^3}dx$; б) $\int (x-2)\cdot e^{3x}dx$ в) $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2}dx$;

71. а) $\int \frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; б) $\int (4x-1)e^{2x}dx$; в) $\int \frac{x^3+x+1}{x^2-x+1}dx$;

72. а) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int x\ln(x^2+4)dx$; в) $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{x^2-x+1}dx$;

73. а) $\int \frac{\cos x+\sin x}{(\sin x-\cos x)^3}dx$; б) $\int x^2\ln x\cdot dx$; в) $\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2}dx$;

74. а) $\int \frac{x\ln(3x^2+1)}{3x^2+1}dx$; б) $\int (2x+1)\sin xdx$; в) $\int \frac{2x^3-3x-3}{x^2-2x+5}dx$;

75. а) $\int \frac{2\arccos^5 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int x^3\ln x\cdot dx$; в) $\int \frac{2x^2+x+1}{x^2-2x+2}dx$;

Тесты по разделам

1.Элементы векторной и линейной алгебры

1.1 Вектором в n –мерном пространстве R^n называется

A) произвольный набор из n целых чисел

B) произвольная совокупность из n действительных чисел

C) упорядочная совокупность из n действительных чисел

D) направленный отрезок прямой

E) направленный отрезок, соединяющий две точки пространства R^n

1.2 n –мерным вектором называется

A) произвольная совокупность из n действительных чисел
B) множество из n действительных чисел
C) упорядоченная совокупность из n рациональных чисел
D) упорядоченный набор из n действительных чисел
E) упорядоченный набор из n целых координат

1.3 n –мерным вектором называется

A) набор из n натуральных чисел
B) набор из n действительных чисел, расположенных в определенном порядке
C) последовательность действительных чисел
D) множество из n координат
E) совокупность из n натуральных чисел

****

2.1. Вектор называется нулевым, если

A) сумма его координат равна нулю
B) первая его координата равна нулю
C) последняя его координат равна нулю
D) произведение его координат равно нулю
E) все его координаты равны нулю.

****

2.3. Вектор $\vec{a}=(a_1, a_2, ..., a_n)$ называется нулевым, если

A) $a_1 = 0$
B) $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 0$
C) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$
D) $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$
E) $a_1 = 0, a_2 = a_3 = ... = a_n = 1$

****

2.4. Вектор $\vec{a}=(a_1, a_2, ..., a_n)$ будет нулевым, если

A) скалярное произведение $\vec{a}$ на $\vec{в}=(1,1,\ldots,1)$ равно 0
B) скалярное произведение $\vec{a}$ на $\vec{в}=(0,1,\ldots,1)$ равно 0
C) $|\vec{a}| = 0$

D) $a_1=0$ и $|\vec{a}| = 1$

E) $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 0$

****

3.1. Два вектора называются равными, если

A) равны их координаты
B) равны их модули
C) они имеют одинаковую размерность
D) они имеют одинаковую размерность и равны их модули
E) они имеют одинаковую размерность и равны их соответствующие координаты

****

3.2. Вектора $\vec{a}=(a_1, a_2,...,a_n)$ и $\vec{в}=(в_1, в_2,...,в_m)$ называются равными, если

A) $|\vec{a}| = |\vec{в}|$
B) $m=n$
C) $m=n$ и $a_i=в_i$, $i=1,2,...,n$
D) $m=n$ и $|\vec{a}| = |\vec{в}|$
E) $a_i=в_j$, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,m$

****

4.1. Суммой векторов $\vec{a}=(a_1, a_2,...,a_n)$ и $\vec{в}=(в_1, в_2,..., в_n)$ называется вектор $\vec{a}+\vec{в}$, равный

A) $(a_1, a_2,...,a_n, в_1, в_2,...,в_n)$
B) $(в_1, в_2,...,в_n, a_1, a_2,...,a_n)$
C) $(a_1, в_1, a_2, в_2,...,a_n, в_n)$
D) $(a_1 \cdot в_1 + a_2 \cdot в_2 + a_n \cdot в_n)$
E) $(a_1+ в_1, a_2+в_2,...,a_n+ в_n)$

****

4.2. Разностью векторов $\vec{a}=(a_1, a_2,...,a_n)$ и $\vec{в}=(в_1, в_2,..., в_n)$ называется вектор $\vec{a}-\vec{в}$, равный

A) $(-a_1b_1, -a_2b_2, ..., -a_nb_b)$
B) $(-a_nв_n, - a_{n-1}в_{n-1},..., - a_1в_1)$
C) $(a_1- в_1, a_2-в_2,...,a_n- в_n)$
D) $(a_1+ a_2+...+a_n; - в_1- в_2-...-в_n)$
E) $(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n;\ - в_1 \cdot в_2 \cdots в_n)$

****

4.3. Произведением числа λ на вектор $\vec{a}=(a_1, a_2,...,a_n)$ называется

A) вектор $(\lambda a_1, a_2,...,a_n)$
B) вектор $(\lambda a_1, \lambda a_2,..., \lambda a_n)$
C) число $\lambda (a_1+ a_2+...+a_n)$
D) число $\lambda\ a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$
E) число $\lambda (|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|)$

****

5.1. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}=(a_1, a_2,...,a_n)$ и $\vec{в}=(в_1, в_2,..., в_n)$ называется число

A) $(a_1 + в_1)\cdot(a_2 + в_2)\cdots(a_n + в_n)$

B) $a_1в_1+a_2в_2+\ldots+a_nв_n$
C) $(a_1+a_2+\ldots+a_n)(в_1+в_2+\ldots+в_n)$
D) $a_1в_n+a_2в_{n-1}+\ldots+a_nв_1$
E) $(a_1b_1+a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2$
****

5.2. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}=(a_1, a_2,\ldots,a_n)$ и $\vec{в}=(в_1, в_2,\ldots, в_n)$ называется
A) число $a_1в_1+a_2в_2+\ldots+a_nв_n$
B) вектор $\left(a_1\cdot в_1, a_2\cdot в_2,\ldots,a_n\cdot в_n\right)$
C) число $\sqrt{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}$
D) число $(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$
E) вектор $(a_1+в_1;a_2+в_2;\ldots;a_n+в_n)$
****

5.3. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}=(a_1, a_2,\ldots,a_n)$ и $\vec{в}=(в_1, в_2,\ldots, в_n)$ называется
A) вектор $\left(a_1\cdot в_1, a_2\cdot в_2,\ldots,a_n\cdot в_n\right)$
B) число $\sqrt{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}$
C) число $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot(в_1+в_2+\ldots+в_n)$
D) число $\left(a_1+в_1\right)\cdot\left(a_2+в_2\right)\cdots(a_n+в_n)$
E) число $a_1в_1+a_2в_2+\ldots+a_nв_n$
****

6.1. Скалярным произведением векторов называется число, равное
A) произведению координат векторов
B) сумме произведений соответствующих координат
C) сумме произведений координат
D) сумме координат перемножаемых векторов
E) произведению их модулей
****

6.2. Скалярным произведением векторов называется число, равное
A) произведению сумм координат векторов
B) произведению сумм соответствующих координат векторов
C) сумме произведений координат векторов
D) алгебраической сумме произведений координат векторов
E) сумме произведений соответствующих координат векторов
****

7.1. Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ с углом φ между векторами вычисляется по формуле

A) $|\vec{a}|\,|\vec{в}|\sin\varphi$

B) $\dfrac{|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|}{\sin\varphi}$

C) $|\vec{a}|\,|\vec{в}|\cos\varphi$

D) $\dfrac{|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|}{\cos\varphi}$

E) $|\vec{a}|\,|\vec{в}|\operatorname{tg}\varphi$

****

7.2. Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ с углом φ между векторами вычисляется по формуле

A) $(|\vec{a}|+|\vec{в}|)\cos\varphi$

B) $|\vec{a}|\,|\vec{в}|\cos\varphi$

C) $(|\vec{a}|+|\vec{в}|)\,\varphi$

D) $(|\vec{a}|+|\vec{в}|)\sin\varphi$

E) $|\vec{a}|\,|\vec{в}|\sin\varphi$

****

7.3. Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ с углом φ между векторами вычисляется по формуле

A) $(\vec{a};\vec{в})=|\vec{a}|\,|\vec{в}|$

B) $(\vec{a};\vec{в})=|\vec{a}|\,|\vec{в}|\sin\varphi$

C) $(\vec{a};\vec{в})=|\vec{a}|\,|\vec{в}|\operatorname{tg}\varphi$

D) $(\vec{a};\vec{в})=|\vec{a}|\,|\vec{в}|\cos\varphi$

E) $(\vec{a};\vec{в})=\dfrac{|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|}{\cos\varphi}$

****

8.1. Скалярное произведение двух сонаправленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ вычисляется по формуле

A) $|\vec{a}|+|\vec{в}|$

B) $|\vec{a}|-|\vec{в}|$

C) $|\vec{a}|\,|\vec{в}|$

D) $-|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|$

E) $-(|\vec{a}|+|\vec{в}|)$

****

8.2. Скалярное произведение двух противоположно направленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ вычисляется по формуле

A) $|\vec{a}|+|\vec{в}|$

B) $|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\sqrt{2}/2$

C) $|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|$

D) $-|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|$

E) $-(|\vec{a}|+|\vec{в}|)$

****

8.3. Скалярное произведение двух ортоганальных векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ равно

A) 1

B) 0

C) $\pi/2$

D) e

E) π

****

9.1. Модулем вектора называется величина, численно равная

A) квадратному корню из скалярного квадрата вектора

B) сумме координат вектора

C) скалярному квадрату вектора

D) сумме квадратов его координат

E) квадратному корню из суммы координат вектора

****

9.2. Модуль вектора $\vec{a}$ связан со скалярным произведением формулой

A) $|\vec{a}|=(\vec{a};\vec{a})$

B) $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a};\vec{a})}$

C) $|\vec{a}|=(\vec{a};\vec{a})^2$

D) $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a};\vec{a})^2+1}$

E) $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a};\vec{a})^2-1}$

****

10.1. Модуль вектора $\vec{a}=(a_1, a_2, ..., a_n)$ вычисляется по формуле

A) $\sqrt{a_1+a_2+...+a_n}$

B) $\sqrt{|a_1|+|a_2|+...+|a_n|}$

C) $\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}$

D) $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$

E) $|a_1|+|a_2|+...+|a_n|$

****

10.2. Модуль вектора вычисляется как величина, равная
A) сумме квадратов его координат
B) квадратному корню из суммы координат
C) сумме координат
D) сумме модулей координат
E) квадратному корню из суммы квадратов координат
****

10.3. Модуль вектора вычисляется как величина, равная
A) сумме квадратов координат
B) квадрату суммы координат
C) квадратному корню из суммы квадратов координат
D) квадратному корню из суммы координат
E) сумме квадратных корней из модулей координат
****

11.1. Наименьший неотрицательный угол между ортоганальными векторами в градусах равен
****

11.2. Наименьший неотрицательный угол между сонаправленными векторами в градусах равен
****

11.3. Наименьший неотрицательный угол между противоположно направленными векторами в градусах равен
****

11.4. Угол между ортоганальными векторами равен
A) $-\pi/4$
B) 0
C) $\pi/4$
D) $\pi/2$
E) π
****

11.5. Угол между сонаправленными векторами равен
A) $-\pi/4$
B) 0
C) $\pi/4$
D) $\pi/2$

E) π
****

11.6. Угол между противоположно направленными векторами равен

A) $-\pi/4$
B) 0
C) $\pi/4$
D) $\pi/2$
E) π
****

11.7. Пусть угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$ равен $\pi/2$. Тогда вектора называются

A) сонаправленными
B) противоположно направленными
C) коллинеарными
D) ортоганальными
E) компланарными
****

11.8. Пусть угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$ равен π. Тогда вектора называются

A) сонаправленными
B) противоположно направленными
C) коллинеарными
D) ортоганальными
E) компланарными
****

11.9. Пусть угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$ равен 0. Тогда вектора называются

A) сонаправленными
B) противоположно направленными
C) коллинеарными
D) ортоганальными
E) компланарными
****

12.1. Какое из нижеперечисленных свойств скалярного произведения неверно

A) $(\vec{a};\vec{в})=\vec{a}$, если $\vec{в}=(1, 1,\ldots,1)$
B) $(\vec{a};\vec{в})=(\vec{в};\vec{a})$
C) $(k\vec{a};\vec{в})=k(\vec{a};\vec{в})$
D) $(\vec{a};\vec{в}+\vec{c})=(\vec{a};\vec{в})+(\vec{a};\vec{c})$
E) $(\vec{a};\vec{a})\geq 0,\ \textit{причем}\ (\vec{a};\vec{a})=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$
****

12.2. Какое из нижеперечисленных свойств скалярного произведения неверно

A) $(\vec{a};\vec{a}) \geq 0$, *причем* $(\vec{a};\vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

B) $(k\vec{a}\,;\vec{в})=k(\vec{a}\,;\vec{в})$

C) $(\vec{a}\,;\vec{в}+\vec{c}\,)=(\vec{a}\,;\vec{в})+(\vec{a}\,;\vec{c}\,)$

D) $(\vec{a}\,;\vec{a}\,)=\vec{a}$

E) $(\vec{a};\vec{в}) = (\vec{в};\vec{a})$

****

12.3. Какое из нижеперечисленных свойств скалярного произведения неверно

A) $(k\vec{a}\,;\vec{в})=k(\vec{a}\,;\vec{в})$

B) $(\vec{a};\vec{a}) \geq 0$

C) $(\vec{a}\,;\vec{в})=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\sin\varphi$

D) $(\vec{a};\vec{в}) = (\vec{в};\vec{a})$

E) $(\vec{a}\,;\vec{в}+\vec{c}\,)=(\vec{a}\,;\vec{в})+(\vec{a}\,;\vec{c}\,)$

12.4. Какое из нижеперечисленных свойств скалярного произведения неверно

A) $(\vec{a}\,;\vec{в}+\vec{c}\,)=(\vec{a}\,;\vec{в})+(\vec{a}\,;\vec{c}\,)$

B) $(\vec{a}\,;\vec{в})=-(\vec{в};\vec{a})$

C) $(k\vec{a}\,;\vec{в})=k(\vec{a}\,;\vec{в})$

D) $(\vec{a};\vec{a}) > 0$, *если* $\vec{a} \neq \vec{0}$

E) $(\vec{a};\vec{в}) = (\vec{в};\vec{a})$

****

12.5. Какое из нижеперечисленных свойств скалярного произведения неверно

A) $(k\vec{a}\,;\vec{в})=k(\vec{a}\,;\vec{в})$

B) $(\vec{a};\vec{в}) = (\vec{в};\vec{a})$

C) $(\vec{a};\vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

D) $(\vec{a}\,;\vec{в}+\vec{c}\,)=(\vec{a}\,;\vec{в})+(\vec{a}\,;\vec{c}\,)$

E) $(k+\vec{a}\,;\vec{в})=k+(\vec{a}\,;\vec{в})$

****

12.6. Какое из нижеперечисленных свойств скалярного произведения неверно

A) $(\vec{a};\vec{в}) = (\vec{в};\vec{a})$

B) $(k\vec{a}\,;\vec{в})=k(\vec{a}\,;\vec{в})$

C) $(\vec{a}\,;\vec{в}+\vec{c}\,)=(\vec{a}\,;\vec{в})+(\vec{a}\,;\vec{c}\,)$

D) $(-\vec{a};\vec{a}) = 0$

E) $(\vec{a};\vec{a}) \geq 0$

****

13.1. Укажите правильное свойство скалярного произведения

A) $(\vec{a}\,;\vec{в})=\vec{a}$, если $\vec{в}=(1,\ 1,\ldots,1)$

B) $(\vec{a};\vec{в}) = (\vec{в};\vec{a})$

C) $(\vec{a}\,;\vec{a}\,)=2\vec{a}$

D) $(\vec{a}\,;\vec{в})=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\sin\varphi$

E) (k+$\vec{a}$; $\vec{в}$)=k+($\vec{a}$; $\vec{в}$)

****

13.2. Укажите правильное свойство скалярного произведения

A) $(-\vec{a};\vec{a})=0$

B) ($\vec{a}$; $\vec{в}$)=-($\vec{в}$;$\vec{a}$)

C) (k$\vec{a}$; $\vec{в}$)=k($\vec{a}$; $\vec{в}$)

D) ($\vec{a}$; $\vec{в}$)=$\vec{a}$, если $\vec{в}$=(1, 1,…,1)

E) ($\vec{a}$; $\vec{a}$)=$\vec{a}$

****

13.3. Укажите правильное свойство скалярного произведения

A) (k+$\vec{a}$; $\vec{в}$)=k+($\vec{a}$; $\vec{в}$)

B) $(\vec{a}\,;\vec{в})=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot tg\varphi$

C) ($\vec{a}$; $\vec{в}$)=$\vec{a}$, если $\vec{в}$=(1, 1,…,1)

D) ($\vec{a}$; $\vec{a}$)=$\vec{a}$

E) ($\vec{a}$; $\vec{в}+\vec{c}$)=($\vec{a}$; $\vec{в}$)+($\vec{a}$; $\vec{c}$)

****

13.4. Укажите правильное свойство скалярного произведения

A) ($\vec{a}$; $\vec{в}$)=-($\vec{в}$;$\vec{a}$)

B) ($\vec{a}$; $\vec{a}$)=$\vec{a}$

C) (k+$\vec{a}$; $\vec{в}$)=k+($\vec{a}$; $\vec{в}$)

D) $(\vec{a};\vec{a})\geq 0,\ \textit{причем}\ (\vec{a};\vec{a})=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$

E) ($\vec{a}$; $\vec{в}$)=$\vec{a}$, если $\vec{в}$=(1, 1,…,1)

****

14.1. Найти скалярное произведение векторов

$\vec{a}$ = (1;2;3) и $\vec{в}$ = (2;-1;1)

****

14.2. Найти скалярное произведение векторов

$\vec{a}$ = (2;1;-1) и $\vec{в}$ = (3;1;5)

****

14.3. Найти скалярное произведение векторов

$\vec{a}$ = (1;3;3) и $\vec{в}$ = (2;4;-6)

****

14.4. Найти скалярное произведение векторов
$\vec{a} = (2;-2;1)$ и $\vec{в} = (1;4;5)$

****

14.5. Найти скалярное произведение векторов
$\vec{a} = (2;1;4)$ и $\vec{в} = (4;3;-1)$

****

14.6. Найти скалярное произведение векторов
$\vec{a} = (3;0;2)$ и $\vec{в} = (5;7;6)$

****

14.7. Найти скалярное произведение векторов
$\vec{a} = (1;4;-2)$ и $\vec{в} = (3;1;4)$

****

14.8. Найти скалярное произведение векторов
$\vec{a} = (3;2;1)$ и $\vec{в} = (1;-2;3)$

14.9. Найти скалярное произведение векторов
$\vec{a} = (5;2;2)$ и $\vec{в} = (-2;1;3)$

****

14.10. Найти скалярное произведение векторов
$\vec{a} = (1;4;3)$ и $\vec{в} = (2;2;-5)$

****

15.1. Найти угол $\varphi\,(0 \le \varphi \le 180^0)$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если $|\vec{a}| = 2, |\vec{в}| = 3$ и скалярное произведение $(\vec{a}\,;\vec{в})=3$. Ответ ввести в градусах.

****

15.2. Найти угол $\varphi\,(0 \le \varphi \le 180^0)$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если $|\vec{a}| = 5, |\vec{в}| = 2$ и скалярное произведение $(\vec{a}\,;\vec{в})=5\sqrt{3}$. Ответ ввести в градусах.

****

15.3. Найти угол $\varphi\,(0 \le \varphi \le 180^0)$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если $|\vec{a}|$=5, $|\vec{в}| = 2\sqrt{2}$ и скалярное произведение $(\vec{a};\vec{в})$=10. Ответ ввести в градусах.

****

15.4. Найти угол $\varphi\,(0 \le \varphi \le 180^0)$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если $|\vec{a}|$=3, $|\vec{в}|$=5 и скалярное произведение $(\vec{a};\vec{в})$=15. Ответ ввести в градусах.

****

15.5. Найти угол $\varphi\,(0 \le \varphi \le 180^0)$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если $|\vec{a}|$=3, $|\vec{в}|$=1 и скалярное произведение $(\vec{a};\vec{в})$=-3. Ответ ввести в градусах.

****

15.6. Найти угол $\varphi\,(0 \le \varphi \le 180^0)$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если $|\vec{a}|$=1, $|\vec{в}|$=5 и скалярное произведение $(\vec{a};\vec{в})$=2,5. Ответ ввести в градусах.

****

15.7. Найти угол $\varphi\,(0 \le \varphi \le 180^0)$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если $|\vec{a}|$=2, $|\vec{в}| = \sqrt{3}$ и скалярное произведение $(\vec{a};\vec{в})$=3. Ответ ввести в градусах.

****

15.8. Найти угол $\varphi\,(0 \le \varphi \le \pi)$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если $|\vec{a}|$=1, $|\vec{в}|$=2 и скалярное произведение $(\vec{a};\vec{в}) = \sqrt{2}$

A) 0
B) $\pi/6$
C) $\pi/4$
D) $\pi/3$
E) π
****

15.9. Найти угол $\varphi\,(0 \le \varphi \le \pi)$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если $|\vec{a}|$=4, $|\vec{в}|$=1,5 и скалярное произведение $(\vec{a};\vec{в})$=6

A) 0

B) $\pi/6$
C) $\pi/4$
D) $\pi/3$
E) π
****

15.10. Найти угол $\varphi(0 \le \varphi \le \pi)$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$, если $|\vec{a}|$=0,5, $|\vec{в}|$=6 и скалярное произведение $(\vec{a}; \vec{в})$=-3

A) 0
B) $\pi/6$
C) $\pi/4$
D) $\pi/3$
E) π
****

16.1. Найти модуль вектора $\vec{в}$, если $|\vec{a}|$=3, скалярное произведение $(\vec{a}; \vec{в})$=6 и угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$ равен $\pi/3$.
****

16.2. Найти модуль вектора $\vec{в}$, если $|\vec{a}|$=2, скалярное произведение $(\vec{a}; \vec{в})=3\sqrt{3}$ и угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$ равен $\pi/6$.
****

16.3. Найти модуль вектора $\vec{в}$, если $|\vec{a}|$=4, скалярное произведение $(\vec{a}; \vec{в})=3\sqrt{2}$ и угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$ равен $\pi/4$.
16.4. Найти модуль вектора $\vec{в}$, если $|\vec{a}|$=6, скалярное произведение $(\vec{a}; \vec{в})$=9 и угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$ равен $\pi/3$.
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 6
****

16.5. Найти модуль вектора $\vec{в}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, скалярное произведение $(\vec{a}; \vec{в})$=6 и угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{в}$ равен $\pi/6$
A) 1
B) $\sqrt{3}$
C) 3
D) 4
E) 6
****

16.6. Найти модуль вектора $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$, скалярное произведение $(\vec{a};\vec{b})=4$ и угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\pi/4$.

A) $\sqrt{2}$
B) 2
C) $2\sqrt{2}$
D) 4
E) $4\sqrt{2}$

****

17.1. Найти модуль вектора $\vec{b}$, если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, $|\vec{a}|=6$ и $(\vec{a};\vec{b})=3$.

****

17.2. Найти модуль вектора $\vec{b}$, если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, $|\vec{a}|=2$ и $(\vec{a};\vec{b})=6$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 6
E) 12

17.3. Найти модуль вектора $\vec{b}$, если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, $|\vec{a}|=4$ и скалярное произведение $(\vec{a};\vec{b})=-12$

****

17.4. Найти модуль вектора $\vec{b}$, если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, $|\vec{a}|=5$ и скалярное произведение $(\vec{a};\vec{b})=-2$

A) 0,4
B) 0,8
C) 1
D) 3
E) 10

****

18.1. Найти скалярное произведение двух векторов с модулями $2\sqrt{3}$ и 4 и углом между векторами, равным $\pi/6$.

A) $4\sqrt{6}$
B) $4\sqrt{3}$
C) 6
D) 8
E) 12

18.2. Найти скалярное произведение двух векторов с модулями 3 и 2 и углом между векторами, равным $\pi/3$.

A) $2\sqrt{3}$

B) $3\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{3}$
D) 3
E) 6
****

18.3. Найти скалярное произведение двух векторов с модулями 2 и $3\sqrt{2}$ и углом между векторами, равным $\pi/4$.
A) $3\sqrt{2}$
B) $3\sqrt{6}$
C) $6\sqrt{2}$
D) 3
E) 6
****

18.4. Найти скалярное произведение двух векторов с модулями 0,5 и $\sqrt{3}$ и углом между векторами, равным $\pi/6$.
18.5. Найти скалярное произведение двух векторов с модулями 4 и 3 и углом между векторами, равным $\pi/3$.
****

18.6. Найти скалярное произведение двух векторов с модулями $\sqrt{2}$ и 5 и углом между векторами, равным $\pi/4$.
****

19.1. Найти скалярное произведение противоположно направленных векторов с модулями 0,5 и 6.
****

19.2. Найти скалярное произведение противоположно направленных векторов с модулями 2 и 2,5.
****

19.3. Найти скалярное произведение сонаправленных векторов с модулями 0,2 и 25.
****

19.4. Найти скалярное произведение сонаправленных векторов с модулями 1,5 и 4
****

20.1. Найти значение x, при котором вектора $\vec{a}=(2;1;x)$ и $\vec{b}=(3;2x;-5)$ ортоганальны.
****

20.2. Найти значение x, при котором вектора $\vec{a}=(1;4;x)$ и $\vec{b}=(x;1;3)$ ортоганальны.
****

20.3. Найти значение x, при котором вектора $\vec{a}=(5;x;-1)$ и $\vec{b}=(1;2;x)$ ортоганальны.
****

20.4. Найти значение x, при котором вектора $\vec{a}=(x;-2;2)$ и $\vec{b}=(2;6;x)$ ортоганальны.
****

20.5. Найти значение x, при котором вектора $\vec{a}=(2;x;3)$ и $\vec{b}=(x;1;-4)$ ортоганальны.
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5
****

20.6. Найти значение x, при котором вектора $\vec{a}=(1;2;x)$ и $\vec{b}=(x;3;1)$ ортоганальны.
A) –3
B) –2
C) –1
D) 0
E) 1
****

20.7. Найти положительное значение x, при котором вектора $\vec{a}=(x;-6;-1)$ и $\vec{b}=(x;1;x)$ ортоганальны.
****

20.8. Найти положительное значение x, при котором вектора $\vec{a}=(x;1;-2)$ и $\vec{b}=(x;x;1)$ ортоганальны.
****

20.9. Найти положительное значение x, при котором вектора $\vec{a}=(x;-4;3)$ и $\vec{b}=(x;1;-x)$ ортоганальны.
****

20.10. Найти положительное значение x, при котором вектора $\vec{a}=(x;-3;2)$ и $\vec{b}=(x;1;x)$ ортоганальны.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

****

21.1. Найти модуль вектора $\vec{a}=(2;1;2)$

****

21.2. Найти модуль вектора $\vec{a}=(1;-2;2)$

****

21.3. Найти модуль вектора $\vec{a}=(1;3;5;1)$

****

21.4. Найти модуль вектора $\vec{a}=(2;1;4;2)$

****

21.5. Найти модуль вектора $\vec{a}=(3;-2;6)$

****

21.6. Найти модуль вектора $\vec{a}=(-4;4;-2)$

****

21.7. Найти модуль вектора $\vec{a}=(2;3;6)$

****

21.8. Найти модуль вектора $\vec{a}=(0;-3;4)$

21.9. Найти модуль вектора $\vec{a}=(2;4;4)$

****

21.10. Найти модуль вектора $\vec{a}=(2;6;-3$

****

22.1. Вычислить сумму $x+y$, если для векторов $\vec{a}=(2;\ y)$, $\vec{b}=(x;-3)$ и $\vec{c}=(x;\ 3)$, $\vec{d}=(1;\ y)$ известны скалярные произведения $(\vec{a};\vec{b})=4$, $(\vec{c};\vec{d})=2$

****

22.2. Вычислить сумму $x+y$, если для векторов $\vec{a}=(x;\ 2)$, $\vec{b}=(1;y)$ и $\vec{c}=(1;-3)$, $\vec{d}=(x;\ y)$ известны скалярные произведения $(\vec{a};\vec{b})=6$, $(\vec{c};\vec{d})=1$

****

22.3. Вычислить сумму $x+y$, если для векторов $\vec{a}=(3;\ y)$, $\vec{b}=(x;1)$ и $\vec{c}=(1;-y)$, $\vec{d}=(x;1)$ известны скалярные произведения $(\vec{a};\vec{b})=3$, $(\vec{c};\vec{d})=5$

****

22.4. Вычислить сумму $x+y$, если для векторов $\vec{a}=(x;\ y)$, $\vec{b}=(4;1)$ и $\vec{c}=(1;1)$, $\vec{d}=(x;\ y)$ известны скалярные произведения $(\vec{a};\ \vec{b})=9$, $(\vec{c};\vec{d})=3$

****

22.5. Найти значения x и y, при которых скалярные произведения векторов $\vec{a}=(x;1)$, $\vec{b}=(1;-y)$ и $\vec{c}=(1;y)$, $\vec{d}=(x;1)$ соответственно равны $(\vec{a};\ \vec{b})=2$, $(\vec{c};\vec{d})=4$

A) $x=2,\ y=0$
B) $x=3, y=1$
C) $x=1, y=-1$
D) $x=4, y=2$
E) $x=0, y=-2$

****

22.6. Найти значения x и y, при которых скалярные произведения векторов $\vec{a}=(5;y)$, $\vec{b}=(x;2)$ и $\vec{c}=(x;-2)$, $\vec{d}=(3;y)$ соответственно равны $(\vec{a};\vec{b})=9$, $(\vec{c};\vec{d})=-1$

A) $x=1$, $y=2$
B) $x=0$, $y=0$
C) $x=2$, $y=3$
D) $x=3$, $y=3$
E) $x=-1$, $y=-1$

****

23.1. Найти значение x, при котором скалярное произведение векторов $\vec{a}=(2;3;-1)$ и $\vec{b}=(1;x;4)$ равно 7.

****

23.2. Найти значение x, при котором скалярное произведение векторов $\vec{a}$=(1;-x;2) и $\vec{b}$ =(2;3;1) равно -8.

****

23.3. Найти значение x, при котором скалярное произведение векторов $\vec{a}$=(x;2;4) и $\vec{b}$ =(2;1;x) равно 8.

****

23.4. Найти значение x, при котором скалярное произведение векторов $\vec{a}$=(3;x;1) и $\vec{b}$ =(2;-2;x) равно 1.

****

23.5. Найти значение x, при котором скалярное произведение векторов $\vec{a}$=(4x;1;1) и $\vec{b}$ =(2;3;-4) равно 15.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

****

23.6. Найти значение x, при котором скалярное произведение векторов $\vec{a}$=(1;2;3) и $\vec{b}$ =(-x; x;1) равно 2.

A) –2
B) –1
C) 0
D) 1
E) 2

****

23.7. Найти значение x, при котором скалярное произведение векторов $\vec{a}$=(x;-4) и $\vec{b}$=(x; x) равно -4.

****

23.8. Найти значение x, при котором скалярное произведение векторов $\vec{a}$=(x; $0,5x$) и $\vec{b}$ =(x;4) равно -1.

****

23.9. Найти значения x, при которых скалярное произведение векторов $\vec{a}$=(x;1) и $\vec{b}$=(x;-6) равно x.

A) 1 или 2
B) 2
C) 1 или 3

D) 2 или 3
E) 3 или -2
****

23.10. Найти положительное значение x, при котором скалярное произведение векторов $\vec{a}=(1;2;x)$ и $\vec{b}=(x;1;x)$ равно 4.
****

24.1. Найти значение x, при котором вектора $\vec{a}=(2; -4; 3)$ и $\vec{b}=(6; -12; x)$ коллинеарны.
****

24.2. Найти значение x, при котором вектора $\vec{a}=(-3; 4; 6)$ и $\vec{b}=(x; 2; 3)$ коллинеарны.
****

24.3. Найти значение x, при котором вектора $\vec{a}=(10; 2; 30)$ и $\vec{b}=(1; x; 3)$ коллинеарны.
****

24.4. Найти значение x, при котором вектора $\vec{a}=(x; -6; 8)$ и $\vec{b}=(-6; 3; -4)$ коллинеарны.
****

24.5. Найти значение x, при котором вектора $\vec{a}=(-3; 6; 2)$ и $\vec{b}=(1,5; -3; x)$ коллинеарны.
****

24.6. Найти значение x, при котором вектора $\vec{a}=(3; -1; x)$ и $\vec{b}=(-9; 3; -6)$ коллинеарны.
****

24.7. Найти значение x, при котором вектора $\vec{a}=(-2; 1; 5)$ и $\vec{b}=(-4; x; 10)$ коллинеарны.
****

25.1. Какие два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?
A) $\vec{a}=(1;2;3)$ и $\vec{b}=(-1;-2;3)$
B) $\vec{a}=(2;0;1)$ и $\vec{b}=(4;0;3)$
C) $\vec{a}=(0;-1;3)$ и $\vec{b}=(0;2;-6)$
D) $\vec{a}=(5;2;3)$ и $\vec{b}=(10;4;9)$
E) $\vec{a}=(6;8;4)$ и $\vec{b}=(3;4;1)$
****

25.2. Какие два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

A) $\vec{a}$=(-3;2;4) и $\vec{в}$=(6;-4;-8)
B) $\vec{a}$=(2;4;6) и $\vec{в}$=(6;4;2)
C) $\vec{a}$=(1;1;1) и $\vec{в}$=(3;0;0)
D) $\vec{a}$=(1;2;3) и $\vec{в}$=(4;5;6)
E) $\vec{a}$=(2;4;6) и $\vec{в}$=(1;3;9
****

25.3. Какие два вектора $\vec{a}$ и $\vec{в}$ коллинеарны?
A) $\vec{a}$=(-1;0;1) и $\vec{в}$=(0;1;0)
B) $\vec{a}$=(-1;0;2) и $\vec{в}$=(-2;0;4)
C) $\vec{a}$=(2;3;4) и $\vec{в}$=(1;2;3)
D) $\vec{a}$=(1;1;2) и $\vec{в}$=(2;2;3)
E) $\vec{a}$=(0;0;1) и $\vec{в}$=(0;1;0)
****

26.1 Две матрицы А и В являются равными, если
A) они имеют одинаковые размеры
B) они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы главных диагоналей совпадают
C) они имеют одинаковые элементы
D) они имеют одинаковые столбцы
E) они имеют одинаковые размеры и их соответствующие строки совпадают

26.2 Матрица А=$\|a_{ij}\|$ размеры mxn и матрица В=$\|в_{ij}\|$ размера pxr называются равными, если
A) mxn=pxr
B) $m=p$, $n=r$
C) mxn=pxr и $a_{ii}=b_{jj}$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$
D) $m=p$, $n=r$ и $a_{ij}=b_{ij,}$ $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$
E) $m=p$, $n=r$ и $a_{ij}=b_{ij,}$ $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$

27.1 Матрица называется нулевой, если
A) она является квадратной и все ее элементы равны 0
B) все ее элементы равны 0
C) она является диагональной и все элементы ее главной диагонали равны 0
D) она является диагональной и все ее элементы, не лежащие на главной диагонали, равны 0
E) она квадратная и ее определитель равен 0.
****

28.1. Матрица А называется диагональной, если
A) элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, а остальные элементы не равны нулю.
B) элементы главной диагонали равны нулю, а остальные элементы не равны нулю.
C) матрица А квадратная и все элементы ее главной диагонали равны нулю, а остальные элементы не равны нулю

D) матрица A квадратная и ненулевыми являются только элементы главной диагонали
E) матрица A квадратная и нулевыми являются только элементы, лежащие ниже главной диагонали
****

28.2. Матрица $A = \|a_{ij}\|$ размера mxm называется диагональной, если ее элементы удовлетворяют условию
A) $a_{ij} \neq 0$ при $i=j$ и $a_{ij}=0$ при $i \neq j$
B) $a_{ij}=1$ при $i=j$ и $a_{ij}=0$ при $i \neq j$
C) $a_{ij}=0$ при $i=j$ и $a_{ij}=1$ при $i \neq j$
D) $a_{ij}=0$ при $i=j$ и $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$
E) $a_{ij}=0$ при $i>j$ и $a_{ij} \neq 0$ при $i \leq j$

29.1. Матрица называется единичной, если
A) все ее элементы равны 1
B) матрица квадратная и все ее элементы равны 1
C) матрица квадратная и все ее диагональные элементы равны 1, а остальные элементы равны 0.
D) матрица квадратная и все элементы ее главной диагонали и выше равны 1, а остальные элементы равны 0.
E) все ее диагональные элементы равны 1, а остальные элементы равны 0.
****

29.2. Единичной матрицей называется квадратная матрица вида

A) $E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ B) $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ C) $E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

D) $E=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ . & \dots & . & . \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ E) $E=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 1 \\ . & \dots & . & . \\ 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

****

30.1. Характеристическим свойством единичной матрицы является следующее условие
A) транспонированная матрица $E'=E$
B) обратная матрица $E^{-1}=E$
C) квадрат матрицы $E^2=E$
D) существует матрицы A, для которой произведение $A \cdot E=A$
E) для любой матрицы A произведение $A \cdot E=A$

31.1. Суммой двух матриц A и B размера mxn называется:

A) матрица C размера $mx2n$, полученная присоединением справа к матрице A матрицы B
B) матрица C размера $2mxn$, полученная присоединением снизу к матрице A матрицы B
C) вектор-столбец C размера m, элементы которого равны сумме элементов соответствующих строк матриц A и B
D) матрица C размера mxn, элементы которой равны сумме элементов матриц A и B
E) матрица C размера mxn, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B

****

32.1. Для существования суммы двух матриц должно быть выполнено следующее условие

A) количество столбцов первой матрицы должно равняться количеству строк второй матрицы
B) количество строк первой матрицы должно равняться количеству столбцов второй матрицы
C) у обеих матриц должно быть одинаковое количество строк
D) у обеих матриц должно быть одинаковое количество столбцов
E) матрицы должны иметь одинаковые размеры

32.2. Для существования разности двух матриц должно выполняться следующее условие

A) матрицы должны иметь одинаковое количество столбцов
B) матрицы должны иметь одинаковое количество строк
C) матрицы должны иметь одинаковые размеры
D) количество столбцов первой матрицы должно равняться количеству строк второй матрицы
E) количество строк первой матрицы должно равняться количеству столбцов второй матрицы

****

32.3. Пусть mxn и kxp – размеры матриц A и B соответственно. Для существования суммы матриц $A+B$ должно выполняться условие

A) $m=k$ и $n=p$
B) $m=k$
C) $n=p$
D) $m=n=k=p$
E) $n=k$

****

32.4. Пусть mxn и kxp – размеры матриц A и B соответственно. Для существования разности матриц $A – B$ должно выполняться условие

A) $m=k$
B) $n=p$
C) $mxn=kxp$
D) $n=k$

E) $m=p$
****

33.1. Найти сумму матриц $A+B$, если А=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ и В=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

****

33.2. Найти сумму матриц А+В, если А=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и В=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

****

33.3. Найти сумму матриц А+В, если А=$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ и В=$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

D) 2

E) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
****

33.4. Найти сумму матриц А+В, если А=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и В=$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

A) (21 –12 -14)
B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
C) (3 –1 3)
D) –4
E) сумма не существует
****

33.5. Найти разность матриц А-В, если А=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и В= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
****

33.6. Найти разность матриц А-В, если А=$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и В=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
E) разность не существует

33.7. Найти разность матриц А-В, если А=$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и В=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

****

33.8. Найти произведение числа α=-2 на матрицу А, где А=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

D) (0 4 -4)

E) произведение не существует

****

33.9. Найти произведение числа α=0 на матрицу А, где А=$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D) 0

E) произведение не существует

****

33.10. Найти произведение числа $\alpha = \dfrac{1}{2}$ на матрицу А, где А=$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
****

34.1. Произведением матрицы $A=\|a_{ij}\|$ на матрицу $B=\|в_{ij}\|$ называется матрица C, каждый элемент c_{ij} которой получается
A) перемножением элементов a_{ij} и $в_{ij}$
B) перемножением элементов a_{ij} и $в_{ji}$
C) перемножением каждого элемента i-ой строки матрицы A на элемент $в_{ij}$ и сложением полученных чисел
D) перемножением элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В и сложением полученных чисел
E) перемножением элементов j -ой строки матрицы A на соответствующие элементы i -го столбца матрицы B и сложением полученных чисел
****

35.1. Для существования произведения $A \cdot B$ двух матриц должно выполнятся условие
A) матрицы A и B должны быть квадратными
B) матрицы должны иметь одинаковые размеры
C) количество столбцов матрицы A должно равняться количеству строк матрицы B
D) количество строк матрицы A должно равняться количеству столбцов матрицы B
E) количества строк матриц A и B должны совпадать
****

35.2. Пусть mxn и kxp – соответственно размеры матриц A и B. Для существования произведения матриц $A \cdot B$ должно выполняться условие
A) mxn=kxp
B) $m=n=k=p$
C) $m=p$
D) $n=k$
E) $m= k$
****

36.1. Укажите произведение матриц, которое не имеет смысла
A) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

D) $(1\ \ -3)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

36.2. Укажите произведение матриц, которое не имеет смысла

A) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\end{pmatrix}$

****

36.3. Укажите произведение матриц, которое не имеет смысла

A) $\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$

****

36.4. Укажите произведение матриц, которое не имеет смысла

A) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ 1 & 5 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 7\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 8\end{pmatrix}$

****

36.5. Укажите произведение матриц, которое не имеет смысла

A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

****

37.1. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ на матрицу $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

E) 36

****

37.2. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ на матрицу $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

****

37.3. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ на матрицу $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 13 & 14 & 3 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 12 & 12 & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$

E) не существует

****

37.4. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ на матрицу $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

E) не существует

****

37.5. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$ на матрицу $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -4 & 11 \end{pmatrix}$

E) не существует

****

37.6. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ на матрицу $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

D) 16

E) не существует

****

37.7. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ на матрицу $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

****

37.8. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на матрицу $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

****

37.9. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ на матрицу $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

E) не существует

****

37.10. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ на матрицу $B=(-2 \quad 1)$

A) -1

B) $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

E) не существует

****

38.1. Найти A^2 для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

****

38.2. Найти A^2 для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$` B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

****

38.3. Найти A^2 для матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

****

38.4. Найти A^2 для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

****

38.5. Найти A^2 для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

****

39.1. Матрица A' называется транспонированной матрице A, если A' получается из A

A) циклическим сдвигом строк матрицы A вниз
B) циклическим сдвигом строк матрицы A вверх
C) заменой столбцов матрицы A на строки
D) заменой строк матрицы A на ее столбцы с сохранением порядка их расположения
E) заменой строк матрицы A на ее столбцы с переменой порядка их следования на противоположный

****

39.2. Матрица A' называется транспонированной матрице A, если A' получается из A

A) заменой строк матрицы A на ее столбцы

B) заменой столбцов матрицы A на ее строки с сохранением порядка их следования

C) заменой столбцов матрицы A на ее строки с переменой порядка их следования на противоположный

D) циклическим сдвигом столбцов матрицы A вправо

E) циклическим сдвигом столбцов матрицы A влево

****

40.1. Укажите матрицу, транспонированную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

****

40.2. Укажите матрицу, транспонированную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

****

40.3. Укажите матрицу, транспонированную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

****

40.4. Укажите матрицу, транспонированную матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

****

40.5. Укажите матрицу, транспонированную матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

****

40.6. Дважды транспонированная матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ равна

A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

****

40.7. Дважды транспонированная матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$ равна

A) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$

****

41.1. Вычислить произведение $A'B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

****

41.2. Вычислить произведение $A'B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

****

41.3. Вычислить произведение $A^{\cdot}B'$, если A=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

B) (4 12)

C) 16

D) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$

E) (2 3)

****

41.4. Вычислить произведение $A^{\cdot}B'$, если A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

****

41.5. Вычислить произведение $A^{\cdot}B'$, если A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

****

41.6. Вычислить произведение $A'B'$, если $A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\5 & -3\end{pmatrix}$

A) (2 -1)

B) $\begin{pmatrix}0 & 10\\1 & -6\end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix}0 & 1\\10 & -6\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}0 & 5\\2 & -6\end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

****

41.7. Вычислить произведение $(A \cdot B)'$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix}4 & 1\\6 & 3\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}4 & 6\\1 & 3\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}0 & -2\\0 & 3\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}0 & 0\\-2 & 3\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}0 & 2\\-3 & 5\end{pmatrix}$

****

41.8. Вычислить произведение $(A \cdot B)'$, если $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\5 & 2\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}-1 & 5\\0 & 2\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}0 & 1\\-2 & 0\end{pmatrix}$

****

42.1Матрица B называется обратной к матрице A, если

A) $A \cdot B=E$
B) $B \cdot A=E$
C) $A \cdot B=B \cdot A=E$
D) $A+B=E$
E) $B+A=E$

****

42.2 Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если

A) A+ A-1 =0, где 0 – нулевая матрица
B) A+ A-1 = A-1 +A=0, где 0 – нулевая матрица
C) A.A-1=E
D) A-1.A=E
E) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
****

42.3 Основное свойство матрицы B, обратной к матрице A, имеет вид

A) B' =A

B) (B')' =A

C) B'·A=A'·B=E

D) A·B=B·A=E

E) A+ B=B+A=E

****

43.1. Найти матрицу A^{-1} для матрицы A=$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -0,5 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$
****

43.2. Найти матрицу A^{-1} для матрицы A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

****

43.3. Найти матрицу A^{-1} для матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

****

43.4. Найти матрицу A^{-1} для матрицы $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$

****

43.5. Найти матрицу A^{-1} для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

****

43.6. Найти матрицу A^{-1} для матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$

****

43.7. Найти матрицу A^{-1} для матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
****

43.8. Найти матрицу A^{-1} для матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$
****

44.1. Свойство $A \cdot B=E$ выполняется
A) для любой диагональной матрицы B
B) для нулевой матрицы B
C) для матрицы B, транспонированной к A
D) для матрицы B, обратной к A
E) для матрицы B, дважды транспонированной к A
****

44.2. Свойство $(A')'=A$ выполняется
A) для любой прямоугольной матрицы
B) для любой квадратной матрицы
C) для любой диагональной матрицы
D) для единичной матрицы
E) для нулевой матрицы
****

44.3. Свойство $A^2=A$ выполняется
A) только для нулевой квадратной матрицы
B) только для единичной матрицы
C) и для квадратной нулевой матрицы и для единичной матрицы
D) для любой диагональной матрицы
E) для любой квадратной матрицы
****

44.4. Пусть произведение матриц $A^{\cdot}E$ существует. Свойство $A^{\cdot}E=A$ выполняется

A) только для нулевой матрицы A
B) только для единичной матрицы A
C) для нулевой и для единичной матрицы A
D) для любой диагональной матрицы A
E) для любой прямоугольной матрицы A

****

45.1. Определитель, который поручается вычеркиванием из квадратной матрицы $A=\|a_{ij}\|$ i-ой строки и j-го столбца, называется …….. элемента a_{ij}

A) рангом
B) алгебраическим дополнением
C) порядком
D) показателем
E) минором

****

45.2. Минором квадратной матрицы A, соответствующим элементу a_{ij}, называется

A) матрица, которая получается вычеркиванием из матрицы A i-ой строки и j-го столбца

B) определитель, который получается вычеркиванием из матрицы A i-ой строки и j-го столбца

C) матрица, которая получается вычеркиванием из матрицы A i-го столбца и j-й строки

D) определитель, который получается вычеркиванием из матрицы A i-го столбца и j-й строки

E) матрица, которая получается как произведение i-ой строки и j-го столбца матрицы A

****

46.1. Пусть M_{ij} – минор элемента a_{ij} матрицы A. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число

A) $A_{ij}=(-1)^{i+1}\cdot M_{ij}$

B) $A_{ij}=(-1)^{j-1}\cdot M_{ij}$

C) $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$

D) $A_{ij}=(-1)^{i+j+1}\cdot M_{ij}$

E) $A_{ij}=(-1)^{i-j+1}\cdot M_{ij}$

****

46.2. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A называется

A) минор элемента a_{ij}
B) минор элемента $a_{ij},$ взятый с противоположным знаком, если сумма индексов элемента a_{ij} четная
C) минор элемента $a_{ij},$ взятый с противоположным знаком, если разность индексов элемента a_{ij} четная
D) определитель, полученный вычеркиванием из матрицы A i-ой строки и j-го столбца
E) определитель, полученный вычеркиванием из матрицы A i-ой строки и j-го столбца, взятый со знаком “+” или “-” в зависимости от того, является ли сумма индексов элемента a_{ij} четной или нечетной.

****

46.3. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A называется

A) определитель, полученный вычеркиванием из матрицы A i-й строки и j-го столбца
B) определитель, полученный вычеркиванием из матрицы A i-го столбца и j-ой строки
C) минор элемента a_{ij}
D) минор элемента a_{ij}, взятый со своим знаком или с противоположным знаком в зависимости того, является ли сумма индексов элемента a_{ij} четной или нечетной
E) определитель матрицы A, умноженный на элемент a_{ij} и на сумму индексов $i+j$

****

47.1. Найти минор элемента a_{21} матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

****

****

47.2. Найти минор M_{13} матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

****

47.3. Найти минор M_{23} матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

****

47.4. Найти минор M_{32} матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

****

47.5. Найти минор M_{33} матрицы $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

****

47.6. Найти минор элемента a_{31} матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

****

47.7. Найти минор элемента a_{12} матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

****

47.8. Найти минор M_{22} матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7
****

47.9. Найти минор M_{31} матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4
****

47.10. Найти минор элемента a_{32} матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

A) –2

B) –1

C) 0

D) 1

E) 2

****

48.1. Найти алгебраическое дополнение A_{12}, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

****

48.2. Найти алгебраическое дополнение A_{21}, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

****

48.3. Найти алгебраическое дополнение A_{13}, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

****

48.4. Найти алгебраическое дополнение A_{31}, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

****

48.5. Найти алгебраическое дополнение A_{23}, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

****

48.6. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{22}, если $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

****

48.7. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{31}, если $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

****

48.8. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{32}, если $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 7\\ 1 & 4 & 3\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$

****

48.9. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{23}, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 4\end{pmatrix}$

****

48.10. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{21}, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$

****

49.1. Определитель равен сумме произведении элементов любой строки на…

A) их соответствующие миноры
B) их алгебраические дополнения
C) соответствующие миноры соседней строки
D) алгебраические дополнения соответствующих элементов главной диагонали
E) миноры соответствующих элементов главной диагонали

****

49.2. Определитель равен сумме произведении элементов любого столбца на…

A) алгебраические дополнения соответствующих элементов первого столбца
B) минора соответствующих элементов первого столбца
C) их алгебраические дополнения
D) их миноры
E) миноры соответствующих элементов главной диагонали

****

49.3. Определитель равен сумме произведении элементов

A) главной диагонали на их миноры
B) главной диагонали на их алгебраические дополнения
C) любого столбца на их миноры
D) любого строки на их миноры
E) любого столбца на их алгебраические дополнения

****

49.4. Определитель равен сумме произведении элементов … на их алгебраические дополнения

A) первой строки
B) первого столбца
C) главной диагонали
D) не главной диагонали
E) любой строки

****

49.5. Определитель равен сумме произведении элементов

A) главной диагонали на их алгебраические дополнения
B) первой строки на их миноры
C) первой строки на их алгебраические дополнения
D) любой строки на их алгебраические дополнения
E) первого столбца на их миноры

****

50.1. Вычислить определитель $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

****

50.2. Вычислить определитель $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

****

50.3. Вычислить определитель $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

****

50.4. Вычислить определитель $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

****

50.5. Вычислить определитель $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

****

50.6. Вычислить определитель $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

****

50.7. Вычислить определитель $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

****

50.8. Вычислить определитель $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

****

50.9. Вычислить определитель $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

****

50.10. Вычислить определитель $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

****

51.1. Среди нижеперечисленных свойств определителя укажите неверное свойство.

A) если некоторые строки определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
B) при перестановке двух столбцов определитель меняет знак на противоположный.
C) если к элементам одной строки, умноженным на любое число, не равное нулю, прибавить соответствующие элементы другой строки, то определитель не изменится.
D) при транспонировании матрицы определитель не меняется.
E) определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его строки линейно зависимы.

****

51.2. Среди нижеперечисленных свойств определителя укажите неверное свойство

A) если столбец и строка определителя линейно зависимы, то определитель равен нулю.
B) определитель не изменится, если к элементам любого столбца прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на некоторое число.
C) общий множитель любой строки можно вынести за знак определителя.
D) при транспонировании матрицы определитель не изменяется.
E) при перестановке двух столбцов определитель меняет знак на противоположный.

****

51.3. Среди нижеперечисленных свойств определителя укажите неверное свойство.

A) если некоторый столбец определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю

B) если некоторые столбец и строка определителя совпадают, то определитель равен нулю
C) сумма произведении элементов любой строки (столбца) на алгебраические дополнения к соответствующим элементам другой строки (столбца) равна нулю
D) общий множитель любой строки можно вынести за знак определителя
E) при перестановке двух строк определитель меняет знак на противоположный
****

51.4. Среди нижеперечисленных свойств определителя укажите неверное свойство
A) если строки определителя линейно зависимы, то определитель равен нулю
B) если столбцы определителя линейно зависимы, то определитель равен нулю
C) если к любой строке прибавить любую другую строку, умноженную на некоторое число, то определитель не изменится
D) при перестановке двух столбцов определитель не меняется
E) если определитель содержит две одинаковые строки, то он равен нулю
****

51.5. Среди нижеперечисленных свойств определителя укажите неверное свойство
A) если к элементам одного столбца прибавить соответствующие элементы другого столбца, то определитель не изменяется
B) при перестановке двух соседних строк определитель меняет знак на противоположный
C) общий множитель любого столбца можно вынести за знак определителя
D) если определитель содержит две одинаковых строки, то определитель равен нулю
E) если строки определителя линейно независимы, то определитель равен нулю
****

51.6. Среди нижеперечисленных свойств определителя укажите неверное свойство
A) если элементы двух строк почленно вычесть, то определитель изменится
B) если некоторый столбец определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю
C) при перестановке двух соседних строк определитель меняет знак на противоположный
D) общий множитель любого столбца можно вынести за знак определителя
E) при транспонировании матрицы определитель не изменяется
****

52.1. Среди нижеперечисленных свойств определителя укажите верное свойство
A) если главная диагональ определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю
B) определитель равен сумме произведении элементов любой строки на их миноры
C) если соответствующие элементы двух строк вычесть, то определитель изменится
D) общий множитель любой строки можно вынести за знак определителя
E) если столбцы и строки определителя линейно независимы, то определитель равен нулю
****

52.2. Среди нижеперечисленных свойств определителя укажите верное свойство
A) если первая строка и первый столбец определителя совпадают, то определитель равен нулю
B) при перестановке двух соседних строк определитель меняет знак на противоположный
C) при транспонировании определитель меняет знак на противоположный
D) если столбцы определителя линейно независимы, то определитель равен нулю
E) если к элементам одной строки, умноженным на некоторое число, прибавить элементы другой строки, то определитель не изменится
****

52.3. Среди нижеперечисленных свойств определителя укажите верное свойство
A) при перестановке соответствующей строки и столбца определитель меняет знак на противоположный
B) при транспонировании определитель меняет знак на противоположный
C) если определитель содержит одинаковые строку и столбец, то он равен нулю
D) если к элементам одной строки, умноженным на некоторое число, прибавить элементы другой строки, то определитель не изменится
E) общий множитель любой строки можно вынести за знак определителя
****

52.4. Среди нижеперечисленных свойств определителя укажите верное свойство
A) определитель равен сумме произведении элементов первой строки на их миноры
B) при перестановке двух столбцов определитель не изменяется
C) если определитель содержит две пропорциональные строки, то он равен нулю
D) если главная диагональ определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю
E) если к любой строке прибавить другой столбец, умноженный на некоторое число, то определитель не изменится
****

52.5. Среди нижеперечисленных свойств определителя укажите верное свойство
A) если две строки определителя линейно зависимы, то определитель равен нулю
B) если две строки сложить, то определитель изменится
C) при транспонировании определитель меняет знак на противоположный
D) если некоторые столбец и строка определителя совпадают, то определитель равен нулю
E) если любые две строки (столбца) определителя поменять местами, то определитель не изменится
****

53.1. При транспонировании матрицы определитель
A) увеличивается в два раза
B) уменьшается в два раза
C) не изменяется

D) меняет знак на противоположный
E) меняет свою величину на обратную
****

53.2. При транспонировании матрицы величина определителя
A) возводится в квадрат
B) увеличивается в два раза
C) меняет знак на противоположный
D) не изменяется
E) обращается в нуль
****

54.1. Квадратная матрица порядка n называется невырожденной, если
A) среди ее столбцов имеются линейно зависимые
B) ее строки линейно независимы
C) среди ее столбцов нет нулевых
D) среди ее строк нет нулевых
E) ни среди ее строк, ни среди ее столбцов нет нулевых
****

54.2. Квадратная матрица порядка n называется невырожденной, если
A) ее столбцы линейно независимы
B) она не содержит строк, соответствующие элементы которых пропорциональны
C) она не содержит столбцов, соответствующие элементы которых пропорциональны
D) среди ее строк нет пропорциональных и среди ее столбцов нет пропорциональных
E) матрица не имеет ни нулевых строк, ни нулевых столбцов
****

55.1. Квадратная матрица является вырожденной тогда и только тогда, когда ее определитель Δ…
A) $\Delta < 0$
B) $\Delta = 0$
C) $\Delta = 1$
D) $\Delta \neq 0$
E) $\Delta > 0$
****

55.2. Квадратная матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда ее определитель Δ…
A) $\Delta < 0$
B) $\Delta > 0$
C) $\Delta = 0$
D) $\Delta \neq 0$
E) $\Delta \neq 1$

****

56.1. Квадратная матрица не имеет обратной, если ее определитель Δ удовлетворяет условию

A) Δ <0
B) Δ=0
C) Δ>0
D) $\Delta \neq 0$
E) Δ

****

56.2. Для квадратной матрицы существует обратная матрица, если ее определитель Δ удовлетворяет условию

A) Δ <0
B) Δ=0
C) Δ>0
D) $\Delta \neq 0$
E) $\Delta \neq 1$

****

57.1. Матрица A не имеет обратной, если она

A) диагональная
B) расширенная
C) транспонированная
D) вырожденная
E) присоединенная

****

57.2. Для матрицы A существует обратная матрица, если матрица A

A) присоединенная
B) невырожденная
C) расширенная
D) диагональная
E) транспонированная

78.1. Найти точку пересечения прямых $3x - y - 1 = 0$ и $2x - y + 1 = 0$.

A) (1; 2)
B) (2; 5)
C) (2; 1)
D) (1; 2)
E) (3; 8)

****

78.2. Найти точку пересечения прямых $2x + 3y - 2 = 0$ и $x + y - 3 = 0$.

A) (4; -2)
B) (1; 0)

C) (-2; 2)
D) (7; -4)
E) (2; 1)
****

78.3. Найти точку пересечения прямых $4x + y - 3 = 0$ и $3x + y - 2 = 0$.
A) (1; -1)
B) (2; -5)
C) (-1; 7)
D) (2; -4)
E) (0; 3)
****

78.4. Найти точку пересечения прямых $x + 5y - 2 = 0$ и $x + 4y - 3 = 0$.
A) (2; 0)
B) (3; 0)
C) (7; -1)
D) (-3; 1)
E) точек пересечения нет
****

78.5. Найти точку пересечения прямых $2x - 5y - 1 = 0$ и $x - 3y - 2 = 0$.
A) (-7; -3)
B) (-2; -1)
C) (5; 1)
D) (8; 2)
E) (3; 1)
****

78.6. Найти точку пересечения прямых $x - 2y - 2 = 0$ и $x - 3y - 1 = 0$.
A) (4; 1)
B) (6; 2)
C) (7; 2)
D) (2; 0)
E) точек пересечения нет
****

78.7. Найти точку пересечения прямых $2x + y - 3 = 0$ и $x + y - 2 = 0$.
A) (2; -1)
B) (2; 0)
C) (3;-3)
D) (3; -1)
E) (1; 1)
****

78.8. Найти точку пересечения прямых $x - y - 4 = 0$ и $2x - y + 2 = 0$.
A) (5; 1)
B) (-6; -10)
C) (-2; -6)
D) (0; -4)
E) точек пересечения нет
****

78.9. Найти точку пересечения прямых $x+y-3=0$ и $2x+3y-2=0$.

A) (0; 3)
B) (1; 0)
C) (1; 2)
D) (7; -4)
E) (-3; 5)

****

78.10. Найти точку пересечения прямых $3x+2y-1=0$ и $x+y-2=0$.

A) (1; -1)
B) (0; 2)
C) (-1; 2)
D) (2; 0)
E) (-3; 5)

****

79.1. Угловой коэффициент прямой $10x+2y-3=0$ равен

A) $\frac{1}{5}$
B) $-\frac{1}{5}$
C) 5
D) -5
E) $\frac{3}{10}$

****

79.2. Угловой коэффициент прямой $2x-3y+4=0$ равен

A) 2/3
B) 3/2
C) -2/3
D) -3/2
E) -4/3

****

79.3. Угловой коэффициент прямой $3x+2y+1=0$ равен

A) 3/2
B) 2/3
C) -3/2
D) -2/3
E) 1/3

****

79.4. Угловой коэффициент прямой $4x+2y-1=0$ равен

A) -1
B) 1/4
C) -1/4
D) 2
E) -2

****

79.5. Угловой коэффициент прямой $3x-y+2=0$ равен

A) -1
B) 3
C) 2/3
D) 2
E) -3
****

79.6. Угловой коэффициент прямой $5x-3y+2=0$ равен
A) 5/3
B) -3/5
C) -5/3
D) 2/5
E) 5
****

79.7. Найдите угловой коэффициент прямой $6x+2y+5=0$
****

79.8. Найдите угловой коэффициент прямой $3x-6y+1=0$.
****

79.9. Найдите угловой коэффициент прямой $8x-2y+3=0$.
****

79.10. Найдите угловой коэффициент прямой $x+5y+2=0$.
****

80.1. Прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ являются параллельными, если
A) $k_1 \cdot k_2 = 1$
B) $k_1 \cdot k_2 = -1$
C) $k_1 = k_2$
D) $k_1 = -k_2$
E) $\frac{k_1}{k_2} = \frac{b_1}{b_2}$
****

80.2. Прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ являются параллельными, если
A) $k_1 + k_2 = 1$
B) $k_1 + k_2 = -1$
C) $k_1 - k_2 = 1$
D) $k_1 - k_2 = 0$
E) $k_1 + k_2 = 0$
****

80.3. Прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ являются параллельными, если
A) $b_1 = b_2$
B) $k_1 = k_2$
C) $\frac{k_1}{k_2} = \frac{b_1}{b_2}$
D) $k_1 \cdot k_2 = -1$

E) $k_1 \cdot k_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$
****

81.1. Прямые $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ являются перпендикулярными, если

A) $k_1 \cdot k_2 = 1$
B) $k_1 \cdot k_2 = -1$
C) $k_1 = k_2$
D) $k_1 = -k_2$
E) $\frac{k_1}{k_2} = \frac{b_1}{b_2}$
****

81.2. Прямые $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ являются перпендикулярными, если

A) $k_1 \cdot k_2 = 1$
B) $k_1 \cdot k_2 = -1$
C) $k_1 + k_2 = 1$
D) $k_1 + k_2 = -1$
E) $k_1 + k_2 = 0$
****

81.3. Прямые $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ являются перпендикулярными, если

A) $b_1 \cdot b_2 = 1$
B) $k_1 \cdot k_2 = b_1 \cdot b_2$
C) $k_1 + k_2 = b_1 + b_2$
D) $k_1 \cdot k_2 = -1$
E) $\frac{k_1}{k_2} = \frac{b_1}{b_2}$
****

82.1. Условие параллельности прямых $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ имеет вид:

A) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
B) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$
C) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$
D) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$
E) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = C_1 \cdot C_2$
****

82.2. Условие параллельности прямых $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ имеет вид

A) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 1$
B) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
C) $A_1 \cdot A_2 = B_1 \cdot B_2 = C_1 \cdot C_2$

D) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

E) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = C_1 \cdot C_2$

****

83.1. Условие совпадения прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ имеет вид:

A) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

B) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

C) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$

D) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$

E) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = C_1 \cdot C_2$

****

83.2. Условие совпадения прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ имеет вид

A) $A_1 \cdot A_2 = B_1 \cdot B_2 = C_1 \cdot C_2$

B) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$

C) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

D) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = C_1 \cdot C_2 = 0$

E) $A_1 - A_2 = B_1 - B_2 = C_1 \cdot C_2$

****

84.1. Условие перпендикулярности прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ имеет вид:

A) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

B) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

C) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$

D) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$

E) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = C_1 \cdot C_2$

****

84.2. Условие перпендикулярности прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ имеет вид:

A) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$

B) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 1$

C) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = C_1C_2$

D) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

E) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$

****

85.1. Угловой коэффициент прямой $Ax + By + C = 0$ равен

A) A/B
B) –A/B
C) B/A
D) –B/A
E) C/(A+B)

****

85.2. Угловой коэффициент прямой $Ax + By + C = 0$ равен

A) B/A
B) C/A
C) –B/A
D) –A/B
E) A/B

****

86.1. Угол φ между прямыми $y = k_1 \cdot x + b$ и $y = k_2 x + b$ определяется из равенства

A) $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 - k_1 \cdot k_2}$

B) $tg\varphi = \dfrac{k_2 + k_1}{1 - k_1 \cdot k_2}$

C) $tg\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 - k_1 \cdot k_2}$

D) $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$

E) $tg\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$

****

86.2. Угол φ между прямыми $y = k_1 \cdot x + b$ и $y = k_2 x + b$ определяется из равенства

A) $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 - k_1 \cdot k_2}$

B) $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$

C) $tg\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$

D) $tg\varphi = \dfrac{k_2 + k_1}{1 - k_1 \cdot k_2}$

E) $tg\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 - k_1 \cdot k_2}$

****

87.1. Прямая $Ax+By+C=0$ будет параллельной оси *OX*, если

A) *A*=0
B) *B*=0
C) *C*=0
D) *A*=1
E) *B*=-1

****

87.2. Прямая $Ax+By+C=0$ будет параллельной оси *OУ*, если

A) *A*=0
B) *B*=0
C) *C*=0
D) *A*=1
E) *B*=-1

****

87.3. Прямая $Ax+By+C=0$ будет проходить через начало координат, если

A) *A*=0
B) *B*=0
C) *C*=0
D) *A*=1
E) *B*=-1

****

87.4. Прямая $Ax+By+C=0$ будет биссектрисой I и III координатных углов, если

A) *A*=-1, *B*=1, *C*=0
B) *A*=*B*=1
C) *B*=-*A*, *C*=0
D) *A*=*B*=-1
E) *A*=*B*, *C*=0

****

87.5. Прямая $Ax+By+C=0$ будет биссектрисой II и IV координатных углов, если

A) *A*=-1, *B*=1, *C*=0
B) *A*=*B*=1
C) *B*=-*A*, *C*=0
D) *A*=*B*=-1
E) *A*=*B*, *C*=0

****

88.1. Вектор нормали к прямой $Ax+By+C=0$ имеет координаты

A) $(A;-B)$
B) $(A;\ B)$
C) $(-A;\ B)$
D) $(B;\ A)$
E) $(-B;\ A)$

****

88.2. Вектор нормали к прямой $Ax+By+C=0$ имеет координаты

A) $(B;\ C)$
B) $(A;\ C)$
C) $(A;\ B)$

D) $(\ A;-C)$
E) $(-B;\ \ A)$
****

88.3. Вектор, параллельный прямой $Ax+By+C=0$, имеет координаты
A) $(\ A;-B)$
B) $(\ A;\ \ B)$
C) $(-A;\ \ B)$
D) $(\ B;\ \ A)$
E) $(-B;\ \ A)$
****

89.1. Укажите прямую, перпендикулярную прямой $y=2x+3$
A) $y=2x-3$
B) $y=-2x+3$
C) $y=0{,}5x+3$
D) $y=-0{,}5x+3$
E) $y=x+1{,}5$
****

89.2. Укажите прямую, перпендикулярную прямой $y=5x-2$
A) $y=5x+1$
B) $y=0{,}5x+3$
C) $y=-0{,}2x+1$
D) $y=-0{,}4x+5$
E) $y=x-0{,}4$
****

89.3. Укажите прямую, перпендикулярную прямой $y=-4x+2$
A) $y=0{,}25x-1$
B) $y=-0{,}25x+2$
C) $y=0{,}5x-1$
D) $y=-0{,}5x+2$
E) $y=4x-2$
****

89.4. Укажите прямую, перпендикулярную прямой $y=4x+1$
A) $y=-4x+1$
B) $y=-4x-1$
C) $y=4x-1$
D) $y=0{,}25x-1$
E) $y=-0{,}25x+1$
****

89.5. Укажите прямую, перпендикулярную прямой $y=-2x-5$
A) $y=2x+1$
B) $y=0{,}5x+3$
C) $y=-2x+5$

D) $y=-0{,}5x+1$
E) $y=-0{,}4x+1$
****

89.6. Укажите прямую, перпендикулярную прямой $y=-5x+1$
A) $y=0{,}2x+7$
B) $y=-0{,}2x-1$
C) $y=5x-1$
D) $y=-5x-1$
E) $y=5x$
****

89.7. Укажите прямую, перпендикулярную прямой $y=0{,}5x+4$
A) $y=-0{,}5x-2$
B) $y=-0{,}5x$
C) $y=2x-1$
D) $y=-2x+1$
E) $y=0{,}5x+0{,}25$
****

89.8. Укажите прямую, перпендикулярную прямой $2x-3y+4=0$
A) $2x+3y-4=0$
B) $3x+2y+4=0$
C) $3x-2y+4=0$
D) $2x-3y-4=0$
E) $-2x+3y+4=0$
****

89.9. Укажите прямую, перпендикулярную прямой $3x-4y+1=0$
A) $4x+3y+5=0$
B) $4x-3y+4=0$
C) $3x+4y+7=0$
D) $3x+4y-1=0$
E) $3x-4y-1=0$
****

89.10. Укажите прямую, перпендикулярную прямой $x+2y+3=0$
A) $x-2y+3=0$
B) $-x+2y+3=0$
C) $2x-y+3=0$
D) $2x+y+3=0$
E) $3x-2y+1=0$
****

90.1. Укажите прямую, параллельную прямой $2x-y+3=0$
A) $y=2x$
B) $2x+y+3=0$
C) $x+2y-1=0$

D) $y=-2x-3$

E) $y=3$

****

90.2. Укажите прямую, параллельную прямой $6x+2y-1=0$

A) $y=3x+1$

B) $y=6x+1$

C) $3x+y+7=0$

D) $6x+y-1=0$

E) $y=\frac{1}{3}x+1$

****

90.3. Укажите прямую, параллельную прямой $x-2y+3=0$

A) $x+2y-3=0$

B) $-2x+4y+1=0$

C) $2x-2y+6=0$

D) $y=2x-3$

E) $y=-2x+3$

****

90.4. Укажите прямую, параллельную прямой $4x+2y+1=0$

A) $y=2x+1$

B) $y=4x+1$

C) $4x+y-1=0$

D) $y=2x$

E) $2x+y-7=0$

****

90.5. Укажите прямую, параллельную прямой $2x-3y+6=0$

A) $3x-2y+6=0$

B) $2x+3y+1=0$

C) $y=-\frac{2}{3}x+2$

D) $y=\frac{2}{3}x$

E) $y=2x+2$

****

90.6. Укажите прямую, параллельную прямой $y=2x+1$

A) $y=-2x-1$

B) $y=-0{,}5x+1$

C) $y=2x-1$

D) $y+2x-1=0$

E) $2x+y+5=0$

****

90.7. Укажите прямую, параллельную прямой $y=0{,}5x-3$

A) $x-2y+7=0$
B) $2x-y+3=0$
C) $2x+y-3=0$
D) $x+2y=0$
E) $x-5y-3=0$

****

90.8. Укажите прямую, параллельную прямой $y=2x+5$

A) $2x+y+5=0$
B) $-2x-y+1=0$
C) $6x-3y+1=0$
D) $x+2y-1=0$
E) $x-2y-5=0$

****

90.9. Укажите прямую, параллельную прямой $y=-x+4$

A) $y=x+1$
B) $x+y-1=0$
C) $y=-0{,}5x+2$
D) $2x-2y-1=0$
E) $y=x$

****

90.10. Укажите прямую, параллельную прямой $y=0{,}2x+1$

A) $2x-y+1=0$
B) $x+5y+1=0$
C) $x-5y-1=0$
D) $y=-5x+2$
E) $y=-2x+3$

Список рекомендуемой литературы

Основная:

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман Н.М. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов. - М.: ЮНИТИ, 2004. – 471 с.
2. Ермаков В.Н. Сборник задач по высшей математике. Учебное пособие. –М.: ИНФРА-М, 2006. – 575 с
3. Ермаков В.Н. Общий курс высшей математике. Учебник. –М.: ИНФРА-М, 2003. – 656 с.
4. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. М., 2002.- 703 с.
5. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов: Учебное пособие. М.: ИНФРА-М.,2001, - 208 с.
6. Палий И.А. Введение в теорию вероятностей. Учебное пособие. М.: Высш.шк., 2005.-175 с
7. Данко П.Е. высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для вузов. Ч.2. – М.: ОНИКС. 2003 – 415 с
8. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. –М.: Издательский центр «Академия», 2005.- 576 с.
9. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистики. - М.: 2000.- 479 с.
10. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для вузов. Ч.1. – М.: ОНИКС. 2003. – 304 с.
11. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М., 2000. - 400 с.

Дополнительная:

1. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей. –М.: Издательский центр «Академия», 2004.-448 с.
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман Н.М. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов. - М.: ЮНИТИ, 2003. – 439 с.
3. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов. М., 1964.-664 с.
4. Выгодский М.Я. Дифференциальное исчисление. М.: Издательство «Наука», 1965.- 591с.
5. Запорожец Г.И.Руководство к решению задач по математическому анализу. М.:Высш.шк., 1964. – 480 с.
6. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. М., 1959. – 300с .
7. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1966. - 870с .