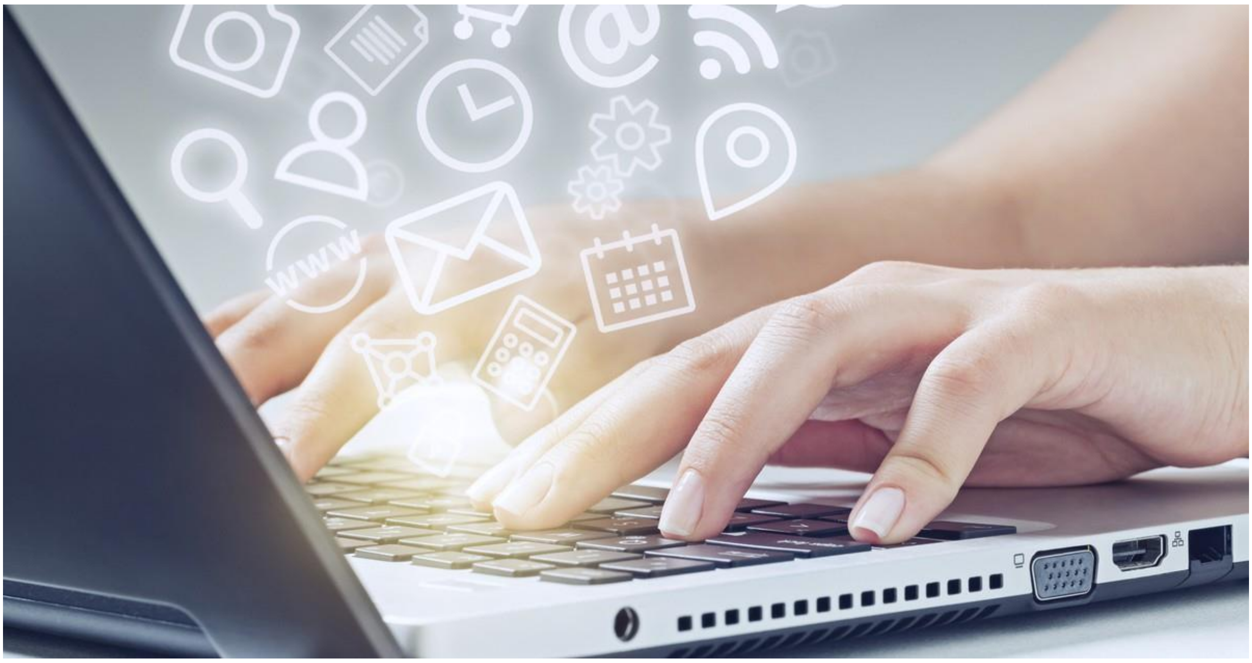
«ҚОСТАНАЙ ЖОҒАРЫ ПОЛИТЕХНИКАЛЫҚ КОЛЛЕДЖІ» КМҚК
КГКП «КОСТАНАЙСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ВЫСШИЙ КОЛЛЕДЖ»

Оқу - әдістемелік кешен

Жобалау және автоматтандырылған ақпаратты өңдеу әдістерін, есептеу техникасы құралдарын қолдану**.**



Костанай, 2018 г

МАЗМҰНЫ

Теориялық бөлім

1бөлім. Кешенді сандар

Тақырып 1. Комплекс сандар.

Комплекс сандар алгебралық теңдеулерді шешу негізінде пайда болды.

Комплекс сан деп z=a+bi түріндегі санды айтамыз, мұндағы a және b –нақты сандар, ал i – жорамал бірлік, $i^2=-1$. a комплекс санның нақты бөлігі, b –оның жорамал бөлігі. Re(z)= a, Im(z) = b

$C=\{a+b_i \mid a,b\in D, i^2=-1\}$- комплекс сандар жиыны. Әрбір нақты сандар комплекс сан деп қабылдауға болады, себебі, $\forall a\in D$ үшін $a=a+0i$.

Комплекс сандар жиыны нақты сандар жиынының кеңеюі $D\subset C$.

z=*a*+*bi* және $\bar{z}$ =*a*–*bi* өзара *түйіндес сандар* деп аталады

1. $z+\bar{z}=2a\in D$
2. $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2\in D$

$z_1=a+bi$ және $z_2=c+di$ сандары тең $\Leftrightarrow a=c,\quad b=d.$

Комплекс сандарының қосындысы комплекс сан болады.

$$z=z_1\pm z_2=(a\pm b_i)+(c+d_i)=(a\pm c)+(b\pm d)i.$$

Қосудың қасиеттері:

$\forall z_1,z_2,z_3\in C$ үшін $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$,

$\exists 0\in C, \forall z\in C$, $z+0=0+z=z$,

$\forall z\in C, \exists -z\in C$, $z+(-z)=(-z)+z=0$,

$\forall z_1,z_2\in C$; $z_1+z_2=z_2+z_1$.

Комплек сандардың көбейтіндісі комплекс сан.

$$z=z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i.$$

Көбейтудің қасиеттері:

$\forall z_1,z_2,z_3\in C$ $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ (ассоциативті),

$\exists 1\in C, \forall z\in C$, $z\cdot 1=1\cdot z=z$ $(1=1+0\cdot i)$,

$\forall z\in C$, $\exists z^{-1}\in C$, $z\cdot z^{-1}=z^{-1}\cdot z=1$ ($z=a+bi$ және $z^{-1}=1/z=(a/(a^2+b^2))+((-b)/(a^2+b^2))i$),

$\forall z_1,z_2\in C$, $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$ (коммутативті).

Қосу мен көбейту амалдары дистрибутивтілік заңымен байланысқан

$$\forall z_1,z_2,z_3\in C\ \left((z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3\right).$$

Комплекс сандардың бөліндісі комплекс сан, $z_2\neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

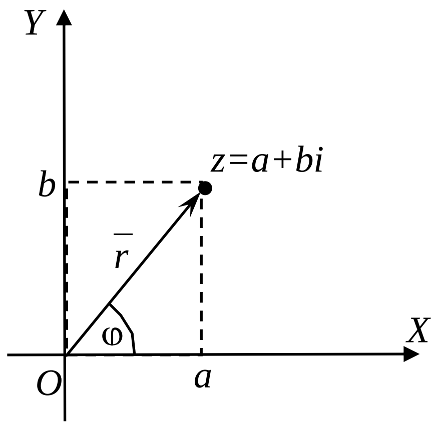
Тақырып 2. Тригонометриялық және кешенді санның көрсеткіш түрі

Комплекс сандарды координат жазықтығының көмегімен жазықтықтың нүктелері ретінде өрнектеуге болады. О*x* - осінің бойына комплекс санның нақты бөлігін *(a=a+0·i),* ал О*y* осінің бойына оның жорамал бөлігін орналастырсақ (*bi=0+bi)* жазықтықта әрбір комплекс сан z(*a*,*b*) нүктесі түрінде анықталады. ΔOAB тік бұрышты

$OA=a,\ OB=b,\ |z|=AB=r\ \ r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

$\frac{OA}{AB}=\frac{a}{r}=\cos\varphi\Rightarrow a=r\cos\varphi$

$\frac{OB}{AB}=\frac{b}{r}=\sin\varphi\Rightarrow r\sin\varphi$



$z=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$- комплекс санның тригонометриялық түрі.

$|z|$ =r - комплекс санның модулі $(r \geq 0)$.

$\arg z = \varphi$ -комплекс санның аргументі.

Тригонометриялық түрдегі комплекс сандарға амалдар қолдану өте жеңіл.
Айталық,

$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$,

$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ болсын.

Онда $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = \varphi_1 + \varphi_2$

Егер $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ болса, онда

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$|z^n| = r^n; \arg z^n = n\arg z = n\varphi,$$

Муавр формуласы $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

Комплекс саннан n^ші дәрежелі түбір табу және 1 ден табылған түбірлердің группасы.

Айталық, $a=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ комплекс саны берілсін. Онда жоғарыда қарастырылған көбейту амалының негізінде n- натурал саны үшін

$$a^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

яғни комплекс санды дәрежелегенде оның модулі сол дәрежеге шығарылады, ал аргументі сол дәреже көрсеткішіне көбейтіледі.

$$a^{-n} = (a^{-1})^n$$

теңдігін пайдаланып , Муавр формуласын бүтін теріс сандар үшін де пайдалануға болады.

a=a+bi комплекс санын оң бүтін n дәрежеге шығару үшін Ньютонның биномын пайдаланған орынды, тек

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i \ \ (k \in N)$$

ескерсек жеткілікті.

Муавр формуласының дербес түрін қарастырайық.

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$

Теңдіктің оң жақ бөлігіне Ньютонның биномды формуласын қолданайық.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + iC_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi -$$
$$iC_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + iC_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - ... =$$
$$\cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - ...) + i(C_n^1\cos^{n-1}\varphi$$
$$\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - ...),$$

Мұндағы $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

теңдігінің сол және оң жақ бөліктерін салыстырсақ,

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - ... =$$
$$\sum(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi,\ \sin n\varphi = C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi -$$
$$C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - ... = \sum(-1)^k\cos^{n-1-2k}\varphi$$
$$\sin^{2k+1}\varphi,$$

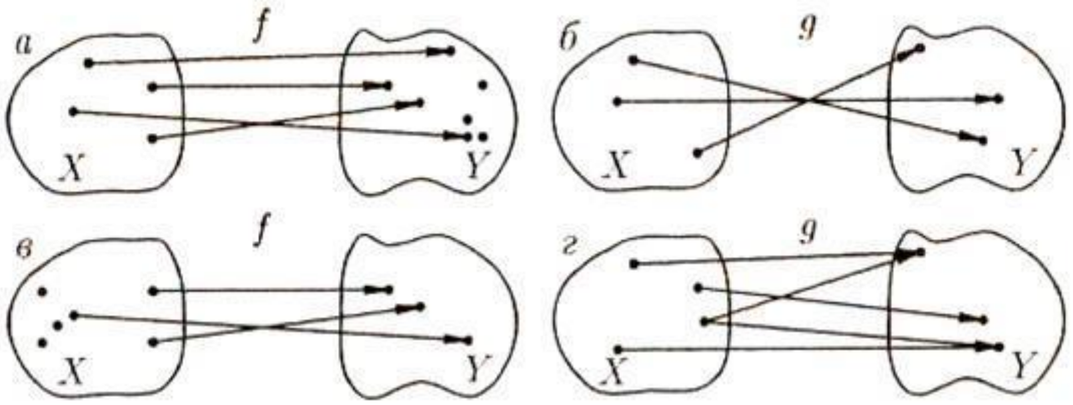
теңдіктерін аламыз.

Сонымен, $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n})$, мұндағы
$k = 0,1,...,n-1$

ға әртүрлі мәндер беру арқылы түбірдің әртүрлі мәндерін аламыз.
Қортынды. Комплекс сандардан n - ші дәрежелі түбірді әрқашан табуға болады және оның әртүрлі n мәні болады.

2 бөлім. Бір айнымалы функция
Тақырып 3. Сандық жиындар. Функция, тапсырма түрлері. Функцияның графигі

Функция ұғымы негізгі математикалық ұғымдардың бірі. Бұл ұғым екі жиынның элементтері арасындағы тәуелділікті (байланысты) орнатумен байланысты.
Екі бос емес *X* және *У* жиындары берілсін. Әрбір $x \in X$ элементіне тек бір ғана $y \in Y$ элементін сәйкес қоятын f сәйкестігі функция деп аталып, $y = f(x)$, $x \in X$ немесе $f : X \to Y$ арқылы белгіленеді. Сонымен қатар, f функциясы *X* жиынын *У* жиынына бейнелейді деп те атайды.



1-сурет - *X* және *У* жиындары

Мысалы, 1.2-суреттегі *а* мен *б* жағдайындағы f және g сәйкестіктері функция болып табылса, в, г жағдайында функция емес. в-жағдайында барлық $x \in X$ элементіне $y \in Y$ элементі сәйкес келмейді, ал г-жағдайында бірмәнділік шарты орындалмайды.
X жиынын f функциясының анықталу облысы деп аталып, $D(f)$ арқылы белгіленеді. Ал барлық $y \in Y$ элементтерінің жиыны f функциясының мәндер жиыны деп аталып, $E(f)$ арқылы белгіленеді.
$f : X \to Y$ функциясы берілсін. Егер X және Y жиындарының элементтері нақты сандар (яғни, $X \subset R, Y \subset R$) болса, f функциясы **сандық функция** деп аталады. Әрі қарай сандық функцияларды қарастырамыз және қысқаша функциялар деп атап, $y = f(x)$ арқылы белгілейтін боламыз. x айнымалысы функцияның аргументі немесе тәуелсіз айнымалы, ал y-функция немесе тәуелді айнымалы (*x*-тан) деп аталады. *x* және *y* шамаларына қатысты, олардың функционалдық тәуелділікте екендігі айтылады. Кейде *y*-тың *x*-тан функционалдық тәуелділігін жаңа (f) әрпін енгізбей-ақ, арқылы да белгілейді.
функциясының болғандағы дербес шешімі арқылы белгіленеді. $y = f(x)$ функциясын беру үшін, *x* арқылы *y*-тың мәні табылатындай ережені көрсету қажет. Функцияны берудің аналитикалық, кестелік, графикалық тәсілдері жиі кездеседі.
Аналитикалық тәсіл: функция бір немесе бірнеше формулалар немесе теңдеулер арқылы беріледі.
$y = f(x)$ функциясының анықталу облысы көрсетілмеген жағдайда формуланың мағынасы болатындай аргументтің барлық мәндерінің жиынымен сәйкес келеді.

Графиктік тәсілмен берілуінің артықшылығы оның көрнектілігінде, ал кемшілігі – нақты еместігінде.
Кестелік тәсіл: функция аргумент мәндерінің және сәйкес функция мәндерінің кестесі түрінде беріледі. Мысалы, тригонометриялық функциялардың мәндерінің кестесі, логарифмдік кестелер.

1. жиынында анықталған $y = f(x)$ функциясы **жұп** деп аталады, егер үшін және шарттары орындалса, ал және шарттары үшін орындалса функция **тақ** деп аталады. Жұп функция графигі осіне, ал тақ функция графигі координата басына қарағанда симметриялы

2. $y = f(x)$ функциясы жиынында анықталған болсын және . Егер кез-келген аргументтерінің мәндері үшін болғанда теңсіздігі орындалса, онда функция жиынында **өспелі** деп аталады; жиынында өспелі, өспейтін, кемімелі, кемімейтін функциялар осы жиында **монотонды**деп аталады, ал өспелі және кемімелі функциялар **қатаң монотонды функциялар** деп аталады. Функция монотонды болатын интервалдар **монотондық интервалдары** деп аталады. Суретте (жоғарыда) көрсетілген функция (-2; 1) және (3; 5) интервалында қатаң монотонды, (1; 3) интервалында монотонды.

3. Барлық үшін теңсіздігі орындалатындай саны табылса, облысында анықталған $y = f(x)$ функциясы осы жиында шектелген деп аталады (қысқаша: $y = f(x)$, облысында шектелген деп аталады). Осындай шектелген функцияның графигі және түзулерінің арасында жататындығы шығады (101-сурет).

4. Егер әрбір үшін және болатындай саны табылса, облысында анықталған $y = f(x)$ функциясы осы **жиында периодты**деп аталады. *T* саны функцияның **периоды** деп аталады. Егер *T*-функциясының периодты болса, онда сандары да периодты (). Мысалы, сандары - функциясының периодтары, ал негізгі (ең кіші, оң) периоды-. Негізінен теңдігін қанағаттандыратын ең кіші оң Т саны негізгі период ретінде алынады.

Тақырып 4. Негізгі қарапайым функциялар. Күрделі функция

1. D жиынында анықталған $y = f(x)$ функциясы **жұп** деп аталады, егер $\forall x \in D$ үшін $-x \in D$ және $f(-x) = f(x)$ шарттары орындалса, ал $-x \in D$ және $f(-x) = -f(x)$ шарттары $\forall x \in D$ үшін орындалса функция **тақ** деп аталады. Жұп функция графигі Oy осіне, ал тақ функция графигі координата басына қарағанда симметриялы

2. $y = f(x)$ функциясы D жиынында анықталған болсын және $D_1 \subset D$. Егер кез-келген $x_1, x_2 \in D_1$ аргументтерінің мәндері үшін $x_1 < x_2$ болғанда $f(x_1) < f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, онда функция D_1 жиынында **өспелі** деп аталады; D_1 жиынында өспелі, өспейтін, кемімелі, кемімейтін функциялар осы жиында **монотонды**деп аталады, ал өспелі және кемімелі функциялар **қатаң монотонды функциялар** деп аталады. Функция монотонды болатын интервалдар **монотондық интервалдары** деп аталады. Суретте (жоғарыда) көрсетілген функция (-2; 1) және (3; 5) интервалында қатаң монотонды, (1; 3) интервалында монотонды.

3. Барлық $x \in D$ үшін $|f(x)| \le M$ теңсіздігі орындалатындай $M > 0$ саны табылса, D облысында анықталған $y = f(x)$ функциясы осы жиында шектелген деп аталады (қысқаша: $\forall x \in D \Rightarrow |f(x)| \le M$ $\exists M > 0$ $y = f(x)$, $x \in D$ D облысында шектелген деп аталады). Осындай шектелген функцияның графигі $y = -M$ және $y = M$ түзулерінің арасында жататындығы шығады (101-сурет).

4. Егер әрбір $x \in D$ үшін $(x+T) \in D$ және $f(x+T) = f(x)$ болатындай $T > 0$ саны табылса, D облысында анықталған $y = f(x)$ функциясы осы **жиында периодты**деп

аталады. *T* саны функцияның **периоды** деп аталады. Егер *T*-функциясының периодты болса, онда $m \cdot T$ сандары да периодты ($m = \pm 1; \pm 2, \ldots$). Мысалы, $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$ сандары - $y = \sin x$ функциясының периодтары, ал негізгі (ең кіші, оң) периоды- $T = 2\pi$. Негізінен $f(x+T) = f(x)$ теңдігін қанағаттандыратын ең кіші оң Т саны негізгі период ретінде алынады.

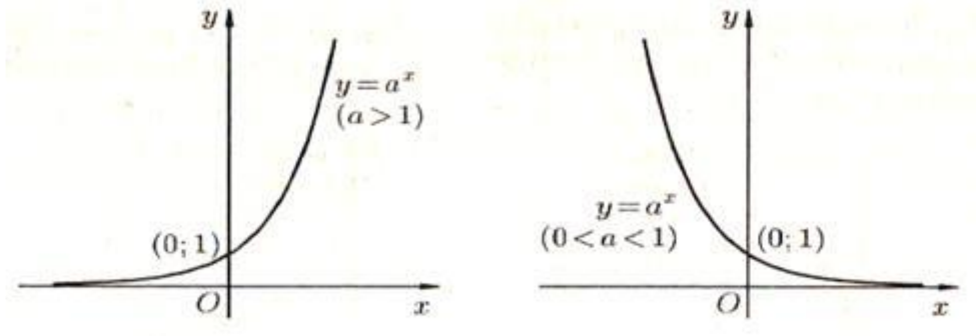
Анықталу облысы D, мәндер жиыны *E* болатын $y = f(x)$ функциясы берілсін. Егер $y \in E$ мәніне $x \in D$ жалғыз мәні сәйкес келсе анықталу облысы E, мәндер жиыны D болатын $x = \varphi(y)$ функциясы анықталған. Осылай анықталған $\varphi(y)$ функциясы $f(x)$ функциясына кері деп аталып, $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$ түрінде жазылады. $y = f(x)$ және $x = \varphi(y)$ түріндегі функцияларды өзара кері деп аталады. $y = f(x)$ функциясына кері $x = \varphi(y)$ функциясын табу үшін х-ке қатысты $f(x) = y$ теңдеуін шешу жеткілікті болады (егер мүмкін болса).

Кері функция анықтамасы бойынша, $f(x)$ функциясының кері функциясы болады, сонда тек қана сонда егер $f(x)$ функциясы D және E жиындарының арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнатса. Осыдан әрбір **қатаң монотонды функцияның кері функциясы** болатының шығады. Егер функция өссе (кемісе), кері функция да өседі (кемиді).

$y = f(u)$ функциясы D жиынында $u = \varphi(x)$ функциясы D_1 жиынында анықталсын. Сонымен қатар, $\forall x \in D_1$ үшін сәйкес мән $u = \varphi(x) \in D$ болсын. Сонда D_1 жиынында анықталатын $u = f(\varphi(x))$ функциясы *x*-тан тәуелді күрделі функция (немесе берілген функциялардың суперпозициясы немесе функциялардан алынған функция) деп аталады. $u = \varphi(x)$ айнымалысын күрделі функцияның аралық аргументі деп аталады.

Келесі функциялар негізгі элементар функциялар деп аталады:

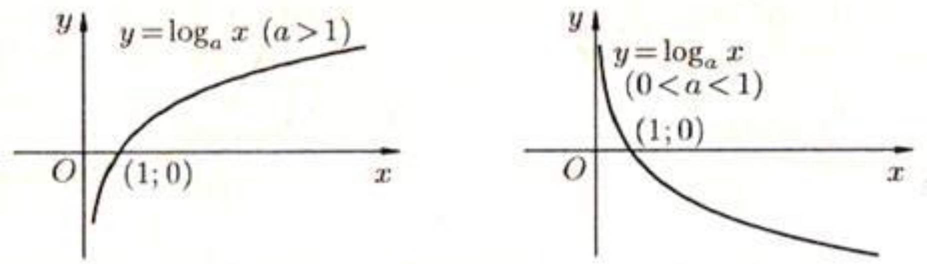
1) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ *көрсеткіштік* функциясы 1.3.-суретте көрсеткіштік функциялар көрсетілген.



1.3.-сурет - $y = a^x$ көрсеткіштік функция

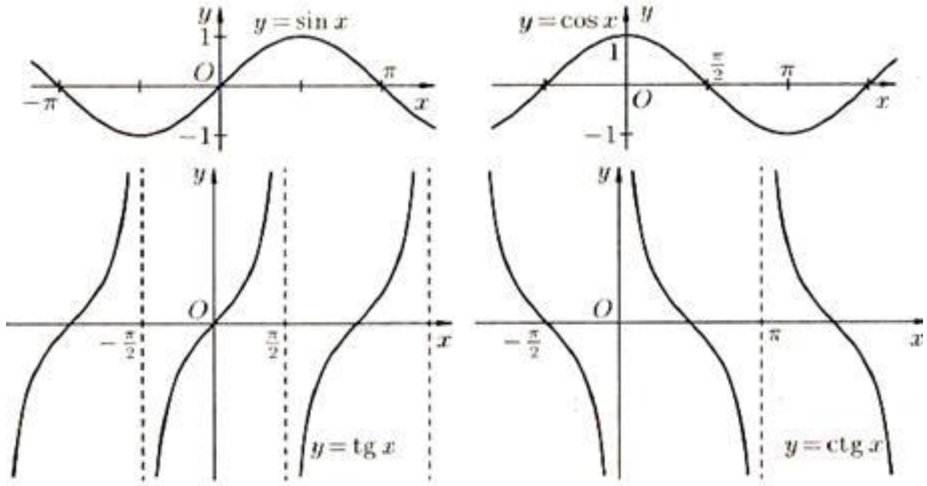
2) $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$ *дәрежелік* функциясы

3) $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ *логарифмдік* функциясы (1.4.-сурет)



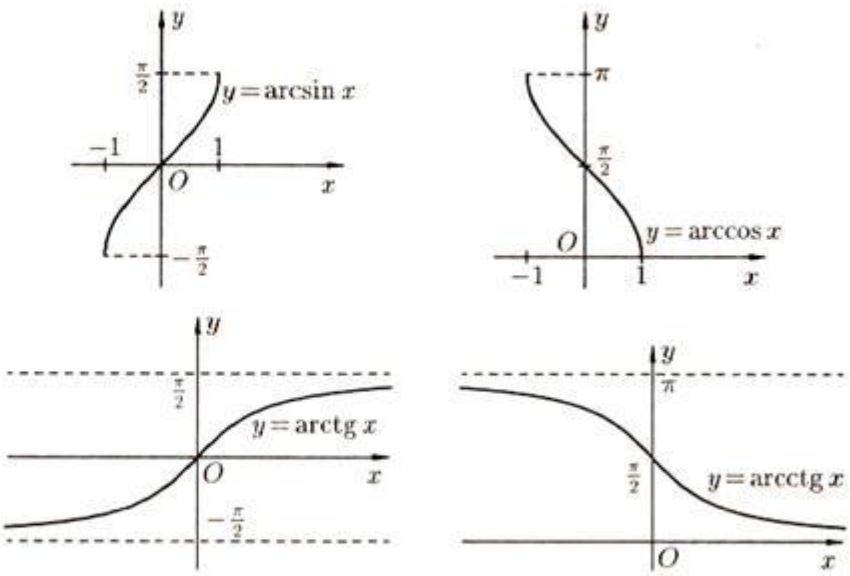
1.4.-сурет - $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ логарифмдік функция

4) $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$ *тригонометриялық* функциялары. Тригонометриялық функциялар графиктер түрлері 1.5-суретте көрсетілген.



1.5-сурет - $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$ тригонометриялық функциялары

5) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ $y = arctgx$ $y = arcctgx$ *кері тригонометриялық* функциялары 1.6-суретте көрсетілген.



1.6-сурет - $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ $y = arctgx$ $y = arcctgx$ кері тригонометриялық функциялары

3 бөлім. Функция шегі және үзіліссіздігі
Тақырып 5. Тізбектің шегі

Натурал сандар жиынында анықталған f функциясының мәндерін сан тізбегі немесе тізбек деп атайды.

Егер $f(n)=a_n$ тізбегі берілсе, оны $\{a_n\}$ символымен белгілейді немесе былай жазады: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Анықтама 1. Егер кез келген n үшін $a_{n+1} \geq a_n$ теңсіздігі орындалса, онда $\{a_n\}$ тізбегін өспелі дейді.

Анықтама 2. егер кез келген n үшін $a_{n+1} \leq a_n$ теңсіздігі орындалса, онда $\{a_n\}$ тізбегін кемімелі дейді.

Анықтама 3. егер кез келген n үшін $(a_n) \leq M$ теңсіздігін қанағаттандыратындай оң M саны табылса, онда $\{a_n\}$ тізбегін шектелген деп атайды.

Анықтама. Егер әрбір алдын ала берілген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес N натурал саны табылса және кез келген $n > N$ нөмірлері үшін $|a_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда a санын $\{a_n\}$ тізбегінің шегі деп атайды. Жазылуы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ немесе $n \to \infty$ ұмтылғанда $a_n \to a$ деп жазады.

Мысалы, $\frac{5}{7}; \frac{7}{10}; \frac{9}{13}; \frac{11}{16}; ... \frac{2n+3}{3n+4}; ...$ тізбектің шегін табу керек.

Шешімі. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{4}{n}} = \frac{2}{3}$ болады.

Анықтама. Шегі бар тізбекті жинақты деп, шегі жоқ тізбекті жинақсыз деп атайды. Егер тізбектің шегі бар болса, онда тізбек шектелген болады. Жинақты тізбектің бір ғана шегі бар. Жоғары (төменгі) жағынан шектелген өспелі (кемімелі) тізбектің шегі бар.

Анықтама. Егер тізбектің шегі нөльге тең болса, онда мұндай тізбекті шексіз аз деп атайды.

Теорема 1. Екі шексіз аз тізбектердің қосындысы шексіз аз болады.

Теорема 2. Шектелген тізбектің шексіз аз тізбекке көбейтіндісі шексіз аз тізбек болады.

Анықтама. Егер кез келген $A > 0$ саны үшін N нөмірі табылып, барлық $n > N$ үшін $(a_n) > A$ теңсіздігі орындалса, онда $\{a_n\}$ тізбегін шексіз үлкен шама дейді және былай жазады: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Теорема 3. Егер $\{a_n\}$ тізбегі, $a_n \neq 0$ шексіз үлкен болса, онда $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ тізбегі шексіз аз және керісінше $\{a_n\}$ тізбегі шексіз аз болса, онда $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ тізбегі шексіз үлкен.

Теорема 4. Егер $\{a_n\}$ және $\{b_n\}$ тізбектері жинақты болса, онда

1) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$;

2) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$;

3) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \quad (\lim b_n \neq 0)$;

4) $\lim(c\cdot a_n)=c\cdot\lim a_n$.

Егер $a_n \le b_n$, онда $\lim a_n \le \lim b_n$

Анықталмаған өрнектер. Ақырлы шегі бар шамаларға арифметикалық амалдар қолдану нәтижесінде шекке көшкенде ешбір мазмұны жоқ, анықталмаған өрнекте деп аталатын, өрнектер шығуы мүмкін. Ондай жағдайларда айнымалы шаманың шектік мәнін табуға көшпес бұрын шыққан өрнектерді түрлендіру керек.

1) берілген айнымалылар x_n мен y_n үшін $\lim x_n=0$ және $\lim y_n=0$ $(y_n\ne 0)$ болсын. Онда олардың қатынасының $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ шегі $\left(\lim\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық болады. Себебі бұл екі айнымалының өзгеру заңына байланысты, бұл шек неше түрлі мәнге ие болуы мүмкін немесе шектің болмауы да мүмкін.

Мысалы, егер $x_n=\dfrac{1}{n^3}$, $y_n=\dfrac{1}{n}$ болса, олардың қатынасының $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ шегін табу керек. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$. Сонда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$ яғни $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық шығады. Бірақ, $\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{1}{n^3}:\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n^2}$. Демек, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

1.1 Ақырсыз аз шамаларды салыстыру. Ақырсыз аз $\{\alpha_n\}$ және $\{\beta_n\}$ шамалары берілсін $(\alpha_n\to 0,\beta_n\to 0)$. Осы шамаларды салыстыру денеміз $\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ қатнасының шегін табу. Бұл қатынас $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ түріндегі анықталмағандық деп аталады.

Анықтама 5 Егер ақырсыз $\{\alpha_n\}$ және $\{\beta_n\}$ шамалары үшін:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}=0$ болса, онда $\{\alpha_n\}$ шамасы β_n-мен салыстырғанда **жоғарғы ретті ақырсыз аз шама** деп аталады, ал β_n шамасы α_n-мен салыстырғанда **төменгі ретті ақырсыз аз шама** деп аталады.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}=A$, $A\ne 0$ болса, онда α_n мен β_n **бір ретті ақырсыз аз шамалар** деп аталады.

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}=1$ болса, онда α_n мен β_n **эквиваленттi** ақырсыз аз шамалар деп аталады.

Жиі қолданылатын шектер

$\lim\limits_{x_n\to 0}\dfrac{\sin x_n}{x_n}=1$ – бірінші тамаша шек.

$\lim\limits_{x_n\to 0}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$ – екінші тамаша шек.

$\alpha_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n=1,2,\ldots$, тізбегі үшін $2<\alpha_n<3$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан $\{\alpha_n\}$ жоғарыдан шенелген өспелі тізбек.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

шегі бар болады. e санының жуық мәні $e\approx 2{,}72$ болатыны дәлелденген. Бұл сан Непер саны деп аталады.

Тақырып 6. Функция шегінің қажетті және жеткілікті шарттардың болуы

x_0 нүктесінің δ - маңайы табылып, ($x_0-\delta$ $x_0+\delta$), осы маңайдағы барлық $x \neq x_0$ үшін $f(x)>f(x_0)$ теңсіздігі орындалса, x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының минимум нүктесі деп, ал $f(x)<f(x_0)$ теңсіздік орындалса, x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының**максимум нүктесі**деп аталады.
Функцияның минимум және максимум нүктелерін**экстремум нүктелері**деп атайды. Осы нүктелердегі функция мәндерін **функция экстремумдары**дейді.
2-суретте $y=f(x)$ функциясының максимум нүктелері x_1және x_3, ал минимум нүктелері x_2 және x_4 . Суреттен x_4нүктедегі минимум x_1 нүктедегі максимумнан үлкен. Бұл функцияның экстремум ұғымы нүктенің қандай да бір δ - маңайында ғана анықталатындығымен түсіндіріледі. Сондықтан да, функция экстремуы дегеннің орнына көбіне функцияның локальді экстремумы дейді.

н н=а(ч) ф ч1 ч2 ч3 ч4 и ч 2-сурет

Анықтама.x_0 нүктесінің δ - маңайы табылып, ($x_0-\delta$ $x_0+\delta$), осы маңайдағы барлық $x \neq x_0$ үшін $f(x)>f(x_0)$ теңсіздігі орындалса**Экстремумның қажетті және жеткілікті шарты**
Экстремумның бар болуының қажетті шартын Ферма теоремасы береді.
Ферма теоремасы. x_0 нүктесі $y=f(x)$ функциясының экстремум нүктесі болып және осы нүктедегі функция туындысы бар болса, онда $f'(x_0)$ =0.Бұл теореманың геометриялық мағнасы: теорема шартын қанағаттандыратын нүктеде функция графигіне жүргізілген жанама абсцисса осіне параллель болады.
Экстремумның бірінші жеткілікті шарты. **$y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз және қандай да бір δ - маңайында функция туындысы бар болсын (x_0 нүктесінде туынды болмауы мүмкін). Онда,**

1) егер x аргумент x_0 нүкте арқылы өткенде $f'(x)$ таңбасын оңнан теріске өзгертсе, онда x_0 нүкте функцияның максимум нүктесі болады;

2) **егер x аргумент x_0 нүкте арқылы өткенде $f'(x)$ таңбасын терістен оңға өзгертсе, онда x_0 нүкте функцияның минимум нүктесі болады;**

3) **егер x аргумент x_0 нүкте арқылы өткенде $f'(x)$ таңбасын өзгертпесе, онда x_0 нүкте функцияның экстремум нүктесі емес.**

Жоғары кестеде қарастырылған функцияларды осы жеткілікті шарт бойынша зерттесек. х аргумент $x_0 = 0$ нүкте арқылы өткен кездегі $f'(x)$ таңбасын анықтасақ, мынадай толықтыру аламыз:

$y = 1 - x^2$	$y = x^3$	$y = \lvert x \rvert$	$y = \sqrt[3]{x}$
Туынды таңбасы			
y' :"+" $\rightarrow$ "-" $x_0=0$	y' : "+" $\rightarrow$ "+" $x_0=0$	y' : "-" $\rightarrow$ "+" $x_0=0$	y' : "+" $\rightarrow$ "+" $x_0=0$
$x_0=0$ - максимум нүктесі	Экстремум жоқ	$x_0=0$ - минимум нүктесі	Экстремум жоқ

Экстремумның екінші жеткілікті шарты. **y=f(x) функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз және қандай да бір δ - маңайында екі рет дифференциалдансын. Сонымен қатар $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) \neq 0$ болса, онда**

1) егер $f''(x_0) < 0$ болса, онда x_0 нүкте f(x) функциясының максимум нүктесі болады;

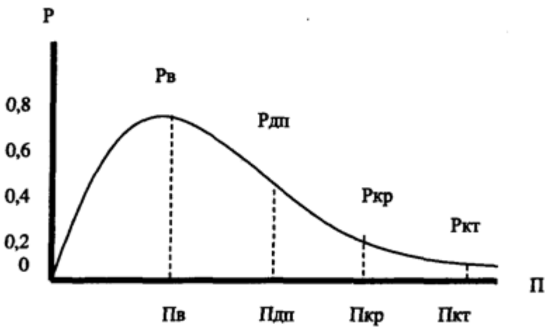
2) **егер $f''(x_0) > 0$ болса, онда x_0 нүкте f(x) функциясының минимум нүктесі болады**

Тақырып 7. Белгісіздіктің түрлері және оларды ашып көрсету ережелері, е саны

Нәтижелі талдауға және басқарушылық шешімді қабылдауға алдымен тәуекел аймақтарын белгілеп алу қажет. Тәуекел аймағы деп ортақ шығынның кейбір аймақтары аталады, ол шекте шығын тәукелдің құрылған деңгейінің мәнділігінен асырылмайды. Талдау әрекетінде тәуекелдің жіберілетін, дағдарыс және апатық аймақтары бөлінеді. Жіберілетін тәуекел аймағында –шығындар күткен кірістен асырылмайды және кәсіпкерді алынбаған кіріс үрейлендіреді. Жіберілетін тәуекелдің шекті аймағында кәсіпкерлік әрекеттің берілген түрі өзінің тұтастығын сақтайды. Аймақ шекарасы – шығын деңгейі кірістің тең есебі.

Дағдарыс тәуекел аймағы шығынның күтілген кірістің шамасынан жоғары және өткізілімнен толық үстінен түсім шамасына дейін қауіптілігімен сипатталады, өйткені іске салынған бүкіл қаржыны қайтаруға және жоғарлатуға әкеледі.

Тәуекелдің апаттық аймағы бұл – шығын аймағы, ол кәсіпкердің мүлік жағдайына тең шамасына жетеді.



11 сурет - Шығынның белгілі деңгейінің қисық ықтималдылығы.

Тәуекел критериі шығынның белгілі деңгейінің ықтималдылығы болады, немесе шығын (тәуекел) одан жоғары болды.

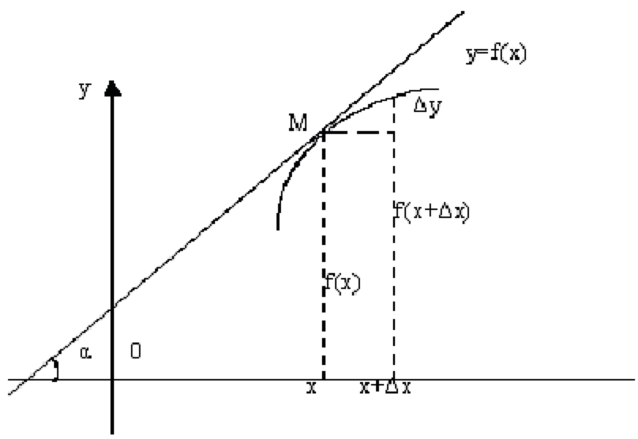
$П_в$ шығынның шамасы – шығынның аса ықтимал деңгейі. Олардың $Р_в$ пайда болу ықималдылығы – тәуекелді аса ықтимал деңгейі. $П_в$ шамасы абсалюттік мәнінің үстіне түсетін түсім сомасы есебінен шығын үлесінде анықталуы мүмкін.

$Р_{жш}$ - шекті жіберілетін тәуекел ықтималдылығы, $П_{жш}$ шығындары күтілетін кіріс сомасына тең. $Р_{дт}$ - дағдарыс шығынның ықтималдылығы, ал осы шығын шамасы ($П_{дт}$) үстіне түсетін кірістің толық есептік сомасы. $Р_а$ – апаттық тәуекелдің ықтималдылығы, апаттық шығын ($П_а$) шамасы кәсіпорынның барлық жағдайына тең.

4 бөлім.Туынды және дифференциалды

Тақырып 8. Функция айналымы.Туынды және оның геометриялық және физикалық мағынасы

Функцияның туындысы



11.1 - сурет – y=f(x) функциясының M нүктесінде жүргізілген жанама

Белгілі бір облыста y=f(x) функциясы және оның анықталу облысынан бір нүкте берілсін.

1. Аргументке Δx өсімшесін береміз және оған сәйкес өскен f(x+Δx) мәнін табамыз.
2. Функцияның өсімшесін табамыз: Δy=f(x+Δx) - f(x).
3. Функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасын табамыз: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
4. Функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғандағы шегін табамыз (11.1):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (11.1)$$

Анықтама. Функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғандағы шегі бар болса, онда ол шекті берілген функцияның туындысы деп атайды (11.2)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (11.2)$$

Туынды y' немесе $f'(x)$, немесе $\frac{dy}{dx}$ деп белгіленеді. Туынды табуды дифференциалдау деп атайды.

$y=f(x)$ функциясының туындысының геометриялық қасиеті, осы функцияның графигіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті.

Туындының механикалық мағынасы кез келген уақыт аралығындағы түзу сызықты қозғалыстың лездік жылдамдығы (11.3):

$$V_{лезд.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t). \qquad (11.3)$$

Жалпы алғанда, кез келген функцияның туындысы оның жылдамдығының өзгерісін көрсетеді.

Бізге қисық $y=f(x)$ теңдеуі арқылы берілсін және сол қисықта жататын $M_0(x_0; y_0)$ нүктесі берілсе, онда $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ берілген қисыққа берілген нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуі болады (11.4)

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (11.4)$$

Қисыққа жүргізілген нормаль деп, оған жүргізілген жанамаға жанасу нүктесі арқылы жүргізілген перпендикулярды айтады (11.5):

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (11.5)$$

Бұл теңдеу қисыққа жүргізілген нормальдің теңдеуі.

Тақырып 9. Дифференциалдаудың кестесі мен ережесі

Туынды ұғымы математиканың негізгі ұғымдарының бірі. Математика, физика және т.б. ғылымдардың бірқатар есептерін шешуде , әсіресе әртүрлі процестердің жылдамдықтарын қарастырғанда туынды кеңінен пайдаланады.

Түзу сызықты қозғалыс жылдамдық

М материалдық нүктесі (қандай да дене) қандай да түзудің бойымен бірқалыпсыз қозғалсын делік. t уақытының әрбір мәніне қандай да таңдалған О нүктесіне дейінгі $OM = S$ анықталған арақашықтығы сәйкес келеді. Бұл арақашқтық өткен t уақытынан тәуелді, яғни $S = S(t)$.

Бұл теңдікті нүктенің қозғалыс заңы деп атайды.

Орташа жылдамдық Δt мәнінен тәуелді: Δt азайған сайын орташа жылдамдық берілген t уақыт мезетіндегі нүктенің қозғалыс жылдамдығын нақтырақ көрсетеді. Δt уақыт аралығы нөлге ұмтылғандағы қозғалыстың орташа жылдамдығының шегі берілген уақыт мезетіндегі нүктенің қозғалыс жылдамдығы (сәттік жылдамдық) деп аталады. Осы жылдамдықты V арқылы белгілеп, төмендегіні аламыз

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{2.1}$$

немесе $$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Қисыққа жүргізілген жанама

Берілген М нүктесінде берілген **қисыққа жүргізілген жанама** деп екінші M_1 қиылсу нүктесі шексіз қисықтың бойымен М нүктесіне жақындаған MM_1 қиюшысының MT шектік орын алады. $M(x;y)$ нүктесінде вертикаль емес жанамасы бар $y = f(x)$ үзіліссіз қисығының графигін қарастырайық. Оның $k = tg\alpha$ бұрыштық коэффициентін табайық ($\alpha -$ жанаманың Ox осімен жасайтын бұрышы). Ол үшін М нүктесі мен абсциссасы $x + \Delta x$ болатын M_1 нүктесі арқылы қиюшы жүргізейік. φ арқылы MM_1 қиюшысы мен Ox осі арасындағы бұрышты белгілейік. Қиюшының бұрыштық коэффициенті

$$k_{сек} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

тең болады.

$\Delta x \to 0$ болғанда функция үзіліссіздігіне сәйкес Δy өсімшесі де нөлге ұмтылады. Сондықтан M_1 нүктесі қисық бойымен M нүктесіне шексіз жақындайды, ал MM_1 қиюшысы M нүктесінің жанында бұрылып, жанамаға ауысады. Ал бұрыш $\varphi \to a$, яғни $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$. Сәйкесінше, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$. Сондықтанда, жанаманың бұрыштық коэффициенті мынаған тең.

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2.2}$$

$y = f(x)$ функциясы қандай да $(a;b)$ интервалында анықталсын. Келесі амалдарды орындайық:

- $x \in (a;b)$ аргументіне Δx: $x + \Delta x \in (a;b)$ өсімшесін берейік;
- сәйкес $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ функция өсімшесін табайық;
- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасын құрайды;
- осы қатынастың $\Delta x \to 0$ болғандағы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ шегін табамыз.

Егер осы шек бар болса, оны $f(x)$ функциясының туындысы деп атап, f_x', $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, y_x' символдарының бірі арқылы белгілейді.

$y = f(x)$ функциясының x_0 **нүктесіндегі туындысы** деп аргумент өсімшесі 0-ге ұмтылғандағы функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының шегі аталады.

Сонымен, анықтама бойынша:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2.3)$$

немес

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$f(x)$ **функциясының туындысы** – сол функциядан алынған қандай да $f'(x)$ функциясы. $(a;b)$ интервалының әрбір нүктесінде туындысы болатын $y = f(x)$ функциясы осы интервалда **дифференциалданатын функция** деп аталады, функция туындысын табу амалы – **дифференциалдау амалы** деп аталады. $y = f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесіндегі туындысының мәні $f'(x_0)$, $y'\big|_{x=x_0}$ немесе $y'(x_0)$ арқылы белгіленеді.

$y = f(x)$ функциясы қандайда физикалық процесті көрсетсе, онда y' **туындысы осы процестің өту жылдамдығын көрсетеді**. Бұл – **туындының физикалық мағынасы**.

Қисыққа жүргізілген жанама туралы есепте жанаманың бұрыштық коэффициенті $k = tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ табылған болатын. Осы теңдікті $f'(x) = tg\alpha = k$ түрінде жазамыз, яғни x нүктесіндегі $f'(x)$ туындысы $y = f(x)$ **функциясының графигіне абциссасы x-ке тең нүктедегі жүргізілген жанамасының бұрыштық коэффициентіне тең**.

Егер М жанасу нүктесінің координатасы $(x_0; y_0)$ болса, онда жанаманың бұрыштық коэффициенті $k = f'(x_0)$ тең. Берілген нүкте арқылы берілген бағытта өтетін түзудің теңдеуінің ($y - y_0 = k(x - x_0)$) көмегімен жанаманың теңдеуін жазуға болады:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (2.4)$$

Жанамаға жанасу нүктесінде жүргізілген перпендикуляр қисыққа жүргізілген нормаль деп аталады. Нормаль жанамаға перпендикуляр болғандықтан, оның бұрыштық коэффициенті мынаған тең: $k_{норм} = -\frac{1}{k_{жан}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Сондықтан нормальдың теңдеуі мынандай түрде жазылады: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ (егер $f'(x) \neq 0$ болса).

Теорема 1. Егер функция қандай да нүктеде дифференциалданса, онда функция сол нүктеде үзіліссіз .

$u = u(x)$ және $v = v(x)$ функциялары қандай да $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын болсын.

Теорема 2. Екі функцияның қосындысының (айырмасының) туындысы осы функциялардың туындыларының қосындысына (айырмасына) тең: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Теорема 3. Екі функцияның көбейтіндісінің туындысы бірінші көбейткіштердің туындысы мен екінші көбейткіштің көбейтіндісіне бірінші көбейткішпен екінші көбейткіштердің туындысының көбейтіндісінің қосындысына тең: $(u \cdot v) = u'v + uv'$.

Теорема 4. $\frac{u(x)}{v(x)}$ екі функцияның бөліндісінің $v(x) \neq 0$ болғандағы туындысы алымы алымының туындысының бөліміне көбейтіндісі плюс алымы мен бөлімінің туындысы болатын, бөлімі бөлімінің квадраты болатын бөлшекке тең: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

$y = f(u)$ және $u = \varphi(x)$ болсын. Сонда $y = f(\varphi(x)) -$ аралық u аргументті және x тәуелсіз аргументті күрделі функция.

Теорема 5. Егер $u = \varphi(x)$ функциясының x нүктесінде u'_x туындысы, ал $y = f(u)$ функциясының сәйкес $u = \varphi(x)$ нүктесінде y'_u туындысы бар болса, онда $y = f(\varphi(x))$ күрделі функциясы x нүктесінде y'_x туындысы бар және ол $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ формуласы арқылы табылады.

Теорема 6. $y = f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалында қатаң монотонды болса және осы интервалдық кез келген нүктесінде 0-ге тең емес $f'(x)$ туындысы бар болса, онда берілген функцияға кері $x = \varphi(y)$ функциясы да сәйкес нүктелерде $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ немесе $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ теңдіктерімен анықталатын $\varphi'(y)$ туындысы бар болады.

Осылайша, кері функцияның туындысы берілген функцияның туындысының кері шамасына тең.

Дифференциалдау ережелері

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v \pm u \cdot v'$, дербес жағдайда $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, дербес жағдайда $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$;
4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, егерде $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
5. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, егерде $y = f(x)$ және $x = \varphi(y)$.

Дифференциалдау формулалары

1. $(c)' = 0$;
2. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, дербес жағдайда $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;

3. $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'$, дербес жағдайда $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$;

4. $\left(\log_{a} u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, дербес жағдайда $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

5. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$;

6. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$

7. $\left(tg u\right)' = \dfrac{1}{\cos^{2} u} \cdot u'$;

8. $\left(ctg u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} u} \cdot u'$

9. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}} \cdot u'$;

10. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}} \cdot u'$

11. $\left(arctg\, u\right)' = \dfrac{1}{1+u^{2}} \cdot u'$;

12. $\left(arcctg\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^{2}} \cdot u'$

13. $\left(sh u\right)' = ch u \cdot u'$;

14. $\left(ch u\right)' = sh u \cdot u'$

15. $\left(thu\right)' = \dfrac{1}{ch^{2} u} \cdot u'$;

16. $\left(cthu\right)' = -\dfrac{1}{sh^{2} u} \cdot u'$

Туындыны есептеу үшін дифференциалдау ережелері мен формулаларын, негізгі элементар функциялардың туындыларын табу формулаларын білу керек, жаттығуларды орындау барысында осы ережелерді қатаң сақтау керек.

Тақырып 10. Туынды және кері функция

Сонымен, $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде және оның маңайында анықталған болсын.

Анықтама. Аргумент x -тің x_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta x = x - x_0$ айырмасын атайды.

Анықтама. $y = f(x)$ функцияның x_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ айырмасын айтады.

Анықтама.Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің маңайында анықталған және $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ болса, онда ол x_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады. Шындығында да $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(f(x) - f(x_0)\right) = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы деп ақырлы шегін айтады.

Бұл туынды мына символдардың бірімен белгіленеді: $y'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $y'\big|_{x=x_0}$, $\frac{df}{dx}\big|_{x=x_0}$, $f'(x_0)$.

Егер $y=f(x)$ функциясының (a,b) интервалының әрбір нүктесінде туындысы болса, онда оны осы интервалда дифференциалданады дейді. Туындыны табу амалын дифференциалдау дейді.

Теорема. Егер $y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын функция болса, онда ол бұл нүктеде үзіліссіз болады.
Ескерту: теорема керісінше дұрыс емес.

Туындының геометриялық маґанасы. *Туындының геометриялық мағынасы:* $f'(x_0)$ *туындысы* $y=f(x)$ *функциясының графигіне* $(x_0, f(x_0))$ *нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті болады. Осы жанаманың теңдеуін былай жазады:* $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ *.Туындының механикалық мағынасы. Егер* $x-$ *айнымалысын уақыт деп есептеп,* $f(x)$ *- функциясы дененің жүрген жолын сипаттаса, онда* $f'(x)$ *дененің* $x-$ *уақытындағы жылдамдығын білдіреді.*

Дифференциалдаудың негізгі ережелері. Туындының анықтамасын пайдаланып, кейбір элементар (қарапайым) функциялардың туындыларын есептейміз.

1. Көрсеткішті функция $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$. $\left(a^x\right)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a$. Дербес жағдайда $\left(e^x\right)'=e^x\ln e=e^x$.

2. Тригонометриялық функциялар $y=\sin x$, $y=\cos x$.

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

Дәл осылай $(\cos x)'=-\sin x$.

2. Дәрежелік функция $y=x^\alpha$. $\left(x^\alpha\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$

Дербес жағдайда, $\left(x^2\right)'=2\cdot x^{2-1}=2x$, $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-1x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}$.

Теорема 1.(қосындыны, көбейтіндіні және қатынасты дифференциалдау ережелері). Егер $y=u(x)$ және $y=v(x)$ дифференцианалданатын болса, онда бұл функциялардың қосындысы, көбейтіндісі және қатынасы да (қатынастың бөлімі $v(x)\neq 0$) осы нүктеде дифференцианалданады және мына формулалар орынды:

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$ 2. $(u\cdot v)'=u'v+uv'$ 3. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Күрделі функцияның туындысы. $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ функциялары үзіліссіз және дифференциалданатын функциялар болсын. Сонда күрделі $y=f(\varphi(x))$ функциясының туындысы: $y'=f'_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'_u\cdot u'_x$. Сонымен $y'=f'_u\cdot u'_x$.

Кері функцияның туындысы. $y=y(x)$ және оған кері $x=x(y)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және дифференциалданатын болсын. Сонда кері функцияның туындысы: $x'_y=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{y'_x}$. Сонымен $x'_y=\frac{1}{y'_x}$ болады.

Тақырып 11. Берілген функцияның туындысы. Параметрлік берілген функцияның туындысы

Айқындалған түрде берілген функциялардың жоғарғы ретті туындылары

$y = f(x)$ функциясының $y' = f'(x)$ туындысы x-тан тәуелді функция да болып табылады, және бірінші ретті туынды деп аталады. Егер $f'(x)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда оның туындысы екінші ретті туынды деп аталып, y'' арқылы белгіленеді. Сонымен, $y'' = (y')'$. Екінші ретті туындыдан алынған туынды бар болса, онда ол үшінші ретті туынды деп аталып, y''' арқылы белгіленеді. Сонымен, $y''' = (y'')'$. *n*-ретті туынды деп $(n-1)-$ретті туындыдан алынған туынды аталады:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \tag{6.1}$$

Реті екіден жоғары туындылар жоғары ретті туындалар деп аталады.

Екінші ретті туындының механикалық мағынасы

M материалдық нүктесі S=f(t) заңы бойынша түзу сызық бойымен қозғалсын делік. Бізге белгілі болғандай S'_t туындысы нүктенің сол уақыт мезетіндегі жылдамдығына тең $S'_t = v$. Жолдың уақыт бойынша екінші туындысы нүктенің түзу сызықты қозғалысының үдеуінің шамасын анықтайтындығын, яғни $S''_t = a$ болатындығын көрсетейік. Нүктенің *t* уақыт мезетіндегі жылдамдығы *v*, ал $t + \Delta t$ уақыт мезетінде жылдамдық $v + \Delta v$ болсын делік, яғни Δt уақыт аралығында жылдамдық ΔV-ға өзгереді. $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ қатынасы Δt уақыты нүктенің қозғалысының орташа үдеуін өрнектейді. $\Delta t \to 0$ болғандағы осы қатынастың шегі *M* нүктесінің берілген уақыт мезетіндегі үдеуі деп аталып, *a* әрпі арқылы белгіленеді: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = a$. Бірақ $V = S'_t$ болғандықтан, $a = (S'_t)'$, яғни $a = S''_t$.

Айқындалмаған түрде берілген функцияның жоғарғы ретті туындылары

$y = f(x)$ функциясы $F(x;\ y) = 0$ теңдеуі арқылы айқындалмаған түрде берілсін. Берілген теңдеуді x бойынша дифференциалдап, алынған теңдеуді y' -ке қатысты шешсе, бірінші ретті туындыны табамыз. Бірінші туындыны *x* бойынша дифференциалдап, айқындалмаған функцияның екінші туындысын аламыз. Оның құрамына *x*, *y*, y' кіреді. y' -тың табылған мәнін екінші туындының өрнегіне қойсақ, y'' -ты *x* пен у арқылы өрнектейміз. Тура осылай үшінші ретті, одан да басқа жоғары ретті туындыларды табамыз.

Параметрлік түрде берілген функциялардың жоғарғы ретті туындылары

$y = f(x)$ функциясы

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{6.2}$$

параметрлік теңдеуімен берілсін. y'_x бірінші туындысы

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{6.3}$$

формуласы арқылы табылатыны бізге белгілі. Параметрлік түрде берілген функциядан екінші туындысы

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \qquad (6.4)$$

Тақырып 12. Дифференциалды және геометриялық мағынасы

$y = f(x)$ функциясының x нүктесінде нөлден өзгеше туындысы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$ бар болсын. Сонда, функция оның шегі мен ақырсыз аз функция арасындағы байланыс туралы теорема бойынша $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, $\Delta x \to 0$ болғанда $\alpha \to 0$ деп немесе $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ деп жаза аламыз. $f'(x) \cdot \Delta x$ бірінші қосылғышын Δy функция өсімшесінің бас бөлігі деп атайды.

$y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі дифференциалы деп функция туындысы мен аргумент өсімшесінің көбейтіндісіне тең функция өсімшесінің бас бөлігі аталады және dy (немесе $df(x)$) арқылы белгіленеді.

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \qquad (2.1)$$

dy дифференциалын бірінші ретті дифференциал деп те атайды. Тәуелсіз x айнымалысының дифференциалын, яғни $y = x$ функциясының дифференциалын табайық. $y' = x' = 1$ болғандықтан, (5.1) формуласы бойынша $dy = dx = \Delta x$ болатындығын аламыз, яғни тәуелсіз айнымалының дифференциалы осы айнымалының өсімшесіне тең: $dx = \Delta x$.

Сондықтан да (5.1) формуласын мына түрде жазуға болады:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (2.2)$$

Басқаша айтқанда, функция дифференциалы осы функцияның туындысы мен тәуелсіз айнымалының дифференциалының көбейтіндісіне тең.

Дифференциалдың геометриялық мағынасын анықтайық. Ол үшін $y = f(x)$ функциясының графигіне $M(x; y)$ нүктесінде MT жанамасын жүргізіп, $x + \Delta x$ нүктесі үшін жанаманың ординатасын қарастырайық.

$y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі дифференциалы $x-$ке Δx өсімшесін бергендегі функция графигі сол нүктеде жүргізілген жанаманың ординатасының өсімшесіне тең.

Бұл дифференциалдың геометриялық мағынасы.

Функция дифференциалы мен туындысы арасындағы байланысты ($dy = f'(x)dx$) туындылар туралы сәйкес теоремаларды қолданып, дифференциалдар туралы негізгі теоремаларда алуға болады.

Мысалы, $y = c$ функциясының туындысы нөлге тең болғандықтан, тұрақты шаманың дифференциалы нөлге тең: $dy = c' \cdot dx = 0 \cdot dx = 0$.

Теорема 1. Екі дифференциалданатын функциялардың қосындысының, көбейтіндісінің, бөліндісінің дифференциалы келесі формулалары арқылы анықталады:

$$d(u+v)=du+dv,$$
$$d(uv)=v\cdot du+u\cdot dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}\ (v\neq 0).$$

Теорема 2. Күрделі функцияның дифференциалы осы функцияның аралық аргумент бойынша туындысы мен осы аралық аргументтің дифференциалдының көбейтіндісіне тең.

$y=f(x)$ функциясының x нүктесіндегі Δy өсімшесін $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$, мұндағы $\Delta x\to 0$ болғанда $\alpha\to 0$ түрінде немесе $\Delta y=dy+\alpha\cdot\Delta x$ түрінде көрсетуге болады. $\alpha\cdot\Delta x$ $\Delta x-$ке қарағанда жоғары ретті ақырсыз аз функцияны алып тастап,

$$\Delta y\approx dy, \tag{2.3}$$

жуық мәнін аламыз. Сонымен қатар, Δx кіші болған сайын теңдік нақтылана түседі.

Бұл теңдік кез-келген дифференциалданатын функцияның өсімшесін үлкен дәлдікпен жуықтап есептеуге мүмкіндік береді.

$y=f(x)$ дифференциалданатын функция, ал функцияны тәуелсіз айнымалы болсын. Онда оның бірінші дифференциалы $dy=f'(x)dx$ та x функциясы болып табылады, осы функцияның дифференциалын табуға болады. $y=f(x)$ функциясының дифференциалынан алынған дифференциал екінші дифференциал (немесе екінші ретті дифференіал) деп аталып, d^2y немесе $d^2f(x)$ арқылы белгіленеді.

Сонымен, анықтама бойынша, $d^2y=d(dy)$. $y=f(x)$ функциясының екінші дифференциалының өрнегін табайық. $dx=\Delta x$ $x-$тан тәуелсіз болғандықтан, дифференциалдау барысында $dx-$ты тұрақты деп есептейміз:

$$d^2y=d(dy)=d\big(f'(x)dx\big)=\big(f'(x)dx\big)'\cdot dx=f''(x)\cdot dx\cdot dx=f''(x)\cdot(dx)^2,$$

$$d^2y=f''(x)\cdot dx^2. \tag{2.4}$$

Мұнда dx^2 $(dx)^2-$ты білдіреді.

Тақырып 13. Ферма теоремасы, Ролля, Логранжа және Коши. Белгісіздіктерді ашу. Лопиталя ережесі

Анықтама.Егер x_0 нүктесінің бір маңайында $f(x)\geq f(x_0)$ $(f(x)\leq f(x_0))$ теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесін $f(x)$ функциясының жергілікті минимум (максимум) нүктесі деп атайды. Жергілікті минимум және жергілікті максимум нүктелері жергілікті экстремум нүктелері деп аталады. Ал осы нүктелердегі функцияның мәні функцияның экстремумы деп аталады. $[a,b]$ кесіндісінде анықталған функцияның тек қана бір ең үлкен және ең кіші мәндері болады, ал максимумдар және минимумдер бірнеше болуы мүмкін. Функцияның кейбір максимумдары оның минимумдарынан кіші болуы да мүмкін.

Ферма теоремасы. Егер $y=f(x)$ функциясы (a,b) интервалында дифференциалданатын болса және $x_0\in(a,b)$ нүктесінде ең үлкен немесе ең кіші мәнін қабылдайтын болса, онда функцияның туындысы бұл нүктеде нөлге тең, яғни $f'(x_0)=0$.

Геометриялық мағынасы: функцияның максимум және минимум нүктелерінде жүргізілген жанама Ox өсіне параллель болады.

Ролль теоремасы.Егер $y = f(x)$ функциясы: $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, (a,b) интервалында дифференциалданатын болса және $f(a) = f(b)$ болса, онда ең болмағанда бір $c \in (a,b)$ нүктесі табылып, $f'(c) = 0$ болады.

Геометриялық мағынасы: егер теорема шарттары толығымен орындалса, онда $[a,b]$ кесіндісінде жататын ең болмағанда бір c нүктесі табылып, сол нүктеде жүргізілген жанама Ox өсіне параллель болады.

Коши теоремасы.Егер $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, (a,b) интервалында дифференциалданатын болса және $g'(x) \neq 0$ $\forall$ $x \in (a,b)$, онда ең болмағанда бір $c \in (a,b)$ нүктесі табылып $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ теңдігі орындалады.

Л*агранж теоремасы.* Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, (a,b) интервалында дифференциалданатын болса онда (a,b) интервалында жататын c нүктесі табылып, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Leftrightarrow f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ теңдігі орындалады.

Геометриялық мағынасы: мына қатынас $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $[a,b]$ кесіндісінде $y = f(x)$ функциясының графигінің шеткі нүктелерін қосатын хорданың Ox өсінің оң бағытымен жасайтын бұрыштың тангесіне тең, ал $f'(c)$ c нүктесіне жүргізілген жанаманың Ox өсінің оң бағытымен жасайтын бұрышының тангенісіне тең. Лагранж теоремасы бойынша $c \in (a,b)$ нүктесінде олар өзара тең болады, яғни қиюшы мен жанама параллель болады.

Лопиталь ережесі.Бұл ереже $\left(\frac{0}{0}\right)$ немесе $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ анықталмағандықтарын есептеуге мүмкіндік береді.

Теорема.Айталық, $x = a$ нүктесінің маңайында $f(x)$ және $g(x)$ функциялары анықталған және дифференциалданатын болсын (нүктенің өзінде бұл шарттар орындалмауы да мүмкін) және $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$. Егер $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, онда $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ шегі бар болады және мына теңдік орындалады: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Осы сияқты тұжырымдар $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$, $x \to a-$, $x \to a+$ жағдайларда да орынды.

Функцияның дифференциалы. $y = f(x)$ функциясының шектелген туындысы бар болсын, онда: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, демек $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$ $\left(\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0\right)$, $\alpha -$ шексіз аз шама.

Онда функцияның өсімшесі былай жазылады: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$. Осы теңдікте екінші қосылғыш $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, $\Delta x -$ ке қарағанда жоғарғы ретті шексіз аз шама болғандықтан, бірінші қосылғыш $\Delta y -$ ке эквивалентті шама болады.

Анықтама.Функцияның туындысының аргументтің өсімшесіне көбейтіндісін дифференциал деп атайды және мына түрде жазады: $dy = f'(x)\Delta x$. Дербес жағдайда, егер $y = x$ болса, онда $dy = (x)' \Delta x = \Delta x$, осыдан $dx = \Delta x$ және осыны пайдаланып дифференциалдың формуласын былай жазуға болады: $dy = f'(x)dx$. Осыдан $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, яғни туынды функцияның дифференциалының аргумент дифференциалына бөлінген мәніне тең.

Дифференциалды есептеу ережесі. Айталық $y = u(x)$ және $y = v(x)$ дифференциалданатын функциялар болсын,

1) $d(u \pm v) = du \pm dv, \ d(u + c) = du$, мұндағы *c* –сан.

2) $d(u \cdot v) = vdu + udv, \ d(cu) = c \cdot du$,

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, егер $v(x) \neq 0$.

4) Егер $u = u(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданатын, ал $y = f(u)$ u нүктесінде дифференциалданатын болса, онда $y = f(u(x))$ күрделі функция үшін, $df(u) = f'(u) \cdot u'(x)dx = f'(u)du$. Бұл ережені ***бірінші дифференциал формасының инварианттығы*** деп атайды. Дифференциалды жуықтап есептеуге қолдануға болады.

Айталық, $y = f(x)$ функциясы дифференциалданатын болсын, онда оның өсімшесі: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, осыдан $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x$.

Егер x_0 нүктесінде функцияның мәні берілсе, онда: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

Тақырып 14. Ашық және айқын емес берілген функциялардың жоғары туындылары

$y = f(x)$ функциясының $y' = f'(x)$ туындысы x-тан тәуелді функция да болып табылады, және бірінші ретті туынды деп аталады. Егер $f'(x)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда оның туындысы екінші ретті туынды деп аталып, y'' арқылы белгіленеді. Сонымен, $y'' = (y')'$. Екінші ретті туындыдан алынған туынды бар болса, онда ол үшінші ретті туынды деп аталып, y''' арқылы белгіленеді. Сонымен, $y''' = (y'')'$. *n*-ретті туынды деп $(n-1)-$ретті туындыдан алынған туынды аталады:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \tag{6.1}$$

Реті екіден жоғары туындылар жоғары ретті туындалар деп аталады.

$y = f(x)$ функциясы $F(x;\ y) = 0$ теңдеуі арқылы айқындалмаған түрде берілсін. Берілген теңдеуді x бойынша дифференциалдап, алынған теңдеуді y' -ке қатысты шешсе, бірінші ретті туындыны табамыз. Бірінші туындыны *x* бойынша дифференциалдап, айқындалмаған функцияның екінші туындысын аламыз. Оның құрамына *x*, *y*, y' кіреді. y' -тың табылған мәнін екінші туындының өрнегіне қойсақ, y'' -ты *x* пен у арқылы өрнектейміз. Тура осылай үшінші ретті, одан да басқа жоғары ретті туындыларды табамыз.

Тақырып 15. Екінші реттік туындының механикалық мағынасы

M материалдық нүктесі S=f(t) заңы бойынша түзу сызық бойымен қозғалсын делік. Бізге белгілі болғандай S'_t туындысы нүктенің сол уақыт мезетіндегі жылдамдығына тең $S'_t = v$. Жолдың уақыт бойынша екінші туындысы нүктенің түзу сызықты қозғалысының үдеуінің шамасын анықтайтындығын, яғни $S''_t = a$ болатындығын көрсетейік. Нүктенің *t* уақыт мезетіндегі жылдамдығы *v*, ал $t + \Delta t$ уақыт мезетінде жылдамдық $v + \Delta v$ болсын делік, яғни Δt уақыт аралығында жылдамдық ΔV-ға өзгереді. $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ қатынасы Δt уақыты нүктенің қозғалысының орташа үдеуін өрнектейді. $\Delta t \to 0$ болғандағы осы қатынастың шегі M нүктесінің берілген уақыт мезетіндегі үдеуі деп аталып, a әрпі арқылы белгіленеді: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = a$. Бірақ $V = S_t'$ болғандықтан, $a = (S_t')'$, яғни $a = S_t''$.

Тақырып 16. Берілген параметрлік функциялардың жоғары туындылары

$y = f(x)$ функциясы

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{6.2}$$

параметрлік теңдеуімен берілсін. y_x' бірінші туындысы

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} \tag{6.3}$$

формуласы арқылы табылатыны бізге белгілі. Параметрлік түрде берілген функциядан екінші туындысы

$$y_{xx}'' = \frac{(y_x')_t'}{x_t'} \tag{6.4}$$

Тақырып 17. Функцияны зерттеуде туынды қолдану

Туындының қосымшаларының бірі оның функцияны зерттеуді, оның графигін салуда қолдану болып табылады. Функцияның өсуі мен кемуінің қажетті және жеткілікті шарттарын тұжырымдайық.

Теорема 1. *(қажетті шарт).* Егер $(a; b)$ интервалында дифференциалданатын $f(x)$ функциясы өсетін (кемитін) болса, онда $\forall x \in (a;\ b)$ үшін $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Д/уі. $f(x)$ функциясы $(a; b)$ интервалында өсетін болсын. $(a; b)$ интервалынан x және $x + \Delta x$ кез-келген нүктелерін алайық және $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ қатынасын қарастырайық. $f(x)$ функциясы өседі, сондықтан да $\Delta x > 0$ болса, онда $x + \Delta x > x$ және $f(x + \Delta x) > f(x)$; егер $\Delta x < 0$ болса, онда $x + \Delta x < x$ және $f(x + \Delta x) < f(x)$. Екі жағдайда да, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$, себебі бөлшектің алымы мен бөлімі бірдей таңбалы. Теорема шарты бойынша $f(x)$ функциясының x нүктесінде туындысы бар және қарастырылатын, қатынастың шегі болып табылады. Сәйкесінше, $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$. $f(x)$ функциясы $(a; b)$ интервалында кемитін жағдайда осылай қарастырылады.

Теорема 2. *(жеткілікті шарт).* Егер $f(x)$ функциясы $x \epsilon (a; b)$ үшін $(a; b)$ интервалында дифференциалданса және $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) болса, онда осы функция (a; b) интервалында өседі (кемиді).

Д/уі. $f'(x) > 0$ болсын. $(a; b)$ интервалында $x_1 < x_2$ болатындай x_1 және x_2 нүктелерін алайық. $[x_1;\ x_2]$ кесіндісінде Лагранж теоремасы қолданылады: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, мұндағы $c \in [x_1;\ x_2]$. Шарт бойынша, $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Сәйкесінше, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ немесе $f(x_2) > f(x_1)$, яғни $f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалында өседі.

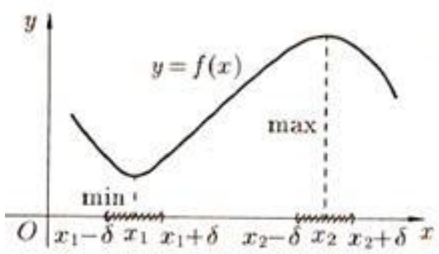
Өспелі және кемімелі функциялар *монотонды функциялар* деп аталады.

Функцияның максимумы мен минимумы

Егер x_0 нүктесінің □ −маңайы бар болып, осы маңайдың барлық $x \neq$ x0 үшін $f(x) < f(x_0)$ теңсіздігі орындалса, x_0 нүктесі $y = f(x)$ функциясының максимум нүктесі деп аталады. Функцияның минимум нүктесі де осылай анықталады: егер

$$\exists\delta > 0\ \forall x > 0\ \forall x\colon\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(\tag{9.1}$$

болса, x_0 функциясының минимум нүктесі. 9.1-суретте x_1 -минимум нүктесі, $x_2 - f(x)$-функциясының максимум нүктесі



9.1–сурет–x_1 -min нүктесі, x_2- функциясының max нүктесі

Максимум (минимум) нүктедегі функция мәні функцияның максимум (минимумы) деп аталады. Функцияның максимумы (минимумы) функцияның экстремумы деп аталады.

Теорема 3. *(экстремумның қажетті шарты).* Егер $y = f(x)$ дифференциалданатын функциясының x_0 нүктесінде экстремумы бар болса, оның осы нүктедегі туындысы нөлге тең: $f'(x_0)=0$.

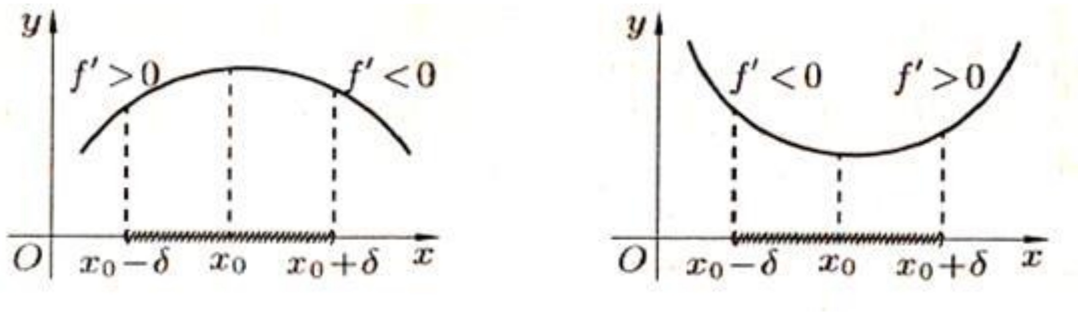
Д/уі. $x_0 -$ максимум нүкте болсын делік. Яғни, x_0 нүктесінің маңайында $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$ теңсіздігі орындалады. Олай болса, $\Delta x > 0$ болғанда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$, ал $\Delta x < 0$ болғанда, $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Теорема шарты бойынша $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ туындысы бар болады. $\Delta x \to 0$ болғанда шекке көшу арқылы $f'(x_0) \geq 0$ аламыз, егер $\Delta x < 0$ және $x_0 \leq 0$, егер $\Delta x > 0$ болса. Сондықтан, $f'(x_0) = 0$. Егер $x_0 = f(x)$ функциясының минимум нүктесі болса, 3-теоремасының тұжырымдамасы осылай дәлелденеді.

$f'(x_0) = 0$ теңдігінің геометриялық мағынасы $y = f(x)$ дифференциалданатын функциясының экстремум нүктесінде, оның графигіне жүргізілген жанама Ох осіне параллель.

Үзіліссіз функцияның тек туындысы нөлге немесе туындысы болмайтын нүктелерінде ғана экстремумы болады. Осындай нүктелерді деп атайды.

Теорема 4. *(экстремумның жеткілікті шарты).* Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 күдікті нүктесінің қандай да $\delta -$маңайында дифференциалданатын болса, және одан өткенде (солдан оңға) $f'(x_0)$ туындысы плюстен минусқа ауысса, x_0- максимум нүкте, минустан плюске x_0-минимум нүктесі

Д/үі. x_0 $-$нүктесінің δ $-$маңайын қарастырайық. $f'(x_0) > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ және $f'(x_0) < 0$, $\forall x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ шарттары орындалсын делік. Сонда $f(x)$ функциясы $(x_0 - \delta;\ x_0)$ интервалында өседі, ал $(x_0;\ x_0 + \delta;)$ интервалында кемиді. Бұдан, $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі мәні $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ интервалындағы ең үлкен болатындығы шығады, яғни барлық $x \in (x_0 - \delta; x_0\ ) \cup (x_0; x_0 + \delta\ )$ үшін $f(x) < f(x_0)$ болады. Бұл x_0 $-$ функциясының максимум нүктесі болатындығын білдіреді.



9.2-сурет-x_0 нүктесі max және min нүктелері

Функцияны экстремумға зерттеу оның барлық экстремумдарын табу деген сөз. Функцияны экстремумға зерттеудің келесі ережелері шығады:

1) $y = f(x)$ функциясының күдікті нүктелерін табу;

2) олардың ішінен тек анықталу облысының кіретін ішкі нүктелерді таңдап алу;

3) таңдалған әрбір күдікті нүктелердің әрқайсысының оң жағынан және сол жағынан $f'(x)$ туындысының таңбасын зерттеу;

4) 4. теоремасына (экстремумның жеткілікті шарты) сәйкес экстремум нүктелерді (егер олар бар болса) жазып алу және олардағы функция мәнін есептеу.

Теорема 5. Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының бірінші туындысы нөлге тең ($f'(x_0)$=0)), ал x_0 нүктесіндегі екінші туындысы бар болса, және нөлге тең болмаса, онда $f''(x_0)<0$ болғанда x_0 нүктесінде функция максимумға ие, ал $f''(x_0)>0$ болғанда минимумға ие

Д/үі. $f''(x_0) > 0$ болсын делік. $f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x} > 0$ болғандықтан, x_0 нүктесінің аз маңайында $\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x} > 0$ болады. Егер $\Delta x < 0$ болса, онда $f'(x_0 + \Delta x) < 0$; егер $\Delta x > 0$ болса, онда $f'(x_0 + \Delta x) > 0$ болады. Осылайша, x_0 нүктесі арқылы өткенде бірінші туындының таңбасы минустан плюске өзгереді. Сәйкесінше, x_0 $-$минимум нүкте. Егер $f''(x_0) < 0$ болса, онда x_0 нүктесінде функция максимумға ие болатындығы осылайша дәлелденеді.

Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәні

$y = f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын. Мұндай функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәнін қабылдайды және олар не $[a; b]$ кесіндісінің ішкі нүктесінде, не кесіндінің ұштарында, яғни $x_0 = a$ не $x_0 = b$ болғанда. Егер $x_0 \epsilon (a; b)$ болса, онда x_0 нүктесін берілген функцияның күдікті нүктелерінен іздек керек.

$[a;b]$ кесіндісінде функцияның ең үлкен, ең кіші мәндерін табудың келесі ережесін аламыз:

1) $(a;b)$ -да функцияның ең үлкен, ең кіші мәндерін табудың келесі ережелерін аламыз;

2) табылған күдікті нүктелердегі функцияның мәнін есептеу;

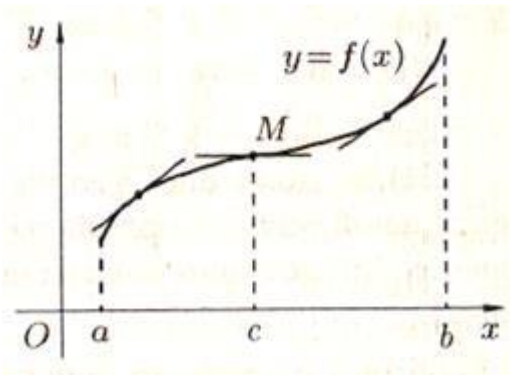
3) кесінді ұштарында, яғни $x=a, x=b$ нүктелеріндегі функция мәнін есептеу;

4) барлық табылған мәндер ішінен ең үлкені мен ең кішісін таңдау.

Функция графигінің дөңестігі, иілу нүктелері

Егер $y=f(x)$ дифференциалданатын функциясының графигі оған жүргізілген кез-келген жанамадан жоғары болса, онда график – төменнен дөңес деп, егер жанамадан төмен болса, график – жоғарыдан дөңес деп аталады.

Үзіліссіз $y=f(x)$ функциясының дөңестігі әртүрлі бөліктерін ажыратып тұратын нүкте–иілу нүктесі деп аталады. 9.3–суретте $y=f(x)$ қисығы $(a;c)$ интервалында жоғарыдан ойыс, $(c;b)$ интервалында төменнен ойыс, ал $M(c;f(c))$–иілу нүктесі.



9.3-сурет. *M* нүктесі иілу нүктесі

Жоғарыдан және төменнен ойыс интервалдар келесі теореманың көмегімен табылады.

Теорема 5. Егер $y=f(x)$ функциясының $(a;b)$ интервалының барлық нүктесінде екінші туындысы теріс, яғни $f''(x)<0$ болса, онда осы интервалда функция графигі жоғарыдан дөңес. Егер $f''(x)>0$, $\forall x \in (a;b)$ болса, функция графигі төменнен дөңес.

Д/уі: $\forall x \in (a;b)$ үшін $f''(x)<0$ болсын. Функция графигінен абциссасы: $x_0 \in (a;b)$ болатын кез-келген нүктені алып, М арқылы жанама жүргізейік. Функция графигі жанамадан төмен орналасқанын көрсетейік. Ол үшін $x_0 \in (a;b)$ нүктесінде $y=f(x)$ қисығының y ординатасымен $y_{жан}$ салыстырайық. Біз білетіндей, жанаманың теңдеуі мына түрде болады:

$$y_{жан} - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0),$$ яғни $$y_{жан} = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Лагранж теоремасы бойынша $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, мұнда с x_0 және x нүктелерінің арасында жатыр. Сондықтан,

$$y - y_{жан} = f(c)(x-x_0) - f'(x_0)(x-x_0),$$

яғни $y - y_{жан} = (f'(c) - f'(x_0))(x-x_0)$. $f'(c)-f'(x_0)$ айырманы тағы да Лагранж формуласы бойынша түрлендірелік:

$$f'(c)-f'(x_0) = f''(c_1)(c-x_0)$$

мұнда c_1, x_0 және c арасында жатыр.
Осылайша,

$$y - y_{\text{жан}} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$$

.

Осы теңдікті зерттейміз:

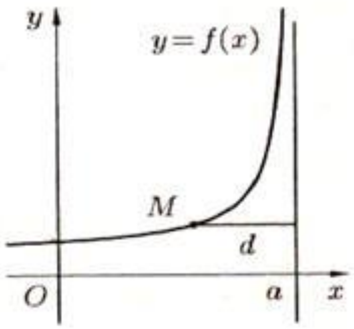
1) егер $x > x_0$, онда $x - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0$ және $f''(c_1) < 0$.
   Демек $y - y_{\text{жан}} < 0$, яғни $y < y_{\text{жан}}$;
2) егер $x < x_0$, онда $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$ және $f''(c_1) < 0$.
   Демек $y - y_{\text{жан}} < 0$, яғни $y < y_{\text{жан}}$.

Сонымен, $(a;b)$ интервалының барлық нүктелерінде жанаманың ординатасы графиктің ординатасынан үлкен екендігі дәлелденді, яғни функция графигі жоғарыға дөңес. Осыған ұқсас, $f''(x) > 0$ болғанда графиктің төменге дөңестігі дәлелденеді. Функцияның графигінің иілу нүктелерін табу үшін келесі теорема қолданылады.

Теорема 6. (иілу нүктелерінің бар болуының жеткілікті шарты). Егер $f''(x)$ екінші ретті туынды x_0 нүктесі арқылы өткен де, таңбасын өзгертсе, онда графиктің абсцисссасы x_0 болатын графиктің нүктесі иілу нүктесі болады.

Функция графигінің асимптотасы

Егер функцияның асимптоталарына білсек, онда оның графигін салу жеңіл болады. Асимптота ұғымы гиперболаның формуларын зертегенде қарастырылған. Еске түсіріп өтелік. Қисықтың асимптотасы деп координатаның бас нүктесінен бастап қисық бойынан әртүрлі жолмен бөліп алғандағы нүктеден түзуге дейінгі арақашықтық нөльге ұмтылатын, түзуді айтамыз (9.3-суретті қара). Асимптоталар тік, көлденең, көлбеу болады.



9.4-сурет. *x=a* түзуі *y=f(x)* функциясының асимптотасы

$x = a$ түзуі $y = f(x)$ функциясының графигінің тік асимптотасы деп аталады, егер $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$ немесе $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ немесе $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

Функцияны зерттеудің жалпы схемасы және графигін салу

$y = f(x)$ функциясын зерттеуді белгілі тізбек бойынша жүргізу қажет.

1. Функцияның анықталу облысын табу;
2. Графиктің координаталар осімен қиылысу нүктелерін табу (мүмкін болса);
3. Функцияның таңбасы тұрақты интервалдарын табу (*f(x)*>0 немесе *f(x)*<0 болатындай аралықтарды табу);
4. Функцияның жұп, тақ, не жалпы түрдегі болатындығын анықтау;
5. Функция графигінің асимптоталарын табу;
6. Функцияның монотондық интервалдарын табу;
7. Функцияның экстремумдарын табу;

8. Функция графигінің ойыс интервалдары мен иілу нүктелерін табу;

Жүргізілген зерттеу негізінде функция графигін салу қарапайым функциялар үшін 1, 2, 7 операцияларды орындау жеткілікті. Егер барлық 8 операцияны орындаған соң да функция графигі аса түсінікті болмаса, онда функцияны периодтылыққа зерттеп, қосымша бірнеше нүктелерді салып функцияның басқа қасиеттерін зерттеу керек. Кейде зерттеу жүргізе отырып, функция графигін салу тиімді.

5 бөлім Анықталмаған интеграл

Тақырып 18. Бірбейнелі ұғым. Белгісіз интегралды анықтау

Ғылым мен техниканың түрлі-түрлі салаларындағы көптеген мәселелерді шешу туындысы берілген функцияны табуға әкеліп соқтырады. Сондықтан математикада жаңа бір операция, интегралдау операциясы қарастырылады. Ізделіп отырған $F(x)$функциясының берілген туындысы $f(x)$ бойынша сол $F(x)$ функциясын табу мәселесі тек интегралдау операциясының жәрдемімен шешіледі. Міне осы $F(x)$-ті берілген функция $f(x)$-тің алғашқы функциясы деп атайды.

Анықтама. **Егер бір аралықтың әрбір нүктесінде функция $F(x)$ үшін**

$dF(x)=f(x)dx$

теңдігі орындалса, $F(x)$ функциясы $f(x)$-тің сол аралықтағы алғашқы функциясы деп аталады.

Мысалы: $F(x)=x^7$ бүкіл сандар осі бойында $f(x)=7x^6$ функциясының алғашқы функциясы болады, өйткені x-тің кез келген мәнінде $(x^7)'=7x^{6}.$

Ал функция $F(x)=lnx$ функция $f(x)=1/x$ үшін алғашқы функция болады

өйткені

$(lnx)'=1/x$

1-теорема. Егер $F(x)$ функциясы белгілі бір аралықта $f(x)$-тің алғашқы функциясы болса,

$F(x)+c$

Функциясыда (C- кез келген тұрақты) ол функция үшін сол аралықта алғашқы функция болады.

Дәлеледеу: $F(x)$ функциясы $f(x)$ –тің алғашқы функциясы. Олай болса,

$F'(x)=f(x).$

Сонымен бірге

$[F(x)+C]'=f(x)$

Демек $F(x)+C$ функциясы да $f(x)$ үшін алғашқы функция болады.

2 теорема. Берілген функцияның алғашқы функцияларының бір-бірінен айырмасы тұрақты шама болады.

Дәлелдеу. Егер берілген $f(x)$ функциясының қандай да бір алғашқы функциясының $F(x),$ ал, кез келген алғашқы функциясын $\phi(x)$ десек, онда мына шарттар орындалар еді:

$F'(x)=f(x)$ және $\phi'(x)=f(x),$

яғни алынған аралықта $F(x)$ пен $\phi(x)$ функцияларының туындылары бірдей болады. Олай болса, $\phi(x)-F(x)$ айырымы тұрақты болуы тиіс, яғни: $\phi(x)-F(x)=C.$

Бұдан $\phi(x)=F(x)-C.$

Дәлелденген екі теоремадан мынадай қорытынды шығады: егер $F(x)$ функциясы белгілі аралықта $f(x)$–тің алғашқы функцияларының бірі болса, оның барлық алғашқы функцияларының жиыны $f(x)+C$ қосындысымен өрнектеледі. Қосындының геометриялық мағнасы:$f(x)$-*тің* алғашқы функциясы $F(x)$-тің графигін жоғары не төмен жылжыту арқылы кез келген алғашқы функцияның графигін сала аламыз (1 сызба).

Анықталмаған интеграл ұғымы

F(x) функциясы дифференциалдау деп берілген алғашқы *F(x)* функциясының $F'(x)= f(x)$ туындысын немесе $df(x)=f(x)dx$ Дифференциалын табу амалын айтамыз.
Сол амалға кері амал, яғни $F'(x)$ болып табылатын берілген *f(x)* үшін алғашқы *F(x)* функциясын табу амалы *f(x)*-ті интегралдау деп аталады.

f(x)-ті интегралдау амалын көрсету үшін $\int$ символы қолданылады да, былай жазылады:

$$\int f(x)dx.$$

Осы $\int f(x)dx.$ берілген *f(x)* функциясының барлық алғашқы функцияларының жиынын бейнелейді және *f(x)*-тен анықталмаған интеграл деп аталады.
Демек, анықтамаға сәйкес

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

болады. Бұл формуладағы *F(x)* функциясы *f(x)*-тың белгілі бір алғашқы функциясы, *C*-кез келген тұрақты.
Сонымен бірге *f(x)*- интеграл астындағы функция, ал *f(x)dx* – интеграл астындағы өрнек деп аталады.

$\int$ -символы ұзартылып алынған латын алфавитіндегі *S*- әріпі, ол символды интегралдың белгісі деп атайды.

Функцияны интегралдау және олардың алғашқы функцияларының қаиеттері жайындағы ілім интегралдық есептеу деп аталады.
Дифференциалдық есептеу сияқты интегралдық есептеуде математикалық анализдің өте маңызды бөлімдерінің бірі болып табылды. 1-параграфта қарастырылған есептердің шешуін енді интеграл түрінде былай жазуға болады:

$$S=\int v(t)dt + C;$$

$$m=\int \rho(x)dx + C.$$

Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері

$F'(x)=f(x)$ және $\int f(x)dx=F(x)+C$ екенін ескере отырып анықталмаған интегралдың қасиеттерін қарастырамыз.

1. Дифференциалдың анықталмаған интегралы дифференциалдаған функция мен кез келген тұрақтының қосындысына тең, яғни $\int df(x)=F(x)+C \quad (1)$
2. Анықталмаған интегралдың дифференциалын интеграл астындағы өрнекке тең, яғни $d\int f(x)dx=f(x)dx \quad (2)$
3. Тұрақты көбейткішті интегралдық белгінің алдына шығаруға да, интегралдық белгінің астына алып баруға да болады, яғни $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$
4. Бірнеше функциялардың алгебралық қосындының анықталмаған интегралы қосылғыштардан алынған анықталмаған интегралдардың алгебралық қосындысына тең, яғни

$$\int [f_1(x)\pm f_2(x)\pm ... \pm f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm \int f_2(x)dx\pm ... \pm\int f(x)dx \qquad (4)$$

Анықталмаған интегралдың негізгі таблицасы

Егер u аргумент x-тің белгілі бір аралықтағы дифференциалданатын функциясы болса, берілген дифференциалдық есептеудің формулаларын пайдаланып, анықталмаған интегралдың ішіндегі негізгілерінің таблицасын жасауға болады. Бұл таблицаға енетін әрбір формуланың дұрыстығын дифференциалдау арқылы дәлелдеп көрсетуге болады.

1. $\int 0\cdot du = C$

2. $\int 1\cdot du = u + C$

3. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (бұндағы α -кез келген -1-ге тең емес нақты сан)

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$ ($u \neq 0$ болатын әрбір аралықта)

5. $\int a^{u} du = e^{u} + C$ (бұндағы α мына шарттарды қанағаттандыруы шарт: $a > 0$ және $\alpha \neq 1$)

6. $\int e^{u} du = e^{u} + C$

7. $\int \cos u du = \sin u + C$

8. $\int \sin u du = -\cos u + C$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$ ($\cos u \neq 0$ болатын әрбір аралықта)

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = tgu + C$ ($\sin u \neq 0$ болатын әрбір аралықта)

11. $\int tgudu = -\ln|\cos u| + C$ ($\cos u \neq 0$ болатын әрбір аралықта)

12. $\int ctgudu = \ln|\sin u| + C$ ($\sin u \neq 0$ болатын әрбір аралықта)

13. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\dfrac{u}{2}\right| + C$ ($\sin u \neq 0$ болатын әрбір аралықта)

14. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{u}\right) + C\right|$ ($\cos u \neq 0$ болатын әрбір аралықта)

15. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|$ ($u^2 \pm a^2 \neq 0$ болатын әрбір аралықта)

16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$ ($u \neq a$ және $a \neq 0$ болатын әрбір аралықта)

17. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{\overline{u}}{a} + C = -arctg\dfrac{u}{a} + C$ (нақты сан $a \neq 0$ болғанда)

18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C = -\arccos\dfrac{u}{a} + C$ ($a \neq 0$ нақты $|u| < |a|$ болатын әрбір аралықты)

Осы көрсетілген форуларды пайдаланып функцияның анықталмаған интегралын табуға мысалдар қарастырайық:

1. $\int x^5 dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі. (3) формула бойынша

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C;$$

$$2.\ \int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5} + C = \frac{3}{5} x \cdot \sqrt[3]{x^2} + C$$

3. $\int (x+1)(x-2dx)$ интегралын табу керек.

Шешуі: Интеграл астындағы өрнекті жақшаны ашып мына түрге келтіреміз:

$$\int \left(x^2 - x - 2\right) dx$$

Қосындының интегралын интегралдардың қосындысымен ауыстырсақ,

$\int x^2 dx - \int x dx - \int 2dx$ болады

Үшінші интегралдағы тұрақты көбейткішті интеграл табысының алдына шығарсақ,

$\int x^2dx - \int xdx - 2\int dx$ түрге келеді

(2) және (3) формулаларды қолдансақ

$$\int (x+1)(x+2)dx = \int x^2 - \int xdx - 2\int dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

4. $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3}dx$ интегралын табу керек

Шешуі: Бөлшектің алымын бөліміне мүшелеп бөліп, алдыңғы мысалдағыдай есептейміз

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3}dx = \int \left(x^{-1} - 2\cdot x^{-2} + 3\cdot x^{-3}\right)dx = \int \frac{dx}{x} - 2\int x^{-2}dx + 3\int x^{-3}dx = \ln|x| - 2\cdot\frac{x^{-1}}{-1} +$$

$$+ 3\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + C$$

Берілген интегралды интенгралдардың қосындысына келтіріп интегралдау қосындысына келтіріп интегралдау әдісін **жіктеу әдісі** деп атайды. Қарастырылған 3 және 4 мысалдар жіктеу әдісімен шығарылады.

Тақырып 19. Интегралдау әдістері

Берілген интегралдардың астындағы функцияға қарапайым түрлендірулер және анықталмаған интегралдардың қасиетіне сүйеніп таблицалық интегралға келтіру арқылы интегралдау әдісін **тікелей интегралдау** деп атайды. Берілген интегралды таблицалық интегралға келтіруі үшін дифференциалды келесі түрде түрлендіру жиі қолданылады («интеграл астына енгізу» операциясы):

$du = d(u+a)$, $a -$ сан,

$du = \frac{1}{a}d(au)$, $a \neq 0 -$ сан,

$u\cdot du = \frac{1}{2}d(u^2)$,

Жалпы алғанда, $f'(u)du = d\left(f(u)\right)$ формуладан интегралдарды есептегенде жиі қолданылады.

Айнымалыны ауыстыру әдісін қолданып интегралдау

Айнымалы ауыстыру әдісі интегралдау айнымалысының орнына жаңа айнымалыны енгізу арқылы кестелік интегралдарға келтіруге болады. Айнымалыны ауыстырудың жалпы әдісі жоқ. $\int f(x)dx$ интегралын есептеу керек болсын. $x = \varphi(t)$ ауыстыруын қолданайық, мұндағы $\varphi(t) -$ үзіліссіз туындылары бар функция болсын. Сонда $dx = \varphi'(t)dt$ және анықталмаған интегралды интегралдау формулаларының инварианттылығы қасиетінің негізінде айнымалы ауыстыру формуласын аламыз

$$\int f(x)dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt \qquad (2.1)$$

(2.1) формуласы анықталмаған интегралда айнымалыны ауыстыру формуласы деп атайды. Бұл теңдіктің оң жағындағы интегралын есептегеннен кейін, жаңа t айнымалысынан x айнымалысына көшу керек.

Кейбір жағдайда $t=\varphi(x)$ ауыстыруын қолданған ыңғайлы. Сонда $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$, мұндағы $t=\varphi(x)$. Басқаша айтқанда (2.1) формуланы керісінше қолдануға болады.

Бөліктеп интегралдау әдісі

$u=u(x)$ және $v=v(x)-$ үзіліссіз туындылары бар функциялар болсын. Онда $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du$. Осы теңдікті интегралдап

$$\int d(uv)=\int udv-\int vdu$$

немесе $\int udv=uv-\int vdu$.

Алынған формула бөліктеп интегралдау формуласы деп аталады. Бөліктеп интегралдау формуласын $\int udv$ интегралын есептеуден, $\int vdu$ интегралын есептеу жеңілдірек болған жағдайда қолданылады. Бөліктеп интегралдау формуласын қолдану үшін интеграл астындағы өрнекті u және dv көбейткіштің көбейтіндісін жазу керек; u және dv тапқаннан кейін бөліктеп интегралдау формуласы қолданылады. Бөліктеп интегралдау формуласын бірнеше рет қолдануға болады.

Бөліктеп интегралдау арқылы табылатын интегралдардың кейбір түрлерін көрсетейік:

1. $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\cdot\sin kxdx$, $\int P(x)\cdot\cos kxdx$ -түріндегі интегралдар, мұндағы $P(x)-$ көпмүше, $k-$ сан. Бұл интегралдарда $u=P(x)$ арқылы белгілеп, ал басқа көбейткіштер dv арқылы белгіленеді;

2. $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)arctgxdx$. $\int P(x)\cdot dx=dv$ - деп, ал қалған көбейткіштерді u арқылы белгіленеді;

3. $\int e^{\alpha x}\cdot\sin bxdx$, $\int e^{\alpha x}\cdot\cos bxdx$, мұндағы a және b сандар. u деп $u=e^{\alpha x}$ функциясын аламыз.

Тақырып 20. Рационалды сандарды интегралдау

Интегралдары элементарлық функциялар арқылы өрнектелетін ең маңызды функциялар класы – рационал функциялар болып табылады.

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$ мұндағы $P(x),\ Q(x)$ - көпмүшеліктер.

Егер бұрыс рационал бөлшектер болса, онда $P(x)$-ті $Q(x)$-ке бөліп бүтін бөлігі мен дұрыс рационал бөлшекке келтіреміз. Мысалы:

$$\frac{x^4-4x^3+2x^2-1}{x^2-x+1}=x^2-3x-2+\frac{x+1}{x^2-x+1}$$

Одан әрі қарай тек дұрыс рационал бөлшектерді интегралдауды қарастырамыз (яғни, бөлшектің алымындағы көпмүшеліктің дәрежесі бөліміндегі көпмүшеліктің дәрежесінен кіші)

Теорема. Әрбір дұрыс рационал бөлшектімына түрлі қарапайым бөлшектердің қосындысы түрінде жазуға болады:

$1^0.\ \frac{A}{x-a};$ $\qquad 2^0.\ \frac{A}{(x-a)^k}\ (k=2,3,4,...);$

$3^0.\ \dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; $4^0.\ \dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$; $(k=2,3,4,...).$

мұндағы A, B –сандық коэффициенттер;

x^2+px+q үшмүшеліктің нақты түбірлері жоқ (яғни $D=\dfrac{P^2}{4}-q<0$).

Қарапайым бөлшектерді интегралдауды қарастырайық.

1^0 $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-a}=A\,ln|x-a|+C$.

2^0 к >1 мәнінде $\displaystyle\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$.

3^0 Бөлшекті интегралдау әдісі

$\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ интеграл жоғарыда қарастырылған

4^0. Төмендегі интегралды табу үшін қарастырайық $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$ мұндағы $k>1$ және бөліміндегі квадрат үшмүшелікті дискриминанты $D=p^2-4q<0$.

Квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөліп алып $x+\dfrac{p}{2}=t$, $dx=dt$, ауыстыруын жасаймыз. Сонда $\displaystyle\int\frac{A_1t+B_1}{(t^2+m^2)^k}dt$ интегралын аламыз.

Мұндағы бірінші қосылған t -ні дифференциал астына енгізу арқылы интегралданады:

$$\int\frac{t}{(t^2+m^2)^k}dt=\frac{1}{2}\int(t^2+m^2)^{-k}d(t^2+m^2)=\frac{1}{2}\frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1}+C=$$

$$=\frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

$I_k=\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$ интегралын алдыңғы интеграл сияқты қарастырамыз, бірақ k -ның мәні одан кіші.

$$I_k=\frac{1}{m^2}\int\frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}dt=$$

$$=\frac{1}{m^2}I_{k-1}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t\cdot tdt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{m^2}I_{k-1}-\frac{1}{2m^2}\int t\left(t^2+m^2\right)^{-k}d\left(t^2+m^2\right)=$$

$$=\frac{1}{m^2}I_{k-1}-\frac{1}{2m^2}\int td\frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1}=\left|u=t, v=\frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1}\right|=\frac{1}{m^2}I_{k-1}-$$

$$-\frac{1}{2m^2(1-k)}\left(\frac{t}{(t^2+m^2)^{-k+1}}-I_{k-1}\right).$$

Осы процесті I_{k-1}-ге қолданамыз, ал бұл интегралды табу ең соңында мына интегралды табуға келіп тіреледі.

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}arctg\frac{t}{m}+C$$

Рационалбөлшектердіңқарапайымбөлшектергежіктелуінқарастырайық. Алгебрадан белгілі нақты коэффициенті бар екіден жоғарғы көрсеткішті кез келген көпмүшелік бір ғана жолмен сызықты және нақты коэффициентті квадрат көбейткіштерге жіктеледі.

$Q(x)$ көпмүшелігінің көбейткіштерге жіктелуі мына түрде берілсін:

$$Q(x)=a_0(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_s)^{k_s}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}\cdot$$
$$\ldots\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{n_s}$$

Мысалы. 1) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$;

2) $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$;

3) $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$.

Тақырып 21. Иррационалды сандарды интегралдау

$\int R\left(x,x^{\frac{p_1}{q_1}},x^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots,x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$ түріндегі интеграл

Мына түрдегі интегралды қарастырайық

$$\int R\left(x,x^{\frac{p_1}{q_1}},x^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots,x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$$

мұндағы $R(\ldots)$- рационал функция, яғни x-айнымалысы бар екі көпмүшеліктің қатынасы және $x^{\frac{p_i}{q_i}}=\sqrt[q_i]{x^{p_i}}$ түріндегі дәрежелік функциялар.

$\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\ldots,\frac{p_n}{q_n}$ бөлшектерінің ең кіші ортақ бөлімін k-ға тең делік және берілген интегралда

$x=t^k,\quad dx=kt^{k-1}dt$ ауыстыруын жасаймыз.

Сонын нәтижесінде t айнымалы бойынша рационал функцияның инитегралын аламыз.

$$\int R\left(t^k,t^{\frac{kp_1}{q_1}},t^{\frac{kp_2}{q_2}},\ldots,t^{\frac{kp_n}{q_n}}\right)kt^{k-1}dt.$$

$\dfrac{kp_i}{q_i}$-сандарының бәрі бүтін болғандықтан, жоғарыда айтылғанға байланысты, мұндай интеграл элементар функциялар арқылы табылады.

Мына түрдегі интегралды қарастырайық

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}} \right)dx,$$

мұндағы $R(\dots)$- рационал функция $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^k$ ауыстыруын жасаймыз, сонда рационал функцияның интегралын аламыз, мұндағы k $\dfrac{p_1}{q_1},\dots,\dfrac{p_n}{q_n}$ бөлшектерінің ортақ бөлімі

. $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ **түріндегі функцияны интегралдау, мұндағы** $R(\dots)$ **аргументтері бойынша рационал функция**

Квадрат үшмүшеліктен толық квадратты бөліп алып, $x+\dfrac{b}{2a}=t$ ауыстыруын жасасақ, онда $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ интегралы төмендегі үш интегралдың біреуіне келтіріледі. ($R(\dots)$-рационал функция);

1^0. $\int R_1\left(t,\sqrt{m^2-t^2}\right)dt$. $t=m\sin z$, $\sqrt{m^2-t^2}=\sqrt{m^2-m^2\sin^2 z}=m\cos z$, $dt=m\cos z dz$ ауыстыруын жасасақ, онда интеграл $\int R_1(m\sin z,m\cos z)\cdot m\cos z dz$ түріндегі интегралға келеді. Мұндай интеграл жоғарыда қарастырылған.

2^0. $\int R_1\left(t,\sqrt{t^2-m^2}\right)dt$ түріндегі интеграл $t=\dfrac{m}{\sin z}$ ауыстыруын жүргізу варқылы табылады, мұнда $dt=\dfrac{-m\cos z}{\sin^2 z}dz$

$$\sqrt{t^2-m^2}=\sqrt{\frac{m^2}{\sin^2 z}-m^2}=m\sqrt{\frac{1}{\sin^2 z}-1}=m\sqrt{\frac{1-\sin^2 z}{\sin^2 z}}=mctgz.$$

$$\int R_1\left(t,\sqrt{t^2-m^2}\right)dt=-\int R_1\left(\frac{m}{\sin z},mctgz\right)\frac{m\cos z}{\sin^2 z}dz.$$

3^0. $\int R_1\left(t,\sqrt{t^2+m^2}\right)dt$ түріндегі интеграл $y=\frac{1}{x}>M$ ауыстыруын жүргізу арқылы табылады, мұнда

$$dt=\frac{mdz}{cos^2 z}, \sqrt{t^2+m^2}=\sqrt{m^2tg^2z+m^2}=m\sqrt{tg^2z+1}=m\sqrt{\frac{1}{cos^2 z}}=\frac{m}{cos z}.$$

$$\int R_1\left(t,\sqrt{t^2-m^2}\right)dt=\int R_1\left(mtgz,\frac{m}{cos z}\right)\frac{mdz}{cos^2 z}.$$

Кейбір R рационал функцияның арнайы түріне интегралды табудың басқа әдістері қолданылады. Солардың екеуін қарастырайық.

4^0. $\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ түріндегі интеграл $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$ ауыстыруы арқылы табылады. Бұл жағдайда оны бұрын қарастырған интегралға немесе кестелік интегралға келтіруге болады.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int\frac{tdt}{t^2\sqrt{\frac{a}{t^2}+\frac{a}{t}+c}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{a+bt+ct^2}}.$$

5^0. $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ интегралдағы n дәрежелі $P_n(x)$ көпмүшелігін мына түрде жазуға болады

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

мұндағы $Q_{n-1}(x)$ $n-1$ дәрежелі көпмүшелік, λ-сан. $Q_{n-1}(x)$ және λ коэффициенттерін теңдіктің екі жағын дифференциалдағаннан кейін анықталмаған коэффициенттер әдісін қоланып табамыз

Тақырып 22. Тригонометриялық функцияны интегралдау

Бұл пунктте біз

$\int R(sin\,x,cos\,x)dx$ интегралын табуды қарастырамыз,

мұнда $R(u,v)$-u,v-ға қатысты рационал функция.

Берілген интеграл $tg\frac{x}{2}=t$ универсал ауыстыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі. Шынында да

$$sin\,x=\frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}}=\Bigg|$$ бөлшектің алымын және бөлімін $cos^2\frac{x}{2}$ ке бөлеміз

$$cos^2\frac{x}{2}\bigg| = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$cos\,x = \frac{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$x = 2arctgt$ болғандықтан, онда $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Мұның нәтижесінде шығатыны

$$\int R(sin\,x, cos\,x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$$

мұнда $R_1(t)$- рационал функция.

1^0. Егер интеграл астындағы функция косинус бойынша тақ болса, яғни $R(sin\,x, -cos\,x) \equiv -R(sin\,x, cos\,x)$, онда мына $R(sin\,x, cos\,x) = R_1(sin\,x)\cdot cos\,x$ түрге келтіруге болады.

Онан кейін $sin x = t$ ауыстыруын жүргізіп, $R_1(t)$ рационал функцияның интегралына келтіреміз:

$$\int R_1(sin\,x)cos\,xdx = |sin\,x = t| = \int R_1(t)dt.$$

$$= |sin\,x = t| = \int(1-t^2)dx = t - \frac{t^3}{3} + C = sin\,x - \frac{sin^3 x}{3} + C.$$

2^0. Егер интеграл астындағы функция синус арқылы тақ болса, яғни $R(-sin x, cos t) \equiv -R(sin x, cos x)$, онда оны мына түрге

$$R(sin\,x, cos\,x) = R_1(cos\,x)sin\,x$$

келтіруге болады. Ауытыруын жүргізіп, интегралды $R_1(t)$ рационал функциясының интегралына келтіреміз:

$$\int R_1(cos\,x)sin\,xdx = |cos\,x = t| = -\int R_1(t)dt.$$

3^0. Егер интеграл астындағы функция $R(-sin x, -cos x) \equiv R(sin x, cos x)$ шартын қанағаттандырс, онда мына түрге келтіруге болады:

$$R(sin\,x, cos\,x) = R_1(tgx),$$

бұдан кейін интегралға $tgx = t$ ауыстыруын жүргіземіз. Сонда $x = arctgt$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ болады. Сөйтіп берілген интеграл рационал функцияның интегралына келтіріледі.

4^0. Мына $\int sin\,\mathrm{mx}\,cos\,\mathrm{nxdx}$, $\int cos\,\mathrm{mx}\,cos\,\mathrm{nxdx}$, $\int sin\,\mathrm{mx}\,sin\,\mathrm{nxdx}$, мұндағы m, n – тұрақты сандар, түріндегі интегралды алу үшін тригонометрияның формулалары:

$$sin\alpha\, cos\beta = \frac{1}{2}(sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)),$$

$$cos\alpha\, cos\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)),$$

$$sin\alpha\, sin\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta))$$

теңдіктерін қолдану арқылы көбейтінділерді қосындыға жіктеу арқылы берілген интегралды алу қиынға түспейді.

5^0. Мына $\int sin^m x\, cos^n xdx$, мұндағыm және n – ке-келген бүтін көрсеткіштер, түріндегі интегралды есептеу жолдарын қарастырайық.

1). Интегралдағы mнемесеnсандарының біреуі тақ сан, мысалы, $n = 2k+1$ болсын. Бұл кезде $sin x = t$ десек, онда

$$\int sin^m x \bullet cos^n xdx = \int sin^m x cos^{2k} x cos xdx = \int sin^m x(1-sin^2 x)^k d\, sin x = \int t^m (1-t^2)^k dt,$$

демек, интеграл астында рационал функция шығады.

2) Интегралдағыm және n – жұп, оң бүтін сандар. Онда оларды тригонометрияның белгілі формулаларын $sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$, $cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$ қолдану арқылы интеграл астындағы функцияның дәрежесін төмендетуге болады.

Тақырып 23. Функцияның интегралын есептеу

Квадрат үшмүшелігі бар функцияларды интегралдау

Мына төмендегі интегралдарды табу әдісін қарастырайық

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx \text{ және } \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

1^0. ax^2+bx+c квадрат үшмүшелігіндегі a коэффициентін жақша алдына шығарып және одан талық квадратты бөліп аламыз:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right)$$

мұндағы $k = \frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$.

2^0 Енді интегралға $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx = dt$ ауыстыруын енгізелік

$$\int \frac{m_1 t+n_1}{t^2 \pm k^2}dt \text{ немесе } \int \frac{m_1 t+n_1}{\sqrt{\pm t^2 \pm k^2}}dt.$$

3^0 Бұл интегралды алымындағы қосылғыштарға сәйкес екі интегралдың қосындысы етіп жазамыз. Бірінші интегралға $t^2 \pm k^2 = u$ алмастыруын жасаймыз. Сонымен екі интегралымыз да кестелік интегралға келеді.

Рационал функцияларды интегралдау

Интегралдары элементарлық функциялар арқылы өрнектелетін ең маңызды функциялар класы – рационал функциялар болып табылады.

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$, мұндағы $P(x),\ Q(x)$ - көпмүшеліктер.

Егер бұрыс рационал бөлшектер болса, онда $P(x)$-ті $Q(x)$-ке бөліп бүтін бөлігі мен дұрыс рационал бөлшекке келтіреміз. Мысалы:

$$\frac{x^4-4x^3+2x^2-1}{x^2-x+1}=x^2-3x-2+\frac{x+1}{x^2-x+1}$$

Одан әрі қарай тек дұрыс рационал бөлшектерді интегралдауды қарастырамыз (яғни, бөлшектің алымындағы көпмүшеліктің дәрежесі бөліміндегі көпмүшеліктің дәрежесінен кіші)

Теорема. Әрбір дұрыс рационал бөлшектімына түрлі қарапайым бөлшектердің қосындысы түрінде жазуға болады:

$$1^0.\ \frac{A}{x-a};\qquad 2^0.\ \frac{A}{(x-a)^k}\ (k=2,3,4,...);$$

$$3^0.\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q};\qquad 4^0.\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k};\qquad (k=2,3,4,...).$$

мұндағы A, B –сандық коэффициенттер;

x^2+px+q үшмүшеліктің нақты түбірлері жоқ (яғни $D=\frac{P^2}{4}-q<0$).

Қарапайым бөлшектерді интегралдауды қарастырайық.

$$1^0\ \int\frac{Adx}{x-a}=A\,ln|x-a|+C.$$

$$2^0\ \text{ к}>1\text{ мәнінде}\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

3^0 Бөлшекті интегралдау әдісі

$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ интеграл жоғарыда қарастырылған

4^0. Төмендегі интегралды табу үшін қарастырайық $\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$ мұндағы $k>1$ және бөліміндегі квадрат үшмүшелікті дискриминанты $D=p^2-4q<0$.

Квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөліп алып $x+\frac{p}{2}=t,\ dx=dt$, ауыстыруын жасаймыз. Сонда $\int\frac{A_1t+B_1}{(t^2+m^2)^k}dt$ интегралын аламыз.

Мұндағы бірінші қосылған t -ні дифференциал астына енгізу арқылы интегралданады:

$$\int\frac{t}{(t^2+m^2)^k}dt=\frac{1}{2}\int(t^2+m^2)^{-k}d(t^2+m^2)=\frac{1}{2}\frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1}+C=$$

$$=\frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$ интегралын алдыңғы интеграл сияқты қарастырамыз, бірақ k - ның мәні одан кіші.

$$I_k=\frac{1}{m^2}\int\frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}dt=$$

$$=\frac{1}{m^2}I_{k-1}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t\cdot tdt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{m^2}I_{k-1}-\frac{1}{2m^2}\int t\left(t^2+m^2\right)^{-k}d\left(t^2+m^2\right)=$$

$$=\frac{1}{m^2}I_{k-1}-\frac{1}{2m^2}\int td\frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1}=\left|u=t,v=\frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1}\right|=\frac{1}{m^2}I_{k-1}-$$

$$-\frac{1}{2m^2(1-k)}\left(\frac{t}{(t^2+m^2)^{-k+1}}-I_{k-1}\right).$$

Осы процесті I_{k-1}-ге қолданамыз, ал бұл интегралды табу ең соңында мына интегралды табуға келіп тіреледі.

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}arctg\frac{t}{m}+C$$

Рационалбөлшектердіңқарапайымбөлшектергежіктелуінқарастырайық. Алгебрадан белгілі нақты коэффициенті бар екіден жоғарғы көрсеткішті кез келген көпмүшелік бір ғана жолмен сызықты және нақты коэффициентті квадрат көбейткіштерге жіктеледі.

$Q(x)$ көпмүшелігінің көбейткіштерге жіктелуі мына түрде берілсін:

$$Q(x)=a_0(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_s)^{k_s}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}\cdot$$

$$\ldots\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{n_s}$$

Мысалы. 1) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$;

2) $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$;

3) $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$.

6 бөлім. Анықталған интеграл

Тақырып 24. Анықталған интеграл және оның геометриялық мағынасы

Анықталған интегралдың аппараты бәрінен бұрын жазық фигуралардың ауданын табуға байланысты пайда болды.

Қазіргі кезде аз шамалардың сандары өте көп болғанда оның қосындысын табуға арналған барлық техникалық ғылымдар практикасында есептерді шешу үшін осы интегралдар қолданылады.

Анықтама. $[a,b]$ кесіндісіндегі үзіліссіз $y=f(x)$ функциясымен Ox өсі және $x=a$, $x=b$, $(a<b)$ түзулерімен шектелген Oxy жазықтығындағы аймақты ***қисықсызықты трапеция дейді*** (1 суретті қара).

Оңай болу үшін $f(x) \geq 0$ делік, яғни трапеция Ox өсінің жоғарғы жағында орналасқан. Қисық сызықты трапецияның ауданын жуықтап табуға болады.. Ол үшін табаны аз бөлікше кесінділерден тұратын, ал биіктігі $f(x)$ функциясының кейбір таңдап алынған нүктелердегі мәндері болатын тік төртбұрыштардың аудандарының қосындысымен ауыстырамыз.

Анықтама. Егер $[a,b]$кесіндісін кез келген тәсілмен, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ қатынастары орындалатындай етіп n бөлікке бөлсек, онда $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ нүктелер жиыны берілген ***кесіндінің бөліктенуі деп аталады.***

Енді әрбір бөлікшеден (элементар бөліктер) қалауымызша $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,3,\ldots,n$ бір-бір нүктеден аламыз.

Осындай кесіндінің бөліктеуін T әріпімен, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ бөлікше кесіндінің ұзындығын белгілейміз.

Айталық, $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде берілген болсын.

Анықтама. Әрбір бөлікшеден қалауымызша алынған ξ_i нүктелеріндегі функцияның мәндерін элементар бөліктің ұзындығына көбейтіндісінің қосындысын $[a,b]$ кесіндісінің T бөліктенуіне құралған $y = f(x)$ функциясының ***интегралдық қосындысы*** деп атайды.

Мұндай қосындыны

$$\sum_f (T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

деп белгілейді.

Егер $f(x) \geq 0$ болса, онда $\sum_f (T)$ интегралдық қосынды Δx_i -тік төртбұрыштардың табандары және $f(\xi_i)$ биіктігі болатын баспалдақты фигураның ауданын береді (1 суретті қара), яғни $\sum_f (T)$ қосындысы жуық шамамен қисық сызықты трапецияның ауданына тең болады.

Анықтама. Егер ұзындығы ең үлкен бөлікше кесіндіні нөлге ұмтылдырғанда $max \Delta x_i \to 0$ интегралдық қосындының ақырлы шегі бар болса, онда ол $f(x)$ функциясының $[a,b]$аралығындағы ***анықталған интегралы*** деп аталады, яғни

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max \Delta x_i \to 0} \sum_f (T),$$

мұндағы $f(x)$- интеграл астындағы функция, $f(x)\,dx$ - интеграл астындағы өрнек, a саны – интегралдың төменгі, b саны – интегралдың жоғарғы шегі, ал x айнымалысы – интегралдау айнымалысы деп аталады.

Егер $f(x) \geq 0$ болса, онда анықталған интеграл жоғарыдан $y = f(x)$ функциясының графигімен, төменнен Ox өсімен және екә бүйір жағынан $x = a, \quad x = b$ түзулерімен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын анықтайды

1 теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз немесе осы аралықта санаулы бірінші текті үзіліс нүктелері болса, онда бұл функция $[a,b]$ аралығында интегралданады, яғни $\int_a^b f(x)dx$ интегралы бар болады.

Бұл теореманың мағынасы мынада теореманың шарттары орындалғанда кесіндінің кез-келген бөліктенуінде кесіндінің ұзындығы Δx_i нөлге ұмтылғанда $\sum_f(T)$ интегралдық қосындылар тек бір ғана $\int_a^b f(x)dx$ санына ұмтылады.

Анықталған интегралдың қасиеттері

Бұдан әрі қарай қарастырылатын функциялар интегралданады деп ұйғарамыз.

1) $\int_a^b Cdx = C(b-a)$, C - тұрақты.

2) Егер $[a,b]$ кесіндісінде $f(x) \le g(x)$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

3) Егер $[a,b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясы төменнен және жоғарыдан m және M сандарымен шектелсе, яғни, егер $[a,b]$ кесіндісінде $m \le f(x) \le M$ болса, онда

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Бұл тұжырымның дәлелдеуі 2 және 1 қасиеттерден шығады. Бұл қасиетті анықталған интегралды төменнен және жоғарыдан бағалау деп атайды.

4) ***Орта мән туралы теорема.***

Айталық $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын, онда осы кесіндіден c нүктесі табылып $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ орындалады.

Бұл $f(c)$ мәні функцияның $[a,b]$ кесіндісіндегі орта мәні деп аталады.

5) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Бұл қасиет анықталған ***интегралдың модулін бағалау*** деп аталады.

6) Егер $a < c < b$ теңсіздігі орындалса, онда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Анықтама. Егер $a < b$ болса, онда $\int_b^a f(x)dx$ интегралы деп $-\int_a^b f(x)dx$-санын айтады.

$\int_a^a f(x)dx$ интегралы нөлге тең деп есептеледі. Соңғы анықтаманы қолданып 6 қасиеттің a,b,c сандарының кез-келген орналасу жағдайы үшін дұрыс екендігін дәлелдеуге болады. $a < c < b$ теңсіздігінің орындалуы міндетті емес

Тақырып 25. Орташа теорема және оның геометриялық мағынасы

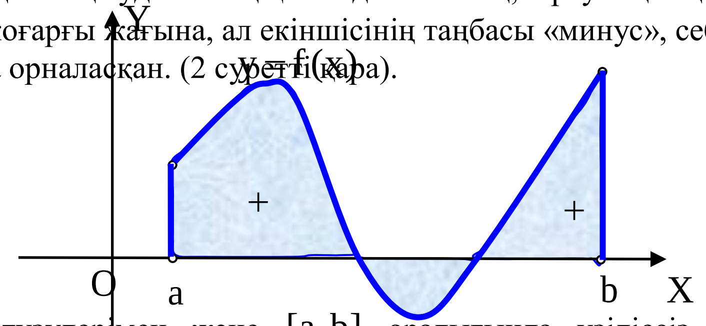
Анықталған интегралдың геометрияда қолданылуы

Анықталған интегралдың көмегімен берілген аймақтың шекаралары әртүрлі болып келген фигуралардың ауданын, қисық доғ,асының ұзындығын, дененің көлемін және айналу бетітің ауданын табуға болады.

Декарт координаталарындағы аудан

Егер [a,b] кесіндісіндегі $y = f(x) \geq 0$ болса, онда осы кесіндісінде $\int_a^b f(x)dx$ интегралы қисық сызықты трапецияның $S(G)$ ауданын өрнектейтіні жоғарыда айтылған.

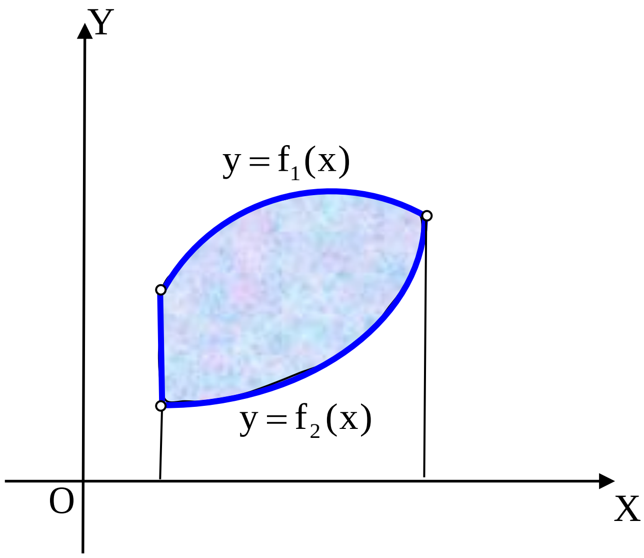
Егер [a,b] кесіндісінде $f(x) \leq 0$ болса, онда қисық сызықты трапеция Ox өсінің төменгі жағында орналасқан және $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. Бұл интеграл ирапецияның ауданын «минус» таңбасымен анықтайтынын тексеру қиын емес. Жалпы жағдайда, егер [a,b] кесіндісінде $y = f(x)$ -тің таңбасы әртүрлі болса, онда $\int_a^b f(x)dx$ интегралы екі қисық сызықты трапецияның ауданының қосындысына тең, біреуінің таңбасы «плюс», себебі ол Ox өсінің жоғарғы жағына, ал екіншісінің таңбасы «минус», себебі ол Ox өсінің төменгі жағына орналасқан. (2 суреттіқара).



$x = a,\ x = b$ түзулерімен және $[a, b]$ аралығында үзіліссіз $y = f_1(x),\ y = f_2(x)$ (мұндағы $f_1(x) \geq f_2(x)$) функциялардың графиктерімен шектелген аймақтың ауданы мына формуламен табылады.

$$S(G) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

(4 суреттіқара).



Егер $[a, b]$ кесіндісінде $y = f(x)$ функциясыныңграфигіпараметрлікфункциятүріндеберілсін

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$$

мұнда $y(t) \ge 0$ үзіліссіз, ал $x(t)$ функциясы $[\alpha, \beta]$ кесіндісінде бір срынды, үзіліссіз дифференциалданатын функция, ал $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ болса, онда қисық сызықты трапецияның ауданы мына формуламен табылады

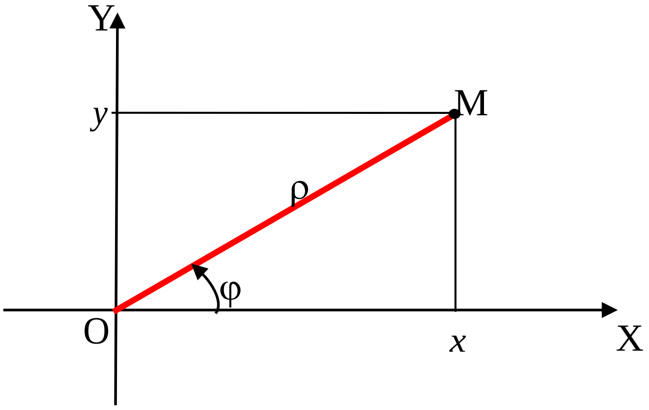
$$S(G) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

Бұған $\int_{a}^{b} f(x)dx$ интегралына $x = x(t)$ ауыстыруын жасап көз жеткізуге болады.

Поляр координаттарындағы аудан

Жазықтықтағы кейбір қисықтарды полярлық деп аталатын координаталар жүйесінде қарастырған қолайлы.

Жазықтықта декарттық координаталар жүйесі берілсін. Ox оң жарты осін полярлық ось деп, ал O нүктесін полюс деп атаймыз. M нүктесі – жазықтықтағы кез келген нүкте болсын. M нүктесінен O нүктесіне дейінгі қашықтықты осы нүктенің полярлық радиусы ρ деп аталады. Полярлық өс пен $\overrightarrow{OM}$ векторының арасындағы бұрышты φ арқылы белгілейміз. ρ және φ сандары M нүктесінің полярлық координаттары деп аталады (6 суретті қара).



ρ және φ сандарына мынадай шектеулер қолданылады.

$$\begin{cases} \rho \ge 0 \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases}$$

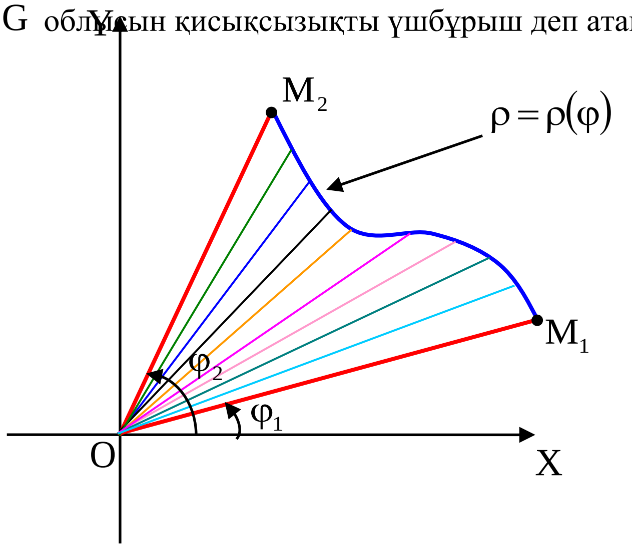
(немесе $-\pi < \varphi \le \pi$).

Тақырып 26. Айнымалы және белгілі бір интегралдың бөліктеріндегі интегралдау формуласы

M нүктесінің декарттық және полярлық координаталарының арасындағы байланыс келесі теңдіктің көмегімен анықталады

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Координат төбесінен шығатын сәулелермен $\varphi = \varphi_1$ және $\varphi = \varphi_2$ (мұндағы $\varphi_1 < \varphi_2$) және теріс емес $\rho = f(\varphi)$ функциясының $[\varphi_1, \varphi_2]$ кесіндідегі үзіліссіз графигімен шектелген жазықтықтағы G облысын қисықсызықты үшбұрыш деп атаймыз (7 сурет).



$[\varphi_1, \varphi_2]$ кесіндісін n бөлікке бөліп және әрбір бөліктегі қисық сызықты үшбұрыштың ауданы $\Delta\varphi_i$, радиусы $f(c_i)$, бұрышы $\Delta\varphi_i$ болатын дөңгелек сектордың ауданына ауыстыра отырып келесі жуықтау формуласын аламыз

$$S(G) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(c_i)\Delta\varphi_i .$$

Мұндағы қосынды $[\varphi_1, \varphi_2]$ кесіндісінде $\rho = \frac{1}{2} f^2(\varphi)$ функциясы үшін интегралдық қосынды болып табылады.

Соңғы теңдікте $\Delta\varphi_i$-дің ең үлкені 0-ге ұмтылғанда қисықты үшбұрыштың ауданы ретінде келесі өрнекті аламыз:

$$S(G) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi) d\varphi .$$

. Қисық доғасының ауданын табу

Жазықтықта $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ үзіліссіз дифференциалданатын функцияның графигімен берілген ұштары A және B нүктелерінде болатын L қисығын қарастырайық. Осы қисықты n бөлікке бөлеміз. $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, M_i - нүктесінің координаталары (x_i, y_i) $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $y_i - y_{i-1} = \Delta y_i$ (9 сурет).

Төбелері таңдап алынған нүктелерде жататын L қисығына іштей сызылған сынықтың ұзындығын I_n деп белгілейміз:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} .$$

Анықтама. Δx_i - дің ең үлкені 0-ге ұмтылғандағы қисыққа іштей сызылған сынықтың ұзындықтарының қосындысының шегі L қисығының ұзындығы деп аталады.

Оны $I(L)$ арқылы белгілейміз.

$$I(L) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} I_n .$$

Қисықтың ұзындығы болатын болса (егер жоғарғы шек бар болса), онда оны түзуленетін қисық деп атаймыз.

Теорема. Түзуленетін $y = f(x)$ функциясының $[a,b]$-да үзіліссіз дифференциалданатын графигі және оның ұзындығы мына формула арқылы анықталады

$$I(L) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx .$$

Салдар. Үзіліссіз дифференциалданатын параметрлік функция жазықтықта L-қисығының көмегімен берілген

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Онда түзуленетін қисықтың және оның ұзындығы мына формула арқылы анықтаймыз

$$I(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt .$$

Ескерту. Алынған формула кеңістіктегі L қисығы үшін де орындалатынын тексеру қиын емес. Егер кеңістіктегі L қисығы үзіліссіз дифференциалданатын параметрлік функциялар арқылы берілсе

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \\ t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

онда ұзындығы мына формуламен табылады.

$$I(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt .$$

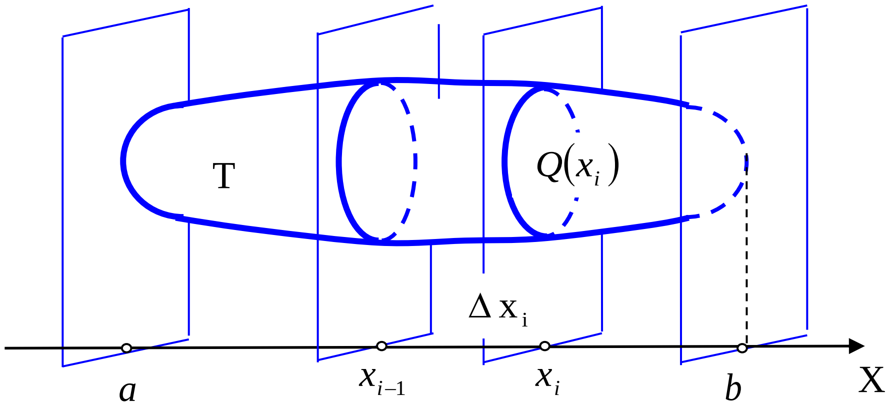
2 салдар. Айталық L қисығы полярлық координата үзіліссіз дифференциалданатын теріс емес $\rho = f(\varphi)$ ($\varphi \in [\alpha, \beta]$) функциялармен берілсін. Бұл түзуленетін қисық және оның ұзындығы былай табылады:

$$I(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\, d\varphi .$$

Анықталған интегралдың көмегімен айналу денесінің көлемін табу

Айталық, кеңістікте T денесіжәне Ox өсіберілген. Осы T денесіне x нүктесіненөтетін Ox өсінеперпендикулярқимажүргіземіз. Оныңауданын $Q(x)$ депбелгілейік.

T денесінің Ox өсіндегіпроекциясы $[a,b]$ кесіндісіболсын, яғни $y = Q(x)$ функциясыосыкесіндідеанықталған. Осы $Q(x)$ функциясын $[a,b]$ кесіндісіндеүзіліссізфункциядепесептейміз (11 суреттіқараңыз).



[a,b] кесіндісін x_i нүктелерімен n бөліккебөлеміз, әрбір $[x_{i-1},x_i]$ аралықтағыдененіңкөлемінбиіктігі $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ тең, табанауданы $Q(c_i)$ $c_i \in [x_{i-1},x_i]$ болатын цилиндрдің көлемімен ауыстырамыз. Осының нәтижесінде Т денесінің көлемін табатын жуық формуланы аламыз

$$V(T) \approx \sum_{i=1}^{n} Q(c_i)\Delta x_i \,.$$

Бұл қатыста Δx_i-дің ең үлкенін нөлге ұмтылдырып $(\Delta x_i \to 0)$ Т денесінің көлемінің дәл мәнін табамыз

$$V(T) = \int_a^b Q(x)dx \,.$$

Егер Т денесі, $[a,b]$ кесіндісінде анықталған $y = f(x)$ үзіліссіз функциясымен берілген қисық сызықты трапецияның Ox өсінен айналуынан шыққан дене болсын. Дөңгелектің ауданы $Q(x)$ мына формуламен табылады $Q(x) = \pi f(x)^2$, мұндағы $f(x)$ дөңгелектің радиусы. Пайда болған айналу денесінің көлемі мына қатыспен анықталады

$$V(T) = \pi\int_a^b f^2(x)dx \,.$$

Ескерту. $a, b \ge 0$ және $f(x) \ge 0$ үшін жоғарыда қарастырылған қисық сызықты трапеция Oy өсінен айналсын. Алынған дененің көлемін келесі формуламен табылатынын дәлелдеу қиын емес

$$V(T) = 2\pi\int_a^b xf(x)dx \,.$$

Айналу бетінің ауданын табу

Айталық, үзіліссіз дифференциалданатын $y = f(x)$, $(x \in [a,b]$ және $f(x) \ge 0)$ функциясының графигі Ox өсінен айналсын. Пайда болған H - айналу бетінің

$$S(H) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

формуласымен табылатынын дәлелдеу қиын емес.

Тақырып 27. Белгілі бір интегралды қолдану

Анықталған интегралда айнымалыны ауыстыру

4 теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз, ал $x = \varphi(t)$ функциясы $[\alpha,\beta]$ кесіндісінде бірсарынды және үзіліссіз дифференциалданатын болса, мұндағы $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, онда $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Бұл интеграл бірінші квадратта орналасқан радиусы бірге тең, центрі координат бас нүктесіндегі дөңгелектің ширек бөлігінің ауданын білдіреді.

Анықталған интегралды бөліктеп интегралдау

5 теорема. $[a,b]$ *кесіндісінде* $y = u(x)$ *және* $y = v(x)$ *үзіліссіз дифференциалданатын функциялары берілсін, сонда мына теңдік орынды*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Бұл теңдікті қысқаша түрде былай да жазуға болады

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

7 бөлім. Бірнеше айнымалы функция. Жеке туындылар

Тақырып 28. Жеке туындылар

Кестелік түрде берілген, $u=f(x,y)$ екі анымалылы функцияны қарастырайық: $u_{ij} = f(x_i, y_j)$, мұндағы $x_i = x_0 + ih_1$ $(i = 0, 1, \ldots, I)$, $y_j = y_0 + jh_2$ $(j = 0, 1, \ldots, J)$. 2 кестеде деректер бөлігі берілген, олар бізге әріде керек болады.

Жеке туынды түсінігін қолданып, h_1 және h_2 қадамдарының кіші мәндері үшін жуықтап жазамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{f(x+h_1, y) - f(x,y)}{h_1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{f(x, y+h_2) - f(x,y)}{h_2}.$$

Жоғарыда енгізілген белгілеулерді қолданып, (x_i, y_j) түйінінде соңғы айырымдар қатынатары көмегімен жеке туындылар үшін келесі жуық өрнектерді аламыз:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h_1}, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_2}.$$

Кесте 2

y \ x	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
y_{j-2}	$u_{i-2,j-2}$	$u_{i-1,j-2}$	$u_{i,j-2}$	$u_{i+1,j-2}$	$u_{i+2,j-2}$
y_{j-1}	$u_{i-2,j-1}$	$u_{i-1,j-1}$	$u_{i,j-1}$	$u_{i+1,j-1}$	$u_{i+2,j-1}$
y_j	$u_{i-2,j}$	$u_{i-1,j}$	u_{ij}	$u_{i+1,j}$	$u_{i+2,j}$
y_{j+1}	$u_{i-2,j+1}$	$u_{i-1,j+1}$	$u_{i,j+1}$	$u_{i+1,j+1}$	$u_{i+2,j+1}$
y_{j+2}	$u_{i-2,j+2}$	$u_{i-1,j+2}$	$u_{i,j+2}$	$u_{i+1,j+2}$	$u_{i+2,j+2}$

Көп айнымалылы функцияларды сандық дифференциалдау үшін, ертеректегі сияқты, интерполяциялық көпмүшелікті қолдануға болады. бірақ мұнда басқа тәсілді қарастырамыз – екі айнымалы функциясын Тейлор қатарына жіктеу:

$$f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\Delta y^2\right) +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\,\Delta x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\,\Delta x^2\Delta y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\,\Delta x\Delta y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\,\Delta y^3\right) + \ldots$$

Тақырып 29. Жеке және толық дифференциал

Анықтама.z= f(x, y) функциясының дербес өсімшелерінің сәйкес аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нолге ұмтылған жағдайдағы шегі функцияның **дербес туындысы** деп аталады және былайша жазылады:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

(5)

Бұл анықтамадан z_x' туындыны табу үшін у айнымалыны тұрақты деп, ал z_y' туындыны табу үшін х айнымалыны тұрақты деп қарастыру керек. Және де бір айнымалы функция дифференциалынан белгілі дифференциалдаудың барлық ережелері сақталады.

$$z = x\ln y + \frac{y}{x}$$

Мысал. функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі. х бойынша дербес туындыны табу үшін у айнымалыны тұрақты деп аламыз, сонда

$$z'_x = (\ln y)x' + y\left(\frac{1}{x}\right)' = \ln y \cdot 1 + y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \ln y - \frac{y}{x^2}$$

. у бойынша дербес туындыны табу үшін х айнымалыны тұрақты деп аламыз, сонда

$$z'_y = x(\ln y)' + \frac{1}{x}y' = x\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}$$

.

Анықтама.z= f(x, y) функцияның **толық дифференциалы** деп осы функцияның дербес туындыларының сәйкес аргумент өсімшелеріне көбейтіндісінің қосындысын айтамыз,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

(*).Егер f(x,y) = x, g(x,y) = y функциялары үшін

(*) қатынас бойынша толық дифференциалдарын тапсақ, df = dx= Δ x, dg = dy= Δ y болатындығы шығады. Олай болса функцияның толық дифференциалын мына түрде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

жазуға болады: .

Тақырып 30. Кешенді және жанама функциялардың дифференциасы

Туынды ұғымы өзара байланысты екені алдын ала көрінбейтін келесі есептен шығарғанда пайда болды-ол қисыққа жанама жүргізу.

*Жанама туралы есеп***.**(a,b) интервалында анықталған және үзіліссіз функциясының графигін қарастырайық. нүктесі (a,b)интервалының бекітілген нүктесі дейік. Осы интервалдан шықпайтындай етіп, аргументіне өсімшесін берейік. Сонда графиктін оларға сәйкес нүктелерінің координатталары мынадай .

Анықтама. қисығына нүктесінде жүргізілген жанама деп графиктін М нуктесінің нүктесіне ұмтылғандағы (немесе жағдайда) (М) қиюшысының шектік орны (егер ол бар болса) (Т) түзуін атайды.

Егер туындысы бар болса, онда қисығы графигінің нүктесінде (Т) жанамасын жүргізуге болатын дәлелденеді.

Сонда жағдайда (М) (Т), мұндағы мен 0x өсімен сәйкес (М) қиюшысы және (Т) жанамасы жасайтын бұрыштар.

(Р)0x (Р) оу түзулерін жүргізейік. ((Т) жанамасы мен (МР) түзуінің қиылысу нүктесі N делік. (МТ) ұшбұрышынан табатымы

Сонымен келесі анықтамаға келдік. Егер нүктесінде нақты мәнді шегі бар болса, онда түзуі қисығының нүктесіндегі жанамасы деп аталады.

Демек, жанаманың бұрыштық коэффициенті туындының мәніне тен, мұндағы жанасу нүктесінің абциссасы. графигінен аргументінің өсімшесі ке сәйкес келетін dy дифференциалы мен өсімшесі , жалпы алғанда , тең еместігін көреміз, Дифференциал dy жанама ординатасының өсімшесі де, ал - қимығы нүктесінің ординатасының өсімшесі.

f функциясы I аралығында анықталсын. Егер үшін нақты мәнді шегі бар болса, онда f(x) функциясының нүктесіндегі туындысы дейді де символымен белгілейді.Сонымен .

Туындының анықтамасын берген соң, енді жанаманың анықтамасын қайта береміз. y=f(x) функциясына нүктесінде жүргізілген жанама деп, нүктесі арқылы жүргізілген бұрыштық коэффициенті болатын түзуді айтады. Яғни теңдеуімен берілген түзуді айтады.Туынды табу операциясы функцияны дифференциалдау деп аталады. Функция берілген нүктеде дифференциалданады деп аталады, егер ол сол нүктеде туындысы болса, ол аралықта дифференциалданады деп аталады, егер оның әрбір нүктесінде дифференциалданатын болса.

Теорема. Егер функция нүктеде дифференциалданатын болса, онда ол сол нүктеде үздіксіз болады.

Кейбір жай функциялардың туындысы.

1. Тұрақты санның туындысы нөлге тең.
2. Тәуелсіз айнымалының туындысы бірге тең.

3. (мұндағы n –бүтін оң сан).
Дифференциалдаудың негізгі ережелері.
1-Теорема. Егер функциялары нүктесінде дифференциалданатын болса, онда сол нүктеде функциясы да дифференциалданады, әрі болады.
2-Теорема. Егер функциялары нүктесінде дифференциалданатын болса, онда сол нүктеде функциясы да дифференциалданады, әрі болады.
1-Салдар. Тұрақты көбейткішті туындының таңбасының алдына шығаруға болады.
3-Теорема. Егер функциялары нүктесінде дифференциалданатын болса, және болса, онда сол нүктеде функциясы да дифференциалданады, әрі болады.
Күрделі функцияның туындысы.
Теорема. У х-тің күрделі функциясы болса, яғни y=f(u), u=g(x) немесе
y(x)=f[g(x)] (*) болсын. Егер g(x) және f(x) сәйкес х және u=g(x) нүктелерінде өз аргументтері бойынша дифференциалданатын болсын, онда (*) күрделі функция да х нүктесінде дифференциалданады және оның туындысы формуламен *табылады.*
*Дифференциалдау ережесі*1. 2.
3. 4.
Дифференциалдаудың негізгі формулаларының таблицасы.
1. 2. 3. 4.
5. 6. 7. 8.
9. 10. 11. 12.
13. 14. 15. 16. 17.

Тақырып 31. Күрделі функцияны саралау

Анықтама. Екі аргументті функция $z = f(x,y)$ тің дифференциалы деп оның х пен у бойынша алынған дербес туындыларын сәйкес аргументтер өсімшесіне көбейтіп қосқан қосындысын атайды, яғни $dz = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y$ мұндағы dz екі аргументті функцияның толық дифференциалының белгіленуі.

Анықтама. Егер $z = f(x,y)$ функцииясының толық өсімшесі $\Delta z = dz + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$ өрнегі арқылы жазылатын болса, онда $z = f(x,y)$ функциясы $M(x,y)$ нүктесінде дифференциалданатын функция деп аталады. мұндағы dz функция дифференциалының белгіленуі болса, ал $x \to x_0,\ y \to y_0$ болғанда $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y), \beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ ақырсыз кіші шамалар.

Дербес $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ және $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ туындыларының бар болуы $z = f(x,y)$ функциясының дифференциалдануының қажетті шарты болып табылады, бірақ ол шарт жеткілікті шарт бола алмайды.

Теорема. Егер $z = f(x,y)$ функциясының дербес $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ және $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ туындылары $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің маңайында бар болып , сол нүктенің өзінде үзіліссіз болса, онда $z = f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде дифференциалданатын функция болады.

Тақырып 32. Екі айнымалы функция

Анықтама. Х жиынынан алынған $(x_1, x_2,..., x_n)$ айнымалылар жиынтығына толықанықталған z айнымалысы бірмәнді сәйкес қойылсы, онда Х жиынында бірнеше аргументті $z = f(x_1, x_2,..., x_n)$ функциясы анықталған дейді.

$(x_1, x_2,..., x_n)$ айнымалылары тәуелсіз , ал z тәуелді айнымалы немесе функция деп аталады. Х жиыны f функцияснынң анықталу облысы деп аталады, ол n өлшемді кеңістіктің ішкі жиыны болады.

Анықтама. $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің r маңайы деп радиусы r – ге тең. Центрі $M_0(x_0,y_0)$ нүктесіндғ орналасқан дөңгелек нүктелерінің жиыны атайды.

$z = f(x,y)$ функциясыныңграфигі деп апликата z айнымалысының $z = f(x,y)$ теңдеуін қанағаттандыратын үш өлшемді (x,y,z) кеңістік нүктелерінің жиынын атайды. $z = f(x,y)$ функциясының графигі үш өлшемді кеңістікте белгілі бір бетті сипаттайды.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon \succ 0$ саны үшін оған сәйкес $\delta \succ 0$ саны (мұндағы $\delta = \delta(\varepsilon)$) табылып $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \prec r \prec \delta$ теңсіздігі орындалса, онда A саны $x \to x_0,\ y \to y_0$ (немесе $M_0(x_0,y_0)$нүктесіндегі) $z = f(x,y)$ функциясының шегі деп аталып , $\lim f(x,y) = A$ арқылы белгіленеді.

Анықтама. Егер $z = f(x,y)$ функциясы : 1) $M_0(x_0,y_0)$нүктесінде анықталған 2) $x \to x_0,\ y \to y_0$ ақырлы шегі бар $(f(x_0,y_0))$ 3) бүл шек функцияның $M_0(x_0,y_0)$ нүктесіндегі мәніне тең, яғни $\lim f(x,y) = A$ шарттарын қанағаттандырсы, онда $z = f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде үзіліссіз функция деп аталады.

Анықтама. Екі аргументті $z = f(x,y)$функциясының x бойынша алынған дербес туындысы деп $\Delta x \to 0$ болғандағы

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ шегін атайды да z'_x немесе $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ арқылы белгілейді. Демек $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

Осылайша $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$

Анықтама. Екі аргументті функция $z = f(x,y)$ тің дифференциалы деп оның x пен y бойынша алынған дербес туындыларын сәйкес аргументтер өсімшесіне көбейтіп қосқан қосындысын атайды, яғни $dz = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y$ мұндағы dz екі аргументті функцияның толық дифференциалының белгіленуі.

Анықтама. Егер $z = f(x,y)$ функцииясының толық өсімшесі $\Delta z = dz + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y$ өрнегі арқылы жазылатын болса, онда $z = f(x,y)$ функциясы $M(x,y)$ нүктесінде дифференциалданатын функция деп аталады. мұндағы dz функция дифференциалының белгіленуі болса, ал $x \to x_0,\ y \to y_0$ болғанда $\alpha = \alpha(\Delta x,\Delta y), \beta = \beta(\Delta x,\Delta y)$ ақырсыз кіші шамалар.

Дербес $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ және $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ туындыларының бар болуы $z = f(x,y)$ функциясының дифференциалдануының қажетті шарты болып табылады, бірақ ол шарт жеткілікті шарт бола алмайды.

Теорема. Егер $z = f(x,y)$ функциясының дербес $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ және $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ туындылары $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің маңайында бар болып , сол нүктенің өзінде үзіліссіз болса, онда $z = f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде дифференциалданатын функция болады.

Тақырып 33. Ең үлкен және ең кіші функцияның мәндері

Жоғары ретті дербес туындылар мен дифференциалдар.

$z = f(x,y)$ функциясы берілсін дейік. Оның $f'_x(x,y)$ және $f'_y(x,y)$ туындылары x пен y тің функциялары екегі белгілі. Кейбір арнайы шарттар орындалғанда дербес $f'_x(x,y)$ және

$f_y^{/}(x,y)$ функцияларынаң олардың екінші ретті туындылары деп аталатын туындыларын есептеуге мнмкіндік туады. Оларды былай белгілейді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = f_{xx}^{//}(x,y) \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = f_{xy}^{//}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = f_{yy}^{//}(x,y) \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = f_{yx}^{//}(x,y)$$

Егер $f_{xy}^{//}(x,y)$ және $f_{yx}^{//}(x,y)$ дербес туындылары үзіліссіз функциялар болса, онда $f_{xy}^{//}(x,y)$ $= f_{yx}^{//}(x,y)$

Екінші ретті толық дифференциалды былай жазып көрсетуге болады

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Анықтама. Егер $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің $\varepsilon = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \succ 0$ манайы табылып, осы маңайға тән M(x,y) нүктелері үшін $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ ($f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$) тенсізідігі орындалса, онда $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі $z = f(x,y)$ функциясының максимум (минимум) нүктесі деп аталады. Максимум және минимум нүктелерін $f(x,y)$ функциясының экстремум нүктелері деп атайды.

Теорема (функция экстремумның қажетті шарты). $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі дифференциалданатын $z = f(x,y)$ функциясының экстремум нүктесі дейік. Сонда $f_x^{/}(x_0,y_0)$ және $f_y^{/}(x_0,y_0)$ туындылары нөлге тең немесе болмайды.

$M_0(x_0,y_0)$ нүктесі $z = f(x,y)$ функциясының максимум нүктесі дейік. y – айнымаласын тұрақты деп санап, яғни $y = y_0$, бір аргументті $z = f(x,y_0)$ функциясые аламыз. Демек, $z^{/}{}_x$=0. Осылайша максимум нүктесінде $z_y^{/} = f(x_0,y_0) = 0$ теңдеуін шығарып аламыз. Сонда $f_x^{/}(x,y) = 0$, $f_y^{/}(x,y) = 0$ теңдеулер жүйесін шығарып аламыз. Осы теңдеулер жүйесінен табылған нүктелер стационар нүктелер деп аталады.

Теорема (екі аргументті функцияның экстремумның бар юолуының жеткілікті шарты). $z = f(x,y)$ функциясы: а) $f_x^{/}(x,y) = 0$, $f_y^{/}(x,y) = 0$ болатын стационар нүктесінде анықталған дейік; б) осы $M_0(x_0,y_0)$нүктесінде үзіліссіз $f_{xx}^{//}(x_0,y_0) = A$, $f_{xy}^{//}(x_0,y_0) = B$, $f_{yy}^{//}(x_0,y_0) = C$ болсын . Сонда , егер $\Delta = AC - B^2 \succ 0$ болса, онда $z = f(x,y)$ функциясының $M_0(x_0,y_0)$нүктесінде экстремумы бар; $A \prec 0$ болғанда – максимум, $A \succ 0$ болса – минимум мәндерін қабылдайды. $\Delta = AC - B^2 \prec 0$ болғанда экстремум болмайды.. Ал $\Delta = AC - B^2 = 0$ болғанда функция $z = f(x,y)$ экстремум мәнін қабылдауыда немесе қабылдамауы да мүмкін.

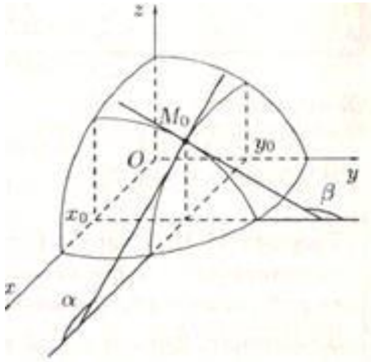
Екі аргументті функцияны экстремумға зерттеуді біз мынадай біртінділіте жүргіземіз:

1. функцияның $z^{/}{}_x$ және $z^{/}{}_y$ дербес туындыларын тауып, $z^{/}{}_x = 0$, $z^{/}{}_y = 0$ теңдеулер шешіп , функция экстремумының стационыр нүктелерін тауып аламыз.
2. табылған стационар нүктелердегі функцияның екінші ретті туындыларын тауып, жоғарыда келтірілген ереже бойынша экстремум бар-жоғын айқындаймыз да $M_0(x_0,y_0)$нүктесіндегі сол экстремум мәндерін табамыз.

Функцяның ең үлкен және ең кіші мәндері. Қандай да болмасын тұйық облысында үзіліссіз $z = f(x,y)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін тапқанда, оның экстремум мәндері мен тұйық аралықтың шеткі нүктелеріндегі мәндерін мен тұйық аралықтаң шеткі нүктелеріндегі мәндерін тауып, оларды салыстырады, Сонда осы мәндердің үлкені – функцияның ең үлкен, ал кіші мәні оның ең кіші мәні болып табылады.

Тақырып 34. Екі айнымалы функцияның геометриялық мағынасы

$z = f(x; y)$ функциясының графигі белгілі бір бет болады. $z = f(x; y_0)$ функциясының графигі беттің $y = y_0$ жазықтығымен қиылысу сызығы болады.



5.2-сурет - $z = f(x; y)$ функциясы

Бір айнымалы функцияның туындысының геометриялық мағынасын ескерсек, онда $f'_x(x_0; y_0) = tg\alpha$ (5.2-суретті қара), мұндағы $\alpha - Ox$ осімен $z = f(x; y_0)$ қисығына $M_0(x_0; y_0)$, $f(x_0; y_0)$ нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың арасындағы бұрышы. Дәл осы сияқты $f'_y(x_0; y_0) = tg\beta$.

Жоғары ретті дербес туындылар

$\dfrac{\partial f(x; y)}{\partial x}$ және $\dfrac{\partial f(x; y)}{\partial y}$ дербес туындалары бірінші ретті дербес туындылар деп аталады. Оларды $(x; y) \in D$ тәуелді функциялар деп қарастыруға болады. Осы дербес туындылардың тағы туындылары болуы мүмкін, оны екінші ретті туындалар деп атайды. Олар төмендегі түрде белгіленеді:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x;\ y)$$

;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy} = f''_{xy}(x;\ y)$$

;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx} = f''_{yx}(x;\ y)$$

;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x;\ y)$$

.

Дәл осындай жолмен үшінші, төртінші және т.с.с. ретті туындыларды анықтауға болады, мысалы $z'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial x^2}$ (немесе $\left(z'''_{xyx}\right)'_x = z^{(4)}_{xyx^2}$) және т.с.с. Әртүрлі айнымалылары арқылы алынған екінші және одан да жоғары ретті дербес туындылар аралас дербес туындылар деп аталады.

Теорема 1. (Шварц). Егер жоғары ретті туындалар үзіліссіз болса, онда бірдей ретті аралас туындылар бір біріне дифференциалдану реті бойынша өзгешеленуін байланысты тең болады. Дербес жағдайда $z = f(x; y)$ функциясы үшін $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ болады.

8 бөлім. Дифференциалдық теңдеулер

Тақырып 35. 1-ші ретті дифференциалдық теңдеулер

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерді жалпы жағдайда төмендегі түрде жазуға болады

$$F(x; y; y') = 0. \tag{6.1}$$

Бұл теңдеу белгісіз айнымалы $x-$ті, ізделінді функция $y-$ті және оның туындысы $y'-$ті байланыстырады. Егер (6.1) теңдеуі $y'-$ке қатысты шешілетін болса,

$$y' = f(x; y). \tag{6.2}$$

Онда оны бірінші ретті туынды арқылы шешілген дифференциалдық теңдеу деп атайды.

Біз дифференциалдық теңдеудің осындай түрдегі теңдеулерді қарастырамыз. (6.2) теңдеуі $(x; y)$ нүктесі арқылы өтетін нүктенің координаталары мен интегралдық қисықта жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін байланыстырады. Демек, $y' = f(x; y)$ дифференциалдық теңдеуі Oxy жазықтығына (өріс бағыты) бағыттың жиынтығын береді. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің геометриялық талдауы осылайша болады.

Барлық нүктелерінің өріс бағыттары бірдей болатын қисық изоклина деп аталады. Интегралдық қисықтарды жобалап салу үшін изоклинаны пайдалануға болады. $y' = c$ деп алып, изоклинаның теңдеуін алуға болады, яғни

$$f(x; y) = c.$$

Туындысы арқылы шешілетін бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді дифференциалды түрде былай жазуға болады

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0, \tag{6.3}$$

мұндағы $P(x; y)$ және $Q(x; y)$ белгілі функциялар. (6.3) теңдеуді шешкенде x және y айнымалыларын, біреуін екнішісінің функциясы ретінде қарастыруға болады. Дифференциалдық теңдеудің бір түрінен, екінші түріне келтіруге болады.

Дифференциалдық теңдеуді нақты мағынасы болуы үшін, ол қосымша шарттарға бағынуы керек. $x = x_0$ болғанда, $y = y_0$ болатын шартты бастапқы деп атайды. Бастапқы шарт төмендегідей түрде жазылады:

$$y(x_0) = y_0 \text{ немесе } y\big|_{x=x_0} = y_0 . \tag{6.4}$$

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі деп бір ғана тұрақты сан енетін $y = \varphi(x;c)$ функциясын айтады, және ол төмендегі шарттарды қанағаттандырады:

1. $\varphi(x;c)$ функциясы с-тұрақты санның әрбір мәні үшін бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімі болады.

6. Кез-келген (6.4) бастапқы шарты үшін $c = c_0$ саны табылып $y = u(x;c)$ функциясы берілген бастапқы шартты қанағаттандырады.

Егер дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі айқын түрде табылмаса, яғни $\varphi(x;y;c) = 0$ түрінде анықталса, онда мұндай шешім дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы деп аталады. Бұл жағдайда $\varphi(x;y;c) = 0$ теңдеуі берілген теңдеудің дербес интегралы деп аталады.

Геометриялық тұрғыдан алғанда $y = \varphi(x;c)$ функциясын Oxy жазықтығында жататын интегралдық қисықтардың жиынтығы деп қарауға болады, ал $y = \varphi(x;c_0)$ дербес шешуі осы қисықтар жиынтығынан $(x_0;y_0)$ нүктесі арқылы өтетін бір ғана қисықты анықтайды.

(6.3) берілген I ретті дифференциалдық теңдеудің (6.4) бастапқы шартын қанағаттындыратын шешімін табатын есепті Коши есебі деп атайды.

Теорема 1. (Коши есебінің бір ғана шешімінің бар болуы туралы теорема). Егер (6.2) теңдеуіндегі $f(x;y)$ функциясы және оның дербес туындысы $f'_y(x;y)$, $(x_0;y_0)$ нүктесі ішінде жататын белгілі бір D облысында үздіксіз болса, онда оның бір ғана шешімі $y = \varphi(x)$ бар және ол бастапқы (6.4)-ті қанағаттандырады.

Бұл теореманың геометриялық мағынасы берілген шарт орындалғанды дифференциалдық теңдеудің $(x_0;y_0)$ нүктесі арқылы өтетін бір ғана интегралдық қисығы болады. Анықталған түрдегі дифференциалдық теңдеудің интегралдау әдістерін қарастырайық.

Тақырып 36. Бөлінген және ажыратылатын айнымалы теңдеулер

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің ең қарапайым түрін

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 . \tag{6.5}$$

Мұндағы бір қосылғыш $x-$тен, ал екіншісі $y-$тен тәуелді.

Мұндай теңдеуі айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу деп атайды. Осы теңдеуді мүшелеп интегралдап, алатынымыз:

$$\int P(x)\cdot dx + \int Q(y)\cdot dy = c$$

-оның жалпы интегралы болады.

Жалпы түрде айнымалылары ажыратылатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің түрі төмендегідей болады:

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy = 0 . \tag{6.6}$$

(6.6) теңдеудің ерекшелігі, ол dx және dy-тің коэффициенттері екі функцияның көбейтіндісі, оның біреуі $x-$тен, ал екіншісі $y-$тен тәуелді. (6.6) теңдеуінің екі жағын $P_2(x)\cdot Q_1(y)\neq 0$ мүшелеп бөлсек:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\cdot dy=0$$

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\cdot dy=c,$$

-жалпы интегралын аламыз.

Ескерту 1. Дифференциалдық теңдеуді $P_2(x)\cdot Q_1(y)-$ке бөлгенде кейбір шешімдері жоғалып кетуі мүмкін. Сондықтан, $P_2(x)\cdot Q_1(y)=0$ теңдеуін жеке шешіп және дифференциалдық теңдеудің осы шешуі жалпы шешуден алынбауы мүмкін екендігі анықтау керек – бұл ерекше шешімдер.

6. $y'=f_1(x)\cdot f_2(x)$ теңдеуі айнымалылары ажыратылған теңдеуге келтіріледі. Ол үшін $y'=\dfrac{dy}{dx}$ деп алып айнымалыларын ажырату керек.

3. $y'=f(ax+by+c)$ теңдеуін $ax+by+c=u$ ауыстыру арқылы айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіріледі, мұндағы $a,\ b,\ c$-сандар. x бойынша дифференциалдап,

$$\frac{du}{dx}=a+b\cdot\frac{du}{dx},$$

яғни $\dfrac{du}{dx}=a+b\cdot f(u)$,

бұдан $\dfrac{du}{a+b\cdot f(u)}=dx$. Бұл теңдеуді интегралдап, $u-$дың орнына $ax+by+c-$ты қойып, берілген теңдеудің жалпы интегралын аламыз

Тақырып 37. Біртекті теңдеулер. Сызықтық теңдеулер және оларды шешу әдістері

Айнымалылары ажыратылатын теңдеуге бірінші ретті біртектес теңдеулер келтіріледі. $f(x;y)$ функциясын $n-$өлшемді біртектес функция деп атайды, егер оның әрбір аргументін кез-келген λ көбейткішіне көбейткенде функция λ^n көбейткішіне көбейтілетін болса, яғни

$$y'=f(x;y). \qquad (6.7)$$

теңдеуін **біртектес теңдеу** деп атайды, егер $f(x;y)$ функциясы нөлінші өлшемді біртектес функция болса (6.7) біртектес теңдеуін келесі түрде жазуға болады

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (6.8)$$

Егер $f(x;y)-$ функциясы нөлінші өлшемді біртектес функция болса, онда анықтама бойынша $f(x;y)=f(\lambda x;\lambda y)$, $\lambda=\dfrac{1}{x}$ деп белгілеп, алатынымыз:

$$f(x;y)=f\left(\frac{x}{x};\frac{y}{x}\right)=f\left(1;\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

(6.8) біртектес теңдеу.

$$\frac{y}{x}=u \quad \text{немесе} \quad y=u\cdot x. \tag{6.9}$$

ауыстырулары арқылы айнымалылары ажыратылатын теңдеуге келтіріледі. $y=u\cdot x, y'=u'x+u$ ауыстыруларын (6.8) теңдеуге қойсақ немесе $x\dfrac{du}{dx}=\varphi(u)-u$, яғни айнымалылары ажыратылатын теңдеулерді аламыз. Бұл теңдеудің жалпы шешуін тауып, $u-$дың орнына $\dfrac{y}{x}$ қоямыз. Берілген теңдеудің жалпы шешуін табамыз.

Біртектес теңдеу көп жағдайда дифференциалдық түрде төмендегідей түрде беріледі,

$$P(x;y)\cdot dx+Q(x;y)\cdot dy=0. \tag{6.10}$$

$P(x;y)$ және $Q(x;y)$-бірдей өлшемді біртектес функциялар болса, (6.10) дифференцалдық теңдеуі біртектес болады. (6.10) теңдеуін $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{P(x;y)}{Q(x;y)}$ түрінде жазып, теңдеудің оң жағына жоғарыдағы түрлендіруді қолдансақ, $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ теңдеуін аламыз. (6.10) түріндегі теңдеуді интегралдағанда теңдеуді (6.8) түріндегі теңдеуге қажет емес. (6.9) ауыстыруы арқылы (6.10) теңдеуін түрлендіріп айнымалылары ажыратылатын теңдеуге келтіріледі.

Ескерту. $y'=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ түріндегі теңдеу біртектес немесе айнымалылары ажыратылатын теңдеуге келтіріледі. Ол үшін u және v жаңа айнымалылары енгізіліп, $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$ деп алып, α және β коэффициенттерін анықтаймыз, мұндағы α және $\beta-$ сандар.

Оларды теңдеу біртектес болатындай етіп алынады.

Сызықтық теңдеулер. Я.Бернулли теңдеуі

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді **сызықты** деп атайды, егер оны төмендегідей түрде жазуға болса

$$y'+p(x)\cdot y=q(x). \tag{6.11}$$

мұндағы $p(x)$ және $q(x)$-берілген функциялар, дербес жағдайда-тұрақтылар. (6.11) дифференциалдық теңдеуінің ерекшелігі, ізделінді y функциясы және оның туындысы y' олардың көбейтіндісі түрінде емес бірінші дәрежелі теңдеуге кіреді.

И.Бернулли әдісі

Бұл әдіс бойынша (6.11) теңдеудің шешімі $y = u \cdot v$, ($u = u(x)$ және $v = v(x)$ - $x -$тен тәуелді белгісіз функциялар) ауыстыруы арқылы төмендегі түрде жазуға болады:

$$y(x) = \frac{y(x)}{v(x)} \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x),$$

мұндағы $v(x) \neq 0$. Сонда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Бұдан кейін y пен y'-тың осы мәндерін (6.11) теңдеуге қойсақ: $u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = g(x)$ немесе

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + p(x) \cdot v\right) = g(x) \qquad (6.12)$$

мұндағы $v = v(x)$ функциясын жақша ішіндегі өрнек нөлге тең болатындай етіп таңдап аламыз, яғни $v' + p(x)v = 0$ дифференциалдық теңдеуін шешеміз.

Сонда $\frac{dv}{dx} + p(x) \cdot v = 0$, яғни $\frac{dv}{v} = -p(x)dx$. Теңдеуді интегралдасақ, онда

$$\ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|c|.$$

$v = v(x)$ функциясын еркін таңдап алғанымыздықтан *c=1* деп алуға болады. Соңғы теңдеуде

$$v = e^{-\int p(x) \cdot dx}.$$

Осы шыққан функцияны (6.12) теңдеуге қойсақ,

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = g(x),$$

аламыз.

Шыққан теңдеу айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу, оны шешсек

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} = g(x),$$

$$du = g(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} dx,$$

$$u = \int g(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} dx + c.$$

y айнымалысына қайта келіп, берілген теңдеудің шешуін аламыз

$$y = u \cdot v = \left(\int g(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c \right) \cdot e^{-\int p(x)dx}. \qquad (6.13)$$

Лагранж әдісі (тұрақтыны варияциялау әдісі).

(6.11) теңдеуі келесі түрде интегралданады. Бұл теңдеудің оң жағысыз $y' + p(x) \cdot y = 0$ қарастырамыз. Бұл теңдеу бірінші ретті біртектес теңдеу деп аталады.

Бұл теңдеудің айнымалылары ажыратылады: $\frac{dy}{y} = -p(x) \cdot dx$ және $\ln|y| = -\int p(x) \cdot dx + \ln|c_1|$.

Сонымен $\left|\frac{y}{c_1}\right| = e^{-\int p(x)dx}$, яғни $y = \pm c_1 e^{-\int p(x)dx}$ немесе $y = c \cdot e^{-\int p(x)dx}$, мұндағы $c = \pm c_1$.

Тұрақтыны вариациялау әдісі ол с тұрақтысын $x-$тен тәуелді *c(x)* функциясымен ауыстырамыз $c = c(x)$. (6.11) теңдеуінін шешуін келесі түрде іздейміз

$$y = c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \tag{6.14}$$

Осы теңдеуден туындыларын табамыз

$$y' = c'(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right) - c(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right) \cdot (-p(x)) \tag{6.15}$$

y пен y' мәндерін (6.11) теңдеуге апарып қойсақ:

$$c'(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right) - c(x)p(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right) + c(x)p(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right) = g(x)$$

Үшінші және екінші қосылғыштар өзара жойылып кетеді де, теңдеу мына түрге келеді

$$c'(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right) = g(x).$$

Сонымен

$$d\,c(x) = g(x)\exp\left(\int p(x)dx\right) \cdot c$$

Интегралдап

$$c(x) = \int g(x)\exp\left(\int p(x)dx\right) \cdot a$$

c(x) мәнін (6.14) теңдігіне қойып, (6.11) дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін аламыз:

$$y = \left[\int g(x) \cdot \exp\left(\int p(x)dx\right) \cdot dx + c\right] \cdot \exp\left(-\int p(x)dx\right).$$

Бұл формула Бернулли әдісі бойынша алынған.

Я.Бернулли теңдеуі

$$y' + p(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n,\ n \in R,\ n \neq 0,\ n \neq 1, \tag{6.15}$$

түріндегі теңдеуді Бернулли теңдеуі деп аталады. Оны сызықтық теңдеуге келтіруге болатынын көрсетеміз.

Егер $n=0$ болса, онда (6.15) дифференциалдық теңдеуді сызықтық теңдеу болады, ал $n=1$ болса – онда ол айнымалылары ажыратылатын теңдеу болады. Жалпы жағдайда (6. 15) теңдеуінің екі жағын $y^n \neq 0$ бөліп, келесі теңдеуді аламыз:

$$y^{-n} \cdot y' + p(x) \cdot y^{-n+1} = g(x). \tag{6.16}$$

$y^{-n+1} = z$ деп белгілесек, онда $z' = \frac{dz}{dx} = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$. Бұдан $y^{-n} \cdot y' = \frac{z'}{1-n}$ табамыз. (6.16) теңдеуі

$$\frac{1}{1-n} \cdot z' + p(x) \cdot z = g(x).$$

түріне келеді.

Ақырғы теңдеу $z-$ке қатысты сызықтық теңдеу болады. Оның шешуі белгілі. Осылайша (6.15) теңдеуі $z = y^{-n+1}$ ауыстыруы сызықтық теңдеуге келтіріледі. Практикада (48.15) дифференциалдық теңдеуін И. Бернулли әдісін $y = u \cdot v$ түрінде іздеген ыңғайлы.

Тақырып 38. Тұрақты коэффициенттері бар 2-ші ретті бір текті дифференциалдық теңдеулер

Бізге төмендегі екінші ретті сызықтық біртектес дифференциалдық теңдеу берілсін:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{14.1}$$

мұндағы p және q тұрақтылар. (14.1) теңдеуінің жалпы шешімін табу үшін оның фундаментальдық жүйе құратын екі дербес шешімін табу жеткілікті. (66.1) теңдеуінің дербес шешімін келесі түрде іздейміз

$$y = e^{kx} \tag{14.2}$$

мұндағы $k-$белгілі бір сан.

Осы функцияны екі рет дифференциалдап у, y' және y'' өрнектерін (66.1) теңдеуге қойсақ:

$$k^2 \cdot e^{kx} + pk \cdot e^{kx} + q \cdot e^{kx} = 0 \tag{14.3}$$

яғни

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0 \tag{14.4}$$

немесе

$$k^2 + pk + q = 0, (e^{kx} \neq 0) \tag{14.5}$$

(14.5) теңдеуі (14.1) дифференциалдық теңдеуінің характеристикалық (сипаттамалық) теңдеуі деп аталады, (оны құру үшін (14.1) теңдеуіндегі y, y', y''-ті сәйкес $1, k, k^2$ деп ауыстыру жеткілікті). (14.5) характеристикалық теңдеуін шешкенде төмендегі үш жағдай болуы мүмкін.

1. жағдай. (14.5) теңдеулерінің түбірлері k_1 және k_2 нақты және әр түрлі сандар болсын: $k_1 \neq k_2 \left(D = \frac{p^2}{4} - q > 0\right)$. Бұл жағдайда (14.1) теңдеуінің жалпы шешімдері $y_1 = e^{k_1 x}$ және $y_2 = e^{k_2 x}$ функциялары болады. Олар фундаментальдық шешім құрайды, өйткені олардың Вронскиан анықтауышы

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_1 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{(k_1+k_2)x} - k_1 e^{(k_1+k_2)x} = e^{(k_1+k_2)x} \cdot (\neq 0 \tag{14.6}$$

Сондықтан (66.1) теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \tag{14.7}$$

2-жағдай. (14.5) характеристикалық теңдеуінің шешімдері k_1 және k_2 нақты және тең сандар болсын: $k_1 = k_2 \left(D = \frac{p^2}{4} - q = 0, k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}\right)$. Бұл жағдайда (66.1) теңдеуінің бір ғана дербес шешімі болады $y_1 = e^{k_1 x}$. Біз (14.1) теңдеудің y_1 дербес шешімімен қоса $y_2 = xe^{k_2 x}$ шешімі болатынын көрсетейік. y_2 функциясын (14.1) теңдеуге қойсақ:

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = (xe^{k_1 x})'' + p(xe^{k_1 x})' + q(xe^{k_1 x}) \\ = (2k_1 e^{k_1 x} + xk_1^2 e^{k_1 x}) + p\left(e^{k_1 x} + xk_1\, e^{k_1 x}\right) + q(xe^{k_1 x} \\ = e^{k_1 x}(2k_1 + k_1^2 + p + pxk_1 + qx) = e^{k_1 x}(x(k_1^2 + pk_1 + q) + (p + 2 \tag{14.8}$$

Бірақ $k_1^2 + pk_1 + q = 0$, өйткені k_1 характеристикалық (14.5) теңдеудің түбірі $p + 2k_1 = 0$. Себебі, шарт бойынша $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$. Сондықтан $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$, яғни $y_2 = xe^{k_1 x}$ функциясы (14.1) теңдеуінің шешімі болады. $y_1 = e^{k_1 x}$ және $y_2 = e^{k_2 x}$ дербес шешімдерін фундаментальдық шешімдер жүйесін құрайды: $W(x) = e^{2k_1 x} \neq 0$. Сондықтан бұл жағдайда (14.1) СБДТ-дің жалпы шешімі келесі түрде болады

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x} \tag{14.9}$$

болады.

3-жағдай. (14.5) характеристикалық теңдеудің түбірлері комплекс сандар болсын:

$$k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i \left(D = \frac{p^2}{4} - q < 0, \alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > \right. \tag{14.10}$$

Бұл жағдайда (14.1) теңдеуінің дербес шешімдері $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$ және $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$ функциялары болады. Эйлер формуласы бойынша:

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi, e^{-i\varphi} = cos\varphi - isi \tag{14.11}$$

Сондықтан

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} cos\beta x + ie^{\alpha x} sin \\ y_2 = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} cos\beta x - ie^{\alpha x} si \tag{14.12}$$

(14.1) теңдеуінің екі нақты шешімдерін табайық. Ол үшін y_1 және y_2 шешімдерінің екі сызықтық комбинациясын құрайық:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cdot cos\beta x = \tilde{y}_1, \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \cdot sin\beta x = \tag{14.13}$$

$\tilde{y}_1$ және $\tilde{y}_2$ функциялары екінші ретті СБДТ қасиеттері бойынша (14.1) теңдеуінің шешімдері болады. Сондықтан $\tilde{y}_1$ және $\tilde{y}_2$ шешемдері фундаментальдық шешімдер жүйесін құрайды, яғни $W(x) \neq 0$. Сондықтан (14.1) теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin \tag{14.14}$$

.

9 бөлім. Сандық жолдар

Тақырып 39. Сандық жолдардың негізгі түсініктері мен анықтамалары

СӨА-тар өлшеу мәліметтерінің дискретті сигналдарын автоматты түрде өңдеп олардың көрсетулерін сандық түрде көрсететін аспап.

Сандық өлшеуіш аспап (СӨА) өзіне міндетті екі функционалдық торапты алады: аналогтық-сандық түрлендіргіш (АСТ) және сандық есептеу құрылғы. АСТ өлшенетін шаманың мәніне сәйкес кодты береді, ал есептеу құрылғысы өлшенетін шаманың мәнін сандық түрде бейнелейді.

Үздіксіз өлшенетін шама кодталу үшін АСТ-да дискреттеліп, содан кейін деңгейі бойынша квантталады. Уақыт бойынша үздіксіз шаманың X(t) дискреттелуі деп X(t) шамасын уақыт бойынша үзілісті етіп түрлендіру амалын айтады, яғни оның мәндері нөлден өзгеше және X(t) мәндерімен тек белгілі уақыт аралығында сәйкес келеді.

Дискреттелудің осы екі көршілес уақыттық кезеңдерінің аралығын дискреттелу қадамы деп аталады және ол тұрақты немесе айнымалы болуы мүмкін. Деңгейі бойынша үздіксіз X(t) шаманың квантталуы деп, X(t) шамасын $X_{К}(t)$ кванттық шамаға түрлендіру операциясын айтады.

Кванттық шама-белгілі диапазонда соңғы сандық мән қабылдай алатын алатын шама. Кванттық шаманың бекітілген мәндері кванттала деңгейі деп аталады. Екі көршілес деңгейлердің айырымы квантталудың сатысы немесе қадамы немесе квант деп аталады.

Деңгейі бойынша үздіксіз өлшенетін шаманың уақыттан квантталуы және дикреттелуі 1-суретте көрсетілген.

мұндағы X(t) - өлшенетін шаманың өзгеру графигі; Xк(t)-кванттық шаманың кванттала деңгейіне ең жақын теңдестірілген шамасының өзгеру графигі; t_1, t_2,.., tn - өлшеу уақыттарының кезеңдері; $Xк_1$, $Xк_2$,..., $Xк_n$ - кванттау деңгейі; A_1, A_2,..., A_n - t_1, t_2, ..., t_n уақыт ішінде өлшеу кезіндегі СӨА көрсетулеріне сәйкесті ординаталары.

СӨА коды кванттала деңгейінің теңдестірілген өлшенетін мәніне сәйкес шығарылады. Теңдестіру ең жақын кванттала деңгейімен ең жақын үлкен немесе тең, ең жақын кіші немесе тең, сонымен бірге ең жақын үлкен немесе ең жақын кіші немесе кванттала деңгейімен жүргізілуі мүмкін.

Кванттала деңгейінің мүмкін болатын саны СӨА құрылғысымен анықталады. Кванттала деңгейінің санынан есептеу құрылғысының сыйымдылығы (мүмкін болатын есептеу саны) тәуелді болады.

Мысалы, егер СӨА есептеу құрылғысы ең жоғары көрсеткіші 999 болса, онда мұндай аспап 0-ден 999-ға дейінгі аралықтағы шексіз мәндерін бар болғаны 1000 әр түрлі көрсеткіштерімен бейнелейді., яғни бұл аспапта өлшенетін шама 1000 кванттала деңгейі бар квантталған шамаға түрленеді.

Өлшенетін шаманың деңгейі бойынша квантталуынан дискреттік қателік пайда болады, бұл қателіктің пайда болу себебі өлшенетін шаманың шексіз көп мәндері тек СӨА көрсеткіштерімен ғана шектелуімен түсіндіріледі. 1-суретте дискретті шаманың пайда болуы көрсетілген.

Көрініп тұрғандай, өлшеу кезінде көбінесе СӨА көрсеткіштері мен өлшенетін шамалардың мәндері арасында айырмашылықтар болады. Бұл айырмашылық дискреттіктің $\Delta X_{д}$ абсалюттік қателігін береді.

Дискреттік қателігі тек қана СӨА-ға тән, ал аналогтық аспаптарда болмайды. Бірақ бұл қателік аспаптың дәлдігін арттыруға бөгет болмайды, себебі кванттала деңгейін дәл таңдай отырып, дискретті қателікті өте аз мәнге кішірейтуге болады

Тақырып 40. Жинақталу белгілері

Абель теоремасынан, егер $x_0 \neq 0$ нүктесінде дәрежелік қатардың жинақталу нүктесі болса, онда оның $(-|x_0|; |x_0|)$ жинақталу интервалы, берілген қатардың жинақталу нүктелерінен тұрады, *x* осы интервалға кірмейтін барлық нүктелерінде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x \quad + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \cdot \tag{13.1}$$

(12.1) қатары жинақталмайды.

$(-|x_0|; |x_0|)$ интервалы дәрежелік қатардың **жинақталу интервалы** деп аталады, $|x_0| = R$ деп алсақ, жинақталу интервалын (-R; R) түрінде жазуға болады. *R* санын дәрежелік қатардың жинақталу радиусы деп атайды, яғни R>0 саны *x*-тің $|x| < R$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық мәндерінде (13.1) қатары абсолютті жинақталады, ал $|x| > R$ теңсіздігін қанағаттандыратын мәндерінде қатар жинақсыз болады.

Дербес жағдайда, (13.1) қатары $x_0 = 0$ бір ғана нүктесінде жинақталса, онда *R*=0 деп есептейміз. Егер (13.1) қатары $x \in R$ барлық мәндерінде жинақталса, (яғни сандар осінің барлық нүктелерінде) онда $R = \infty$ деп есептейміз.

Жинақталу интервалының шеткі нүктелерінде (яғни $x = R$ және $x = -R$ болғанда) қатардың жинақтылығы әр жағдайда жеке қарастырылатынын ескерген жөн.

(13.1) қатарының жинақталу радиусын табу үшін дәрежелік қатардың мүшелерінің модулінен қатар құру керек:

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| \cdot \tag{13.2}$$

және оған Даламбер белгісін қолданамыз. Мысалы, келесі шек бар болсын.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0, x \tag{13.3}$$

.

Даламбер белгісі бойынша қатар жинақты, егер

$$|x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1, \tag{13.4}$$

яғни қатар *x*-тің барлық мәндерінде қатар жинақсыз болады. Сонымен, (13.1) қатар үшін абсолют жинақталу радиусы:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{13.5}$$

Дәл осылайша, Кошидің радикалдық белгісін қолданып дәрежелік қатардың жинақталу радиусын анықтауға болады:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{13.6}$$

Ескерту.

1. Егер

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 0 \tag{13.7}$$

болса, онда (13.1) қатары барлық сандар осінде абсолютті жинақталатынына көз жеткізуге болады. Бұл жағдайда R=∞. Егер

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty \tag{13.8}$$

болса, онда *R*=0.

2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \qquad (13.9)$$

(13.9) дәрежелік қатарының жинақталу радиусын $|x-x_0|<R$ теңсіздігінен табуға болады, және ол $(x_0-R;\ x_0+R)$ түрінде болады.

3. Дәрежелік қатарды x-тің барлық дәрежесі болмаса, яғни толық емес дәрежелік қатар болса, онда дәрежелік қатардың жинақталу интервалын жинақталу радиусы анықтамай-ақ, берілген қатардың мүшелердің модульдерінен құралған қатарлар үшін Даламбер және Коши белгілерін қолданып жинақталу интервалдарын табуға болады.

Тақырып 41. Еркін таңбалар мүшелерінің жолдары

Натурал аргументті функция **сандар тізбегі**, ал тізбекті құрайтын сандарды **тізбектің мүшелері** деп атайды.

Тізбекті мүшелері сәйкес мүшелердің индексі (реттік нөмірі) көрсетілген әріппен белгіленеді:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots,\ a_n,\ \ldots\ldots$$

Берілген жазуда:

a_1 саны - тізбектің бірінші мүшесі;

a_2 саны - тізбектің екінші мүшесі;

a_3 саны - тізбектің үшінші мүшесі;

....

a_n саны - тізбектің n-ші мүшесі;

....

Мысалы, 2;4;6;8;10;12;... тізбекте

$a_1 = 2;\quad a_2 = 4;\quad a_5 = 10;\quad a_n = 2n;$

*Тізбектің n-ші мүшесін оның **жалпы мүшесі** деп атайды және оны* a_n *арқылы ,ал тізбектің өзін қысқаша* $a_n = f(n)$ *немесе* (a_n) *түрінде жазылады*

Тізбектің түрлері:

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots,\ a_n,\ \ldots\ldots$

Бұл жазудың ретін көрсететін натурал сандар (n=1,2,3, ...) функцияның аргументтері немесе тізбектің индекстері ,ал a_n аргументке сәйкес функция мәндері немесе тізбектің мүшелері болады.

1. Анықталу аймағы алғашқы n натурал сандар жиыны болатын функцияны –**шекті тізбек** деп атайды.

Мысалы**:** Нөлмен аяқталатынбүтін оң екітаңбалысандар жиыны

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90

2.Анықталу аймағы барлық натурал сандар жиыны болатын функцияны – **шексіз тізбек** деп атайды.

Мысалы: Натурал сандар тізбегі

1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...

3. Тізбектің үлкен индекісіне үлкен мүшелері сәйкес келсе ,ондай тізбектер **өспелі тізбек** деп аталады. Мысалы: Мүшелері 4-ке еселік болатын сандар тізбегі.

4,8,12,16,20,24, ...

4. Тізбектің үлкен индекісіне кіші мүшелері сәйкес келсе ,ондай тізбектер **кемімелі тізбек** деп аталады. Мысалы: Натурал сандарға кері сандар тізбегі.

1; 1/2; 1/3; 1/4; ...

Өспелі және кемімелі тізбектер **бірсарынды (монотонды)** тізбектер деп аталады.

5.Бір ғана саннан құралған тізбек **тұрақты тізбек** деп аталады.

Аналитикалық тәсіл

Рекурренттік тәсіл

Графиктік тәсіл

Баяндау тәсілі

Сандар тізбегі.

Мысалы: 2, 2, 2, 2, 2, ..., 2, ...

1.Сандар тізбегінің баяндау тәсілі.

Баяндау тәсілінде сандар тізбегінің орналасу заңдылығы **сөзбен** беріледі.

1-мысал. Натурал сандар қатарының квадраттарынан тұратын тізбекті жазайық.

Шешуі. Ол үшін натурал сандар қатарының әрбір мүшесін квадраттау қажет.

Сонда 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49;…….. тізбегін аламыз.

2.Сандар тізбегінің аналитикалық тәсілі.

Егер тізбек **n-ші мүшесінің формуласы** арқылы берілсе, онда ол **аналитикалық тәсіл** болып табылады.

2-*мысал.* $a_n = 2^n$. Берілген формула бойынша тізбектің кез келген мүшесін анықтауға болады.

Мысалы, егер $n = 3$ болса, онда $a^3 = 2^3 = 8;$

егер $n = 6$ болса, онда $a^6 = 2^6 = 64;$

егер $n = 8$ болса, онда $a^8 = 2^8 = 256.$

3.Сандар тізбегінің рекурренттік тәсілі.

Кейбір жағдайларда тізбектің ***(n + 1)*- ші мүшесі n-ші мүшесі** арқылы есептелінетін формула түрінде беріледі. Бұл жағдайда тізбектің бір немесе бірнеше алғашқы мүшелері қосымша беріледі. Тізбектің осылай берілуі **рекурренттік тәсіл** деп аталады.

3-*мысал.* Тізбекті $\boldsymbol{a_{n+1} = 4a_n - 1}$ рекурренттік формула түрінде берілген және $a_1 = 1$. Тізбектің төртінші мүшесін табу керек.

Шешуі. $a_2 = 4a_1 - 1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3,$

$a_3 = 4a_2 - 1 = 4 \cdot 3 - 1 = 11,$

$a_4 = 4a_3 - 1 = 4 \cdot 11 - 1 = 43.$

4.Сандар тізбегінің графиктік тәсілі.

Егер тізбек **график** арқылы берілсе, онда ол **графиктік** тәсіл болып табылады.

4-*мысал.* (y_n) тізбегінің нүктелердің ординаталары ретінде берілсе , онда олар:

$\boldsymbol{y_1 = -2, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 1, \quad y_5 = 2, \quad y_6 = 3, \ \ldots}$

10 бөлім. Көптеген теория негіздері

Тақырып 42. Жиындар теориясының негізгі түсінігі

Жиын математикадағы негізгі ұғымдарының бірі болғандықтан, оған анықтама берілмейді. Жиын деп белгілі математикалық объектілердің жиынтығын түсінеміз. Ол объектілер жиынның элементтері деп аталып, кіші әріптермен, ал жиынның өзі бас әріппен белгіленеді.

a элементі A жиынына тиістілігін $a \in A$, “$\in$” - тиістілік кванторымен белгілейді.

$b \notin A$ – b элементі A жиынына тиісті емес.

Бізге белгілі жиындарды атап өтейік:

N – натурал сандар жиыны;

Z – бүтін сандар жиыны;

Q – рационал сандар жиыны;

R – нақты сандар жиыны;

C – комплекс сандар жиыны;
Ø – бос жиын.
Жиі қолданылатын кванторлар:
- кез келген, x $\in$ A (кез келген x A жиынында жатады);
$\exists$ - табылады, $\exists$ y $\in$ B (B жиынынан y элементі табылады);
: (|) – мынадай, қасиетін сипаттау үшін;
$\Rightarrow$ - бұдан шығатын салдар;
$\Leftrightarrow$ - тепе-теңдік кванторы, тек сол жағдайда;
$\subset$ - қатаң енгізу кванторы.
Жиынға енетін элементтер саны шенеулі немесе шексіз көп болуы мүмкін.

1-мысал: а) қазақ алфавитінің әріптер жиыны (42 элемент бар);
ә) натурал сандар жиыны (∞ элементі бар);

б) теңдеуінің нақты түбірлерінің жиыны ешқандай да элементтен тұрмайды, бос жиын.

Ақырлы жиын деп осы жиынның элементтерінің санына тең болатын натурал сан табылатын жиынды айтады. Ақырлы емес жиын *ақырсыз жиын*деп аталады.

Ақырлы A және B жиындары тек қана бірдей элементтерден құралса, *тең жиындар* деп аталып, A=B деп белгіленеді.

Егер ақырлы A жиынында ақырлы B жиынына тиісті емес элемент бар болса, және керісінше, онда олар *тең емес жиындар* деп аталады.

2-мысал. {0, 1, 2}={1, 2, 0}, {0, 1} $\neq$ {1, 2, 0, 3}.

Жиындардың берілу тәсілдері.

1. Мүшелерін (элементтерін) тізіп жазу арқылы. Ақырлы жиын $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, ақырсыз жиын B={1, 3, 5, 7, ..., } – тақ сандар жиыны.
2. Сипаттау арқылы. Мысалы жиынның кез келген x мүшесі p(x) қасиетіне ие болсын, онда осы элементтерден тұратын C жиыны былай беріледі: C={x $/ p$ (x)}.

Осы сияқты анықталған жиындар

Q={ $\frac{n}{m} / n, m \in Z, m \neq 0$ }, B={x: x= $2n-1, n \in N$ }.

A және B жиындары берілсін. Егер A жиынының кез келген x элементі B жиынында да жатса, онда A жиыны B жиынының *ішкі жиыны* деп аталады.

A $\subseteq$ B немесе B $\supseteq$ A деп белгіленеді. Кванторлар тілінде

(A $\subseteq$ B) $\Leftrightarrow$ (x $\in$ A $\Rightarrow$ x $\in$ B).

Егер B жиынының A ішкі жиыны B жиынынан және Ø-ден өзгеше болса, онда ол *меншікті ішкі жиыны* деп аталады. Кванторлар тілінде, A $\subset$ B $\Leftrightarrow$ A $\subseteq$ B және A $\neq$ B.

Ø кез келген жиынның ішкі жиыны болады: Ø $\subseteq$ A.

Қасиеттері:

а) A $\subseteq$ A;

ә) A $\subseteq$ B, B $\subseteq$ A A = B;

б) A $\subseteq$ B, B $\subseteq$ C $\Rightarrow$ A $\subseteq$ C.

B жиынының B және Ø ішкі жиындары оның *меншіксіз ішкі жиындары* деп аталады. Егер жиын ең болмағанда екі элементтен тұрса, онда оның меншікті ішкі жиындары болады.

Мысалы: A = {а, в} жиынының ішкі жиындары: {а}, {в}, {Ø}, {а, в}. Бұл ішкі жиындардың ішінде {а}, {в}- меншікті, ал {а, в}, {Ø}- меншіксіз болып табылады

11 бөлім Сандар жүйесі
Тақырып 43. Сандар жүйесі

Сандарды цифр деп аталатын арнайы символдардың көмегімен бейнелеу қабылданған.

Сандардың аталу және жазылу тәсілін санау жүйесі деп атайды.

Санау жүйесі екі топқа бөлінеді: позициялық және позициялық емес.

Позициялық емес санау жүйесінде әрбір цифрдың мәні оның алатын орнына байланысты емес. Мұндай санау жүйесінің мысалы ретінде римдік жүйені алуға болады. Осы жүйеде жазылған XXX санында X цифры кез келген позицияда 10-ды (онды) білдіреді.

Позициялық емес санау жүйесінде арифметикалық әрекеттерді орындау біраз қиын болғандықтан, бүкіл дүние жүзі біртіндеп позициялық санау жүйесіне ауысты.

Позициялық санау жүйесінде цифрдың мәні оның орнына (позициясына) байланысты болды. Позициялық санау жүйесінің негізі деп жүйедегі пайдаланылатын цифрлар санын айтады.

<u>Ондық санау жүйесі</u>

Біз сандармен жұмыс істегенде тек қана бір ондық санау жүйесін қолдануға дағдыландық. "Ондық" деп аталуы былай түсіндіріледі: бұл жүйенің негізінде он негізі жатыр. Бұл жүйеде санды жазу үшін он цифр қолданылады: - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ондық жүйе позициялық болып табылады, өйткені ондық санды жазуда цифрдың мәні оның позициясына немесе санда орналасқан орнына байланысты.

Санның цифрына бөлінетін позицияны разряд деп атайды.

Мысалы, 425 жазуы 4 жүздіктен, 2 ондықтан және 5 бірліктен тұратын сан екенін білдіреді. 5 цифры - бірліктер разрядында, 2 - ондықтар разрядында, 4 - жүздіктер разрядында тұрады.

Егер осы цифрларды басқа ретте жазатын болсақ, мысалы, 524, онда сан 5 жүздіктен, 2 ондықтан және 4 бірліктен тұрады.

Бұл кезде 5 үлкен болады және санның үлкен цифры деп аталады, ал 4 цифры кіші болады да, осы санның кіші цифры деп аталады. Егер 524 санын қосынды түрінде жазатын болсақ:

5*102+2*101 +4*10°

оның цифрлары салмағының айырмашылығы айқын болады, бұл жазудағы 10 саны санау жүйесінің негізі. Санның әрбір цифры үшін 10 негізі цифрдың орнына байланысты дәрежеленеді және осы цифрға көбейтіледі. Бірліктер үшін дәрежелеу негізі - нөлге, ондықтар үшін - бірге, жүздіктер үшін екіге тең және т.с.с.

Егер ондық сан бөлшек болса, онда ол да қосынды түрінде оңай жазылады. Әрбір цифрдың бөлшек бөлігі үшін дәреже негізі теріс және - 1-ге тең - бђл бөлшек бөліктің үлкен цифры үшін, ал бөлшек бөліктің келесі цифры үшін -2 тең және т.с.с.

Мысалы, 384,9506 ондық, саны мынадай қосындымен белгіленеді:

$384{,}9506=3*10^2 +8*10^1 +4*10^0+9*10^{-1} +5*10^{-2}+0*10^{-3}+6*10^{-4}$

Осылайша, ондық санның кез келген цифры - онның белгілі бір бүтін дәрежесі, ал дәреженің мәнін сәйкес цифрдың позициясы көрсетеді.

<u>Сұрақтар мен тапсырмалар:</u>

1 . Санау жүйесі деп нені айтады?

2. Позициялық санау жүйесі позициялық емес санау жүйесінен немен ерекшеленеді?

3 . Позициялық санау жүйесінің негізі деп нені айтады?

4. Санның негізін дәрежесінің қосындысы түрінде ұсыныңыз:

а) 3678,89810;

б) 7,2908310;

в) 37000,000110;

г) 0,003210.

<u>Екілік санау жүйесі</u>

Компьютерде, әдетте, ондық емес, позициялық екілік санау жүйесі, яғни негізі 2 болатын санау жүйесі қолданылады.

Екілік жүйеде кез келген сан екі 0 және 1 цифрларының, көмегімен жазылады және екілік сан деп аталады.

Тек қана 0 және 1 цифрларынан тұратын екілік санды ондық саннан ажырату үшін екілік санды жазуда екілік санау жүйесінің индексіне белгі қосылады, мысалы, 110101,1112 .

Екілік санның әрбір разрядын (цифрын) бит деп атайды. Екілік жүйенің маңызды құндылығы - цифрларды физикалық берудің қолайлылығы (мысалы, 1 цифрына электр кернеуінің бар болуы, ал 0 цифрына электр кернеуінің жоқ болуы сәйкес келуі мүмкін) және екілік сандармен арифметикалық және логикалық операцияларды орындауға арналған компьютер аппаратурасының, дәлірек айтқанда, арифметикалық және логикалық құрылғысының күрделілігінде болып табылады.

Ондық сандар тәрізді, кез келген екілік санды екілік санға кіретін цифрлар салмағының айырмашылығын анық бейнелейтін қосынды түрінде жазуға болады. Бұл қосындыда негізі ретінде 2 санын қолдануға болады. Мысалы, 1010101, 101 екілік саны үшін қосындыны төмендегідей өрнектеуге болады:

$1*2^6 +0*2^5 +1*2^4 +0*2^3+1*2^2+0*2^1+1*2^0+1*2^{-1} +0*2^{-2}+1*2^{-3}$

Бұл қосынды ондық сан үшін жазылған қосындының ережесі бойынша жазылады. Берілген мысалда екілік сан жеті таңбалы бүтін саннан, үш таңбалы бөлшек бөліктерінен тұрады. Сондықтан, бүтін бөліктің үлкен цифры, яғни бірлік 27-1=26-не көбейтіледі, бүтін бөліктің нөлге тең келесі цифры, 25-не көбейтіледі және т.с.с., екінің дәрежесі кемуі бойынша ең төменгі дәрежеге дейін, үшінші цифрдың бөлшек бөлігі 23-не көбейтіледі. Осы қосындыда ондық жүйенің ережесі бойынша арифметикалық амалдарды орындай отырып, 85,625 санын аламыз. Осылайша, 1010101,101 екілік саны 85,625 ондық санына сәйкес келеді, немесе 1010101,1012= 85,62510.

Сандарды көшіру ережесі. Екілік жүйенің елеулі кемшілігі - мұнда санды жазу үшін 0 және 1 цифрлары көп пайдаланылады. Бұл адамның екілік санды қабылдауын қиындатады. Мысалы, 156 ондық санының екілік жүйедегі түрі мынадай: 10011100. Сондықтан екілік жүйе әдетте компьютердің "ішкі кажеттілігі" үшін қолданылады, ал адамның компьютермен жұмыс істеуі үшін үлкен санау жүйесі тандалады. Бұл кезде сегіздік немесе он алтылық жүйелер жиі қолданылады, өйткені кейін көрсетілетіндей, осы екі жүйелердің және екілік жүйенің арасында санды бір жүйеден басқаға ауыстыруды жеңілдететін карапайым байланыс бар.

Әрбір коэффициент пен екінің дәрежесінің көбейтінділерінің қосындысын табу қажет.

Тапсырма:

1. Санды негізгі дәрежесінің қосындысы түрінде көрсетіңіз:

а) 1001,0122;ә) 1,100012;

б) 0,0001012;в) 1000, 00012

2. Сандарды екілік санау жүйесінен ондық санау жүйесіне ауыстырыңыз:

а) 101000112;	в) 11010112;
ә) 110110012;	г) 111012;
б) 10010012;	д) 11101112.

Он алтылық санау жүйесі

Екілік санау жүйесін компьютерден тыс жерде қолдану өте қолайсыз екенін атап өттік. Мысалы, 89512810=110110101000100110002.

Екілік санды жазуды қысқарту үшін негізі 16 болатын санау жүйесі қолданылады. Бұл жүйені он алтылық санау жүйесі деп атайды.

Он алтылық позициялы санау жүйесінде санды жазу үшін ондық санау жүйесінің цифрлары 0, 1,2, 3,4, 5, 6, 7, 8, 9 және жетпейтін алты цифрды белгілеу үшін ондық сандарының мәні 10, 11, 12, 13, 14 және 15 болатын сәйкес латын алфавитінің алғашқы үлкен әріптері: A, B, C, D, E, F қолданылады. Осылайша ондық жүйенің барлық цифрлары және сонымен қатар, латынның алты әріптері он алтылық жүйенің -"цифрлары" болып табылады.

Он алтылық жүйенің барлық цифрларын келтірейік: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B C, D, E, F. Он алтылық санау жүйесінде F санынан кейін F+1 саны келеді, ал ондық санау жүйесіндегі 15 санынан кейін 15+1=16 саны келеді деген жазуға сәйкес келеді.

Сондықтан, он алтылық санның түрі, мысалы, 3E5A1 болуы мүмкін. Осы санды негізі 16 болатынын ескеріп, қосындысы түрінде есептеп жазсақ, мынаны аламыз:

3E5A116=3*164+E*163 +5*162 +A*161+1*16°

Ондық жүйенің ережесі бойынша арифметикалық амалдарды орындай отырып және A=10, E=14 ескерсек, 3E5A116=25539310 санын аламыз. Ондық жүйеге қарағанда он алтылық жүйедегі санның ықшамды екендігін байқауға болады.

Тапсырма:

1. Сандарды он алтылық санау жүйесінен ондық санау жүйесіне ауыстырыңыз:

а) 9116; в) 23516;
ә) 4016; г) 7C3116;
б) 5A16; д) Ғ54І6;

<u>Сегіздік санау жүйесі</u>

Сегіздік санау жүйесі, яғни негізі 8 болатын санау жүйесінде сандар сегіз цифрдың көмегімен өрнектеледі: 0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7. Мысалы, 357 сегіздік санында жеті бірлік, бес сегіз және үш сегіздің квадраты бар, яғни 3578=3*82+5*8'+7*8°, мұнда 357 санының индексі "8" санау жүйесін білдіреді. Жазылған қосындыда ондық жүйенің ережесі бойынша арифметикалық әрекеттерді орындай отырып, 3578=23910 аламыз, яғни 357 сегіздік саны 239 ондық санға сәйкес келеді.

Тапсырма:

1. Сандарды сегіздік санау жүйесінен ондық санау жүйесіне ауыстырыңыз:

а) 5558; в) 2358;
ә) 6368; г) 7318;
б) 2378; д) 3548.

Тақырып 44. Сандардың бір жүйеден екінші жүйеге ауысуы

Сандарды бір санау жүйесінен басқа санау жүйесіне ауыстыру

Сандарды бір санау жүйесінен басқа санау жүйесіне ауыстыру қажеттілігі жиі туындайды. Санды екілік, сегіздік немесе он алтылық жүйеден ондық жүйеге ауыстыру жоғарыда көрсетілген.

<u>Бүтін ондық сандарды екілік санау жүйесіне ауыстыру</u>

Ондық санды екілікке ауыстырған кезде осы санды 2-ге бөлу қажет. Мысалы, 891 санын ондық жүйеден екілік санау жүйесіне аудару. Шешімі:

891:2=445, қалдық 1
445:2=222, қалдық 1
222:2= 111,қалдық 0
111:2=55, қалдық 1
55:2=27, қалдық 1
27:2=13, қалдық 1
13:2=6, қалдық 1
6:2=3, қалдық 0
3:2=1, қалдық 1
1:2=0, қалдық 1 (екілік санның үлкен цифры).

Бір қатарға соңына бөліндіні, одан кейін соңғысынан бастап барлық қалдықтарды жазамыз: Жауап: 891_{10}=1101111011_2.

Ауыстыру ережесі. Бүтін оң ондық санды екілік санау жүйесіне ауыстыру үшін осы санды 2-ге бөлу қажет. Алынған бөлінді 2-ден кіші болғанша бөліндіні қайтадан 2-ге бөле береді. Нәтижені бір қатарға соңғы бөліндіні, одан кейін соңғысынан бастап барлық қалдықтарды жазу керек.

Тапсырма:

1. Сандарды ондық санау жүйесінен екілік санау жүйесіне ауыстырыңыз:
а) 322; б)150;
в)283; г)428;
д)315; е)181;
ж) 176.

<u>Ондық бөлшектерді екілік санау жүйесіне ауыстыру</u>

Ондық бөлшектерді екілік санау жүйесіне ауыстыру үшін оны 2-ге көбейтіп, бүтін бөліктерді іздеу керек.

Мысал. 0,625 ондық бөлшегін екілік санау жүйесіне ауыстырайық.

Екілік бөлшектің үтірден кейінгі бірінші цифрын табу үшін берілген санды 2-ге көбейтіп және көбейтіндінің бүтін бөлігін бөліп алу қажет.

Шешуі:
0,625*2=1,250, бүтін бөлігі 1-ге тең.
0,250*2=0,500, бүтін бөлігі 0-ге тең.
0,500*2=1,000, бүтін бөлігі 1-ге тең.

Соңғы көбейтіндінің бөлшек бөлігі нөлге тең. Ауыстыру аяқталды. Бір қатарға алынған бүтін бөліктің бірінші цифрынан бастап жазамыз. Жауап: 0,62510=0,1012.

2-ге көбейткенде әрқашан ондық санның тек қана бөлшек бөлігі қатысады.

Ауыстыру ережесі. Оң ондық бөлшекті екілік санау жүйесіне ауыстыру үшін бөлшекті 2-ге көбейту қажет. Көбейтіндінің бүтін бөлігі екілік бөлшектің үтірден кейінгі бірінші цифры ретінде алынады да, бөлшек бөлігі екіге көбейтіледі. Екілік бөлшектің келесі цифры ретінде осы көбейтіндінің бүтін бөлігін алады, ал көбейтіндінің бөлшек бөлігін қайтадан 2-ге көбейтеді және т.с.с.

Ақырғы ондық бөлшекті екілік санау жүйесіне ауыстырған кезде периодты бөлшек алынуы мүмкін.

Мысалы, 0,3 ондық бөлшегін екілік санау жүйесіне келтірейік.

Шешуі:
0,3*2=0,6 бүтін бөлігі 0-ге тең;
0,6*2=1,2 бүтін бөлігі 1-ге тең;
0,2*2=0,4 бүтін бөлігі 0-ге тең;
0,4*2=0,8 бүтін бөлігі 0-ге тең;
0,8*2=1,6 бүтін бөлігі 1-ге тең;
0,6*2=1,2 бүтін бөлігі 1-ге тең

0,6 бөлшек бөлік есептеудің екінші катарында болған еді. Сондықтан есепте қайталана бастайды. Демек, екілік санау жүйесінде 0,3 периодты бөлшек түрінде ұсынылады.

Жауап: 0,310=0,0(1001)2.

Практикада осы операциялар үтірден кейін берілген цифр саны алынғанша жалғасады.

Тапсырма:

1. Ондық бөлшектерді екілік санау жүйесіне ауыстырыңыз.
а) 0,322; ә) 150,7006; б) 283,245;
в) 315,075; г) 181,369; ғ) 176,526.

<u>Ондық сандарды он алтылық санау жүйесіне ауыстыру</u>

Ондық санды он алтылық санау жүйесіне ауыстыру үшін санды 8-дің орнына 16-ға бөлу қажет.

Мысалы, 891 санын ондық жүйеден он алтылық санау жүйеге ауыстырайық.

Шешуі:
891:16=55, қалдық 11-ге тең, он алтылық жүйеде "11 саны" латынның В әріпімен белгіленеді;
55:16=3, қалдық 7-ге тең;
3:16=0, қалдық 3-ке тең (он алтылық санның үлкен цифры);
Жауап: 89110=37В16.

Тапсырма:

1. Ондық сандарды он алтылық санау жүйесіне ауыстырыңыз.

а) 322; ә) 150,7006; б) 283,245; в) 428;
г) 315,075; ғ) 181; д) 176,526; е) 369

Сандарды екілік жүйеден сегіздік санау жүйесіне ауыстыру

Екілік санды сегіздік немесе он алтылық санға түрлендіру процесі өте қарапайым.

Кез келген цифрды сегіздік сан түрінде жазу үшін үш екілік цифрлар қажет. Сондықтан түрленетін екілік санды оңнан солға қарай екілік цифрлар тобына үштен бөледі, сол жақтағы цифрлар тобы ең аз болуы тиіс. Мысалы, 011 екілік цифры сегіздік санау жүйесіндегі үш цифры болып табылады. Содан кейін екілік цифрдың әрбір тобын кестеде көрсетілген цифр түрінде көрсетеді.

<u>Сандарды екілік жүйеден он алтылық санау жүйесіне ауыстыру</u>

Екілік жүйеден он алтылық санау жүйесіне жоғарыдағыға ұқсас түрленеді, тек қана айырмашылығы - әрбір түрленетін екілік сан төрт екілік сан бойынша топқа бөлінеді, өйткені он алтылық санның кез келген цифрын жазу үшін төрт екілік цифр қажет.

Сондықтан алдыңғы мысалда қолданылған 1101111011 екілік саны төрт екілік цифр бойынша топқа бліп, 11 0111 1011 түрінде жазуға болады және әрбір топты он алтылық цифрдың біреуімен жазып болғаннан кейін, 37В он алтылық санды аламыз.

Тапсырма:

Екілік санды кесте бойынша он алтылық санау жүйесіне ауыстырыңыз.

а) 111101100112; ғ) 110Л1Д10Д12;
ә) 11011010010012; д) 10101110111012;
б) 1001101010012; е) 11101111010112;
в) 100100102; ж) 10100101,01112.
г) 10011000,000101012

<u>Екілік сандармен орындалатын арифметикалық әрекеттер</u>

Екілік санау жүйесінде арифметикалық амалдар ондық жүйедегі ереже бойынша орындалады, тек кана айырмашылығы - санау жүйесінің негізі екіге тең және тек екі цифр қолданылады.

<u>ҚОСУ</u>

Қосу амалын карастырайық. Екілік санды қосу тасымалдау арқылы сәйкес разрядтарды қосуға әкеледі.

Екі екілік санды қосу кезінде мынадай төрт ереже қолданылады:

0+0=0
1+0= 1
0+1= 1
1+1= 10 бірліктері көрші (үлкен) разрядқа тасымалданады.

Мысалы, 101+11 (ондық жүйеде 5+3=8) екі екілік санды қосуды орындаймыз. Жетпейтін нольдерді қосып, амалды бағанада орындаған жөн.

101 + 011 Қосу процесін кезеңмен қарастырайық:

1) Кіші разрядта қосу орындалады: 1 + 1=10. Кіші разрядта қосынды 0 жазылады және бірлік келесі үлкен разрядқа тасымалданады.

2) Келесі сол жақ разрадтың цифрлары және тасымалдың бірлігі қосылады: 0+1+1=10. Бұл разрядта қосынды 0 жазылады және бірлік тағы да келесі үлкен разрядқа тасымалданады.

3) Сол жақ разрядтың үшінші цифрлары және тасымалдың бірлігі қосылады 0+1 + 1=10. Бұл разрядта қосынды 0 жазылады және бірлік тағы да келесі үлкен разрядқа тасымалданады, т.с.с.

4) Нәтижеде:101
+ 011
1000 алынады.

Сонымен, 10002=810.

Осы ережелерді пайдаланып, мына екілік сандарды қосыңыз және жауабын тексеріңіз.

0110	1101	11001	1010	0101	10001	1000
+0110	+0110	+ 10111	+0111	+0010	+ 11011	+ 1001

Қосу - екілік арифметикадағы маңызды амал. Компьютердегі екілік сандармен жүзеге асатын басқа үш амал - азайту, көбейту, бөлу әдетте қосудың көмегімен орындалады.

<u>АЗАЙТУ</u>

Екілік санды азайту кезінде:

0-0=0

1-0=1

0-1=1 бірлікті көрші (үлкен) разрядтан аламыз

1-1=0

екенін ескеру қажет.

Мысалы, 1010-101 екілік санның айырмасын табу. Кіші разрядтан бастап азайтуды бағанмен орындаймыз:

1010

- 101 Азайту процесін кезеңімен қарастырайық:

1) Кіші разряд үшін 0-1 бар. Сондықтан үлкен разрядтан бірлікті аламыз және 10-1=1 -ді табамыз.

2) Келесі разрядта 0- 0= 0 болады.

3) Сол жақтағы разрядта тағы да 0-1 болады. Үлкен разрядтан 1-ді аламыз және 10-1=1 -ді табамыз.

4) Келесі разрядта 0 қалады.

5) Нәтижеде: 1010
- 101
101 алынады.

12 бөлім. Математикалық логиканың элементтері

Тақырып 45. Негізгі логикалық операциялар

Логика – бұл адам ойлауының түрлері мен заңдары туралы, оның ішінде дәлелдеуге болатын пікірлердің заңдылықтары туралы ғылым.

Ғылыми пән ретінде логиканың ***формальды, математикалық ықтималдықты*** логика және т.б. түрлері қалыптасқан.

Формальды логика сөйлеу тілімен білдіретін біздің кәдімгі мазмұнды пікірімізді талдаумен байланысты.

Математикалық логика формальды логиканың бөлігі болып табылады және оның дәлме-дәл анықталған обьектілері мен пікірлері бар, олардың ақиқаттығын немесе жалғандығын бір мәнді шешуге болатын ойларды ғана зерттейді.

Математикалық логиканың саласы пікірлер алгебрасы ретінде (оның басқаша **логика алгебрасы** деп атайды, ол алғаш рет XIX ғасырдың ортасында ағылшын математигі Джордж Бульдің еңбектерінде пайда болды. Бұл – дәстүрлі логикалық есептерді алгебралық әдістермен шешуге талаптанудың нәтижесі), информатикада жақсы меңгерілген.

<u>***Логика алгебрасының математикалық аппараты компьтердің аппараттық құралдарының жұмысын сипаттауға өте қолайлы, өйткені компьтердегі негізгі екілік санау жүйесі болып табылады, өздерің білесіңдер, онда екі цифр: 0 мен 1 қолданылады, ал логикалық айнымалылардың мәндері де екі: 0 және 1.***</u> Демек, компьютерді конструкциялағанда, оның логикалық функциялары, схемаларының жұмысы айтарлықтай жеңілденеді және қарапайым логикалық элементтердің саны азаяды.

Қазіргі кезде ***пікірлер алгебрасының негізгі операциялары*** енбейтін бірде-бір программалау тілі жоқ. Логикалық есептерде тек сандар ғана емес, күтпеген, тым шиеленісті пікірлер де бастапқы деректер болып табылады.

***Есеп.* Өзеннің жағасында тұрған қайығы бар шаруаның қасқыры, ешкісі және қырыққабаты бар. Шаруа өзеннің екінші жағалауына қасқырды, ешкіні және қырыққабатты өткізу керек. Қайыққа шаруаның өзінен басқа, не тек қасқыр, не тек ешкі, не тек қырыққабат қана сыяды.**
Шешуі: Ендеше, ең алдымен ешкіні алып өту керек, өйткені қасқыр қырыққабатты жемейді, ал сонан кейін қайтып келіп...
Бұл есепті компьютерде шешкенде бағдарламада шарт қолданатын логикалық операцияларды пайдалану керек.
Адамдар ақпарат алмасқандағы қатынас түрлерінің бірі – бұл сұрақтар мен жауаптарды кезектестіру. Әрбір сұрақ бізді қоршаған зат әлемі туралы мағлұматтарды білу қажеттігін білдіреді. Бұл білімді біз пайымдау түрінде айтамыз. Пайымдау, әдетте тікелей бақыланатын фактілерді көрсете алады. «Күн жарқырап тұр», «Бұл тікбұрыш - квадрат» және т.с.с. Алайда пайымдауларда ойдан шығарылған обьектілер немесе әлі болып үлгермеген оқиғалар туралы тұжырымдар да айтылуы мүмкін: «Су перісі бұтақта отыр», «Бүгін жаңбыр жауады» және т.с.с.**Пікір дегеніміз** – жалған немесе ақиқат болуы мүмкін қандай да бір пайымдау.
Мысалы, «Қар - ақ», «2*2=4» деген **ақиқат**, ал «Тау тегіс», «2*2=5» деген – **жалған** пікірлер.
Пікірлер: **жалпы** және **жеке** болып бөлінеді. **Жеке пікір** нақты фактілерді көрсетеді, мысалы, **«3+3<7», «Бүгін күн шуақты болды».**
Жалпы пікірлер обьектілер немесе құбылыстар тобының қасиеттерін сипаттайды, мысалы, **«Егер жаңбыр жауған болса, онда көше су болып жатыр»** т.с.с.
Жалпы пікір обьектілерінің қандай да бір бөлігі үшін ақиқат, ал басқа обьектілер үшін жалған болуы мүмкін. Мысалы, «Иттер мысықтарды жақсы көрмейді» пікірі иттердің көпшілігі үшін рас, бірақ барлығы үшін емес.
Егер пікір айтылған ой обьектілерінің кез келгені үшін рас болса, онда жалпы пікір тепе-тең ақиқат деп аталады. Мысалы, «Иттің төрт аяғы бар» пікірі кез келген ит үшін рас.
Тепе-тең ақиқат пікірлер заттардың заңды байланыстарын көрсеткенде ерекше пайдалы. Мысалы, «a+b=b+a» пайымдауы кез келген нақты сандар үшін орынды және ол «Қосылғыштардың орындарын ауыстырғаннан қосынды өзгермейді» деген арифметиканың заңын көрсетеді.
Күрделі жағдайларда сұрақтардың жауабы **ЖӘНЕ, НЕМЕСЕ, ЕМЕС** логикалық жалғаулықтарын пайдаланып, ***құрамды пікірлер*** арқылы беріледі.
Мысалы, «Бұл оқушы ақылды және зерек» пікірі қарапайым «Бұл оқушы ақылды» және «Бұл оқушы зерек» деген пікірлерден тұратын құрамды пікір болып табылады.
Логикалық жалғаулықтардың көмегімен басқа пікірлерден құрастырылған пікірлерді құрамды деп атайды. Құрамды емес пікірлерді **қарапайым** немесе **элементар** деп атайды. ***Құрамды пікірдегі ЖӘНЕ жалғаулығы әрқашан құраушы пікірлердің бәрін ақиқат деп ұйғарады.***
Құрамдағы пікірдегі **НЕМЕСЕ** жауғаулығы екі жақты рөл атқаруы мүмкін. Мысалы, «Біз бүгін саябаққа демалуға барамыз немесе бақшада жұмыс істейміз». **НЕМЕСЕ** жалғаулығын «не» бөлушісімен ауыстыруға болады, «біз бүгін не саябаққа демалуға барамыз, не бақшада жұмыс істейміз», өйткені бір мезгілде саябақта демалу мен бақшада жұмыс істеу мүмкін емес.
Барлық компьютерлік бағдарламаларда және математикалық пайымдауларда **НЕМЕСЕ**жалғаулығы тек біріктіруші рөлде түсініледі. Мысалы, «x=0 немесе y=0» пайымдауындағы **НЕМЕСЕ** жалғаулығы не «y=0» не «x=0», не «x=0 және y=0» дегенді білдіреді.
Математикада **НЕМЕСЕ** жалғаулығы бар құрамды пікірді құрайтындардың кемінде біреуі ақиқат болса, ол ақиқат деп есептеледі, ал егер оны құрайтындардың бәрі жалған болса, ол жалған деп есептеледі.

ЕМЕС жалғаулығы теріске шығаруды тұжырымдау үшін қолданылады. Егер бастапқы пайымдау жалған болса, онда терістеу ақиқат және керсінше, егер бастапқы пайымдау ақиқат болса, онда терістеу жалған.
Егер бастапқы пайымдау жалған болса, онда терістеу ақиқат және керсінше, егер бастапқы пайымдау ақиқат болса, онда терістеу жалған.

Логикалық операциялар

Логикалық жалғаулықтар математикада күрделі айтылымдарды сипаттайтын логикалық операциялар болып табылады.

Логикалық айтылымдармен жұмыс істеу үшін оларға ат қояды. «Айдар жазда теңізге барады» айтылымы А арқылы белгіленсін, ал В арқылы - «Айдар жазда тауға барады» айтылымы белгіленсін. Сонда «Айдар жазда теңізге де, тауға да барады» құрамды айтылымын А және В түрінде қысқаша жазуға болады. Мұндағы «және» - логикалық жалғаулық, А,В – логикалық айнымалылар, олар тек екі мәнде болады: «ақиқат» немесе «жалған», сәйкесінше олар «0» не «1» арқылы белгіленеді.
Математикалық логикада **ЖӘНЕ, НЕМЕСЕ, ЕМЕС** логикалық операциялары ақиқаттық мәндер кестесімен анықталады.
Ақиқаттық кестесі – бұл логикалық операцияның кестелік түрде ұсынылуы, онда кірістік операндалардың (айтылымдардың) ақиқаттың мәндерінің барлық мүмкін терулері осы терулердің әрқайсысына арналған операцияның шығыстық нәтижесінің ақиқаттық мәнімен бірге аталған.
Негізгі логикалық операцияларды қарастырайық:
1. **«және»** конъюнкция (логикалық **көбейту)**
2. А және В **«немесе»** дизъюнкция (логикалық **қосу**)
3. А немесе В **«емес» терістеу** А емес

Тақырып 46. Формулалардың логикалық формулалары, формулалар эквиваленты

Логикалық тұжырымдар формулаларының эквиваленттілігі.

Анықтама. Айталық А мен В бір айнымалылар тізіміне $<x_{i_1},...,x_{i_k}>$ тәуелді екі формула болсын. Егер олар $<x_{i_1},...,x_{i_k}>$ тізімінің кез- келген бағасында бірдей мәндер қабылдаса оларды эквивалентті формулалар деп атайды.

Анықтама. Егер F1(x1,x2,…,xn) және F2 (x1,x2,…,xn) формулаларының ақиқаттық кестелері бірдей болса бұл формулалар эквивалентті деп аталады және «$\sim, \equiv, \leftrightarrow$» белгілерінің бірімен көрсетіледі. Екі формуланың эквиваленттілігін білудің стандартты тәсілі екеуінің ақиқаттық кестесін құрып, алынған нәтижені салыстыру болып табылады. Мысалы: $(x \rightarrow y) \sim (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$ формулаларының эквиваленттігін мына ақиқаттық кестеден көруге болады.

Алынған ақиқаттық кесте әрбір құрама бойынша салыстырылады. Эквивалент формулалардың мынадай қасиеттері бар:

x	y	$x \rightarrow y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{y} \rightarrow \bar{x}$
	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

Буль алгебрасының негізгі эквивалентті қатынастары (заңдары)

1. Коньюнкция мен дизьюнкцияның ассоциативтілігі

а) $x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$; б)$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$

2. Коньюнкция мен дизьюнкцияның коммутативтілігі

а) $x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1$; б)$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$

3.Коньюнкцияның дизьюнкцияға қатысты дистрибутивтілігі (Дизьюнкцияның коньюнкцияға қатысты дистрибутивтілігі).

а) $x_1\&(x_2\vee x_3)=(x_1\&x_2)\vee(x_1\&x_3)$; б) $x_1\vee(x_2 \& x_3)=(x_1\vee x_2)\&(x_1\vee x_3)$

4. Идемпотенттілік

а) $x \& x=x$; б) $x \vee x = x$

5. Қос терістеу заңы. $\overline{\overline{x}} = x$

6. 0 мен 1 константаларының қасиеттері:

а) $x \wedge 1=x$; в) $x \vee \overline{x}=1$; д) $\overline{0}=1$;

б) $x \wedge 0=0$; г) $x \vee 0=x$; е) $\overline{1} = 0$;

7. Морган заңдары:

а) $\overline{x_1 \wedge x_2}=\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$; б) $\overline{x_1 \vee x_2}=\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$

Қарама- қарсылық заңдары:

а) $x \& \overline{x}=0$ ($x \& \overline{x}$=ж)

б) $x \vee \overline{x}=1$ ($x \vee \overline{x}$=а)

Бұл негізгі эквиваленттік қатынастардың ерекшелігі, олар бір –бірінен шықпайды, олардың дұрыстығына, стандартты әдіспен ғана (ақиқат тық кесте) көз жеткізуге болады.

2-модулі бойынша қосу, импликация, Шеффер және Веб операцияларының қасиеттері.

Импликация мен 2 модулі бойынша қосу функцияларының қасиеттері дискретті құрылғыларды анализдеу, синтездеу кезінде пайдалы.

2-нің модулі бойынша қосу операциясы үшін ассоциативті, коммута тивті заңдар және коньюнкцияға қатысты дистрибутивті (распределит) заңы бар.

1. $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$ коммутативтілік

2. $x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$ ассоциативтілік

3. $x_1 \& (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \& x_2) \oplus (x_1 \& x_2)$

бұларға қоса

1. $x \oplus x = 0$; 2. $x \oplus 0 =x$; 3. $x \oplus 1 =\overline{x}$; 4. $x \oplus \overline{x} =1$;

және $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \& x_2$

$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \sim x_2} = \overline{(\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2})}$

формулалары бар.

<u>Импликация үшін</u> коммутативті, ассоциативті заңдар жоқ.

$x \rightarrow x = 1$; $x \rightarrow \overline{x} = \overline{x}$; $x \rightarrow 1 = 1$;

$x \rightarrow 0 = \overline{x}$; $0 \rightarrow x =1$; $1 \rightarrow x = x$;

$x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_2} \rightarrow \overline{x_1}$; $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 = x_1$

Шеффер және Веб функциялары үшін коммутативті (переместит) заң бар.

$x_1 | x_2 = x_2 | x_1$

$x_1 \downarrow x_2 = x_2 \downarrow x_1$

ассоциативті заң бұлар үшін орындалмайды.

$x_1 | (x_2 | x_3) \neq (x_1 | x_2) | x_3$

$x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3) \neq (x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3$

Және мына заңдар орындалады.

$x \mid x = \overline{x}$	$x \downarrow x = \overline{x}$	$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \& x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$
$x \mid \overline{x} = 1$	$x \downarrow \overline{x} = 0$	$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$
$x \mid 1 = \overline{x}$	$x \downarrow 1 = 0$	
$x \mid 0 = 1$	$x \downarrow 0 = \overline{x}$	

Шеффер мен Веб функциялары бір-бірімен дизьюнкция мен коньюнкцияға арналған Морган заңдары сияқты заңдылықтармен байланысқан.

а) $x_1 \mid x_2 = \overline{\overline{x_1} \downarrow \overline{x_2}}$; в) $x_1 \downarrow x_2 = \overline{\overline{x_1} \mid \overline{x_2}}$

<u>Жалпылама формулалар.</u> &, $\vee$ операциялары ассоциативті болғандықтан $A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n$, $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ өрнектерінде жақша қоймауға болады. Бірінші өрнек көп мүшелі коньюнкция, екіншісі көпмүшелі дизьюнкция. Бұлар дистрибутивті заңға және Морган заңдарына бағынады:

Дистрибутивті заң:

$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_к) \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_l) \equiv (A_1 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_2) \wedge \ldots \wedge (A_1 \vee B_l) \wedge (A_2 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2) \wedge \ldots \wedge (A_2 \vee B_l) \wedge$

$\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots (A_к \vee B_1) \wedge (A_к \vee B_2) \wedge \ldots \wedge (A_к \vee B_l) \wedge (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_к) \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_l) \equiv$

$(A_1 \wedge B_1) \vee (A_1 \wedge B_2) \vee \ldots \vee (A_1 \wedge B_l) \vee (A_2 \wedge B_1) \vee (A_2 \wedge B_2) \vee \ldots \vee (A_2 \wedge B_l) \vee$

$\ldots \ \ldots \ \ldots (A_к \wedge B_1) \vee (A_к \wedge B_2) \vee \ldots \vee (A_к \wedge B_l) \vee$

Көп мушелі коньюнкция мен дизьюнкцияға да Морган заңдарын қолдануға болады.

1. $(\overline{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_к}) \equiv (\overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \ldots \vee \overline{A_к})$
2. $(\overline{A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_к}) \equiv (\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \ldots \wedge \overline{A_к})$
3. $x \vee x \vee \ldots \vee x = x$
4. $x \wedge x \wedge \ldots \wedge x = x$
5. $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \ldots \wedge \overline{x_n}}$
6. $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \ldots \vee \overline{x_n}}$

Эквивалентті түрлендірулер. Формулаларды ықшамдау.

Эквивалентті формулаларда бір айнымалыны (барлық жерінде) басқа бір формуламен ауыстырсақ, жаңадан алған формула тағы да эквивалентті болып шығады.

Мысалы, мына формуланың $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$ эквиваленттігін жоғарыда стандартты әдіспен дәлелдедік яғни ол тавтология. Ал енді бұл формуладағы х-ң орнына $\overline{x}$ қойсақ, $\overline{y}$-ң орнына $\overline{x} \wedge y$ қойсақ жаңа эквивалентті формула аламыз. $\overline{\overline{X} \wedge (\overline{X} \wedge Y)} \equiv \overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{X} \wedge Y}$

Егер қандай да бір F формуланың құрамына кіретін F1-ді оған эквивалентті F2 формуласымен алмастырсақ, алынған формула F-ке эквивалентті болып шығады.

Осыған байланысты

$\overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{X} \wedge Y} \equiv X \vee \overline{\overline{X} \wedge Y}$-қос терістеу заңы бойынша

$X \vee \overline{\overline{X} \wedge Y} \equiv X \vee (\overline{\overline{X}} \vee \overline{Y})$-Де Морган заңы бойынша

$X \vee (\overline{\overline{X}} \vee \overline{Y}) \equiv X \vee (X \vee \overline{Y})$-қос терістеу заңы

$X \vee (X \vee \overline{Y}) \equiv (X \vee X) \vee \overline{Y}$-ассоциативті заң бойынша

$(X \vee X) \vee \overline{Y} \equiv X \vee \overline{Y}$-идемпотентті заңы бойынша

Эквиваленттік қатынастың транзитивті қасиетіне байланысты жоғарыдағы формулалар тізбегінің 1-шісімен соңғының эквиваленттігін жазуға болады.

$\overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{X} \wedge Y} \equiv X \vee \overline{Y}$

Логиканың аталған заңдарына формулаларды қысқартқанда жиі қолданылатын тағы бірнеше эквиваленттіктерді қосуға болады.

Анықтама. Формуланы оған эквивалентті (мәндес) басқа формуламен ауыстыруды эквивалентті түрлендіру дейміз.

Формулаларды ықшамдау.

Формуланы ықшамдау деп ($\to, \leftrightarrow$, $\overline{\overline{\ }}$ -қос терістеу белгілері жоқ формулаға түрлендіретін немесе алғашқыға қарағанда $\wedge, \vee$ белгілері аз формулаға түрлендіруді айтамыз. Негізгі эквиваленттік қатынастардан басқа формулаларды ықшамдау үшін төмендегідей эквивалентті қатынастар қолданылады.

1. Жұтылу заңдары.

$X \wedge (X \vee Y) \equiv X$;

2. Желімдеу заңдары.

1. $(X \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee Y) \equiv Y$;

3. Жалпылама желімдеу заңы.

$XZ \vee Y\overline{Z} \vee XY \equiv XZ \vee Y\overline{Z}$

4. $x \vee \overline{x} \wedge y = x \vee y$;

5. $\overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} = x_1 \wedge x_2$

6. $\overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}} = x_1 \vee x_2$

7. Импликацияны дизьюнкция, коньюнкция және терістеу арқылы байланыстыратын төмендегідей формулалар бар.

7.1 $x_1 \to x_2 \equiv \overline{x_1} \vee x_2$

7.2 $\overline{x_1} \to x_2 \equiv x_1 \vee x_2$

7.3 $\overline{x_1 \to \overline{x_2}} \equiv x_1 \wedge x_2$

7.4 $x_1 \to x_2 \equiv \overline{x_1 \wedge \overline{x_2}}$

8. Эквиваленцияның дизьюнкция , коньюнкция және терістеу арқылы өрнектелуі

8.1 $x_1 \leftrightarrow x_2 \equiv |(x_1 \to x_2) \wedge (x_1 \to x_2)| \equiv (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_1)$

8.2 $x_1 \leftrightarrow x_2 \equiv (x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})$

8.3 $x_1 \leftrightarrow x_2 \equiv (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_1)$

8.4 $x_1 \leftrightarrow x_2 \equiv \overline{x_1 \wedge \overline{x_2}} \wedge \overline{x_2 \wedge \overline{x_1}}$

Кейде формулаларды қысқарту үшін конъюнкция белгісін жазбайды.

$(X \wedge Y) \vee Z$ - өрнегін $XY \vee Z$, деп ал $X(Y \vee Z) \vee \overline{X}$ - өрнегін $(X \wedge (Y \vee Z)) \vee \overline{X}$ деп түсіну керек.

Импликация мен эквиваленцияны конъюнкция, дизъюнкция, терістеу арқылы өрнектеу.

$\to, \leftrightarrow$ белгілері бар кез-келген формуланы $\to, \leftrightarrow$ белгілері жоқ басқа эквивалентті формуламен ауыстыруға болатының дәлелдейміз.

Айталық $X \to Y \equiv \overline{X} \vee Y$ (1) $X \to Y \equiv \overline{X \wedge \overline{Y}}$ (2) формулалары белгілі болсын. Бірінші формулада импликация дизъюнкция мен терістеу арқылы, ал екінші формуладағы импликация конъюнкция мен терістеу арқылы өрнектеліп тұр. Мына эквиваленцияны $X \leftrightarrow Y \equiv (X \to Y) \& (Y \to X)$ (3) конъюнкция, импликация арқылы өрнектеуге болатындығын көрсетейік.

Тексеру:

X	Y	$X \to Y$	$Y \to X$	$(X \to Y)\&$ $(Y \to X)$	$X \leftrightarrow Y$
а	а	а	а	а	а
а	ж	ж	а	ж	ж

ж	а	а	ж	ж	ж
ж	ж	а	а	а	а

(3) пен (1) ден $X \leftrightarrow Y \equiv (\overline{X} \vee Y) \& (\overline{Y} \vee X)$ (4) (конъюнкция, дизъюнк ция, терістеу) (3)-пен (2)-ден $(X \leftrightarrow Y) \equiv \overline{(X \wedge \overline{\overline{Y}})} \wedge (\overline{\overline{X}} \wedge \overline{Y})$ (5) (конъюнкция, терістеу)

Буль функциялары. Буль функцияларының тұжырымдар формулаларымен өрнектелуі. Суперпозиция

Анықтама: Аргументтері де, өзі де 0 және 1 мәндерін қабылдайтын $f(x_1, x_2,..., x_n)$ функциясы Буль функциясы деп аталады. $f(x_1, x_2,..., x_n)$ функциясының аргументтері $x_1, x_2,..., x_n$ сәйкес $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ мәндерін қабылдасын $(x_1 = \alpha_1,..., x_n = \alpha_n)$. $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ мәндер құрамасы деу атау келісілген. $n-$ құрамасының ұзындығы деп аталады. Әр құрама 2-лік жүйе цифрларынан тұрады және оларға(құрамаларға) нөмір беру келісілген. Құрамаларды нөмірлерінің табиғи өсу ретімен орналастырады. Мысал: $n = 3$

$n = 3$ 000; 001; 010; 011; 100; 101; 110; 111; - 8 құрама

$n = 4$ 0000; 0001; 0010; 0101; 0100; 0101; 0110; 0111;

1000; 1001; 1010; 1011; 1100; 1101; 1110; 1111;- 16 құрама

Құрамалардың осылайша табиғи нөмірлерінің өсуімен орналасуын стандартты орналасу дейміз. Ұзындығы $m-$ге тең $N-$элементтен жасалған орналасулардың саны N^m екендігі белгілі. Бұдан ұзындығы $n-$ге тең 0 мен 1 жасалған барлық функциялардың саны 2^n тең екендігін көреміз. $n-$аргументтен тұратын барлық функциялардың саны 2^{2n} тең. 0,1-константаларын 0-орынды Буль функциясы деу керек. Әрбір логикалық функцияны сол жағында барлық 2^n-құрамалар (айнымалының мәндері ұзындығының $n-$ге тең екілік вектор), ал оң жағында осы құрамадағы функцияның мәні орналасқан кесте арқылы беруге болады.

Мысалы, 3 айнымалыдан тәуелді $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияларын мына таблицамен беруге болады. Кестенің әр жолында айнымалылардың мәндерінен тұратын құрамалар және осы құрамаға сәйкес функцияның мәні орналасқан. Логикалық функцияның мәнін 1-ге тең (f=1)ететін айнымалылардың жиынтығы f – функцияның бірлік жиынтығы деп аталады. Бірлік жиын тықтар f – функцияның бірлік жиыны деп аталады Осыған ұқсас f = 0 болатын мәндер жиынтығы f – функцияның нольдік жиыны деп аталады. f ($x_1 x_2,\dots,x_n$) функция суреттегідей ақиқаттық кестемен анықталады.

x1	x2	x3	...	xn-1	xn	f(x1,x2,…,xn
0	0	0	...	0	0	f(0,0,…,0,0)
0	0	0	...	0	1	f(0,0,…,0,1)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	1	1	...	1	0	f(1,1,…,1,0)
1	1	1	...	1	1	f(1,1,…,1,1)

Егер f буль функциясы мен φ формуласының ақиқаттық кестелері бірдей болса, φ формуласы f функциясын өрнектейді деп айтамыз

Егер $f(x_1, x_2,..., x_{i-1},..., x_{i+1},..., x_n) = g(x_1,..., x_{i-1}, x_{i-n}, x_n)$ болса $f(x_1, x_2,...x_{i-1}, x_i, x_{i+1},..., x_n)$ формуласындағы x_i аргумент маңызсыз (фиктивный) деп аталады. Бұл жағдайда $f(x_1, x_2..., x_n) = g(x_1, x_2,..., x_{i+1},..., x_n)$. Шын мәнінде f-n айнымалыдан тәуелді, ал $g-f-$тен маңызсыз айнымалыны шығарып тастағаннан алынды дейді. Нөлден немесе бірден тұратын құрамалардағы 0 немесе 1 мәнін қабылдайтын f($x_1,\dots,x_n$) функциясы түрақты деп аталады. f($x_1,x_2,\dots,x_n$)$\equiv$0; f($x_1,x_2,\dots,x_n$)$\equiv$1.

Логикалық алгебраның элементар функциялары.

Логикалық алгебрада бір немесе 2 айнымалысы бар унарлы, бинарлы операциялар көп қолданылады.Бір айнымалысы бар барлық логикалық функциялар жиынтығы кестеде берілген. φ_0, φ_3 - 0,1 тұрақтылары.Олардың мәндері x-тен тәуелсіз. Демек x-ң мәні оларға маңызсыз (фиктивная).

$\varphi_0(0)=0;\quad \varphi_0(1)=0$ - x-мәніне тәуелсіз $\varphi_1(x)=x$ - x-ті

$\varphi_3(1)=1;\quad \varphi_3(0)=1$

қайталайды; $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_1(1)=1$ $\varphi_2(x)-x$-ң терістеуі деп аталады

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	0	x	$\bar{x}$	1

$\bar{x}=\varphi_2(x)$ айнымалысы бар логикалық функциялардың жиынтығы төменде берілген. 16 функция бар

Мысалы, $\varphi_1(x_1,x_2)=x_1\&x_2=x_1\wedge x_2$–коньюнкция деп аталады.

φ_7 $(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2$ (логикалық қосу, «немесе» операциясы)

1. φ_0, φ_{15} - константалар

2. конъюнкция : $\varphi_1(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & \text{егер} \quad x_1=x_2=1\\ 0, & \text{ќалѓан} \quad \text{жаѓдайларда}\end{cases}$

3. импликацияға кері функция: $\varphi_2(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & \text{егер } x_1=1, x_2=0\\ 0, & \text{ќалѓан жаѓдайларда}\end{cases}$

4. $\varphi_3(x_1,x_2)=x_1$

5. $\varphi_4(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & \text{егер } x_1=0\,\&\,x_2=1\\ 0, & \text{ќалѓан жаѓдайларда}\end{cases}$

6. $\varphi_5(x_1,x_2)=x_2$

7. 2-ң модулі бойынша қосу. $x_1\oplus x_2, (x_1\nabla x_2)$:

$\varphi_6(x_1,x_2)=x_1\oplus x_2=\begin{cases}0, & \text{егер } x_1,x_2 \quad \text{аќиќаттыќ мєндері бірдей болса}\\ 1, & \text{егер аќиќаттыќ мєндер єр т‰рлі болса}\end{cases}$

8. Дизъюнкция: $\varphi_7(x_1,x_2)=x_1\vee x_2=\begin{cases}0, & \text{егер } x_1=x_2=0\\ 1, & \text{ќалѓан жаѓдайларда}\end{cases}$

9. Пирс бағыты: $\varphi_8(x_1,x_2)=x_1\downarrow x_2=\begin{cases}1, & \text{егер } x_1=0\,\&\,x_2=0\\ 0, & \text{ќалѓан жаѓдайларда}\end{cases}$

10.Эквиваленция:

$\varphi_9(x_1,x_2)=x_1\sim x_2=\begin{cases}1, & \text{егер } x_1,x_2 \quad \text{аќиќаттыќ мєндері бірдей болса}\\ 0, & \text{егер аќиќаттыќ мєндер єр т‰рлі болса}\end{cases}$

11. $\varphi_{10}(x_1,x_2)=\bar{x}_2$

12. $\varphi_{11}(x_1,x_2)=x_1\leftarrow x_2=\begin{cases}0, & \text{егер } x_1=0\,\&\,x_2=1\\ 1, & \text{ќалѓан жаѓдайларда}\end{cases}$

13. $\varphi_{12}(x_1,x_2)=\bar{x}_1$

14. импликация : $(x_1\to x_2)$

$\varphi_{13}(x_1,x_2)=x_1\to x_2=\begin{cases}0, & \text{егер } x_1=1\,\&\,x_2=0\\ 1, & \text{ќалѓан жаѓдайларда}\end{cases}$

15. Шеффер штрихы: $x_1\,|\,x_2$

$\varphi_{14}(x_1,x_2)=x_1|x_2=\begin{cases}0, & \text{егер } x_1=x_2=1\\ 1, & \text{ќалѓан жаѓдайларда}\end{cases}$

16. константа: $\varphi_{15}(x_1,x_2)=1$

Бұл 16 функцияның ішінен φ_0, φ_{15} – 0 және 1 константалары, яғни екі маңызсыз айнымалы функция. Қалғандардың ішінен жиі қолданылатындары:

Конюнкция: $\varphi_1 = x_1 \& x_2$	Пирс стрелкасы немесе Вев функция : $\varphi_8 = x_1 \downarrow x_2$
Дизюнкция: $\varphi_7 = x_1 \vee x_2$	Шеффер функциясы : $\varphi_{14} = x_1 \mid x_2$;
Эквивалентция: $\varphi_9 = x_1 \sim x_2$	2-модулі бойынша қосу: $\varphi_6 = x_1 \oplus x_2$
Импликация : $\varphi_{13} = x_1 \rightarrow x_2$	терістеу $\varphi_{12} = \overline{x}_1$

элементар функциялар болып есептеледі. $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\downarrow$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $|$

Үш және одан көп айнымалысы бар функиялар ақиқаттық кесте арқылы және айнымалылардың символдары және оларға қолданылған унарлы, бинарлы операциялардың символдарынан тұрады. Мысалы; $f(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x_1} \vee x_2) \rightarrow (x_1 \wedge x_3)$ функция x_1,x_2,x_3 символдарынан және ($\wedge$), ($\rightarrow$),($-$),($\vee$) операцияларынан тұрады.Сонымен формулалар ақиқаттық кестеге қоса функцияны (берілу) өрнектеу және есептеу үшін қолданылады. Жалпы жағдайда формулалар логикалық функцияны басқа элементар функциялардың суперпозициясы түрінде сипаттайды.

13 бөлім. Комбинаторлардың негізгі ұғымдары мен операциялары
Тақырып 47. Өңдеу. Тарату. Комбинация

Комбинаториканың негізгі есебі–қайта санау және ақырлы жиын элементтерін тізбектеу.

Егер берілген ақырлы жиын элементтерінің қаншасының берілген бір қасиетке ие екендігін анықтау қажет болса бұл қайта санау есебі, ал берілген қасиетке ие барлық элементтерді анықтау керек болса, бұл тізімдеу есебі Комбиторика есебін дәлелдеуде екі ереже жиі қолданылады. Олар: қосу және көбейту ережелері.

Егер X n элементтерден тұратын ақырлы жиын болса, X объектісін X тен n тәсілмен алуға болады дейді және $|X|=n$ болып белгіленеді.

Егер $X_1,\dots,X_n$–қос қостан қиылыспайтын жиындар болса, яғни $X_i \cap X_j=\varnothing$ ($i\neq j$), онда

$\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|$ -қосу ережесі. (1)

Бұл ережені k=2 үшін былай жазуға болады: Егер x объектісі m тәсілмен таңдалса, ал y басқа n тәсілмен таңдалса, онда "не x, не y" таңдау m+n тәсілмен іске асырылады (x және y элементтерін бір уақытта таңдау болмайды).

Көбейту ережесі. Егер x объектісін m тәсілмен таңдауға болса, және осындай таңдаудан кейін y объектісін өз кезегінде n тәсілмен таңдауға болса, онда реттелген (x, y) жұбын $m\times n$ тәсілмен таңдауға болады.(x, y – таңдаулары тәуелсіз).

Жалпы жағдайда, егер x_1 объектілері n_1 тәсілмен таңдалса, одан кейін x_2 n_2 тәсілмен таңдалса және кез келген $2\leq i\leq m-1$ үшін $x_1, x_2,\dots,x_i$ объектілерін таңдағаннан кейін x_{i+1} объектісін n_{i+1} тәсілмен таңдауға боллатын болса, онда m объектіден құралған $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ реттелген тізбегі $n_1 \times n_2 \times\dots\times n_m$ тәсілмен таңдалады.

$X=\{x_1, \dots, x_n\}$ жиынынан алынған $x_{i1}, \dots, x_{ir}$ элементтерінің жиынтығы n элементтен алынған r көлемді таңдама деп аталады.

Егер элементтердің орналасу тәртібі берілген болса, таңдама реттеген деп, ал орналасу тәртібіне белгілі бір шарт қойылмаса, таңдама реттелмеген деп аталады.

Таңдамаларда элементтердің қайталануы да, қайталанбауы да мүмкін.

Элементтері қайталануы мүмкін (n, r) - таңдамасы (n, r)-қайталама таңдамасы деп аталады. Ал егер реттелген (n, r) таңдаманың элементтері қос қостап әр түрлі болса, (n, r) қайталанбайтын таңдама немесе жай ғана (n, r)-орналасу деп аталады.

(n, n)-қайталанбайтын орналасу X жиынын алмастыру деп аталады.

Элементтері қайталануы мүмкін реттелмеген (n, r)-таңдама, қайталанба (n, r)-теру деп аталады. Егер реттелмеген (n, r) таңдаманың элементтері қос қостан әр түрлі болса, онда ол қайталанбайтын (n, r)-теруі немесе жай ғана (n, r) теруі деп аталады. Кез келген (n, r)-теруін n-элементті жиынның r-элементті ішкі жиыны деп қарауға болады.

Мысал, айталық X={1, 2, 3} болсын.

1) (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) - (3, 2)-қайталама орналастырулар.

2) (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2) - (3, 2)-қайталама орналасу;

3) (1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1) – X жиынын алмастыру;

4) {1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 2}, {2, 3}, {3, 3} - (3, 2)-қайталама теру;

5) {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} - (3, 2)-қайталанбайтын теру. Қайталама теру саны (n, r)-ді $\overline{A_n^r}$, қайталанбайтын теру-A_n^r. n-элементті теру саны P_n (яғни $P_n = A_n^n$) болып белгіленеді. Қайталама теру (n, r)-саны $\overline{C_n^r}$,ал қайталанбайтын теру-C_n^r.

1-тұжырым. $\overline{A_n^r}$ =nr.

Шынында әрбір (n, r)-қайталама теру ұзхындығы r-ға тең реттелген тізбек, ал оның әр мүшесі n тәсілдің бірімен таңдалады, бұдан көбейту ережесінен $\overline{A_n^r}$ =n·n·…·n=nr.

(Дербес жағдайда бұл өрнек негізі n санау жүйесінде r позицияда жазылған әр түрлі сандардың нешеу екендігін анықтайды.).

2-тұжырым. A_n^r =n(n-1)(n-2)…(n-r+1)= $\frac{n!}{(n-r)!}$, r≤n және A_n^r =0, r>n болғанда.

Шынында, r элементтен тұратын реттелген тізбектің бірінші мүшесі n тәсілмен таңдалады, екіншісі-(n-1) тәсілмен, соңғысы- (n–r+1) тәсілмен. Жалпыланған көбейту ережесінен ізделінді формуланы аламыз.

Салдар A_n^n =Pn=n(n-1) … (n–n+1)=n!

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

3-тұжырым., егер r≤n, C_n^r =0 егер r>n.

Шышында да, әр (n, r)-теруін r! әдіспен реттеуге болады, яғни C_n^r-ді r! рет A_n^r-ге қарағанда r! рет аз. Бұл формуладан $C_n^r = C_n^{n-r}$.

4-тұжырым. $\overline{C_n^r} = C_{n+r-1}^r$.

Шынында да X={x₁,…,xₙ} жиынының элементтерінен құрылған әрбір қайталанба (n, r)- B теруі үшін, r нөл мен n-1 1-ден тұратын (i-1)-ші және i бірлердің (мұндағы 2≤ i ≤ n-1) арасындағы нөлдердің саны B теруіндегі x_i элементтерінің санына тең, ал бірінші бірдің алдындағы нөлдердің саны B-ға енетін x_i элементтерінің санына тең болатын ұзындығы α(B) болатын векторды сәйкестендіруге болады.

Мысалы X={1, 2, 3, 4}, n=4, r=6 болса, Егер B={2, 2, 3, 3, 3, 4} - (4, 6)-қайталанба теру болса онда α(B) = 100100010 болады. Екінші жағынан егер $\alpha(B_1)$=110010000, онда B_1 = {3, 3, 4, 4, 4, 4}.

Бұл қайталанба (n, r)-теруімен n-1 бір және r нөлден тұратын вектор арасындағы сәйкестік. n-1 бірден және r нөлден құралған n+r-1 мөлшерлі векторлар саны C_{n+r-1}^r тең.

$$\overline{A_n^0} = A_n^0 = \overline{C_n^0} = C_n^0 = 1.$$

Тақырып 48. Ньютон биномы. Ньютон биномының ережесі бойынша жинақтау

Өзімізге белгілі натурал сандар 1, 2,3, ... жиын құрайды. Әрбір сан *жиынның элементі* деп аталады. Жер шарындағы адамдар жиын құрайды, ал әрбір адам – сол жиынның элементі.

Бір жиынның кез келген элементі екінші жиынның да элементі болса, онда *бірінші жиын екінші жиынның ішкі жиыны* деп аталады.

Бірде-бір элементі болмайтын жиын *бос жиын* деп аталады да, Ø символымен белгіленеді.

Элементтерін алғашқы n натурал сандармен нөмірлеуге болатын жиындар шекті, ал барлық натурал сандармен өзара бірмәнді сәйкестікте болатын жиындар шексіз жиын деп аталады.

А жиынына немесе В жиынына тиісті элементтер жиынын *А мен В жиындарының бірігуі* немесе *қосындысы* деп атайды да A U B деп белгілейді.

А жиынына да, В жиынына да тиісті элементтер жиынын *А мен В жиындарының қиылысуы* деп атайды да A ∩ B деп белгілейді.

А жиынына тиісті, ал В жиынына тиісті емес элементтер жиынын *А мен В жиындарының айырымы* деп атайды да A/B арқылы белгілейді.

Комбинаториканың қарапайым бөлімдері *орналастырулар, алмастырулар* және *терулер* деп аталады.

Алмастыру P_n n-берілген элементтер саны.

$$P_n = n!$$

Мысал. Бес орындыққа бес адамды отырғызу қанша тәсілмен шешіледі?

Шешуі: $P_5=5!=1*2*3*4*5=120$ Ж:120 тәсіл

Белгілеуі: C_n^m – мұндағы m,n –натурал сандар, n- берілген элементтер саны, m-әрбір топқа кіретін элементтер саны.m<n.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$$

Бұл формуладан келесі формулаларды алуға болады.

$$A_n^m = C_n^m * P_m ; \qquad P_m = \frac{A_n^m}{C_n^m}$$

$$n € N, \ m € N, \quad m \le n.$$

Алмастырулар мен факториал формулаларын түрлендіріп мына формуланы алуға болады

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!} : m! = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad \textbf{немесе} \quad C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Мысал. n=10; m=7 болғандағы терулер санын есептейік

$$C_{10}^{\ 7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{7!8*9*10}{7!1*2*3} = 8*3*5 = 120 \qquad \text{Ж:120}$$

Қысқаша көбейту формулалары бойынша $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$; $(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$ *екенін білеміз.*

Сонда $(x+a)^4=(x+)^3\cdot(x+a)=(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)\cdot(x+a)=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$.

$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+ a^2x^{n-1}+...+ a^кx^{n-к}+...+a^n$; *(1)*

= *формуласын пайдалансақ,* $(x+a)^n$= + + + +...+ + + ; *(2)*

Осы теңдіктегі =1; $a^0=1$; =n; =n; =1; $x^0=1$.

- *және (2) формулалар Ньютон биномының формуласы деп аталады.*

Ньютон биномының формуласындағы коэффициенттерді биномдық коэффициенттер деп атайды

14 бөлім. Логикалық функциялар

Тақырып 49. Логикалық функциялардың негізгі қасиеттері. Бұл қолдың логикалық формулалары

Анықтама1. $S = \{f_1, f_2, …, f_m\}$ логикалық функция жүйесі функциональды толық деп аталады, егер кез –келген логикалық функция S-дан функцияның суперпозициясы түрінде берілсе.

Функциональды толық жүйенің мысалын келтірейік:

S_0 = {Ù, Ú, -}, S_1 = {Ù, -}, S_2 = {Ú, -}, S_3 = {Ù, Å, 1}, S_4 = {|}, S_5 = {¯}.
Шынында да, S_0 2 теоремасы бойынша толық, Морган заңы бойынша коньюнкцияны дизьюнкция және терістеу арқылы, ал дизьюнкцияны коньюнкция және терістеу арқылы өрнектеуге болатындықтан S_1, S_2 – толық. (Сондықтан S_0 жүйесінің толықтығы тұсынан қарағанда мол болып есептеледі).
S_3 3 теоремасы бойынша толық, ал S_4 және S_5 толықтықтарын дәлелдеу үшін S_1 – ден "Шеффер штрихы", функциясы арқылы,ал S_2 –ден "Пирс бағдаршасы" функциясы арқылы өрнектелетін функциялар ретінде көрсетеміз:

$\bar{x}$ = x | x

x_1Ùx_2 = $\overline{x_1 | x_2}$ = (x_1 | x_2)|(x_1 | x_2)

$\bar{x}$ = x ¯ x

x_1Úx_2 = $\overline{x_1 \downarrow x_2}$ = (x_1¯x_2)¯(x_1¯x_2)

Сұрақ туындайды: S функционалды толық жүйе болу үшін S-нің функциясы қандай қасиеттерге ие болуы керек?
Осы сұраққа жауап бермес бұрын, кейбір анықтамаларды келтірейік.
Анықтама 2. f(x_1, …, x_n) функциясы нөлді сақтаушы деп аталады, егер f(0, 0, …, 0) = 0 болса.
Анықтама 3. f(x_1, …, x_n) функциясы бірді сақтаушы деп аталады, егер f(1, 1, …, 1)=1 болса.
Анықтама 4. f(x_1, …, x_n) сызықты деп аталады, егер Жегалкин полиномы мына түрде болса:

a_0 + $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, мұндағы a_i Î {0, 1}, i = 0, 1, …, n.

Бір айнымалылы барлық функциялар сызықты, екі айнымалылы функциялар да сызықты болып табылады:

x_1Åx_2, x_1~x_2= $\overline{x_1 \oplus x_2}$ =x_1Åx_2Å1.

Кез-келген f(x_1, …, x_n) функциясы сызықты болатындығын анықтау үшін, ол үшін Жегалкин полиномын табу керек және егер ол жоғарлы бірлікті конъюнкция рангісінен тұрмаса, онда сұраққа жауап оңды болады. (Қарапайым конъюнкциярангісі деп ондағы көбейткіштер санын айтамыз).
Анықтама 5. f(x_1, …, x_n) функциясы g(x_1, …, x_n)-ның қосарлы функциясы деп аталады, егер кез-келген айнымалылар жиынтығының мәндері үшін f(x_1, …, x_n) = $\bar{g}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ орындалса.

15 бөлім. Предикаттар және екілік қатынастар

Тақырып 50. Предикаттар түсінігі. Предикаттың негізгі және шындықтың ауқымы. Предикаттармен логикалық жұмыстар

Анықтама 1. x_1, x_2, …, x_n – пәндік айнымалылардың символдары болсын. Пәндік айнымалылардың *(x_1, x_2, …, x_n)* топтары *пәндік аймақ* пәндік аймағында анықталғанΩ жиыныны тиісті болсын. Ωдеп аталатын *n-орынды предикат* -ның тұжырымдар жиынына бейнелеуін айтады.Ωдеп,

Мысалдарды қарастырар алдын n-орынды предикаттарға квазианықтама берейік:

Анықтама. «*n* айнымалыға тәуелді және келесі қасиетке ие болған баяндамалы байланысты сөйлемі: айнымалылардың орнына анық мәндер қойылғанда ақиқат немесе жалған болсын».

^*Мысал 1. D(x_1, x_2)* = «*x_1* натурал саны *x_2 натурал санына бөлінеді (қалдықсыз)*» - *N* × *N* жиынында анықталған екі орынды предикат. Түсінікті, *D(4, 2)=1, D(3, 5)=0*.

Мысал 2. $Q(x)$ = «x_2<-1, $x \in R$» - R нақты сандар жиынында анықталған бір орынды предикат. $Q(-1)=0$, $Q(\sqrt{3})=0$. $Q(x)$ – тепе-тең жалған екендігі түсінікті, яғни $Q(x) \equiv 0$.

^ *Мысал 3.* $R(x, y, z)$= «$x^2+ y^2 \le z$; $x, y, z \in R$» - R^3 жиынында анықталған үш орынды предикат. $R(1, 1, -2)=0$, $R(1, 1, 2)=1$.

Мысал 4. $S(x, y)$ = «$\sin 2xy>-3$; $x, y \in R$» - екі орынды тепе-тең ақиқат предикат.

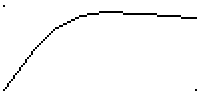
$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ аймағында анықталған n-орынды предикат болсынΩ- . Онымен келесі түрде анықталған екі жиынды байланыстырамыз:

$IP=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n \in) \Omega \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)=1\}$ – P предикаттың ақиқаттық жиыны,

$LP=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0\}$ – P предикаттың жалғандық жиыны.

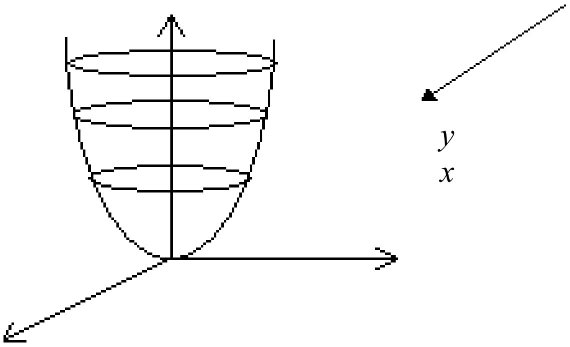
Анықтама 2. P – -да анықталған предикат болсын. ЕгерΩ $IP=\Omega$ $(LP=\varnothing)$ болса, онда Р *тепе-тең ақиқат,* егер $LP=\Omega$ $(IP=\varnothing)$ болса, онда Р *тепе-тең жалған предикат* деп аталады.

Егер $IP \neq \Omega$ және $LP \neq \varnothing$ болса, онда Р *орындалатын предикат* деп айтамыз.



$R^{\wedge 3}$ кеңістікте 3 мысалдағы $R(x, y, z)$ предикаттың IP және LP жиындарын көрсетейік (1 сурет).

z I_P



y

x

1 сурет

^

1.1 3.2 Предикаттарға логикалық амалдарды қолдану

Анықтама 3. P – -да анықталған предикат болсын. РΩ *предикаттың терістеуі* дегеніміз $\neg P(\overline{P})$ белгіленетін және -даΩ келесі түрде анықталған предикат:

$$(\neg \mathrm{P})(x_1; x_2; \ldots; x_n) \overset{def}{\equiv} \overline{P(x_1; x_2; \ldots; x_n)}$$

P және Q -да анықталған предикаттар болсынΩ– .

P және Q *предикаттардың дизъюнкциясы (конъюнкциясы, импликациясы, эквиваленциясы)* дегеніміз былай белгіленетін $P \vee Q$, ($P \wedge Q$ ($P \cdot Q$, [redacted], PQ), $P \to Q$, $P \sim Q$) және Ω -да келесі түрде анықталатын предикат:

$$(P \vee Q)(x_1, \ldots, x_n) \overset{def}{\equiv} P(x_1, \ldots, x_n) \vee Q(x_1, \ldots, x_n)$$

($\left(P \wedge Q\right)\left(x_1,\ldots,x_n\right) \overset{def}{\equiv} P\left(x_1,\ldots,x_n\right) \wedge Q\left(x_1,\ldots,x_n\right)$)

($\left(P \to Q\right)\left(x_1,\ldots,x_n\right) \overset{def}{\equiv} P\left(x_1,\ldots,x_n\right) \to Q\left(x_1,\ldots,x_n\right)$)

($\left(P \sim Q\right)\left(x_1,\ldots,x_n\right) \overset{def}{\equiv} P\left(x_1,\ldots,x_n\right) \sim Q\left(x_1,\ldots,x_n\right)$)

Анықтама 4. Егер Ω аймағына тиісті кез келген $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пәндік айнымалылардың топтары үшін $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ болса, онда P және Qпредикаттар Ω аймағында анықталған *пара-пар* *предикаттар* деп аталады ($P \equiv Q$).

Теорема 1. Ω аймағында анықталған n – орынды предикаттардың жиыны предикаттардың бульдік алгебрасық құрайды, яғни олар үшін бульдік алгебраның келесі 19 негізгі тепе-теңдіктер орынды:

0. $\neg\neg P \equiv P$
1. $P \vee Q \equiv Q \vee P$
2. $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
3. $P \vee \left(Q \vee R\right) \equiv \left(P \vee Q\right) \vee R$
4. $P \wedge \left(Q \wedge R\right) \equiv \left(P \wedge Q\right) \wedge R$
5. $P \vee \left(Q \wedge R\right) \equiv \left(P \vee Q\right) \wedge \left(P \vee R\right)$
6. $P \wedge \left(Q \vee R\right) \equiv \left(P \wedge Q\right) \vee \left(P \wedge R\right)$
7. $\neg\left(P \vee Q\right) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
8. $\neg\left(P \wedge Q\right) \equiv \neg P \vee \neg Q$
9. $P \vee P \equiv P$
10. $P \wedge P \equiv P$
11. $P \vee 1 \equiv 1$
12. $P \wedge 0 \equiv 0$
13. $P \vee 0 \equiv P$
14. $P \wedge 1 \equiv P$
15. $P \vee \left(P \wedge Q\right) \equiv P$
16. $P \wedge \left(P \vee Q\right) \equiv P$
17. $P \vee \neg P \equiv 1$
18. $P \wedge \neg P \equiv 0$

Мұнда 1 – Ω-дағы тепе-тең ақиқат предикаттың, ал 0 – тепе-тең жалған предикаттың белгілері.

Бұл теореманың дұрыстығы айқын. Өйткені предикаттарға қолданылатын амалдар тұжырымдарға қолданылатын амалдар көмегімен енгізілген, ал тұжырымдар бульдік алгебраны құрайды.

51. Бастапқы формуланың тұжырымдамасы. Предикаттардың есептелуі және олардың негізгі жүйесі

Предикаттар логикасында келесі символдарды пайдаланамыз:

1. p, q, r, … символдары – 1– ақиқат немесе 0 – жалған екі мәнді қабылдайтын *айнымалы тұжырымдар;*
2. x, y, z, … – кейбір М жиынына тиісті мәндерді қабылдайтын п*әндік айнымалылар*;

x^0, y^0, z^0 – *пәндік тұрақтылар,* яғни пәндік айнымалылардың мәндері.

3. P(·), Q(·), F(·), … - *бір орынды предикаттық айнымалылар;*

Q(·,·,…,·), R(·,·, …,·) – n-*орынды предикаттық айнымалыла;р*

P^0(·), Q^0(·,·, …,·) – *тұрақты предикаттардың символдары.*

4. *Логикалық амалдардың символдары:* $\wedge, \vee, \rightarrow, -.$
5. *Кванторлық амалдардың символдары:* $\forall x, \exists x.$
6. *Көмекші символдар:* жақшалар, үтірлер

Предикаттар логикасы формуласының анықтамас

1. Кез келген тұжырым (қарапайым) формула болады.
2. Егер F(·,·, …,·) – n-орынды предикатты айнымалы немесе тұрақты предикат, ал x_1, x_2,…, x_n – пәндік айнымалылар немесе пәндік тұрақтылар болса, онда F(x_1, x_2,…, x_n) – формула. Мұндай формула қарапайым деп аталады, бұл формулада пәндік айнымалылар бос, кванторлармен байланбаған болады.
3. Егер А және В – формулалар (бұл формулаларға айнымалылар бір түрде кіреді – бос немесе байланған), онда $A \vee B, A \wedge B, A \rightarrow B$ сөздер – формулалар.
4. Егер А – формула болса, онда $\overline{A}$ да – формула, А формуладан $\overline{A}$ формулаға өтуде пәндік айнымалылардың ену түрі өзгермейді.
5. Егер А(х) – формула (бұл формулаға х пәндік айнымалы бос болып енеді), онда $\forall x A(x)$ және $\exists x A(x)$ сөздер де формулалар.
6. 1 – 5 бөлімдерде айтылған сөздерден басқа сөздер формула болмайды.

Мысалы, егер Р(х) және Q(x,y) – бір орынды және екі орынды предикаттар, ал q, r – айнымалы тұжырымдар болса, онда келесі сөздер (өрнектер) формулалар болады: $q, P(x), P(x) \wedge Q(x^0, y), \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x, y), \overline{(Q(x, y)} \vee q) \rightarrow r$.

Мысалы, $\forall x Q(x, y) \rightarrow P(x)$ сөзі формула емес. Мұнда үшінші бөлімнің шарты бұзылған: $\forall x Q(x, y)$ формулаға x айнымалы байланған болып, ал P(x) формулаға бос болып енеді.

Предикаттар логикасы формуласы анықтамасынан тұжырымдар алгебрасының әрбір формуласы предикаттар логикасының формуласы болатыны түсінікті.

^ **Предикаттар логикасының формуласының мәні**

Формуланың логикалық мәні жайлы бұл формулаға кіретін предикаттардың M анықталу аймағы берілгенде ғана айтуға болады. Формуланың логикалық мәні үш түрлі айнымалылардың мәндеріне тәуелді: 1) формулаға енетін айнымалы тұжырымдардың мәндеріне, 2) M жиынына тиісті бос пәндік айнымалылардың мәндеріне, 3) предикатты айнымалылардың мәндеріне.

Осы үш түрлі айнымалылардың анық мәндерінде предикаттар логикасының формуласы ақиқат немесе жалған мән қабылдайтын тұжырым болады.

Мысал ретінде келесі формуланы қарастырамыз:

$$\exists y \forall z (P(x, y) \to P(y, z)), \ (1)$$

N.×M=N×M жиынында анықталған, мұнда M={0,1,2,…,n,…}, яғни M×Бұл формулада екі орынды P(x, y) предикаты M

В формулу (1) формулаға кіретін P(x,y) айнымалы предикаттың үш x,y,z пәндік айнымалыларынан екеуі – y және z кванторлармен байланған, ал үшіншісі x – бос.

P(x,y) предикаттың мәнін бекітеміз: $P^0(x,y)$= «x   болсын. Онда y-тің $x^0=5$ мәнінен кіші мәндерінде $P^0(x^0,y)$ предикаты "жалған" мәнін, ал импликация $P(x, y) \to P(y, z)$ барлық $z \in M$ үшін "ақиқат" мәнін қабылдайды, яғни $\exists y \forall z (P^0(x, y) \to P^0(y, z))$ тұжырымы ақиқат.

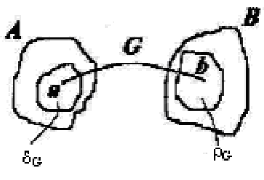
16 бөлім. Сәйкестіктер. Ауыстыру
Тақырып 52. Салыстыру және олардың қасиеттері

Сәйкестіктер – жиын элементтерінің арасындағы өзара байланысты беру тәсілі. Оның дербес жағдайлары: функциялар, бейнелер, түрлендірулер, т.б.

Анықтама. A, B жиындарының арасындағы сәйкестік деп бұл жиындардың тура (декарт) көбейтіндісінің G ішкі жиынын айтады.

$G \subseteq A x B$ Егер $(a,b) \in G$ болса,G сәйкестігінде b a-ға сәйкес деп айтады. $\delta_G=\{a|(a,b)\in G$, G сәйкестігінің анықталу облысы, ал $\rho_G=\{b|(a,b)\in G\}$ мәндер жиыны деп аталады.

Анықтама. Егер $\delta_G=A$ болса толық анықталған сәйкестік, $\delta_A \subseteq A$ болса толық емес (жартылай) сәйкестік болады. (толық анықталмаған).



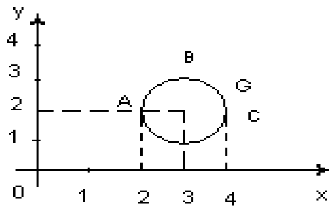
Анықтама. Егер $\rho_G=B$ – сюръективті сәйкестік деп аталады. (B-ның әрбір элементінің A прообразы бар) **Анықтама** A жиынының әрбір $a\in A$ элементіне B жиынының G сәйкестігіндегі a-ға сәйкес барлық $b\in B$ элементтерінің жиыны a элементі- нің образы, ал әрбір $b\in B$ элементіне A жиынының G сәйкестігіндегі в-ға сәйкес барлық $a\in A$ элементтерінің жиыны b элементінің A жиынындағы прообразы деп аталады.

Анықтама. Барлық $a \in C \subseteq \rho_G$ элементтерінің образдарының жиыны C жиынының образы деп аталады. Барлық $в \in D \subseteq \rho_G$ элементтерінің прообраздарының жиыны D жиынының прообразы деп аталады.

Анықтама. Егер анықталу облысынан (δ_G) алынған кез-келген a элементінің мәндер жиынында (ρ_G) бір ғана образы $b\in\rho_G$ болса, G – функционал (бір мәнді) сәйкестік деп аталады.

Анықтама. Егер G сәйкестігі толық анықталған,сюръективті, функционалды және $\forall$ $b\in\rho_G$ элемен тінің анықталу облысында бір ғана прообразы $a\in\delta_G$ болса, онда G өзара бір мәнді сәйкестік болады.

Егер A мен B жиындарының арасында өзара бір мәнді сәйкестік болса, онда олардың қуаттары тең және олар тең қуатты жиындар |A|=|B| деп аталады.Бұл фактілер жиынды санамай-ақ,олардың тең қуаттылығын анықтауға болатындығын көрсетеді. Қуаты белгілі немесе оңай санауға болатын басқа жиынмен өзара бір мәнділігін дәлелдеу арқылы жиын элементтерін санамай-ақ оның қуатын анықтауға болады. N натурал сандар жиыны мен тең қуатты жиындар *саналымды жиын* деп аталады.



R нақты сандар жиынымен тең қуатты сандар континуальды деп аталады.

1- мысал. Айталық , G $(x\text{-}3)^2+(y\text{-}2)^2\leq 1$ қатынасын қанағат тандыратын барлық (x,y) нақты санды сандар жиыны болсын. $G=\{(x,y)|x,y\in$ үшін $(x\text{-}3)^2+(y\text{-}2)^2\leq 1\}$ сәйкестігінің графикалық кескіні центрі (3,2) нүктесінде болатын ,радиусы 1-ге тең дөңгелек. Бұл 3.2 суреттегідей G дөңгелегі R мен R арасындағы сәйкестік (яғни OX өсі мен OY өстерінің арасындағы сәйкестік).

а) 2, 3, 4 сандарының образы мен прообраздарын табу керек.

Шешуі: $2\in\delta_G$ G сәйкестігіндегі образы жалғыз ғана $2\in\rho_G$, 3-ң G сәйкестігіндегі образы [1,3] кесіндісіндегі барлық нақты сандар жиыны , 4-ң образы 2. G сәйкестігінің мәндер жиыны ρ_G алын ған ($2\in\rho_G$) 2 санының G сәйкестігіндегі прообразы $[2,4]\subseteq\delta_G$; $3\in\rho_G$ G сәйкестігіндегі прообразы $3\in\delta_G$. $4\in\rho_G$ – G сәйкестігінде прообраздары жоқ

б) 1) $[2,3]\in\delta_G$ сандарының образы осы [2,4] кесіндідегі барлық образдарының бірігуі, яғни $[1,3]\subset\rho_G$;

2) Осыған ұқсас [2,4] кесіндісінің G сәйкестігіндегі образы [1,3];

3) [2,3] кесіндісінің прообразы [2,4] ; $[2,4]\subset\rho_G$ прообразы [2,4];

Егер G сәйкестігі нақты сандар жиынында анықталған десек, яғни $G\subseteq RxR$ онда

1) G – толық анықталмаған себебі ,$\delta_G\neq R$ ($\delta_G\subset R$)

2) Сюръективті емес себебі , $\rho_G\neq R$ ($\rho_G\subset R$)

3) Функционалды (бір мәнді) емес, себебі $[2,4]=\delta_G$ үшін (2 мен 4-тен басқа) образдар жалғыз емес.

4) Өзара бір мәнді болудың қажетті шарттары (1,2,3 шарттар) орындалмағандықтан сәйкестік өзара бір мәнді емес.

Егер сәйкестік $G\subseteq[2,4]x[1,3]$ болса G толық анықталған және сюръективті ,бірақ функционал ды және өзара бір мәнді емес

Тақырып 53. Күрделі құрылымды және кері картаны жасау

Айталық, A, B жиындарында $f\subseteq AxB$ сәйкестігі бар болсын. Анықтама Егер δ_f=A, ρ_f=B және $(x,y_1)\in f,\quad (x,y_2)\in f$ болғандығынан $y_1=y_2$ болса, онда $f\subseteq A\times B$ сәйкестігі функция деп аталады ол **f : A→B** немесе $A\xrightarrow{f}B$ болып жазылады. Бұл анықтамадан функция дегеніміз функционал сәйкестік екендігін көреміз және f функциясының типі A→B деп оқылады . f функциясы анықталу облысының әрбір элементіне (x) мәндер облысынан бір мәнді (y)сәйкестендіреді және **y = *f* (x)** болып белгіленеді.) (x аргумент, y функцияның мәні) болып жазылады (y x-тың образы).Мысалдар: f={(1,2),(2,3),(3,2)} – функция; f={(1,2),(1,3),(2,3)} - функция емес; $\{(x,x^2\text{-}2x+3),\ x\in R\}$ – функция ; бұл функция әдетте $y=x^2=2x+3$ болып жазылады.

<u>Анықтама</u> Толық анықталған функция f : A→B А-ны В-ға іштей бейнелеу деп аталады. $f : A \xrightarrow{іштей} B$ (δ_f=A , $\rho_f \subseteq B$) толық анықталған функция

Анықтама Егер ρ_f = B болса функция сюръективті функция деп аталады.

<u>Анықтама</u> Егер функция толық анықталған (ρ_f=A) және сюръективті (ρ_f=B) болса ,онда ол А-ны В-ға **толық бейнелеу** деп аталады: $f : A \xrightarrow{толык} B$ болып жазылады.

<u>Анықтама</u> .$A \xrightarrow{іштей} A$ бейнелеу А жиынын түрлендіру, ал $A \xrightarrow{толык} A$ бейнелеуі А-ға алмастыру деп аталады $A \xleftrightarrow{Алмастыру} A$ болып та белгіленеді.

f және g функциялары тең болады, егер төмендегі шарттар орындалса:

- Олардың анықталу облыстары біреу -ол *A*жиыны;
- Кез-келген $a \in A$ үшін f(a) = g (a).

Сәйкестік	Міндетті түрде болу керек қасиеті		
	Функционалды	Толық анықталған	Сюръективті
Функция	+		
А-ны В-ға іштей бейнелеу	+	+	
А-ы В-ға толық бейнелеу	+	+	+

f: A1×A2×...×An → B типті функция *n* –орынды функция деп аталады.Бұл жағдайда функцияның *n* аргументі бар деп түсіну келісілген.:f(a1,..., an)=b, мұндағы a1∈A1,...,an∈An, b∈B. Айталық, G⊆AxB сәйкестігі берілсін. Тек (a,b)∈G болса ғана (b,a)∈H болатын H⊆BxA сәйкестігі, G-ң кері сәйкестігі деп аталады және G-1 болып белгіленеді.

<u>Анықтама</u> Егер f:A→B сәйкестігіне кері сәйкестік функционалды болса (яғни әрбір $b \in \rho_f$ үшін бір ғана $a \in \delta_f$ болса), онда ол f функциясына кері функция деп аталады, f^{-1} болып белгіленеді.

Кері сәйкестікте образ бен прообраздың орындары ауысып келетіндіктен f функциясына кері функция болу үшін f : A→B f функциясының мәндер жиынының әрбір $b \in \rho_f$ элементінің жалғыз ғана образы болу керек. Бұдан f : A→B функциясы өзінің анықталу облысы мен мәндер облысының өзара бір мәнді сәйкестігі болса ғана оған кері функция болатындығы көрінеді.

Егер h(x) = g(f(x)), мұндағы, x∈A орындалса h:A→C функциясы *f* және g функцияларының композициясы деп аталады және *f(*g) белгіленеді.

Көбіне *h* функциясы f ті g –ң орнына қойғаннан алынды деп айтады.Көп орынды $f: A^m \rightarrow B$, $g: B^n \rightarrow C$ функциясы үшін f-ті g –ға қоюдың әртүрлі варианттары бар. Нәтижесінде әртүрлі типтегі функциялар алынады. Мысалы, $m = 3$ және $n = 4$ үшін $h = g(x_1, f(y_1, y_2, y_3), x_3, x_4)$ функциясында 6 аргумент бар ал оның типі $B \times A^3 \times B2 \rightarrow C$. Аргументтерін басқаша атап f1,...,fn функцияларын бір-біріне қойғаннан алынған функция f1,...,fn функцияларының суперпозициясы деп аталады. Бұл суперпозицияны және функ-ционалдық белгі мен аргументтердің символдарын сипаттайтын өрнек формула деп аталады.

Функциялардың берілу тәсілдері:

- График түрінде;
- Кесте;
- Функцияны басқа функциялардың суперпозициясы түрінде сипаттайтын формула түрінде;

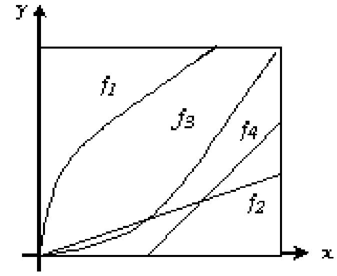
<u>Анықтама</u>. Егер f^{-1} сәйкестігі толық емес функция болса, яғни $\forall\, x_1, x_2 \in \delta_f$ үшін, $x_1 \neq x_2$ болғандығынан $f(x_1) \neq f(x_2)$ болса, f функция инъективті (Инъекция) функция деп аталады..Егер f – инъекция болса f: $A \xrightarrow{1-1} B$ болып белгіленеді.

Анықтама. Егер ρ_G = B болса f:A→B функциясы сюръективті (сюръекция) функция деп аталады f: $A \xrightarrow{толық} B$.

Анықтама. Егер f инъективті және сюръективті болса, ол биективті деп аталады: f:A↔B

Анықтама. Егер f A-ы B-ң әр түрлі мәндеріне бейнелесе, онда f функциясы өзара бір мәнді сәйкестік немесе биективті функция (биекция) деп аталады. Сонымен, егер функция сюръективті және инъективті болса, функция биекция болады. Егер f A мен B арасындағы биекция болса, f : A↔B болып жазылады. F: A↔A биекциясы A жиынының (подстановка) алмастыруы деп аталады.

Суретте графиктік түрде функциялар берілген



$f_i : [0,1] \to [0,1], \quad i \in \{1,2,3,4\}$

f_1 – сюръективті, инъективті емес

f_2 – инъективті, сюръективті емес

f_3 – инъективті, сюръективті – биекция

f_4 - инъективті де емес, сюръективті де емес

2- мысал: Үш функцияны қарастырайық $f_i : R \to R, i = 1,2,3$:

1) $f_1(x) = e^x$ инъективті, сюръективті емес

2) $f_2(x) = x \cdot \sin x$ сюръективті, инъективті емес

3) $f_3(x) = 2x - 1$биективті;Негізгі әдебиет: 1[10-14]; 2[10-16]

Қосымша әдебиет: 7[9-34]

Бақылау сұрақтары:

1. Сәйкестік,бейнелеу,функциональды бейнелеу дегеніміз не?
2. Қандай бейнелеулер инъективті, сюръективті, биективті деп аталады?

Кері функция бар болудың қажетті және жеткілікті шарты

17 бөлім. Математикалық индукция әдісі

Тақырып 54. Математикалық индукция принципі

Индукциялық жолмен алынған қорытындыны логикалық жолмен негіздеу қажеттігі туғанда әдетте жетілдірілген индукция қолданылады.

Толық математикалық индукция белгілі фактіге қолданылғанда келесі түрде біртіндеп қолданылады.

1. Бақылау мен тәжірибе;
2. Гипотеза;
3. Гипотезаны дәлелдеу.

Математикалық индукция принципінің мәнісі төмендегідей: егер қайсыбір тұжырым (формула) n=1 болғанда (немесе бұл ұйғарымның мағынасы бар n-нің басқа мәндерінде) ақиқат болса және n=k қандай бір натурал мәні үшін ақиқат деп ұйғарылуынан келесі натурал n=k+1 үшін де тұжырымның ақиқаттығы шығатын болса, онда тұжырым n-нің барлық натурал мәнінде ақиқат. Математикалық индукция принципін қолдануға негізделген дәлелдеу әдісі математикалық индукция әдісі деп аталады.

Математикалық индукция әдісімен дәледеу тәсілі төмендегі келесі кезеңдерден тұрады:

1. n=1 болғанда тұжырымның (формуланың) ақиқаттағы тікелей тексеріледі немесе дәлелденеді;
2. қайсыбір натурал n=k үшін тұжырым ақиқат, тура деп ұйғарылып, тұжырымның ақиқаттағы n=k+1 үшін дәлелденеді. Математикалық индукция әдісін, натурал n-ге тәуелді тұжырымдарды дәлелдеуге ғана қолдануға болатыны айқын.

Негізінен ол есептің екі түрін шешуге қолданылады:

1. жекелеген бақылаулардан ой түйіп , кейбір заңдылықты тағайындайды және одан кейін оның дұрыстығын математикалық индукция әдісімен дәлелдейді;
2. кейбір формулалардың ақиқаттығын математикалық индукция әдісімен дәлелдейді.
3. **Натурал сандар арифметикасының негізгі теоремасы**

Математикалық индукция әдісінің көмегімен натурал сандардың бөлінгіштігіне қатысты тұжырымдарды дәлелдеуге болады. Мысалы, натурал сандар арифметикасының негізгі теоремасын дәлелдейік.

^ ***Теорема***: *Бірден артық кез-келген* ***n*** *натурал сан— жай сан не әр түрлі жіктелуіндегі өзгешелігі көбейткіштердің тұрған орнында ғана болатын көбейтінді түрінде жазылады.*

Дәлелдеу:

Біз ең алдымен жай көбейткіштерге жіктеудің бар болатынын көрсетелік. **n**=2, бұл жай сан. Біз айтқан тұжырым дұрыс.

k санына кез-келген **n** саны не жай немесе жай көбейткіштерге жіктелетін құрама сан. **k** санының өзі не жай сан, не жай көбейткіштерге жіктелетінін көрсетелік. Егер **k** жай сан болса, онда айтылған тұжырым дұрыс. Егер **k**- құрама сан болса, онда **k=ab**, мұндағы **a** және **b** сандары **k**- дан кем натурал сандар. Ұйғарым бойынша бұлар жай көбейткіштерге жіктеледі. Бұл **a, b** сандарын өздерінің жіктелулерімен алмастырсақ, **k** санының жай көбейткіштерге жіктелуін аламыз.

Сонымен, **n**=2 болғанда жай көбейткіштерге жіктелу туралы теореманың бар болатыны ақиқат, ал бұдан **k** санынан кем барлық натурал сан жіктеледі деген қорытындыға келеміз. Демек, бұл пікір **k** саны үшін де ақиқат деп аламыз. Демек, бұл пікір бірден артық кез келген натурал сан үшін ақиқат.

Енді көбейткіштерге жіктелудің біреу-ақ болатынын көрсетелік. Ол үшін бізге жай сандардың келесі қасиеті қажет болады. Егер **n** натурал саны **p** жай санына бөлінсе, онда **n** санының кез келген жай көбейткіштерге жіктелуінде бір көбейткіш **p** болады. Шынында да **n** саны **p**-ға бөлінсе және $\mathbf{n=q_1... q_m}$, $\mathbf{q_1, q_2,..., q_m}$ – жай сандар, онда жай сандардың қасиеті бойынша $\mathbf{q_1, q_2,..., q_m}$ – сандардың бірі, мысалы, $\mathbf{q_1}$ саны **p** – ға бөлінуге тиіс. $\mathbf{q_1}$-жай сан, онда ол **p** -мен бірдей болуы керек. **n**=2 болғанда **2** жай санын аламыз, мұның басқа жай көбейткіштерге жіктелуі болмайды.

k санынан кем барлық натурал сандар бір ғана түрде жай көбейткіштерге жіктелсін. Бұл жағдайда жіктелудің біреуі ғана болатыны туралы теорема ақиқат. Егер**k** құрама сан болса, онда ол **k** – дан өзгеше ең болмағанда бір **p** санына бөлінеді.

Басқа сөбен айтқанда **k** санының кез келген жай көбейткіштерге жіктелуі **k=** $\mathbf{p*q_2…q_m}$ түрінде болады. Мұндағы $\mathbf{q_2…q_m}$ – көбейтіндісі $\frac{k}{p}$ санының жай көбейткіштерге жіктелуі $\frac{k}{p}$ –саны бірден артық **k** – дан кем натурал сан болғандықтан ұйғарым бойынша оның жай көбейткіштерге жіктелуі бір ғана түрде болады. Математикалық индукция әдісі бойынша тұжырым дәлелденді.

Келесі тұжырымды математикалық индукция әдісімен дәлелделік.

Егер **n** натурал сан болса, онда **n^2- n** саны жұп. Дәлелдеу. **n**=1 болса, онда тұжырым ақиқат. Өйткені 1^2-1=0 – жұп сан. Енді **k^2- k** жұп сан болса. Сондай-ақ**$(k+1)^2$-(k+1)= 2k** – жұп сан, ендеше **$(k+1)^2$-(k+1)** жұп сан. Сонымен, **n^2- n** айырмасының жұптылығы **n**=1 үшін дәлелдедік, **k^2- k** жұптылығын **$(k+1)^2$-(k+1)**-жұп екені қорытылды. Демек, **n^2- n** айырмасы **n** санының барлық натурал мәнінде жұп.

Дәл осы сияқты **n^3 -n** айырмасы 3-ке бөлінеді. Ол үшін **($(k+1)^3$- (k+1))- (k^3-k) = $3k^3$+3k** санының 3-ке бөлінетінін пайдаланамыз.

Қарастырған мысалдардан **n^m- n** айырмасы әрқашан **m-**ге бөлінеді деп тұжырым жасаймыз. Мысалы **m**=4, **n**=3 болғанда. 3^4-3=78 саны 4-ке бөлінеді. Егер **m**=5 болса **n^m- n** айырмасы 5-ке бөлінеді. Сонымен, біз қарастырған мысалдарда 2,3,5 жай сандар, сондықтан жоғарыдағы гипотезаны дәлірек тұжырымдайық.

Егер **p** жай сан болса, ал **n** кез келген бүтін сан болса онда **n^p- n** өрнегі **p**-ға бөлінеді, мұндағы **p**-жай сан. Бұл тұжырым Ферманың кіші теоремасы деп аталады.**n** саны **p**-ге бөлінетін болса, теореманың дұрыстығы бірден көрініп тұр.

n^p-n=n(n^{p-1}-1)

Теңдіктің оң жағындағы **n** саны **p**-ге бөлінетіндіктен көбейтінді **p**-ге бөлінеді.

Мысалы, $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ өрнегінің дұрыстығын математикалық индукция әдісін қолданып дәлелдеу керек.

Дәлелдеу. Мұндағы $A(n)=1+2+...+n$ және $B(n)=\frac{n(n+1)}{2}$.

1. n=1: A(1)=B(1) – ақиқат.
2. n=k: A(k)=B(k) – дұрыс деп ұйғарамыз.

$$1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

1. n=k+1: A(k+1)=B(k+1) – дәлелдеу керек.

$$1+2+...+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}$$ дәлелденді.

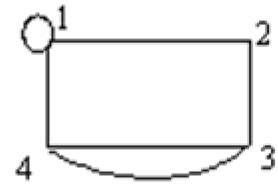
18 бөлім. Граф теориясы

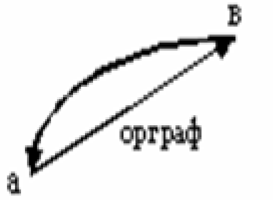
Тақырып 55. Негізгі мағынасы және анықталуы. Граф теориясының сипаттамасы

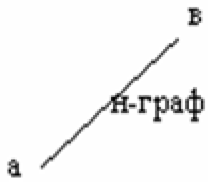
Граф ұғымы. Көптеген қолданбалы есептерде айналамызды қоршаған ортаның әртүрлі объектілер арасындағы байланыстар жүйесі зерттеледі. Объектілер төбелер деп аталып, нүктелер арқылы белгіленеді, ал төбелер арасындағы байланыстар доғалар деп аталып, сәйкес нүктелерді қосатын бағытталған түзулермен белгіленеді. Қала көшелерін граф арқылы кескіндеуге болады: көше қиылысуларын графтардың төбесі деп, ал көшелерді доғалар деп алуға болады;

Блок-схемаларды да граф түрінде кескіндеуге болады: блоктар — граф төбелері, ал операцияның орындалу кезегін көрсететін стрелкалар доғалар.

<u>Анықтама:</u> G=(M,R) алгебралық жүйе граф деп аталады. Мұндағы M—жиынтығы бос емес жиын, оның элементтері графтың төбелері деп аталады, ал бинарлы R қатынасының $R \subseteq M^2$ элементтері доғалар деп аталады. Сонымен граф төбелері дегеніміз –айналамызды қоршаған ортаның кез келген объектісі. Олардың саны шектеулі болғандықтан,біз оларды натурал сандармен белгілейміз. Ал граф қабырғалары оның кейбір төбелерін қосады. Граф қабырғаларын әдетте латын әріптерімен белгілейді. G= ‹M,R› графының геометриялық кескіні жазықтықта графтың әр төбесін нүкте арқылы белгілеп , егер $(a,b) \in R$ болса a төбесінен b төбесіне доға жүргізу арқылы алынады. Мысалы: төбелері M={1,2,3,4}, ал доғалары R={(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,3),(4,1)} болатын G графының геометриялық кескіні төмендегідей:







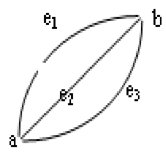
Графтың төбелерінің қандай сызықтарымен қосылатындығы (түзу әлде қисық), сызықтардың ұзындығы туралы ақпараттар маңызды емес.Төбелердің арасында байланыс бар екендігі және ол байланыс туралы ақпарат R доғалар жиынында екендігі болса болды.Төбелерді қосатын сызықтардың бағыты көрсетілген болуы мүмкін (мысалдағы сияқты). Мұндай граф бағытталған граф деп аталады (орграф). Оған математикалық түрде мынандай анықтама беруге болады.

<u>Анықтама</u>: Егер R қатынасы симметриялы болмаса, яғни $(a,b) \in R, (b,a) \notin R$ онда G=<M,R> графы бағытталған (орграф) деп аталады, ал R қатынасы симметриялы болса $(a,b) \in R$, $(b,a) \in R$ онда G бағытталмаған (неорграф) немесе н-граф деп аталады Айталық: a,b-граф төбелері, e=(a,b) оларды қосатын доға болсын. Мұндай жағдайда a, b төбелері мен e доғасы инцидентті деп аталады. b мен e доғасы да инцидентті. Әр доға $e \in E$ өзі қосатын екі төбеге инцидентті болады. Бір доғамен қосылатын 2 төбе сыбайлас (бүйірлес) деп аталады.

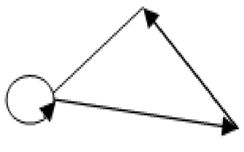
Анықтама: Төбелердің бір жұбына инцидентті доғалар еселі немесе параллель доғалар деп аталады

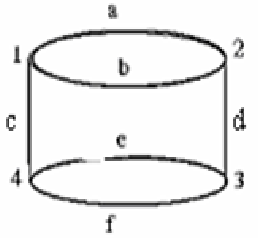
Анықтама: Еселі доғалары бар граф мультиграф деп аталады.

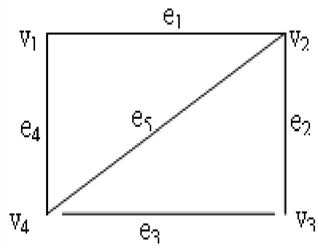
Анықтама: Шығатын және кіретін төбесі біреу болатын доға ілгек деп аталады.



e_1, e_2, e_3-инциденттi доғалар







<u>Анықтама</u>: Егер (a,b), (b,a) доғалары бір уақытта R қатынасына жатса, онда бұл доғалар туралы ақпаратты [a,b] = {(a,b), (b,a)} жиыны арқылы көрсетуге болады. [a,b] жиыны қабырға деп аталады.

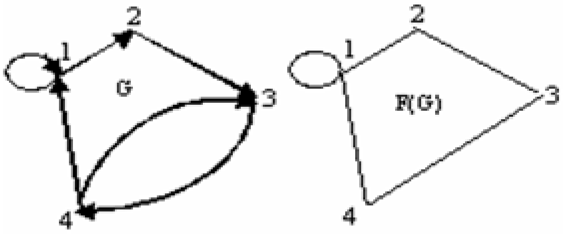
Мысалы,мына суреттегі графтың 4 төбесі, 5 қабырғасы бар.

Төбелері: v_1, v_2, v_3, v_4; Қабырғалары:e_1,e_2, e_3, e_4 e_5; Бұл графтағы v_1 мен v_2; v_2 мен v_3; v_3 пен v_4; v_4 пен v_5 іргелес төбелер, v_1, v_3-сыбайлас емес.

Сол сияқты: e_1,e_2; e_2,e_3; e_3,e_4; e_4,e_1; e_1,e_5; e_2,e_5; e_3,e_5; e_4,e_5;-қабырғалары сыбайлас.e_1,e_3; e_2,e_4;- сыбайлас емес қабырғалар.

Егер $G=\{M,R\}$ орграфындағы әр $(a,b)\in R$ доғасына, (b,a) жұбын қосса нәтижесінде берілген G графына сәйкес H-граф шығады, оны F(G) деп белгілейді.

<u>*Анықтама:*</u> Егер граф элементтерінің (төбелері мен қабырғалары) жиыны ақырлы болса, графта ақырлы деп, ал қабырғалар жиыны бос болса, бос граф деп аталады.



Тақырып 56. Графиктің шыңдары дәрежесі туралы теорема

$G=<M,R>$ графына a төбесін қосқаннан $<M\cup\{a\}, R>$ графы құралады.

Графқа доға қосу операциясының нәтижесінде $<M\cup\{(a,b)\}, R\cup\{(a,b)\}>$ графы құрылады.

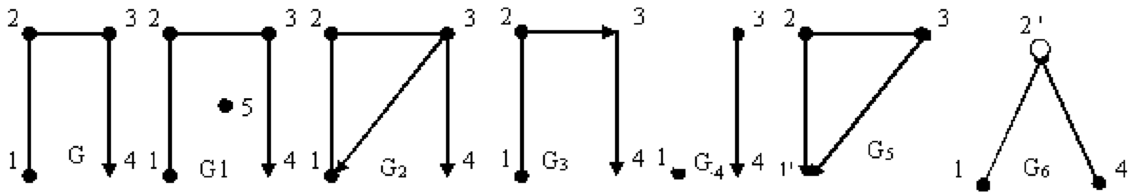
Графтан доға алу–R доғалар жиынынан (a,b) жұбы алынады. $<M,R\backslash\{(a,b)\}>$

Графтан төбе алу операциясының нәтижесінде. G графынан a төбесі оған инциденттi доғалармен бірге алынады деп айтады. $<M\backslash\{a\}, R\backslash\{(b,c)\mid b=a \text{ немесе } c=a\}>$

Графтың a,b төбелерін теңестіру деп графтан a,b төбелерін алып тастап мына тәртіппен төбе мен қабырға қосу: жаңа a^1 төбесі мен (a^1, c), егер $(a, c)\in R$ немесе $(b, c)\in R$ және (c, a^1) доғасын егер $(c, a)\in R$ немесе $(c, b)\in R$ болса:$<(M\backslash\{a,b\})\cup\{a^1\}, (R\backslash\{(c, d)\mid c=a$ немесе $d=a$, немесе $c=b$, немесе $d=b\})\cup\{(a^1,c)\mid(a, c)\in R$, немесе $(b, c)\in R\}\cup\{(c, a^1)\mid(c, a)R$, немесе $(c, b)\in R\})$.

Алынған граф G графынан a,b төбелерін теңестіргеннен алынды делінеді.

a,b төбелері доғамен қосылса, төбелерді теңестіру a,b доғасын созғаннан алынады дейді. Мысалдар: Берілген=<{1,2,3,4},{[1,2],[2,3],,(3,4)}> графынан суреттегі G_1-G_6 графтары қандай операциялармен алынды?



G графына 5 төбені қосқаннан G_1 графы алынды.

G графына (3,1)–доғасын қосқаннан G_2 графы алынды.

G графына (3,2) доғасы алынады G_3 графы алынды.

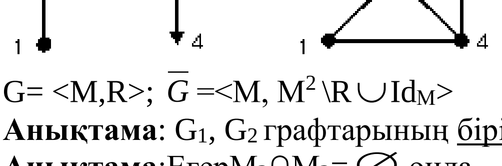
G графына 2 – төбені алғаннан G_4 графы алынды.

G графының (1,4) төбелерін теңестіргеннен G_5 графы алынды.

G графының (2,3) доғасын қысқаннан G_6 графы алынды.

$\overline{G}=<M, M^2\backslash R\cup Id_M>$ графы ілгексіз $G=<M,R>$ графының <u>толықтырушы</u> графы деп аталады.

Мысал: Айталық, $G_1=<M_1,R_1>$, $G_2=<M_2,R_2>$ графтары берілсін.



$G=<M,R>$; $\overline{G}=<M, M^2\backslash R\cup Id_M>$

Анықтама: G_1, G_2 графтарының <u>бірігуі</u> деп $G_1UG_2=<M_1UM_2,R_1UR_2>$ графын айтады.

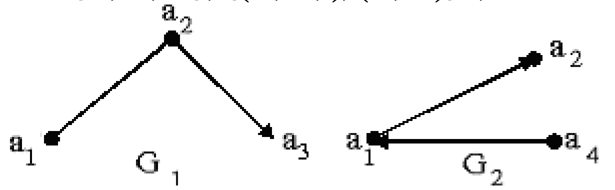
Анықтама:Егер$M_2\cap M_2=\varnothing$ онда G_1,G_2 графының қиылысуы деп, $G_1\cap G_2=<M_1\cap M_2,R_1\cap R_2>$ графын айтады.

Анықтама: G_1, G_2 графтарының сақиналы қосындысы деп $G_1 \oplus G_2 = <M_1 U M_2, R_1 \oplus R_2>$, мұндағы $R_1 \oplus R_2 = (R_1 \backslash R_2) U (R_2 \backslash R_1)$.

Мысалы G_1 және G_2 графтары берілсін.

$G_1 = < \{a_1, a_2, a_3\}, \{[a_1, a_2], (a_2, a_3)\} >$;

$G_2 = < \{a_1, a_2, a_4\}, \{(a_1, a_2,), (a_4, a_1)\} >$;



Табу керек: $G_1 U G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \oplus G_2$?

Шешуі: Анықтама бойынша:

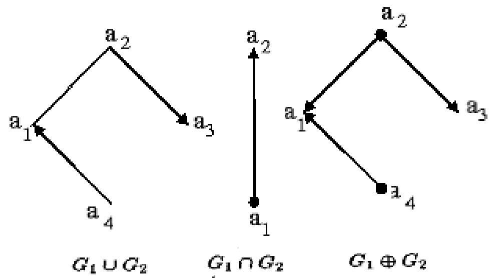
$G_1 U G_2 = <\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{[a_1, a_2], (a_2, a_3), (a_4, a_1)\}>$;

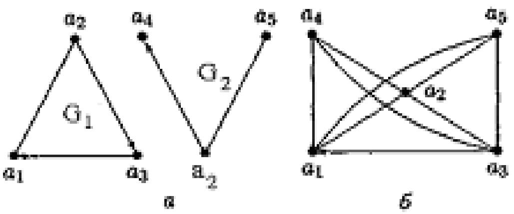
$G_1 \cap G_2 = < \{a_1, a_2\}, \{(a_1, a_2)\} >$.

$G_1 \oplus G_2 = <\{ a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{(a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_1)\} >$;

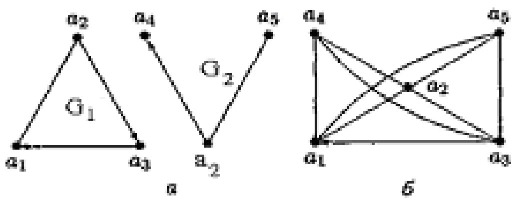
G_1, G_2 графтарының қосылуы деп

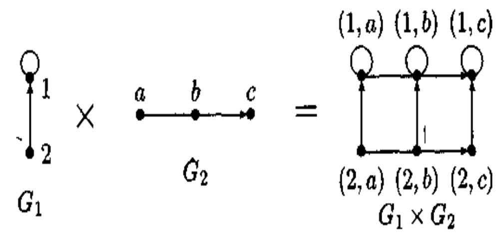
$G_1 + G_2 = \langle M_1 \cup M_2, R_1 \cup R_2 \cup \{[a,b] | a \in M_1, b \in M_2, a \neq b\} \rangle$.





Мына суреттің а пунктіндегі G_1, G_2 графтарының қосындысы б пунктте көрсетілген.

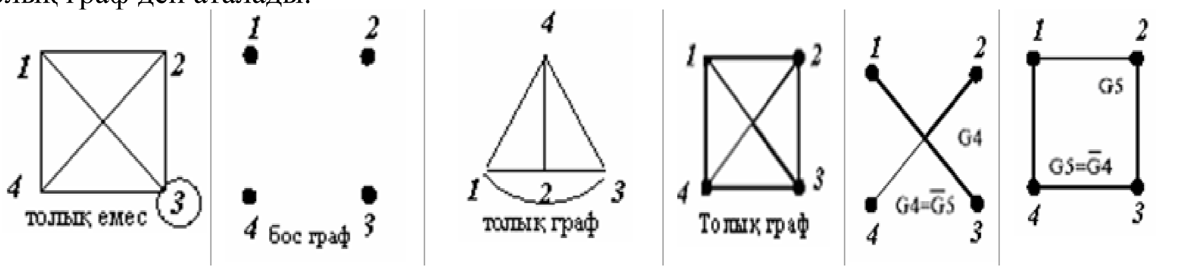




G_1, G_2 графтарының көбейтіндісі деп $G_1 x G_2 = <M_1 x M_2, R>$, мұндағы $((a_1,b_1), (a_2, b_2)) \in R$ тек сонда ғана, егер $a_1 = a_2$ және $(b_1,b_2) \in R_2$ немесе $b_1 = b_2$ және $(a_1,a_2) \in R_1$.

Тақырып 57. Толық граф, оның қасиеттері

Ілгексіз, әрі еселі қабырғалары жоқ және әрбір төбелер жұбы қабырғамен қосылған граф толық граф деп аталады.

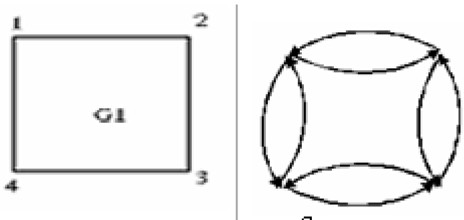


Анықтама: Берілген G графындағыдай төбелері және G графына қосқанда оны толық графқа айналдыра тындай ғана қабырғалары бар $\overline{G}$ графы G-ң толықтауыш графы деп аталады.

Анықтама: Бағытталмаған графтың әр қабырғасын қарама қарсы бағытталған доғалармен алмастырғаннан алынған граф берілген графқа сәйкес канонды граф деп аталады.

Анықтама: Еселі доғаларсыз бағытталған графты көбіне диграф деп атайды. G=<V,E> - V-бос емес (төбелерінің) жиын; $E \subseteq V\times V$;

Анықтама G н-графының v төбесіне инциденттi қабырғалар саны $\rho(v)$ $v \in V$ төбесінің локальді дәрежесі деп аталады. Н-графта барлық төбелердің локальды дәрежелерінің қосындысы графтың 2 еселенген қабырғалар санына тең, яғни жұп сан. Ілгек төбе дәрежесіне 2-ге тең үлес қосады:



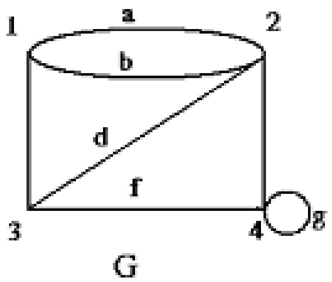
G1-те кононды граф.

$$\sum_{v\in G}\rho(v) = 2m$$

Анықтама Егер локальды дәреже жұп болса,төбе жұп деп,ал тақ болса төбе тақ төбе деп аталады. 0 дәрежелі төбе оқшауланған төбе деп аталады.

V= $\{1,2,3,4\}.\,G_1 : \rho(1) = 3, \rho(2) = 4, \rho(3) = 3, \rho(4) = 4,$

$\sum_{v\in G}\rho(v) = 14 = 2m$; Мұндағы, m =7–графтың қабырғаларының саны. Бағытталған графтың төбелері үшін 2 локальды дәреже анықталады. $\rho_1(v)$ - v төбесінен шығатын қабырғалар саны. $\rho_2(v)$ - v төбесіне кіретін қабырғалар саны. Бағытталған графта барлық төбелердің локальды дәрежелері $\rho_1(v)$, $\rho_2(v)$ осы графтың қабырғалар санына тең, демек олар өзара тең

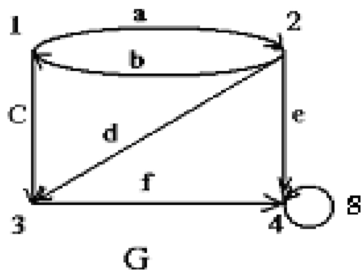


$\sum_{v\in G}\rho_1(v) = \sum_{v\in G}\rho_2(v) = m$; Мысалы:

$\rho_1(1) = 2, \rho_1(2) = 3, \rho_1(3) = 1, \rho_1(4) = 1;$

$\rho_2(1) = 1, \rho_2(2) = 1, \rho_2(3) = 2, \rho_2(4) = 3;$

$\sum_{v\in G}\rho_1(v) = \sum_{v\in G}\rho_2(v) = 7 = m$



G2

1-ші,2-ші типті дәрежелер қосындысы бірдей қабырғалар санына тең..Егер G[1] төбелері мен қабырғалары графының төбелері мен қабырғалары бірдей болса,яғни: $V_1=V_2$, $E_1=E_2$ болса, онда $G_1=G_2$.

Тақырып 58. Графикті орнату жолдары.

Графтардың берілуі дегеніміз оның төбелері мен қабырғаларынан тұратын жиындарды сипаттау болып табылады. Төбелер мен қабырғаларды жай ғана нөмірлеуге болады.

1. Төбелері: v_1, v_2,..., v_n; Қабырғалары: e_1, e_2, …. ,e_n

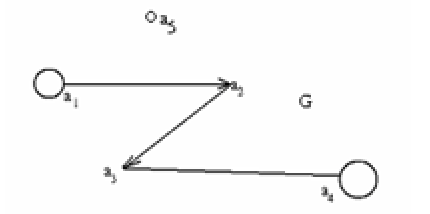
2. Граф құрылымы туралы ақпарат бинарлы қатынас матрицасы арқылы да беріледі. Мысалы, G=‹M,R› граф болсын. M төбелер жиыны M={a_1, a_2,…,a_n}. R граф төбелерінің арасындағы бинарлы қатынас болсын. G-графының сыбайлас матрицасы деп төмендегідей анықталған *n* ретті $A_G=\{A_{ij}\}$ матрицаны айтамыз.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер} \quad (a_i, a_j) \in R \\ 0, & \text{егер} \quad (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$$

н-графта a_i, a_j төбелері іргелес болады, егер A_{ij}=1 немесе A_{ji}=1, яғни н-графта A_{ij}= A_{ji}=1 . Егер G мультиграф болса оның іргелестік A_G матрицасының A_{ij} элементтері анықтама бойынша a_i төбесінен шығып a_j төбесіне кіретін доғалардың санына тең (i,j$\in$ {1,…,n}).

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Мысалы: суреттегі G-графының сыбайлас матрицасы



Егер A_G–н-граф болса, оның іргелестік матрицасы A_G-симметриялы, яғни $A_G^T = A_G$. Төбені өзімен қайта қосатын доға–ілгек деп аталады. Егер графта ілгек доғалар болмаса, онда іргелестік A_G матрицаның бас диагоналінде нөлдік элементтер тұрады.

3. Графының инциденттік матрица арқылы берілуі.

Анықтама: mxn мөлшерлі инциденттік матрица B_G деп төмендегі ережемен анықталатын матрицаны айтамыз. G-н-граф болса

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, \ \textit{егер} \ \ e_i \ \ \textit{қабырға} \ \ v_j \ \ \textit{түбесіне инцидентті} \ \ \textit{болса} \\ 0 - \textit{егер} \ \ \textit{керісінше} \ \ \textit{болса} \end{cases}$$

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & * & \\ & & 0 & & \\ & * & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

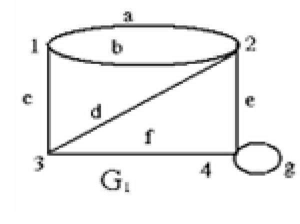
G орграф болса

$$B_{ij} = \begin{cases} -1, \ \textit{егер} \, v_j \ \textit{төбе} \ \ e_i \ \ \textit{аабыр ааб} \ \ \textit{басы} \ \ \textit{болса}; \\ 1, \ \textit{егер} \ \ v_j \ \ \textit{т} \ \ \textit{б} \ \ e_i \ \ \textit{аабыр ааб} \ \ \textit{со о} \ \ \textit{болса}; \\ \alpha \ \ (-1,1,0 \ \ \textit{бас а} \ \ \textit{кез} \ \ \textit{келген} \ \ \textit{сан}), \textit{егер} \ \ e_i - \textit{ілгек}, \\ \textit{ал} \ \ v_j - \textit{о} \ \ \textit{а} \ \ \ \textit{инцидентті} \ \ \textit{т} \ \ \textit{б} \ \ \textit{болса}; \\ 0 - \ \ \textit{аал а} \ \ \textit{жа аа аа}; \end{cases} \qquad \vdots$$

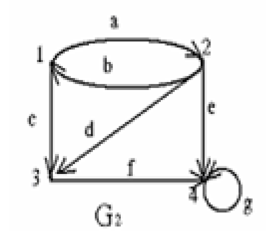
4. Графтың қабырғаларының тізімімен берілуі:

Граф екі бағанмен беріледі: біріншісінде барлық қабырғалар e_i, ал оң жақ бағанда оған инцидентті төбелер жазылады; н-граф үшін төбелердің жазылу реті еркін түрде, ал орграф үшін қабырғаның басталатын төбесі 1-ші тұрады.

1-мысал: суреттегі графты іргелес және инциденттік матрицалармен және қабырғалар тізімімен беру керек.



G_1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	0
3	0	0	1	1	0	1	0
4	0	0	0	0	1	1	1



G_2	a	b	c	d	e	f	g
1	-1	1	-1	0	0	0	0
2	1	-1	0	-1	-1	0	0
3	0	0	1	1	0	-1	0
4	0	0	0	0	1	1	2

G_1, G_2– графтары мен олардың инциденттік матрицалары

G_1	1	2	3	4
1	0	2	1	0
2	2	0	1	1
3	1	1	0	1
4	0	1	1	1

G_2	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	1

G_1 Қабырға	төбе
a	2 1
b	1 2
c	3 1
d	2 3
e	2 4
f	4 3
g	4 4

G_2 Қабырға	төбе
a	1 2
b	2 1
c	1 3
d	2 3
e	2 4
f	3 4
g	4 4

G_1, G_2 графтарының сыбайлас (іргелес) матрицалары және қабырғалары мен төбелерінің тізімімен берілуі. G_1-бағытталмаған граф болғандықтан төбелердің бағыты еркін түрде көрсетіледі

G графын оның әр төбесіне $\mathbf{v_i \in V(G)}$ сыбайлас төбелердің жиыны арқылы да өрнектеуге болады. Ол жиынтықты $\mathbf{v_i}$**.** Төбесінің аймағы деп атайды және O(vi) деп белгілейді. Сонымен

$O(v_i) = \{ v_j \mid [v_i, v_j] \in V(G)\}$.

G диграфын оның әр төбесіне $vi \in V(G)$ шығунемесе кіру аймақтарын көрсету арқылы да өрнектеуге болады: $O\text{-}(vi)=\{vj \mid (vi, vj)\in E(G)\}$,

$O\text{+}(vi)=\{vj \mid (vj,vi)\in E(G)\}$.

1. Қабырғаларының тізімі бойынша инциденттi матрица құру.

Тізімнің әр жолы сол нөмірмен алынған матрица жолына сәйкес. Н-граф үшін тізім жолында инциденттi матрица жолындағы 1-ге тең элементтердің (төбелердің) нөмірлері көрсетілген.

Орграф үшін бұл жолда бірінші болып матрицаның -1-ге тең элементінің нөмірі, екіншісі болып матрицаның 1-ге тең элементінің нөмірі көрсетіледі. Тізім жолындағы нөмірлер бірдей болған жағдайда, инциденттi матрицаның жолындағы аталған элементке 2 қойылады.

2. Іргелес матрица бойынша, қабырғалар тізімін құру.

i-жол мен j-баған қиылысуында орналасқан матрица элементіне әр қайсысында i,j нөмірлері жазылған қабырғалар тізімінің δ_{ij} жолы сәйкес келеді.(δ_{ij}=0 болса бір де бір жол жоқ). н-граф үшін бұл жолдар іргелес матрицаның тек жоғарғы оң жақ үшбұрышындағы элементтерге сәйкес болады,яғни j>i орындалатын δ_{ij} элементтер үшін, *ал* орграф үшін барлық δ_{ij} элементтерді қарастыру керек.

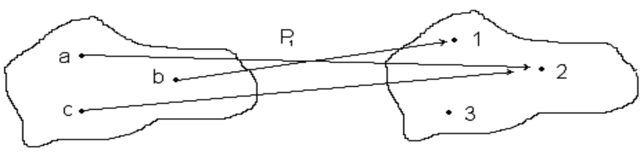
Тақырып 59. Бағыт. Желілік. Цикл. Графикалық байланыс

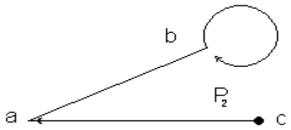
Графиктік түрде: Графиктік кескіндеудің бірнеше түрлері бар:

2.1. Координат өсьтеріне қатынастың элементтерін белгі леу арқылы. Алдыңғы мысалды графикалық түрде суреттегідей кескіндеуге болады.

2.2. А мен В жиындарының элементтерінің арасындағы Р қатынасын стрелкалар арқылы көрсетуге болады.

Мысалы,A={a,b,c}; B={1,2,3} жиындары берілсін. Олардың элементтерінің арасындағы P1={(a,2),(b,1),(c,2)} қатынасын төмендегі 6-суретпен кескіндеуге болады.

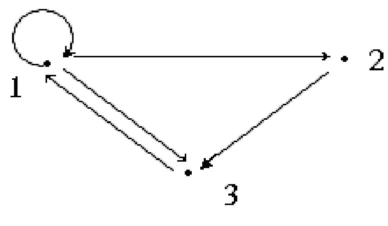




2.3. Граф арқылы да кескіндеуге болады. Мысалы, $P_2=\{(a,b),(b,b),(c,a)\}$ қатынасының граф түріндегі бейнесі 6-суреттегідей болады.

3. Бинарлы қатынастың матрица арқылы берілуі. $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ және $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ ақырлы жиындары және $P\subseteq A\text{x}B$ бинарлы қатынас берілсен. Р бинарлы қатынастың $[P]=(P_{ij})$ mxn мөлшерлі матрицасын төмендегі ережемен анықтаймыз:

$$P_{i\,j} = \begin{cases} 1, & \text{егер } (a_i,b_j)\in P \quad \text{егер бинарлы аатына бар болса} \\ 0, & \text{егер } (a_i,b_j)\notin P \text{ егер бинарлы аатына жо болса} \end{cases}$$



Алынған бұл матрица элементтер арасындағы байланыс туралы толық ақпарат береді және оны компьютерге өрнектеу мүмкіндігі бар. Мысалы, Суретте көрсетілгендей $P\subseteq A^2$ A={1,2,3} бинарлы қатынасының матрицасы

$$[P]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ P=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(3,1)\}$$

2-мысал. M={1,2,3,4,5,6}. Егер P < қатаң кіші болуды білдір се $P\subseteq M$ x M қатынасын тізім және матрица түрінде бейнелеу керек: P қатынасы M жиынының a< b болатын элементтер жұбынан тұрады. $P=\{ (a,b) \mid a,b\in M; a<b \}$. Олай болса, P қатынасын тізім және

матрицамен беруге болады: P={ (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6)} **;**

<u>Анықтама</u>. Кез-келген жиын үшін анықталған $Id_A=\{(x,x) \mid x\in A\}$ қатынасы тепе-теңдік қатынас немесе диагональ қатынас деп аталады, ал $U_A\rightleftharpoons A^2$ универсалды немесе толық қатынас деп аталады. Айталық, P – бинарлы қатынас болсын. $\delta\ _P\rightleftharpoons\{x \mid (x,y)\in P$ қандай да бір Y үшін$\}$ жиыны P қатынасының анықталу облысы деп, ал $\rho_P\rightleftharpoons\{y \mid (x,y)\in P$ қандай да бір X үшін$\}$ жиыны P қатынасының мәндер жиыны деп аталады. Мысалы, A = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} жиынының P = {(x, y) | x, y ∈ A, y x ке бөлінеді және x ≤3} қатынасы үшін P={(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,3),(3,6)) қатынасы мен x={3} үшін анықталу облысы δ_P={2,3}. Мәндер аймағы ρ_P={2,3,4,6,8};

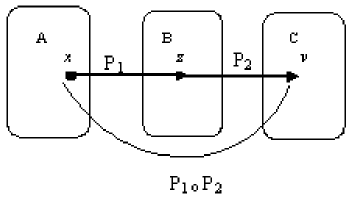
$$[P]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Бинарлы қатынастарға қолданылатын операциялар.

Бинарлы қатынастар $P\subseteq M_1xM_2$ ($P\subseteq M^2$, $M_1=M_2=M$) жиын болғандықтан оларға жиынға қолданылатын барлық амалдар орындалады. Олар:

1. Бірігу $P_1\cup P_2$; $P_1\cup P_2=\{(a,b) \mid (a,b) \in P_1$ немесе $(a,b) \in P_2\}$
2. Қиылысу $P_1\cap P_2$; $P_1\cap P_2=\{(a,b) \mid (a,b) \in P_1$ және $(a,b) \in P_2\}$
3. Айырым $P_1\backslash P_2$; $P_1\backslash P_2=\{(a,b) \mid (a,b) \in P_1$ және $(a,b) \notin P_2\}$
4. Толықтауыш $\overline{P}$; $\overline{P}$ =U\P, мұндағы $U=M_1\times M_2$ ($U=M^2$)
5. Кері қатынас P^{-1}; $P^{-1} = \{(a, b) \mid (b, a) \in P\}$.

$P^{-1}\rightleftharpoons\{(y,x) \mid (x,y)\in P\}$ жиыны P қатынасына кері қатынас деп аталады. Мысалы, P-жас болу болса, P^{-1} үлкен болу, P-баласы болу болса, P^{-1} әкесі болу. P (x)={y | (x,y)∈P қандай да бір x үшін} X жиынының P -ға қатысты образы (бейнесі) деп, ал $P^{-1}(x)$ – X жиынының P-ға қатысты прообразы деп аталады. Мысалы, A={2,3,4,5,6,7,8} жиыны берілсін.



P={(x,y) | x,y∈A,y x-ке бөлінеді және x≤3} бинарлы қатынасына кері қатынас P^{-1}={(2,2), (4,2),(6,2), (8,2),(3,3),(6,3)}; X-ң P-ға қатысты образы P(x)={3,6}; X-ң P-ға қатысты прообразы немесе P^{-1} (x)= {3}.6 Бинарлы қатынастың көбейтіндісі немесе P_1 мен P_2 композициясы $P_1\cdot P_2$.

Айталық A,B,C жиындары және P_1 ,P_2 қатынастары берілсін. $P_1 \subseteq AxB$ және $P_2 \subseteq BxC$ бинарлы қатынастарының көбейтіндісі немесе P_1 мен P_2 композициясы бар болады яғни $(a,b) \in P_1\circ P_2$ егер $(a,z)\in P_1$ және $(z,b)\in P_2$ болатындай $z\in B$ элемент табылса; $P_1\circ P_2=\{(a,b) \mid a\in A, b\in C$ және $(a,z)\in P_1$.

.Дербес жағдайда, егер P қатынасы M жиынында анықталған болса $P\subseteq M^2$, онда

$P\circ P=\{(a,b) \mid (a,c),(c,b)\in P\}$

Мысалы P-баласы болу болса, онда P○P-немересі болу.

Бинарлы қатынастардың қасиеттері

1. A жиынында берілген бинарлы қатынас болсын: $P\subseteq A^2$.Кез-келген $x\in A$ үшін x P x қатынасы бар болса, P қатынасы рефлексивті деп аталады. (бір жиын ішіндегі жұптар қатынасы мы салы бір қалада тұру - рефлексивті).

2. Егер x P x қатынасы A жиынның бір де бір элементі үшін орындалмаса P қатынасы антиреф лексивті (баласы болу қатынасы - антирефлексивті). Антирефлексивті матрицаның бас диагоналы тек нөлдерден тұрады.

3. Егер кез-келген $x,y\in A$ үшін $(x,y)\in P\rightarrow(y,x)\in P$ болса, яғни P^{-1} =P немесе$[P]^T=[P]$ болса, P қатынасы симметриялы деп аталады. Егер x A y болудан y A x болса (бір фирмада жұмыс жасайды), онда A симметриялы.

4. Егер (x,y)∈P және (y,x)∈P болғандығынан x=y болса, яғни $P\cap P^{-1} \subseteq Id_A$, онда P қатынасы антисимметриялы деп аталады,яғни x P y және y P x қатынастары әртүрлі x пен yтың ешқан дай жұбында бір уақытта орындалмаса (баласы болу, бастық болу - антисимметриялы), онда бұл қатынас антисимметриялы.

5. Егер $(x,y)\in P$ және $(y,z)\in P$ болғандығынан $(x,z)\in P$ болса, (яғни $P\cdot P\subseteq P$) онда P – транзитивті қатынас деп аталады,яғни x P y және y P z болудан x P z болса (жасырақ болу, інісі болу) P-транзитивті болады.

Ескерту: 1. Антисимметрия мен симметрия емес ұғымдары бірдей емес. Мысалы $A=\{1,2,3\}$ жиынындағы $P=\{(1,2),(2,3)(3,2)\}$ қатынасы симметриялы емес ($(1,2)\in P$, ал $(2,1)\notin P$) антисимметриялы да емес, себебі $(2,3)\in P$, $(3,2)\in P$ бірақ $2\neq 3$

2. Id_A – қатынасы бір уақытта симметриялы да, антисимметриялы да болады.

Бинарлы қатынастар матрицалдарының негізгі қасиеттері.

Егер $P,Q\subseteq AxB$, $[P]=(p_{ij})$, $[Q]=(q_{ij})$ болса, онда $[P\cup Q]=(p_{ij}+q_{ij})$ және $[P\cap Q]=(p_{ij}*q_{ij})$

мұндағы қосу $[P\cup Q]=[P]+[Q]$, $0+0\rightleftharpoons 0$, $1+1\rightleftharpoons 1+0\rightleftharpoons 0+1\rightleftharpoons 1$ ережесімен, ал $[P\cap Q]$ көбейту [P] мен [Q] сәйкес элементтерін тура көбейтуден алынады: $[P\cap Q]=[P]*[Q]$

Мысалы, $[P]=\begin{pmatrix}101\\011\end{pmatrix}$, $[Q]=\begin{pmatrix}011\\001\end{pmatrix}$ P,Q қатынастарының матрицасы болса, онда

$[P\cup Q]=[P]\cup[Q]=\begin{pmatrix}101\\011\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}011\\001\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}111\\011\end{pmatrix}$; $[P\cap Q]=[P]*[Q]=\begin{pmatrix}101\\011\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}011\\001\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}001\\001\end{pmatrix}$

Егер $P\subseteq AxB$, $Q=B\ x\ C$, онда $[P\cdot Q]=[P]\cdot[Q]$; Мұнда [P] және [Q] матрицаларын көбейту матрицаларды көбейтудің әдеттегі ережесімен, ал [P] мен [Q] алынған элементтердің көбейтіндісі мен қосындысы 1 пунктегі ережелермен жүргізіледі. Мысалы,

$[P]=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$; $[Q]=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}$; онда $[P\times Q]=\begin{pmatrix}010\\110\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}01\\10\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\11\end{pmatrix}$; P^{-1} кері қатынастың матрицасы P қатынасының транспонирленген матрицасы:$[P]^{-1}=[P]^T$

$P\subseteq Q$; $[P]=(p_{ij})$, $[Q]=(q_{ij})$ болса, онда $p_{ij}\leq q_{ij}$

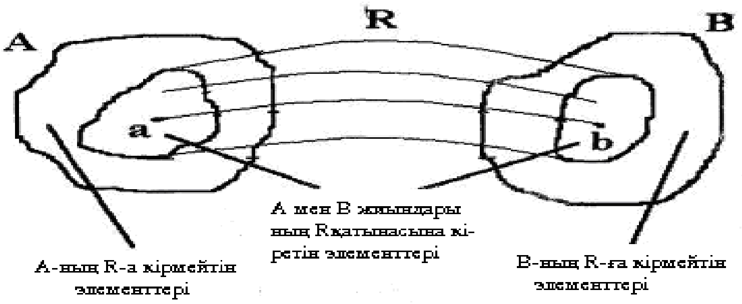
Тақырып 60. Бинарлық қарым-қатынастарды бағдарланған графиктер арқылы көрсету

Қатынастар–жиын немесе жиындар элементтерінің арасындағы өзара байланыстарды беру тәсілдері. Қатынастардың ішінен унарлы, бинарлы қатынастар көбірек белгілі. Унарлы (бір орынды) қатынастар бір жиын элементтерінің белгілі бір R қасиетінің болуын бейнелейді.M жиынының R қасиетімен (белгісімен) ерекшеленетін элементтерінің жиыны M-ң бір ішкі жиынын құрайды.(Мысалы, қобдишадағы шарлардың бір бөлігінің ақ болуы) Оларды унарлы қатынас деп атайды, R мен белгіленеді, яғни $a\in R$, $R\subseteq M$.

Бинарлы қатынастар.

Бинарлы қатынастар M жиынының бір жұп элементтерінің қандай да бір өзара қарым-қатынасын анықтауға қолданылады. Мысалы, M адамдар жиыны десек 2 адамның бір қалада тұруы, бір ұйымда қызмет істеуі, біреуінің екіншісінен жас болуы, әке мен бала болуы т. б.

Анықтама Екі орынды немесе бинарлы P қатынасы деп A, B жиындарының декарт (тура) көбейтіндісінің (a,b) жұптарынан тұратын ішкі жиынын айтады және $(a,b)\in P$, $P\subseteq A\times B$ болып белгіле неді. A–P қатынасының анықталу облысы, ал B мәндер облысы деп аталады.Айталық, $P\subseteq AxB$ қатынасы мына суреттегідей кескінделсін:



Бинарлы қатынас бір жиынның ішінде болса, мысалы М-жиынында болса Р қатынасы $(a,b)\in P$, $P\subseteq MxM=M^2$ немесе $(a,b)\in P$, aPb болып белгіленеді. Жалпы жағдайда n орынды R қатынасы деп n жиынның тура (декарт) көбейтіндісінің R ішкі жиынын айтады:

$R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$

Егер $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in R$, ал $(a_1\in M_1,\ldots,a_n\in M_n)$ онда $a_1,a_2,\ldots,a_n$ элементтері R қатынасында делінеді. Егер n орынды R қатынасы M жиынында болса, яғни $M_1=M_2=\ldots=M_n$, онда $R\subseteq M^n$.

Бинарлық қатынастардың берілу тәсілдері.

Бинарлық қатынастар жиын болғандықтан, жиынның берілу тәсілдерінің бәрімен беріле алады. Ақырлы жиындарда берілген қатынастар әдетте төмендегідей әдістермен беріледі:

1. Бинарлы қатынас орындалатын жұптардың тізімі арқылы. Мысалы, A={2,3,4,5,6,7,8} жиыны берілсін. $P=\{(x,y) \mid x,y\in A$, y x-ке бөлінеді және $x\leq 3\}$ бинарлы қатынасын P={ (2,2), (2,4), (2,6) ,(2,8) ,(3,3) ,(3,6) } түрінде жазуға болады.

19 бөлім. Шамамен сандар және олардың қателері

Тақырып 61. Нақты және шамамен сандар. Қателік көздері

Статистикалық нақты шамалар дегеніміз қоғамдық құбылыстар мен процестердің белгілі бір жердегі және уақыттағы мөлшерін , көлемін, аумағын , деңгейін сипаттайтын нақты сандық көрсеткіштер. Мысалы, топтағы студенттер саны, белгілі бір уақыт аралығындағы өндірілген өнім көлемі, т.б.

Нақты шамалар өздерінің сандық көрсеткіштерінің қолданылуына қарай *жеке және жалпы немесе жиынтық қосындысы* болып екіге бөлінеді. **Жеке нақты шамалар**жиынтықтың жеке бөліктерінің мөлшерін, көлемін өздеріне ғана тән сандық көрсеткіштер арқылы көрсетеді. Мысалы, бір жұмысшының айлық табысын, әр отбасындағы балалардың санын алуға болады. **Жалпы нақты шамалар** жеке нақты шамалардың қосындысынан алынады. Мысалы, халық санағы кезінде республика бойынша жалпы халықтың саны алынады, ол әрбір адамның жиынтығынан құралады.

Нақты шамалар қоғамдық құбылыстар мен процестердің табиғи негізін бейнелейді. Сол себепті зерттеліп отырған зерзаттың әлеуметтік-экономикалық жағдайына байланысты көрсетілетін өлшем бірліктері атаулы сандар болып келеді және оны *табиғи, еңбек және ақшалай өлшем бірліктерін* қолдану арқылы есептейді.
Табиғи өлшем бірлігі қарастырылатын заттың , нәрсенің өзіне тәлпы көлемін есептеу үшін пайдаланылады. Оны есептеу кезінде арнайы коэффициенттер жүйесі қолданылады.
Еңбек өлшем бірліктері өнім өндіруге және қызмет көрсетуге жұмсалынған жұмыс уақытының мөлшерін анықтауға арналған. Ол *адам-сағат, адам-күн, адам-жыл сияқты өлшем бірліктерін* қолдану арқылы өлшенеді.

Практикалық - тәжірибелік жұмыстар

Тәжірибелік жұмыс №1: Қателіктерді есептеу және талдау

Мақсаты: Қателіктер теориясымен таныстыру және оларды есептеу жолдарын үйрету

Тапсырма:

1 мысал: $X = \dfrac{m^2 n^3}{\sqrt{k}}$, *мұндағы* $m = 28{,}3(\pm 0{,}02)$, $n = 7{,}45(\pm 0{,}01)$, $k = 0{,}678(\pm 0{,}003)$; Есептеу және нәтижелердің қателіктерін анықтау керек.

2 мысал: $N = \dfrac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}$, *мұндағы* $n = 3{,}0567(\pm 0{,}0001)$, $m = 5{,}72(\pm 0{,}02)$; Есептеу және нәтижелердің қателіктерін анықтау керек.

3 мысал: $V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right)$, *мұндағы* $h = 11{,}8$, $R = 23{,}67$. Есептеу және нәтижелердің қателіктерін анықтау керек.

<u>**4-мысал:**</u> $a = 1.8921$; $\delta_a = 0.1 \cdot 10^{-2}$ берілген. Санның дұрыс цифрларын анықтау.

<u>**5-мысал:**</u> $25{,}1 \cdot 1{,}743$ көбейтіндісінің абсолютті және салыстырмалы қателіктерін анықтау.

<u>**6-мысал:**</u> X=2,1514 санын 3 мәнді цифрға дейін дөңгелектеп, абсолютті және салыстырмалы қателіктерін табу.

Тапсырманы орындауға әдістемелік нұсқаулар:

1 мысал: $X = \dfrac{m^2 n^3}{\sqrt{k}}$, *мұндағы* $m = 28{,}3(\pm 0{,}02)$, $n = 7{,}45(\pm 0{,}01)$, $k = 0{,}678(\pm 0{,}003)$; Есептеу және нәтижелердің қателіктерін анықтау керек.

Шешуі: $m^2 = 28{,}3 \cdot 28{,}3 = 800{,}9$; $n^3 = 7{,}45 \cdot 7{,}45 \cdot 7{,}45 = 413{,}5$; $\sqrt{k} = \sqrt{0{,}678} = 0{,}8234$;

$X = \dfrac{800{,}9 \cdot 413{,}5}{0{,}8234} = 402200 = 4{,}02 \cdot 10^5$. *Ары қарай,* $\delta_m = \dfrac{0{,}02}{28{,}3} = 0{,}00071$; $\delta_n = \dfrac{0{,}01}{7{,}45} = 0{,}00135$;

$\delta_k = \dfrac{0{,}003}{0{,}678} = 0{,}00443$, *бұдан*

$$\delta_X = 2\delta_m + 3\delta_n + 0{,}5\delta_k = 0{,}00142 + 0{,}00405 + 0{,}00222 = 0{,}00769 = 0{,}77\%;$$

$$\alpha_X = 4{,}02 \cdot 10^5 \cdot 0{,}0077 = 3{,}1 \cdot 10^3.$$

Жауабы: $X = 4{,}02 \cdot 10^5 (\pm 3{,}1 \cdot 10^3); \delta_X = 0{,}77\%$.

2 мысал: $N = \dfrac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}$, *мұндағы* $n = 3{,}0567(\pm 0{,}0001)$, $m = 5{,}72(\pm 0{,}02)$; Есептеу және нәтижелердің қателіктерін анықтау керек.

Шешуі: $n - 1 = 2{,}0567(\pm 0{,}0001)$;

$m + n = 5{,}72(\pm 0{,}02) + 3{,}0567(\pm 0{,}0001) = 8{,}777(\pm 0{,}0201)$;

$m + n = 5{,}72(\pm 0{,}02) - 3{,}0567(\pm 0{,}0001) = 2{,}663(\pm 0{,}0201)$;

$$N = \frac{2{,}0567 \cdot 8{,}777}{2{,}663^2} = \frac{18{,}052}{7{,}092} = 2{,}545 \approx 2{,}55;$$

$$\delta_N = \frac{0{,}0001}{2{,}0567} + \frac{0{,}0201}{8{,}777} + 2\frac{0{,}0201}{2{,}663} = 0{,}000049 + 0{,}00233 + 2 \cdot 0{,}00766 = 0{,}00238 + 0{,}01532 = 0{,}0177 = 1{,}77\%$$

$\alpha_N = 2{,}55 \cdot 0{,}0177 = 0{,}046$. **Жауабы**: $N \approx 2{,}55(\pm 0{,}046)$; $\delta_N = 1{,}77\%$.

3 мысал: $V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$, *мұндағы* $h=11{,}8$, $R=23{,}67$. Есептеу және нәтижелердің қателіктерін анықтау керек.

Шешуі:

$V=3{,}142\cdot 11{,}8^2(23{,}67-3{,}933)=3{,}142\cdot 11{,}8^2\cdot 19{,}737=3{,}142\cdot 139{,}2\cdot 19{,}737=437{,}37\cdot 19{,}737=8630\approx 8{,}63\cdot 10^3$

Жауабы: $V\approx 8{,}63\cdot 10^3$.

4- мысал: Берілген x санының дұрыс цифрлар санын анықтау керек болсын.

$x=0.3941;\quad \Delta x=0.25\cdot 10^{-2}$.

Анықтама бойынша: $\Delta x\le \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$ шарты орындалса, 3 цифрын дұрыс цифр деуге болады. Шындығында 0,0025<0,05 екен, яғни 3 - дұрыс цифр. 9 цифрын тексерсек: 0,0025<0,005, яғни 9 цифры да дұрыс. Ал 4 пен 1 цифрлары үшін 0,0025<0,0005 және 0,0025<0,00005 болғандықтан, олар күмәнді цифрлар болады. Қорыта айтқанда үтірден кейінгі 3 және 9 цифрларын жоғалтпау керек, яғни санды 0,39 деп дөңгелектеуге болады, 0,4 деп дөңгелектесек дөңгелектеу қателігі өсіп кетеді. Санның дұрыс цифрлар саны төртеу.

5-мысал: $a=1.8921;\quad \delta_a=0.1\cdot 10^{-2}$ берілген. Санның дұрыс цифрларын анықтау.

Анықтама бойынша: $\delta_a=\frac{\Delta a}{a}$, яғни $0.1\cdot 10^{-2}=\frac{\Delta a}{1.8921}$. Одан шығатыны: $\Delta a=0{,}0018921=0.18\cdot 10^{-2}$. Енді санның цифрларын тексереміз:

8 цифры - дұрыс, өйткені: $0{,}0018921<0.05$.

9 цифры – күмәнді, өйткені: $0{,}0018921<0.005$. Дәл осылай 2 және 1 цифрларының да күмәнді екенін анықтауға болады. Сонда а санының 2 цифры дұрыс.

6-мысал: X=2,1514 санын 3 мәнді цифрға дейін дөңгелектеп, абсолютті және салыстырмалы қателіктерін табу.

$x^*=2.15$ болады. Сонда $\Delta x^*=|2.1514-2.15|=0.0014=0.14\cdot 10^{-2}$,

$\delta x^*=\frac{0.0014}{2.15}=0.00065=0.65\cdot 10^{-3}$.

Бақылау сұрақтары:

1. Абсолютті қателік дегеніміз не?
2. Салыстырмалы қателік?
3. Көбейтіндінің қателігі қалай есептеледі?

Қосындының қателігі?

Тәжірибелік жұмыс №2: Бейсызықты бір теңдеудің сандық шешімін табу (аралықты екіге бөлу, итерация, Ньютон әдісі)

Мақсаты: Сызықтық емес теңдеулерді шешудің сандық әдістерімен танысу.

Тапсырма:

<u>1-мысал:</u> Берілген теңдеудің түбірін анықтау:

$e^x - 10 \cdot x = 0$ (-∞;+∞)

2 <u>2 - мысал</u>

$e^x - 10 \cdot x = 0$ (-∞;+∞) теңдеуінің түбірін қарапайым итерация, хорда және Ньютон әдісімен табу керек болсын.

Тапсырманы орындауға әдістемелік нұсқаулар:

<u>1-мысал:</u> Берілген теңдеудің түбірін анықтау:

$e^x - 10 \cdot x = 0$ (-∞;+∞) (2.1)

Теңдеудің түбірі жатқан аралықты аналитикалық тәсілмен табамыз: ол үшін функция туындысын тауып, оны нөлге теңестіру арқылы экстремумдарын анықтаймыз: $f'(x) = e^x - 10$, экстремумы: x_1=Ln10=2,3;

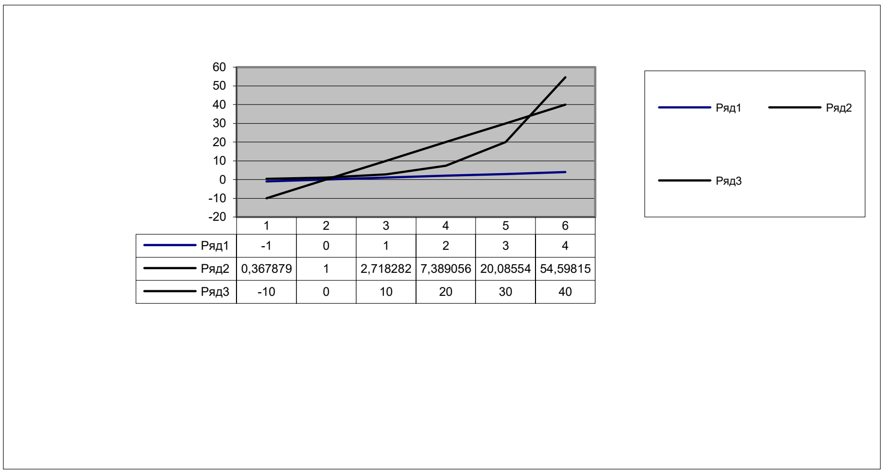
Экстремум нүктелеріндегі функция таңбасының кестесін толтырамыз.

Кесте 1. $f(x) = e^x - 10 \cdot x$ функциясының таңбасын анықтау.

Нүктелер	$-\infty$	2,3	$+\infty$
sign(f)	+	-	+

Функция таңбасының ауысуы ($-\infty$; 2,3] және [2,3; $+\infty$) аралығында байқалды. Яғни осы аралықта теңдеудің түбірі бар.

Енді графиктік әдісті қарастырайық. Ол үшін теңдеуді мына түрлерге жіктейміз, себебі функция күрделі, трансцендентті, бірден графигін құруға болмайды: $f_1 = e^x$; $f_2 = 10x$. Екі функцияның графигін саламыз, екеуінің қиылысқан нүктесі теңдеудің түбірі болып табылады (1-сурет). Қиылысу нүктелерінің аймақтарын анықтаймыз.



1-сурет. $f_1 = e^x$; $f_2 = 10x$ функцияларының графиктері.

Бірінші түбірі [0,1] аралығында, ал екінші түбірі [2,6] аралығында жататыны суретте көрініп тұр. Енді осы аралықтағы қай нүкте (2.1)-ші теңдеуді қанағаттандыратынын анықтаймыз.

Кесіндіні қақ бөлу әдісі

(2.1) - теңдеуді кесіндіні қақ бөлу әдісімен шешу алгаритмі келесі қадамнан тұрады.

1. (2.1)-ші теңдеудің түбірі жатқан аралығын анықтау және осы аралықта түбірдің жалғыздығын тексеру. Яғни x осі бойында бірдей қашықтықта жатқан нүктелердегі функцияның мәндерін есептеміз, және егер екі шеткі нүктеде немесе екі көрші нүктеде функция мәндерінің таңбалары әр түрлі болса, онда сол аралықта түбір бар деп есептеу
2. Осы аралықты қаққа бөлу және ол нүктенің мәнін
   $X_{орт}=(X_{n+1}+X_n)\backslash 2.$ (2.2)
   формуласымен анықтау.
3. $X_{n+1}-X_n<e$ шарты арқылы қарастырылып отырған аралықтан шығып кетпеуді бақылаймыз.
4. X_{OPT} нүктесіндегі функция мәнін $F(X_{OPT})$ есептеу.
5. Егер оның таңбасы $F(X_n)$ функциясының таңбасымен бірдей болса, X_n нүктесінің орнына X_{OPT} нүктесін қарастырамыз.
6. Ал егер $F(X_{OPT})$ функциясының таңбасы $F(X_{n+1})$ функциясының таңбасымен бірдей болса, X_{n+1} нүктесінің орнына X_{OPT} нүктесін қарастырамыз.
7. Шыққан аралықтар $[X_n,, X_{орт}]$ U $[X_{орт}, X_{n+1}]$ белгіленеді.және алдыңғы шарттарға байланысты екі аралықтың біреуін тағы қаққа бөлу арқылы ізделінді нүктеге біртіндеп жақындаймыз. Яғни мына шарттар тексеріледі: $F(X_{n+1})*F(X_{орт})<0$ шарты орындалса $[X_{орт,}X_{n+1}]$ аралығы қаққа бөлінеді де шыққан нүкте мәні, $X_{OPT2}=X_{OPT}+X_{n+1}/2$ формуласымен есептеледі. $F(X_n)*F(X_{OPT})<0$ шарты орындалса $[X_n, X_{орт}]$ аралығы қаққа бөлініп, табылған нүкте $X_{OPT2}=X_{OPT}+X_n/2$ формуласымен есептеледі.
8. Осы процесті іздеп отырған x нүктесіне жеткенге дейін жалғастырып, X_{OPT}, X_{OPT2}, X_{OPT3}, …, X_{OPTN} тізбегін құрамыз. Мына шарт орындалатын уақытта $X_{OPTN}-X_{OPTN-1}<E$ іздеу процесін тоқтатамыз да X_{OPTN} нүктесін (2.1)-ші теңдеуді қанағаттандыратын x дәл түбірге жуық мән деп қабылдаймыз.

3 <u>2 - мысал</u>

$e^x-10\cdot x=0$ (-∞;+∞) теңдеуінің түбірін қарапайым итерация әдісімен табу керек болсын. Теңдеуді итерациялық түрге келтіреміз:
$\varphi(x)=0.1e^x$ Ал $\varphi'(x)=0.1e^x$, $\varphi'(x)>0$ және барлық x нүктелері үшін $|\varphi'(x)|=|0{,}1e^x|\le 0{,}1<1$. Яғни q=0,1 деп алып, бастапқы жуықтауды $x_0=0$ десек $|x_k-x_{k-1}|<e$ шарты орындалғанша итерациялық процесті құрамыз: $x_0=0$: $x_1=0{,}1e^0=0{,}1$; $x_2=0{,}1e^{0,1}=0{,}01$, т.с.с. Түбір мәні $x_6=0{,}111833$, итерация саны 5-ке тең.

Хорда әдісі

Бұл әдіс кесіндіні қаққа бөлу әдісіне қарағанда шешімге тез жинақталады.

Алгоритмі:

1. x_n, x_{n+1} аралығында f (x) және $f(x_{n+1})$ функцияларының таңбасы бір біріне қарама-қарсы және түбірі бар болсын.
2. Осы екі шеткі нүктеден хорда жүргізіп, хорданың x осімен қиылысқан нүктесін мына формуламен анықтаймыз.
   $$x^*=\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n}(x-x_n)+f(x_n) \qquad (2.4)$$
3. x^* нүктесіндегі функция мәнін $F(x^*)$-ны есептеу. Оның таңбасын екі шеткі нүктедегі функцияның таңбасымен салыстырылады. Егер $f(x_n)$ және $f(x^*)$ функциясының таңбасы бірдей болса, онда хорданы x_{n+1} және x^* нүктесі арқылы жүргізіледі. Оның мәнін (2.4) формуламен табады. Егер $f(x_{n+1})$ мен $f(x^*)$ функцияның таңбалары бірдей болса, онда хорданы x_n және x^* нүктесі арқылы жүргізіледі. Шыққан нүктенің мәні (2.4) формуламен есептелінеді.

4. x^* нүктедегі мәнін есептеп, мәні нөлге жуық болса $|x_k - x_{k-1}| < e$, онда x^* нүктесі (2.1) теңдеудің түбірі деп аталады. Егер нөлге жуық болмаса, онда процесс жалғасады.

Алдындағы мысал үшін программасы келесідей болады:

Ньютон әдісі

Алдыңғы әдістерге қарағанда бастапқы жуықтау дұрыс таңдалынып алынса Ньютон әдісі тез жинақталады. Бұл әдіске қатысты теореманы келтіре кетейік:

Теорема 1.3.: f(x) функциясы [a,b] аралығында анықталған және екі ретті туындысы бар, осы аралықта түбір жатыр f(a)*f(b)<0, туындылардың таңбалары осы аралықта тұрақты болса $f(x)*f'(x)>0$, онда $f(x_0)*f''(x_0)>0$ теңсіздігін қанағаттандыратын $x_0 \in [a,b]$ бастапқы жуықтаудан бастап (2.1)-ші теңдеуді қанағаттандыратын [a,b]-да жататын жалғыз шешімге жинақталатын $x_{n+1} = \frac{x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$ n = 0,1,2,... итерациялық тізбек құруға болады.

Ньютон әдісінің геометриялық мағынасы: координаталары $(x_n;f(x_n))$, болатын нүктеден қисыққа жанама жүргізсек, оның ох өсімен қиылысу нүктесі теңдеудің түбіріне x_{n+1} – кезекті жуықтау болып табылады.

Түбірге n-ші жуықтаудың қателігін бағалау үшін келесі теңсіздіктің орындалуын қадағалау керек: $|\xi - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1}|x_n - x_{n-1}|^2$. Мұндағы M_2 – функцияның екінші ретті туындысының аралықтағы максимумы, m_1- минимумы. Егер, $|x_n - x_{n-1}| < e$ болса, онда $|\xi - x_n| \le \frac{M_2 \cdot e^2}{2m_1}$ болады, яғни түбірге дұрыс жуықталынса, әр итерациядан кейін кезекті жуықтаудың ондық таңба саны екіге артады да процесс тез жинақталады. Егер түбірді берілген е дәлдікпен табу керек болса, итерациялық процесті $|x_n - x_{n-1}| < e_0 = \sqrt{\frac{2m_1 e}{M_2}}$ шарты орындалғанша жалғастырамыз.

Бұл біртіндеп жуықтау әдісі деп аталады. Әдістің жинақталу жылдамдығы x_0 бастапқы нүктені дұрыс таңдауға байланысты. Егер итерация процесінде функцияның туындысы нөлге тең болса, қисыққа жүргізілген жанама x осіне параллель болса, онда бұл әдісті қолдану қиындайды. Сол сияқты функцияның екінші ретті туындысының мәні шексіз үлкен болса және функцияның өзі бірінші ретті туындысы нөлге тең болса, онда шыққан түбірлер еселі болып, жинақталмауы мүмкін. Бұл әдісті қолдану үшін $f(x)$ функциясы үзіліссіз және дифференциалданған болуы керек.

x_0 бастапқы жуықтауды таңдалынған уақытта құрылатын тізбек монотонды кемімелі болуы керек.

$$|f(x_{n+1})| \le |f(x_n)|$$

Алгоритмі:

1. Қисықтың бойынан қандайда бір x_0 нүктесін таңдап, осы нүкте арқылы қисыққа жанама жүргізіледі.
2. Жанама x осін қиған кезде табылған нүктенің мәні мына формуламен есептелінеді.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \ne 0 \qquad (2.5)$$

Табылған нүктедегі функцияның мәні нөлге өте жуық болса, онда сол нүкте (2.1) теңдеудің түбірі, болмаса процесс жалғасады.

Егер түбірлер еселі болса, ол еселікті P деп белгілейік.

.

$$x_{n+1} = x_n - \text{P}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ ,\quad f'(x_n) \neq 0 \qquad (2.6)$$

Бақылау сұрақтары:

1. Сызықтық емес теңдеулердің неше түрі бар?
2. Алгебралық теңдеулер дегеніміз қандай теңдеулер?
3. Сызықтық емес теідеулерді шешудің неше сандық тәсілі бар?
4. Бір өлшемді сызықты емес теңдеуді шешудің қандай тәсілдерін білесіз?

Тәжірибелік жұмыс №3: Векторлар мен матрицалардың нормаларын есептеу және олардың қиюласуын теориялық және сандық шешу

Мақсаты: 3D StudioMax программасында жұмыс жасау

Тапсырма:

Берілген сызықты емес теңдеулер жүйелерінің түбірлерін Ньютон, Зейдель, қарапайым итерация әдістерімен анықтау.

№	Жүйелер	Қосымша шарт
1	$\begin{cases} 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \\ x + 3\lg x - y^2 = 0 \end{cases}$	
2	$\begin{cases} 2x^2 - xy - -y^2 + 2x - 2y + 6 = 0 \\ y - x - 1 = 0 \end{cases}$	Y=0, y=x, x=0.5 түзулерімен шектелген облыстағы түбірлерін табу.
3	$\begin{cases} \alpha x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ xy^3 - y - 4 = 0 \end{cases}$	$\alpha = 1 + 0.5 \cdot k$ (k = 0,10,2,...) Y=0, y=x, x=0.5 түзулерімен шектелген облыстағы түбірлерін табу.
4	$\begin{cases} x^2y^2 - 3x^3 - 6y^3 + 8 = 0 \\ x^4 - 9y + 2 = 0 \end{cases}$	Y=0, y=x, x=0.5 түзулерімен шектелген облыстағы түбірлерін табу.
5	$\begin{cases} \sin x - y = 1.32 \\ \cos y - x = -0.85 \end{cases}$	Y=0, y=x, x=0.5 түзулерімен шектелген облыстағы түбірлерін табу.
6	$\begin{cases} tg(xy + k) = x^2 \\ \alpha x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$	x>0, y>0, $\alpha = 0.5 + 0.1 \cdot m$, k=0.1*m, m=0,1,2,3,4.
7	$\begin{cases} e^{xy} = x^2 - y + \alpha \\ (x + 0{,}5)^2 + y^2 = k \end{cases}$	x>0, y>0, $\alpha = 1 + 0.1m$, k=0.6+0.1*m, m=0,1,2,3,4.

Тапсырманы орындауға әдістемелік нұсқаулар:

Екі теңдеуден тұратын екі белгісізді сызықты емес теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0; \\ G(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Бұл есептің мақсаты - екі теңдеудің графигінің қиылысу нүктелерін анықтау.

Ньютон әдісі

Екі теңдеудің графигін сызып екеуінің қиылысу нүктелері жатқан облысты белгілейміз де осы облыстан жуықтап бастапқы жуықтауларды (x_0, y_0) таңдап аламыз ([3] қараңыз). Келесі жуықтауларды мына формулалармен есептейміз:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} = x_n - \frac{\Delta x^{(n)}}{J(x_n, y_n)};$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix} = y_n - \frac{\Delta y^{(n)}}{J(x_n, y_n)};$$

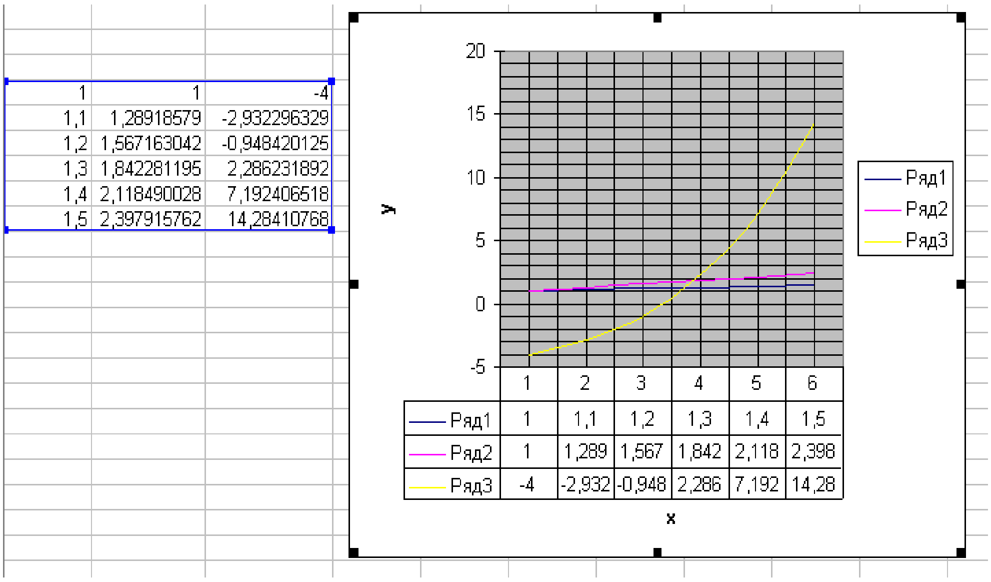
Мұндағы $J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} \neq 0$ якобиан деп аталады.

Бұл әдіс бастапқы жуықтаулар түбірге жақын алынған уақытта тиімді.

Мысалы:

$$\begin{cases} F(x,y) = 2x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ G(x,y) = xy^3 - y - 4 = 0 \end{cases}$$

жүйесі берілген. Теңдеулердің графигін сызу (2-суретте.) арқылы бастапқы жуықтауларды табамыз



2-сурет. $2x^3 - y^2 - 1$ және $xy^3 - y - 4$ функцияларының графиктері.

2-суреттен көріп отырғанымыздай, x_0=1.2; y_0=1.7 деп аламыз.

Якобианды есептейміз:

$$J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} F'_x = 6x_n{}^2 & F'_y = -2y_n \\ G'_x = y_n{}^3 & G'_y = 3x_n y_n{}^2 - 1 \end{vmatrix}; \text{ n=0,1,2,..}$$

$$J(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 6 \cdot 1.2^2 & -2 \cdot 1.7 \\ 1.7^3 & 3 \cdot 1.2 \cdot 1.7^2 - 1 \end{vmatrix} = 97.910$$

Ньютон формуласына қойсақ:

$$x_1 = 1.2 - \frac{1}{97.910} \begin{vmatrix} -0.434 & -3.40 \\ 0.1956 & 9.40 \end{vmatrix} = 1.2349$$

$$y_1 = 1.7 - \frac{1}{97.910} \begin{vmatrix} 8.64 & -0.434 \\ 4.91 & 0.1956 \end{vmatrix} = 1.6610$$

осылайша біртіндеп (x_2,y_2), (x_3,y_3), ... жұптарының мәндерін F және G функцияларының мәні нөлге жуықтағанша есептейміз.

Қарапайым итерация әдісі

(2.7)-ші жүйе берілсін. Бұл әдісті қолданбас бұрын жүйені итерациялық түрге келтіріп алады:
$$\begin{cases} x = f(x, y) \\ y = g(x, y) \end{cases} \qquad (2.8)$$

Теңдеулердің графиктерін құру арқылы бастапқы жуықтауларды беріп, келесі жуықтауларды мына формуламен есептейді:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases} \text{ n=0,1,2,...} \qquad (2.9)$$

Бұл әдістің жинақтылығын теореманың шарттарымен тексеру керек.

Теорема 1.4: Әлдебір тұйық $R(a \le x \le A,\ \ b \le y \le B)$ облыста (2.7)-ші жүйенің жалғыз шешімдері бар болсын: $x = \xi, \quad y = \eta$. Егер:

1) $f(x, y)$ және $g(x, y)$ функциялары $R(a \le x \le A,\ \ b \le y \le B)$ облысында анықталған және үзіліссіз болса,

2) бастапқы және келесі жуықтаулардың барлығы осы облыста жатса,

3) осы облыста мына теңсіздіктер орындалса:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \le q_1 < 1$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \le q_2 < 1 \qquad (2.10)$$

онда (2.8)-ші итерациялық процесс өзінің жалғыз $x = \xi, \quad y = \eta$ шешіміне жинақталады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$.

Қателігін бағалау:

$$|\xi - x_n| + |\eta - y_n| \le \frac{M}{1-M}(|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|).$$ M=max(q1;q2).

Кей жағдайда (2.8)-ші итерациялық процестің орнына Зейдель процесін қолдануға болады:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_{n+1}, y_n) \end{cases} \quad n=0,1,2,... \qquad (2.11)$$

Жүйені итерациялық түрге келтіру

(2.7)-ші жүйені (2.8)-ші итерациялық түрге келтіру үшін келесі тәсілдерді қолданған дұрыс.

$$\begin{cases} f(x, y) = x + \alpha F(x, y) + \beta G(x, y) \\ g(x, y) = y + F(x, y) + \delta G(x, y) \end{cases} \quad , \alpha\delta \ne \beta\gamma \text{ болсын.} \qquad (2.12)$$

Коэффициенттерді мына жүйеден табамыз:

$$1 + \alpha \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} + \beta \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$$

$$\alpha \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} + \beta \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

$$\gamma \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} + \delta \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \qquad (2.13)$$

$$1 + \gamma \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} + \delta \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

Параметрлерді осылай таңдап алу арқылы (2.10)-ші шарттың орындалуын талап етуге болады.

: Берілген жүйе үшін итерациялық функцияларды таңдау.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$$

$x_0=0.8$, $y_0=0.55$

Шешімді мына түрде іздейміз:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,y) &= x+\alpha(x^2+y^2-1)+\beta(x^3-y)\\ \varphi_2(x,y) &= y+\gamma(x^2+y^2-1)+\delta(x^3-y)\end{aligned} \qquad (2.14)$$

Коэффициенттерді анықтау үшін (2.13)-жүйе құруымыз керек, ол үшін дербес туындылардағы мәндерді есептейміз:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}=1.6\\ &\frac{\partial G(x_0,y_0)}{\partial x}=1.92\\ &\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}=1.1\\ &\frac{\partial G(x_0,y_0)}{\partial y}=-1.\end{aligned} \qquad (2.15)$$

(2.15)-ті (2.13)-ке қойсақ:

$$\begin{cases}1+1.6\alpha+1.92\beta=0\\ 1.1\alpha-\beta=0\\ 1.6\gamma+1.92\delta=0\\ 1+1.1\gamma-\delta=0\end{cases} \qquad (2.16)$$

(2.16)-ны шешеміз:

$\alpha=\dfrac{\beta}{1.1}$, $\beta=-0.3$, $\gamma=-0.5$, $\delta=0.4$. Сонда $\alpha=-0.3$.

Бұл мәндерді (2.14)-ші жүйеге қойсақ:

$$\varphi_1(x,y)=x+0.3(x^2+y^2-1)-0.3(x^3-y)$$

$$\varphi_2(x,y)=y-0.5(x^2+y^2-1)+0.4(x^3-y)$$

Есепті әрі қарай шешу үшін (2.9)-ші немесе (2.11)-ші итерациялық процесті құру керек.

Бақылау сұрақтары:

1. Итерацияның қарапайым әдісі қалай жүзеге асады?
2. Жүйе итерациялық түрге қалай келтіріледі?
3. Теңдеулер жүйесін шешуде Ньютон әдісі қалай жүзеге асады?
4. Сызықтық емес теңдеулер жүйесінің жазылуын көрсетіңіз?

Тәжірибелік жұмыс №4: Гаустың белгісізді біртіндеп жою әдісімен теңдеулер жиының сандық шешімін табу

Мақсаты: *Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің сандық әдістерімен танысу және есептер шығару.*

Тапсырма:

Гаусс әдісін қолданып төмендегі жүйелерді шешу.

№1

$$\begin{cases} 4.4x_1 - 2.5x_2 + 19.2x_3 - 10.8x_4 = 4.3 \\ 5.5x_1 - 9.3x_2 - 14.2x_3 + 13.2x_4 = 6.8 \\ 7.1x_1 - 11.5x_2 + 5.3x_3 - 6.7x_4 = -1.8 \\ 14.2x_1 + 23.4x_2 - 8.8x_3 + 5.3x_4 = 7.2 \end{cases}$$

№2

$$\begin{cases} 8.2x_1 - 3.2x_2 + 14.2x_3 + 14.8x_4 = -8.4 \\ 5.6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6.4x_4 = 4.5 \\ 5.7x_1 + 3.6x_2 - 12.4x_3 - 2.3x_4 = 3.3 \\ 6.8x_1 + 13.2x_2 - 6.3x_3 - 8.7x_4 = 14.3 \end{cases}$$

№3

$$\begin{cases} 5.7x_1 - 7.8x_2 - 5.6x_3 - 8.3x_4 = 2.7 \\ 6.6x_1 + 13.1x_2 - 6.3x_3 + 4.3x_4 = -5.5 \\ 14.7x_1 - 2.8x_2 + 5.6x_3 - 12.1x_4 = 8.6 \\ 8.5x_1 + 12.7x_2 - 23.7x_3 + 5.7x_4 = 14.7 \end{cases}$$

№4

$$\begin{cases} 3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 - 15.5x_4 = 28 \\ 8.3x_1 - 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 = -4.7 \\ 6.4x_1 - 8.5x_2 - 4.3x_3 + 8.8x_4 = 7.7 \\ 17.1x_1 - 8.3x_2 + 14.4x_3 - 7.2x_4 = 13.5 \end{cases}$$

№5

$$\begin{cases} 15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 = -2.4 \\ 8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 = 5.6 \\ 6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 = 7.7 \\ 14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 = 23.4 \end{cases}$$

№6

$$\begin{cases} 4.3x_1 - 12.1x_2 + 23.2x_3 - 14.1x_4 = 15.5 \\ 2.4x_1 - 4.4x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 = 2.5 \\ 5.4x_1 + 8.3x_2 - 7.4x_3 - 12.7x_4 = 8.6 \\ 6.3x_1 - 7.6x_2 + 1.34x_3 + 3.7x_4 = 12.1 \end{cases}$$

№ 7

$$\begin{cases} 14.4x_1 - 5.3x_2 + 14.3x_3 - 12.7x_4 = -14.4 \\ 23.4x_1 - 14.2x_2 - 5.4x_3 + 2.1x_4 = 6.6 \\ 6.3x_1 - 13.2x_2 - 6.5x_3 + 14.3x_4 = 9.4 \\ 5.6x_1 + 8.8x_2 - 6.7x_3 - 23.8x_4 = 7.3 \end{cases}$$

№8

$$\begin{cases} 1.7x_1 + 10x_2 - 1.3x_3 + 2.1x_4 = 3.1 \\ 3.1x_1 + 1.7x_2 - 2.1x_3 + 5.4x_4 = 2.1 \\ 3.3x_1 - 7.7x_2 + 4.4x_3 - 5.1x_4 = 1.9 \\ 10x_1 - 20.1x_2 + 20.4x_3 + 1.7x_4 = 1.8 \end{cases}$$

№ 9

№10

$$\begin{cases}1.7x_1 - 1.8x_2 + 1.9x_3 - 57.4x_4 = 10 \\ 1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.5x_3 - 1.7x_4 = 19 \\ 1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 = 20 \\ 7.1x_1 - 1.3x_2 - 4.1x_3 + 5.2x_4 = 10\end{cases} \qquad \begin{cases}6.1x_1 + 6.2x_2 - 6.3x_3 + 6.4x_4 = 6.5 \\ 1.1x_1 - 1.5x_2 + 2.2x_3 - 3.8x_4 = 4.2 \\ 5.1x_1 - 5x_2 + 4.9x_3 - 4.8x_4 = 4.7 \\ 1.8x_1 + 1.9x_2 + 2x_3 - 2.1x_4 = 2.2\end{cases}$$

Тапсырманы орындауға әдістемелік нұсқаулар:

1. **<u>Гаусс әдісі.</u>**

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n\end{cases} \qquad (3.3)$$

(3.3) - квадрат матрицалы жүйе берілсін. Жүйенің матрицасы ерекше емес немесе айқындалмаған болсын. Гаусс әдісін практикада белгісіздерді біртіндеп жою әдісі деп те атайды.

Әдістің негізгі идеясы немесе мағынасы ([12],[13] қараңыз): берілген жүйенің матрицасын үшбұрышты түрге келтіру, бұл – тура жол деп аталады, сосын үшбұрышты матрицаны қолданып құрған жаңа жүйеден белгісіздерді біртіндеп табу, бұл – кері жол деп аталады. Сонда Гаусс әдісі 2 этаптан тұрады:

1. тура жол – матрицаны үшбұрышты түрге келтіру.
2. кері жол – белгісіздерді ең соңғысынан бастап кері қарай табу.

Бұл әдіс тура тәсілге жатады. Яғни белгісіздердің мәнін бастапқы жүйеге қойғанда теңдіктің оң жағындағы мәндер мен сол жағындағы мәндер бір біріне тең болады.

Матрицаны үшбұрышты түрге келтіру әр түрлі әдіспен орындалады, қолданылатын әдіс теңдеулердің коэффициенттеріне байланысты.

1. Тура жол:

$a_{11} \neq 0$ басшы элементі нөлден өзгеше деп есептеп (3.3)- жүйенің бірінші теңдеуінің коэффициенттерін басшы элементке бөлу арқылы келесі теңдеуді аламыз:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + ... + b_{1n}x_n = b_{1n+1} \qquad (3.4.)$$

мұндағы $b_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j = 2,3,...,n+1$ (3.5)

(3.4) - теңдеуді қолданып (3.3) - жүйенің 2-ші теңдеуінен, 3-ші теңдеуінен және n-ші теңдеуінен x_1 белгісізін жоюға болады. Ол үшін (3.4)-ші теңдеуді a_{21}, a_{31}, ..., a_{n1} коэффициенттеріне көбейтіп шыққан нәтижелерді сәйкесінше 2-ші теңдеуден, 3-ші теңдеуден, т.с.с. n-ші теңдеуден азайтып a_{ij}^1 деп белгілейміз:

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - a_{i1} \cdot b_{1j}, \qquad \mathrm{i} = 2,3,..,\mathrm{n}; \; \mathrm{j} = 2,3,...,\mathrm{n}+1 \qquad (3.6)$$

Сонда келесідей жүйе аламыз:

$$\begin{cases} a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + a_{24}^1 x_4 + ... + a_{2n}^1 x_n = a_{2n+1}^1 \\ a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 + a_{34}^1 x_4 + ... + a_{3n}^1 x_n = a_{3n+1}^1 \\ a_{42}^1 x_2 + a_{43}^1 x_3 + a_{44}^1 x_4 + ... + a_{4n}^1 x_n = a_{4n+1}^1 \\ ... \\ a_{n2}^1 x_2 + a_{n3}^1 x_3 + a_{n4}^1 x_4 + ... + a_{nn}^1 x_n = a_{nn+1}^1 \end{cases} \qquad (3.7)$$

Алынған (3.7) - жүйенің 1-ші теңдеуін a_{22}^1 элементіне бөліп, теңдеу аламыз:

$$x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 + ... + b_{2n}x_n = b_{2n+1} \qquad (3.8)$$

мұндағы $b_{2j} = \dfrac{a_{2j}^1}{a_{22}^1}, \quad j = 3,4,..., n+1$ (3.9)

x_1 белгісізін қалай жойсақ, тура сол сияқты x_2 белгісізін (3.7) - жүйеден жоямыз, сонда мынадай жүйе алынады:

$$\begin{cases} a_{33}^2 x_3 + a_{34}^2 x_4 + ... + a_{3n}^2 x_n = a_{3n+1}^2 \\ a_{43}^2 x_3 + a_{44}^2 x_4 + ... + a_{4n}^2 x_n = a_{4n+1}^2 \\ ... \\ a_{n3}^2 x_3 + a_{n4}^2 x_4 + ... + a_{nn}^2 x_n = a_{nn+1}^2 \end{cases} \qquad (3.10)$$

мұндағы

$a_{ij}^2 = a^1{}_{ij} - a^1{}_{i2} \cdot b_{2j}, \qquad \mathrm{i} = 3,4,..., \mathrm{n}; \ \mathrm{j} = 3,4,..., \mathrm{n}+1$ (3.11)

(3.10) - жүйенің 1-ші теңдеуін a_{33}^2 элементіне бөліп

$$x_3 + b_{34}x_4 + b_{35}x_5 + ... + b_{3n}x_n = b_{3n+1} \qquad (3.11)$$

теңдеу аламыз. Мұндағы $b_{3j} = \dfrac{a_{3j}^2}{a_{33}^2}, \quad j = 4,5,..., n+1$ (3.12)

(3.11) - теңдеу көмегімен (3.10) - жүйеден x_3 белгісізін жоямыз.

Осы әрекеттер тізімін матрица толық үшбұрышты түрге келгенше жалғастырамыз да (3.4)-ші, (3.8)-ші, (3.11)-ші, т.с.с. алуға болатын теңдеулерді жинақтап келесідей жүйе аламыз:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + ... + b_{1n}x_n = b_{1n+1} \\ \qquad x_2 + b_{23}x_3 + ... + b_{2n}x_n = b_{2n+1} \\ \qquad\qquad x_3 + ... + b_{3n}x_n = b_{3n+1} \\ \qquad\qquad ... \\ \qquad\qquad\qquad b_{nn}x_n = b_{nn+1} \end{cases} \qquad (3.13)$$

2. Кері жол:

(3.13) - жүйенің ең соңғы n-ші теңдеуінен $x_n = \dfrac{b_{nn+1}}{b_{nn}}$ белгісізін тауып алып n-1 –ші теңдеуге қою арқылы x_{n-1} белгісізін табуға, сол сияқты кері қарай барлық белгісіздерді табуға болады.

__**Ескерту**__: Бұл әдіс матрицаның басшы элементі нөлден өзгеше болған жағдайда қолданылады. Егер берілген жүйе матрицасының басшы элементі нөлге тең болса, жүйенің теңдеулерінің орындарын ауыстыру арқылы, арифметикалық операциялар қолдану арқылы басшы элементтің нөлдігінен құтылуға болады.

Практикада есептеу жеңіл болуы үшін Гаусс компактілі схемасын толтырады (1-кесте), мысал үшін 4 белгісізді жүйе қарастырылды.

1-мысал:

$$\begin{cases} 0{,}14x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}84x_3 = 1{,}11 \\ 1{,}07x_1 - 0{,}83x_2 + 0{,}56x_3 = 0{,}48 \\ 0{,}64x_1 + 0{,}43x_2 - 0{,}38x_3 = -0{,}83 \end{cases} \qquad (3.14)$$

1. Тура жол.

Есептеу процесінің қалай өрбитінін бақылау үшін кесте толтырған дұрыс (2-кестені қараңыз). Кестенің I - бөлігіне жүйенің кеңейтілген матрицасын толтырамыз.

Кестенің соңғы екі бағаны ∑, S – есептеу қателігін бақылауды ұйымдастырады. I – бөліктің ең соңғы бақылаушы бағанындағы мәндер матрицаның әр жолындағы элементтердің қосындысы ретінде табылады $\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = a_{i5}$, $j = \overline{1,4}$. b_{1j} жолының бақылаушы бағанындағы элементтер I – бөліктің ең соңғы бақылаушы бағанындағы мәндерді басшы элементке бөлу арқылы табылады $b_{15} = \frac{a_{15}}{a_{11}}$. II – бөліктің бақылаушы бағанындағы мәндер I – бөліктің ең соңғы бақылаушы бағанындағы мәндерге (3.6) - формуланы қолдану арқылы анықталады a_{i5}^{1}, $i = 2{,}3$. Дәл осылай бақылаушы бағанның қалған екі жолын да толтыруға болады:

$b_{25} = \frac{a_{25}^{1}}{a_{22}^{1}}$, төменде көрсетілген a_{35}^{1}, a_{35}^{2} формулалары арқылы. ∑, S – бағандарындағы мәндер бір - бірінен өте аз ауытқуы немесе тұтас беттесуі керек. Сонда есеп дұрыс жүргізілген болады.

(3.5) - формуланы қолданамыз:

1-кесте . Гаусстың компактілі схемасы.

Бөліктер	i	X_1	X_2	X_3	X_4	b_i	$\sum = a_{i6}$
I	1 2 3 4	a_{11} a_{21} a_{31} a_{41}	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42}	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43}	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44}	b_1 b_2 b_3 b_4	$\sum_{j=1}^{4} a_{1j} = a_{16}$ $\sum_{j=1}^{4} a_{2j} = a_{26}$ $\sum_{j=1}^{4} a_{3j} = a_{36}$ $\sum_{j=1}^{4} a_{4j} = a_{46}$
B_{1j}	**1**	**1**	**b_{12}**	**b_{13}**	**b_{14}**	**b_{15}**	$\frac{a_{16}}{a_{11}} = b_{16}$
II	2 3 4		a_{22}^{1} a_{32}^{1} a_{42}^{1}	a_{23}^{1} a_{33}^{1} a_{43}^{1}	a_{24}^{1} a_{34}^{1} a_{44}^{1}	a_{25}^{1} a_{35}^{1} a_{45}^{1}	a_{26}^{1} a_{36}^{1} a_{46}^{1}

B2j	**2**		**1**	**b23**	**b24**	**b25**	$\frac{a^1_{26}}{a^1_{22}} = b_{26}$
III	3 4			a^2_{33} a^2_{43}	a^2_{34} a^2_{44}	a^2_{35} a^2_{45}	a^2_{36} a^2_{46}
B3j	**3**			**1**	**b34**	**b35**	$\frac{a^2_{36}}{a^2_{33}} = b_{36}$
IV	4				a^3_{44}	a^3_{45}	a^3_{46}
V		1	1	1	1	x4 x3 x2 x1	

$b_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1$; $b_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{0.24}{0.14} = 1.7143$; $b_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = \frac{-0.84}{0.14} = -6.0000$;

$b_{14} = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{1.11}{0.14} = 7.9286$;

Бұл мәндерді кестенің b_{1j} жолына жазамыз.

(3.6) - формуланы қолданамыз:

$a^1_{22} = a_{22} - a_{21} \cdot b_{12} = -0.83 - 1.07 \cdot 1.7143 = -2.6643$;

$a^1_{23} = a_{23} - a_{21} \cdot b_{13} = 0.56 - 1.07 \cdot (-6) = 6.9800$;

$a^1_{24} = b_2 - a_{21} \cdot b_{14} = 0.48 - 1.07 \cdot 7.9286 = -8.0036$; Бұл сандарды кестенің II – бөлігіндегі сәйкес орындарына жазамыз.

$a^1_{25} = a_{25} - a_{21} \cdot b_{15} = 1{,}28 - 1.07 \cdot 4{,}6428 = -3{,}6878$ (Бұл мән кестенің $\sum$ бағанында орналасады.)

$a^1_{32} = a_{32} - a_{31} \cdot b_{12} = 0.43 - 0.64 \cdot 1.7143 = -0.6672$;

$a^1_{33} = a_{33} - a_{31} \cdot b_{13} = -0.38 - 0.64 \cdot (-6) = 3.4600$;

$a^1_{34} = b_3 - a_{31} \cdot b_{14} = -0.83 - 0.64 \cdot 7.9286 = -5.9043$; Бұл сандарды кестенің II – бөлігіндегі сәйкес орындарына жазамыз.

$a^1_{35} = a_{35} - a_{31} \cdot b_{15} = -0{,}14 - 0.64 \cdot 4{,}6428 = -3{,}1114$; (Бұл мән кестенің $\sum$ бағанында орналасады.)

(3.7) - формуланы қолданамыз:

$b_{22} = \frac{a^1_{22}}{a^1_{22}} = 1$; $b_{23} = \frac{a^1_{23}}{a^1_{22}} = \frac{6{,}98}{-2{,}6643} = -2{,}6198$; $b_{24} = \frac{a^1_{24}}{a^1_{22}} = \frac{-8{,}0036}{-2{,}6643} = 3{,}0040$;

Бұл сандарды кестенің b_{2j} жолына жазамыз.

(3.11) - формуланы қолданамыз:

$a^2_{33} = a^1_{33} - a^1_{32} \cdot b_{23} = 3{,}4600 + 0{,}6672 \cdot (-2{,}6198) = 1{,}7121$;

$a^2_{34} = a^1_{34} - a^1_{32} \cdot b_{24} = -5{,}9043 + 0{,}6672 \cdot 3{,}0040 = -3{,}9000$; Бұл сандарды кестенің III – бөлігіне толтырамыз.

$a^2_{35} = a^1_{35} - a^1_{32} \cdot b_{25} = -3{,}1114 + 0{,}6672 \cdot 1{,}3842 = -2{,}1879$ (Бұл мән кестенің $\sum$ бағанында орналасады.)

Осы арада тура жол аяқталады, матрица үшбұрышты түрге келеді.

2. Кері жол.

b_{1j}, b_{2j} және кестенің ең соңғы жолында орналасқан элементтерді қолданып жүйе құрамыз:

$$\begin{cases} x_1 + 1.7143x_2 - 6x_3 = 7.9286 \\ \qquad x_2 - 2.6198x_3 = 3.0040 \\ \qquad\quad 1.7121x_3 = -3.9000 \end{cases}$$

Бұл жүйеден x_3=-2,2779; x_2=-2,9636; x_1=-0,6583 екендігі шығады.

2- кесте . (3.14) - есептің кестелік алгоритмі.

Бөліктер	i	X_1	X_2	X_3	b_i	∑	S
I	1 2 3	**0.14** 1.07 0.64	0.24 -0.83 0.43	-0.84 0.56 -0.38	1.11 0.48 -0.83	0,65 1,28 -0,14	
B_{1j}	**1**	**1**	**1.7143**	**-6.0000**	**7.9286**	4,6428	4.6428
II	2 3		**-2.6643** -0.6672	6.98 3.4600	-8.0036 -5.9043	-3.6878 -3.1114	-3.6879 -3.1115
B_{2j}	**2**		**1**	**-2.6198**	**3.0040**	1.3842	1.3842
III	**3**			**1.7121**	**-3.9000**	-2.1879	-2.1879

Бақылау сұрақтары:

1. Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін (САТЖ) сандық шешудің неше тәсілі бар?
2. Гаусс әдісі қалай жүзеге асады?
3. Жордан – Гаусс әдісі қалай жүзеге асады?
4. Жордан – Гаусс әдісінің тура әдісі қалай жүзеге асады?

Тәжірибелік жұмыс №5: Жәй итерация және Зейдель әдісімен теңдеулер жиынның сандық шешімін табу

Мақсаты: *Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің сандық әдістерімен танысу және есептер шығару.*

Тапсырма:

Қарапайым итерация, Зейдель әдісін қолданып төмендегі жүйелерді шешіңіздер. $E=10^{-4}$.

№1

$$\begin{cases} 4.4x_1 - 2.5x_2 + 19.2x_3 - 10.8x_4 = 4.3 \\ 5.5x_1 - 9.3x_2 - 14.2x_3 + 13.2x_4 = 6.8 \\ 7.1x_1 - 11.5x_2 + 5.3x_3 - 6.7x_4 = -1.8 \\ 14.2x_1 + 23.4x_2 - 8.8x_3 + 5.3x_4 = 7.2 \end{cases}$$

№2

$$\begin{cases} 8.2x_1 - 3.2x_2 + 14.2x_3 + 14.8x_4 = -8.4 \\ 5.6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6.4x_4 = 4.5 \\ 5.7x_1 + 3.6x_2 - 12.4x_3 - 2.3x_4 = 3.3 \\ 6.8x_1 + 13.2x_2 - 6.3x_3 - 8.7x_4 = 14.3 \end{cases}$$

№3

$$\begin{cases} 5.7x_1 - 7.8x_2 - 5.6x_3 - 8.3x_4 = 2.7 \\ 6.6x_1 + 13.1x_2 - 6.3x_3 + 4.3x_4 = -5.5 \\ 14.7x_1 - 2.8x_2 + 5.6x_3 - 12.1x_4 = 8.6 \\ 8.5x_1 + 12.7x_2 - 23.7x_3 + 5.7x_4 = 14.7 \end{cases}$$

№4

$$\begin{cases} 3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 - 15.5x_4 = 28 \\ 8.3x_1 - 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 = -4.7 \\ 6.4x_1 - 8.5x_2 - 4.3x_3 + 8.8x_4 = 7.7 \\ 17.1x_1 - 8.3x_2 + 14.4x_3 - 7.2x_4 = 13.5 \end{cases}$$

№5

$$\begin{cases} 15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 = -2.4 \\ 8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 = 5.6 \\ 6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 = 7.7 \\ 14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 = 23.4 \end{cases}$$

№ 6

$$\begin{cases} 4.3x_1 - 12.1x_2 + 23.2x_3 - 14.1x_4 = 15.5 \\ 2.4x_1 - 4.4x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 = 2.5 \\ 5.4x_1 + 8.3x_2 - 7.4x_3 - 12.7x_4 = 8.6 \\ 6.3x_1 - 7.6x_2 + 1.34x_3 + 3.7x_4 = 12.1 \end{cases}$$

№ 7

$$\begin{cases} 14.4x_1 - 5.3x_2 + 14.3x_3 - 12.7x_4 = -14.4 \\ 23.4x_1 - 14.2x_2 - 5.4x_3 + 2.1x_4 = 6.6 \\ 6.3x_1 - 13.2x_2 - 6.5x_3 + 14.3x_4 = 9.4 \\ 5.6x_1 + 8.8x_2 - 6.7x_3 - 23.8x_4 = 7.3 \end{cases}$$

№ 8

$$\begin{cases} 1.7x_1 + 10x_2 - 1.3x_3 + 2.1x_4 = 3.1 \\ 3.1x_1 + 1.7x_2 - 2.1x_3 + 5.4x_4 = 2.1 \\ 3.3x_1 - 7.7x_2 + 4.4x_3 - 5.1x_4 = 1.9 \\ 10x_1 - 20.1x_2 + 20.4x_3 + 1.7x_4 = 1.8 \end{cases}$$

№ 9

№ 10

$$\begin{cases} 1.7x_1 - 1.8x_2 + 1.9x_3 - 57.4x_4 = 10 \\ 1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.5x_3 - 1.7x_4 = 19 \\ 1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 = 20 \\ 7.1x_1 - 1.3x_2 - 4.1x_3 + 5.2x_4 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6.1x_1 + 6.2x_2 - 6.3x_3 + 6.4x_4 = 6.5 \\ 1.1x_1 - 1.5x_2 + 2.2x_3 - 3.8x_4 = 4.2 \\ 5.1x_1 - 5x_2 + 4.9x_3 - 4.8x_4 = 4.7 \\ 1.8x_1 + 1.9x_2 + 2x_3 - 2.1x_4 = 2.2 \end{cases}$$

Тапсырманы орындауға әдістемелік нұсқаулар:
Қарапайым итерация әдісі
1- мысал:

$$\begin{aligned} -7x_1+4x_2-4x_3&=-8\\ 2x_1-6x_2-x_3&=-5\\ -2x_1-x_2+6x_3&=3 \end{aligned}$$

Бұл жүйе матрицасында диагональдық басымдылық бар. (3.39) – (3.41) – шарттардың орындалуын ұйымдастыру керек. Ол үшін жүйенің матрицасын және бос мүшелер векторын $H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ матрицасына көбейтейік:

$$H \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}. \qquad H \cdot b = (\frac{8}{7};\ \frac{5}{6};\ -\frac{1}{3}) \quad \begin{cases} x_1 - \frac{4}{7}x_2 - \frac{4}{7}x_3 = \frac{8}{7} \\ -\frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{6}x_3 = \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{6}x_2 + x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Бұл жүйе үшін жинақтылық шарттар орындалады. Сондықтан жүйені итерациялық түрде жазамыз:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{7}x_2 + \frac{4}{7}x_3 + \frac{8}{7} \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{6}x_3 + \frac{5}{6} \\ x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Итерацияның бастапқы жуықтаулары ретінде бос мүшелерін алайық: $x_1^0 = \frac{8}{7};\ x_2^0 = \frac{5}{6};\ x_3^0 = -\frac{1}{3}$. Келесі жуықтаулар мына формуламен есептеледі:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{4}{7}x_2^k + \frac{4}{7}x_3^k + \frac{8}{7} \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{3}x_1^k - \frac{1}{6}x_3^k + \frac{5}{6} \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{3}x_1^k + \frac{1}{6}x_2^k - \frac{1}{3} \end{cases}, \ k=0,1,2,\ldots,n$$

2-мысал:

$$\begin{cases} 2.34x_1 - 4.21x_2 - 11.61x_3 = 14.41 & \text{(I)} \\ 8.04x_1 + 5.22x_2 + 0.27x_3 = -6.44 & \text{(II)} \\ 3.92x_1 - 7.99x_2 + 8.37x_3 = 55.56 & \text{(III)} \end{cases}$$

Мұндағы теңдеулерді қолдануға оңай болуы үшін рим цифрларымен белгіледік. Диагональдық басымдылықты алу үшін (I) – теңдеудің орнына (II) – теңдеуді, ал 2-ші теңдеу етіп (I+II) – теңдеуін жазамыз, (III) – теңдеудің орнына (I) теңдеуді жазамыз:

$$\begin{cases} 8.04x_1 + 5.22x_2 + 0.27x_3 = -6.44 & \text{(I)} \\ 6{,}26x_1 - 12{,}20x_2 - 3{,}24x_3 = 69{,}97 & \text{(II)} \\ 2.34x_1 - 4.21x_2 - 11.61x_3 = 14.41 & \text{(III)} \end{cases}$$

Бұл жүйеде диагональдық басымдылық бар. Сондықтан итерациялық түрге келтіру үшін жүйенің әр теңдеуін мүшелеп диагональдық элементіне бөлеміз де коэффициенті 1-ге тең белгісіздер арқылы өрнектейміз:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}6493x_2 - 0.0336x_3 - 0.8010 \\ x_2 = 0.5131x_1 - 0.2656x_2 - 5.7352 \\ x_3 = 0.2016x_1 - 0.3626x_2 - 1.2412 \end{cases}$$

Жинақтылығын зерттейміз:

1-ші метрикалық кеңістікте:

$$\alpha_{\rho_1} = 0.5131 + 0.2016 = 0.7147 < 1$$
$$\alpha_{\rho_1} = 0.6493 + 0.3626 = 1.0119 > 1$$
$$\alpha_{\rho_1} = 0.0336 + 0.2656 = 0.2992 < 1$$
$$\max(0.7147; 1.0119; 0.2992) = 1.0119 > 1$$

жинақтылық шарты бұл кеңістікте орындалмайды екен.

2-ші метрикалық кеңістікте:

$$\alpha_{\rho_2} = 0.6493 + 0.0336 = 0.6829 < 1$$
$$\alpha_{\rho_2} = 0.5131 + 0.2656 = 0.7787 < 1$$
$$\alpha_{\rho_2} = 0.2016 + 0.3626 = 0.5642 < 1$$
$$\max(0.6829; 0.7787; 0.5642) = 0.7787 < 1$$

жинақтылық шарты орындалды.

3-ші метрикалық кеңістікте:

$$\alpha_{\rho_3} = \sqrt{0.6493^2 + 0.0336^2 + 0.5131^2 + 0.2656^2 + 0.2016^2 + 0.3626^2} = 0.96 < 1$$

Жинақтылық шарты орындалатыны байқалды, яғни бастапқы жуықтаулар ретінде бос мүшелерді алып итерациялық процесс құрамыз:

$x_1^{(0)} = -0.8010$; $x_2^{(0)} = -5.7352$; $x_3^{(0)} = -1.2412$;

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = -0{,}6493x_2^k - 0.0336x_3^k - 0.8010 \\ x_2^{k+1} = 0.5131x_1^k - 0.2656x_2^k - 5.7352 \\ x_3^{k+1} = 0.2016x_1^k - 0.3626x_2^k - 1.2412 \end{cases}$$

k=0,1,2,…

$\left| x_n^{k+1} - x_n^k \right| \le \varepsilon \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ шарты орындалғанша итерация жүреді.

Зейдель әдісі

1-мысал:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Берілген жүйе үшін матрицасын, транспонирленген матрицасын құрып, жоғарыда айтылған әрекеттерді орындаймыз:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 6 & 11 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}. \quad D = A^T \cdot b = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Сонымен анықталған матрица бойынша қалыпты жүйе құраймыз:

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 16 \\ 6x_1 + 11x_2 + 5x_3 = 22 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$$

Итерациялық түрге келтіреміз:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - 0.6667x_3 + 2.6667 \\ x_2 = -0.5455x_1 - 0.4545x_3 + 2 \\ x_3 = -1.3333x_1 - 1.6667x_2 + 4 \end{cases}$$

Бұл жүйе үшін (3.48)– (3.50)– жинақтылық шарттары орынды. Ендеше бастапқы жуықтау таңдаймыз: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$.

Зейдель процесі келесідей жазылады:

$$\begin{cases} y_1 = -x_2 - 0.6667x_3 + 2.6667 \\ y_2 = -0.5455y_1 - 0.4545x_3 + 2 \\ y_3 = -1.3333y_1 - 1.6667y_2 + 4 \end{cases}$$

Есептеу $|x_i - y_i| \le \varepsilon$, i=0,1,2,… шарты орындалғанға дейін жалғасады.

Бақылау сұрақтары:

1. Қарапайым итерация әдісі қалай жүзеге асады?
2. Квадрат түбірлер әдісі қалай жүзеге асады?
3. Сызықтық алгебралық теңдеудің жазылу формасын келтіріңіз?
4. Сызықтық алгебралық теңдеулерді шешудің қандай тәсілдерін білесіз?

Тәжірибелік жұмыс №6: Ортогоналдау әдісімен теңдеулер жиынының шешімін табу. Крылов-Гаусс әдісін пайдаланып матрицаның характеристикалық теңдеуінің коэффициентін тауып, меншікті мәндерін Ньютон әдісімен табу

Мақсаты: *Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің сандық әдістерімен танысу және есептер шығару*

Тапсырма:

Жордан-Гаусс, ортогоналбдау әдістерін қолданып төмендегі жүйелерді шешу.

№1

$$\begin{cases} 4.4x_1 - 2.5x_2 + 19.2x_3 - 10.8x_4 = 4.3 \\ 5.5x_1 - 9.3x_2 - 14.2x_3 + 13.2x_4 = 6.8 \\ 7.1x_1 - 11.5x_2 + 5.3x_3 - 6.7x_4 = -1.8 \\ 14.2x_1 + 23.4x_2 - 8.8x_3 + 5.3x_4 = 7.2 \end{cases}$$

№2

$$\begin{cases} 8.2x_1 - 3.2x_2 + 14.2x_3 + 14.8x_4 = -8.4 \\ 5.6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6.4x_4 = 4.5 \\ 5.7x_1 + 3.6x_2 - 12.4x_3 - 2.3x_4 = 3.3 \\ 6.8x_1 + 13.2x_2 - 6.3x_3 - 8.7x_4 = 14.3 \end{cases}$$

№3

$$\begin{cases} 5.7x_1 - 7.8x_2 - 5.6x_3 - 8.3x_4 = 2.7 \\ 6.6x_1 + 13.1x_2 - 6.3x_3 + 4.3x_4 = -5.5 \\ 14.7x_1 - 2.8x_2 + 5.6x_3 - 12.1x_4 = 8.6 \\ 8.5x_1 + 12.7x_2 - 23.7x_3 + 5.7x_4 = 14.7 \end{cases}$$

№4

$$\begin{cases} 3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 - 15.5x_4 = 28 \\ 8.3x_1 - 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 = -4.7 \\ 6.4x_1 - 8.5x_2 - 4.3x_3 + 8.8x_4 = 7.7 \\ 17.1x_1 - 8.3x_2 + 14.4x_3 - 7.2x_4 = 13.5 \end{cases}$$

№5

$$\begin{cases} 15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 = -2.4 \\ 8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 = 5.6 \\ 6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 = 7.7 \\ 14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 = 23.4 \end{cases}$$

№6

$$\begin{cases} 4.3x_1 - 12.1x_2 + 23.2x_3 - 14.1x_4 = 15.5 \\ 2.4x_1 - 4.4x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 = 2.5 \\ 5.4x_1 + 8.3x_2 - 7.4x_3 - 12.7x_4 = 8.6 \\ 6.3x_1 - 7.6x_2 + 1.34x_3 + 3.7x_4 = 12.1 \end{cases}$$

№ 7

$$\begin{cases} 14.4x_1 - 5.3x_2 + 14.3x_3 - 12.7x_4 = -14.4 \\ 23.4x_1 - 14.2x_2 - 5.4x_3 + 2.1x_4 = 6.6 \\ 6.3x_1 - 13.2x_2 - 6.5x_3 + 14.3x_4 = 9.4 \\ 5.6x_1 + 8.8x_2 - 6.7x_3 - 23.8x_4 = 7.3 \end{cases}$$

№8

$$\begin{cases} 1.7x_1 + 10x_2 - 1.3x_3 + 2.1x_4 = 3.1 \\ 3.1x_1 + 1.7x_2 - 2.1x_3 + 5.4x_4 = 2.1 \\ 3.3x_1 - 7.7x_2 + 4.4x_3 - 5.1x_4 = 1.9 \\ 10x_1 - 20.1x_2 + 20.4x_3 + 1.7x_4 = 1.8 \end{cases}$$

№ 9

№10

$$\begin{cases}1.7x_1 - 1.8x_2 + 1.9x_3 - 57.4x_4 = 10\\ 1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.5x_3 - 1.7x_4 = 19\\ 1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 = 20\\ 7.1x_1 - 1.3x_2 - 4.1x_3 + 5.2x_4 = 10\end{cases} \qquad \begin{cases}6.1x_1 + 6.2x_2 - 6.3x_3 + 6.4x_4 = 6.5\\ 1.1x_1 - 1.5x_2 + 2.2x_3 - 3.8x_4 = 4.2\\ 5.1x_1 - 5x_2 + 4.9x_3 - 4.8x_4 = 4.7\\ 1.8x_1 + 1.9x_2 + 2x_3 - 2.1x_4 = 2.2\end{cases}$$

Тапсырманы орындауға әдістемелік нұсқаулар:

<u>Жордан – Гаусс әдісі.</u>

Бұл әдісті қолдану үшін жүйенің матрицасының басшы элементтері немесе диагональ элементтері нөлден өзгеше болуы керек ([11] қараңыз). Егер матрицаның басшы элементтері нөлге тең болса, қандай да бір алмастырулар, ауыстырулар қолдану арқылы нөлден құтылады. Жордан - Гаусс әдісін сондықтан басшы элементті таңдау әдісі деп те атайды. Әдістің негізгі идеясы модулі бойынша ең үлкен элементті басшы элемент деп алып, сол элемент орналасқан жолдағы сәйкес белгісізді жою. Бұл әдіс те тура және кері жолдан тұрады. Келесі жүйе берілсін.

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = a_{1n+1}\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = a_{2n+1}\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = a_{3n+1}\\ ...\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = a_{nn+1}\end{cases} \qquad (3.15)$$

1. Тура жол алгоритмі

1. (3.15) – жүйенің кеңейтілген матрицасын құрамыз.
2. a_{ij}, $\mathrm{j} = 1,2,...,\mathrm{n}$ элементтерінің арасынан модулі бойынша ең үлкен элементті басшы элемент деп тағайындаймыз. Оны a_{pq} деп белгілейік.

3.Барлық $\mathrm{i} \neq \mathrm{p}$ мәндері үшін $m_i = \dfrac{a_{iq}}{a_{pq}}$ (3.16)

көбейткішін есептейміз.

4.Әрбір басшы емес жолдан m_i көбейткішіне көбейтілген басшы жол элементтерін мүшелеп шегереміз:

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - m_i \cdot a_{pj},\ \mathrm{i} = 1,2,...,\mathrm{n},\ \mathrm{j} = 1,2,...,\mathrm{n}+1 \qquad (3.17)$$

Сонда q-шы бағанның басшы элементтен басқа элементтері нөлге айналады.

5.q-шы баған және басшы жолды тастап кетіп жаңа M_1 матрица аласыз. Бастапқы матрицаның бағаны мен жол саны азаяды.

6.M_1 матрицасына 2-5-ші пункттерді қайталап қолдану арқылы M_2 матрицасын аламыз.

7. Осы процессті бір белгісізді бір жолдан тұратын теңдеу қалғанша жалғастырамыз.
8. Тастап кеткен басшы жолдардан жаңа жүйе құрастырамыз.

2. Кері жол алгоритмі

Басшы жолдардан құралған матрицаны әлдебір ауыстырулар арқылы үшбұрышты түрге келтіріп, ең соңғы теңдеуден ең соңғы белгісізді, оны қолданып оның алдындағы белгісізді, т.с.с. барлық белгісіздерді кері бағытта анықтаймыз.

m_i сандары қаншалықты азайған сайын есептеу қателігі де азаяды. Сондықтан ЭЕМ-ді қолданып есептеу уақытында осы әдіс тиімді деп есептеледі.

Ескерту. Егер жүйе өте көп белгісіздерден тұрып, оның барлық элементтерінің арасынан модулі бойынша үлкен элементті табу қиынға соқса басшы жол ретінде жүйенің бірінші жолын, ал басшы элемент ретінде осы жолдың модулі бойынша ең үлкен элементін алуға болады.

2-мысал:

$$\begin{cases} 1.1161x_1 + 0.1254x_2 + 0.1397x_3 + 0.1490x_4 = 1.5471 \\ 0.1582x_1 + 1.1675x_2 + 0.1768x_3 + 0.1871x_4 = 1.6471 \\ 0.1968x_1 + 0.2071x_2 + 1.2168x_3 + 0.2271x_4 = 1.7471 \\ 0.2368x_1 + 0.2471x_2 + 0.2568x_3 + 1.2671x_4 = 1.8471 \end{cases} \qquad (3.18)$$

Есептеу қадамдарының нәтижелерін 3- кестеге толтыруға болады:

3- кесте . (3.18) – есептің кестелік алгоритмі.

Бөліктер		m_i	X_1	X_2	X_3	X_4	A_{i5}
I		0.11759 0.14766 0.17923	1.1161 0.1582 0.1968 0.2368	0.1254 1.1675 0.2071 0.2471	0.1397 0.1768 1.2168 0.2568	0.1490 0.1871 0.2271 $\boxed{1.2671}$	1.5471 1.6471 1.7471 1.8471
II		0.09353 0.11862	1.08825 0.12323 0.15436	0.09634 1.13101 0.16281	0.10950 0.13888 $\boxed{1.177077}$		1.32990 1.37436 1.41604
III		0.07296	1.07381 0.10492	0.08111 $\boxed{1.11170}$			1.19746 1.20639
IV			1.06616				1.10944

1. Тура жол

a_{44}=1,2671 басшы элемент болады. 4-жол басшы жол деп аталады.

1. (3.16) - формула көмегімен m_i, i=1,2,3 мәндерін анықтаймыз:

$$m_1 = \frac{a_{14}}{a_{44}} = 0.11759$$

$$m_2 = \frac{a_{24}}{a_{44}} = 0.14766$$

$$m_3 = \frac{a_{34}}{a_{44}} = 0.17923$$

2. (3.17) – формула бойынша басшы бағанда орналасқан басшы элементтен өзге элементтерді нөлге айналдырамыз да қалған жаңа элементтерді табамыз:

i=1; j=1 болғанда
$a_{11}^1 = a_{11} - m_1 \cdot a_{41} = 1.11610 - 0.11759 \cdot 0.2368 = 1.08825$
i=1; j=2 болғанда
$a_{12}^1 = a_{12} - m_1 \cdot a_{42} = 0.1254 - 0.11759 \cdot 0.24710 = 0.09634$
i=1; j=3 болғанда
$a_{13}^1 = a_{13} - m_1 \cdot a_{43} = 0.1397 - 0.11759 \cdot 0.2568 = 0.10950$
i=1; j=4 болғанда
$a_{14}^1 = a_{14} - m_1 \cdot a_{44} = 0$
i=1; j=5 болғанда
$a_{15}^1 = a_{15} - m_1 \cdot a_{45} = 1.5471 - 0.11759 \cdot 1.8471 = 1.32990$
i=2; j=1 болғанда
$a_{21}^1 = a_{21} - m_2 \cdot a_{41} = 0.1582 - 0.14766 \cdot 0.23680 = 0.12323$
i=2; j=2 болғанда
$a_{22}^1 = a_{22} - m_2 \cdot a_{42} = 1.13101$
i=2; j=3 болғанда
$a_{23}^1 = a_{23} - m_2 \cdot a_{43} = 0.13888$
i=2; j=4 болғанда
$a_{24}^1 = a_{24} - m_2 \cdot a_{44} = 0$
i=2; j=5 болғанда
$a_{25}^1 = a_{25} - m_2 \cdot a_{45} = 1.37436$
i=3; j=1 болғанда
$a_{31}^1 = a_{31} - m_3 \cdot a_{41} = 0.15436$
i=3; j=2 болғанда
$a_{32}^1 = a_{32} - m_3 \cdot a_{42} = 0.16281$
i=3; j=3 болғанда
$a_{33}^1 = a_{33} - m_3 \cdot a_{43} = 1.17077$
i=3; j=4 болғанда
$a_{34}^1 = a_{34} - m_3 \cdot a_{44} = 0$
i=3; j=5 болғанда
$a_{35}^1 = a_{35} - m_3 \cdot a_{45} = 1.41604$

Табылған элементтерден жаңа матрица құрып кестенің II-бөлігіне толтырамыз.

3. Жаңа матрицадан модулі бойынша үлкен элементті табамыз: ол - $a_{33}^1 = 1.17077$. 3-жолды басшы жол деп аламыз да жаңа көбейткіштерді анықтаймыз:

$$m_1 = \frac{a_{13}^1}{a_{33}^1} = \frac{0,10950}{1,17077} = 0,09353$$

$$m_2 = \frac{a_{23}^1}{a_{33}^1} = \frac{0,13888}{1,17077} = 0,11862$$

4. 2-пункттегі сияқты (3.17) – формула бойынша басшы бағанда орналасқан басшы элементтен өзге элементтерді нөлге айналдырамыз да қалған жаңа элементтерді тауып тағы жаңа матрица құраймыз:

$a_{11}^2 = 1.07381$ $a_{21}^2 = 0.10492$

$a_{12}^2 = 0.08111$ $a_{22}^2 = 1.11170$

$a_{15}^2 = 1.19746$ $a_{25}^2 = 1.20639$

5. Осы жаңа матрицадан модулі бойынша үлкені $a_{22}^2 = 1.11170$. Тағы көбейткішті есептейміз: $m_1 = \dfrac{a_{12}^2}{a_{22}^2} = 0{,}07296$.
6. 2-пункттегі сияқты (3.17) – формула бойынша басшы бағанда орналасқан басшы элементтен өзге элементтерді нөлге айналдырамыз да қалған жаңа элементтерді тауып тағы жаңа матрица құраймыз:

$a_{12}^3 = 1{,}07381 - 0{,}07296 \cdot 0{,}10492 = 1{,}06616$; $a_{15}^3 = 1{,}10944$

2. Кері жол

Кесте да қоршалған басшы элементтер орналасқан жолдардан жүйе құрамыз:

$$\begin{cases} 1.06616x_1 = 1.10944 \\ 1{,}10492x_1 + 1.11170x_2 = 1.20639 \\ 0.15436x_1 + 0.16281x_2 + 1.17077x_3 = 1.41604 \\ 0.2368x_1 + 0.24710x_2 + 0.2568x_3 + 1.2671x_4 = 1.8471 \end{cases}$$

Белгісіздерді біртіндеп табамыз:

X_1=1.04059

X_2=0.98697

X_3=0.93505

X_4=0.88130.

Квадрат түбірлер әдісі.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ ... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3.19)$$

Жүйенің матрицасы симметриялы элементтерден тұратын болса, онда мұндай жүйеге квадрат түбірлер әдісі қолданылады. Әдістің мақсаты ([13] қараңыз) берілген матрицаны бір-біріне түйіндес екі үшбұрыш матрицаның көбейтіндісі түріне келтірейік.

$$A = S^*DS \qquad (3.20)$$

мұндағы S^*- төменгі үшбұрышты матрица, S- жоғарғы үшбұрышты матрица .

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & ... s_{1n} \\ 0 & s_{22} & s_{23} & ... s_{2n} \\ ... & & & \\ 0 & 0 & 0 & ...\ s_{nn} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & ...0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & ...0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & ...0 \\ 0 & 0 & 0 & ... \pm 1 \end{pmatrix}$$

SS^*D матрицасын бір-біріне көбейтіп элементтерін А матрицасының элементтеріне теңестіреміз. Алынған матрицасының диоганалдық элементтері мына формуламен есептелінеді.

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} d_{kk} \bar{S}_{kj} S_{kj}\,,\; j = 1,\ldots, n$$

ал қалған элементтер үшін мына формула қолданылады:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} d_{kk} \bar{S}_{ki} S_{kj}\,, i < j$$

$$S_{11} = \sqrt{|a_{11}|},\; j = 2,\ldots, n \qquad (3.21)$$

$$S_{1j} = \frac{a_{1j}}{d_{11}\bar{S}_{11}},\; j = 2,\ldots, n \qquad (3.22)$$

$$S_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_{kk} \left|S_{kj}\right|^{2}}\;\;, S_{ij} = 0 \qquad (3.23)$$

$$S_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{ki} S_{kj} d_{kk}}{S_{ii} d_{ii}}\,, i < j \qquad (3.24)$$

$S_{ij} = 0$, i > j (3.25)

Егер берілген матрицаның коэффициенті нақты және бас минорлары оң болса, онда d матрицасын бірлік матрица деп, есептеу мына фолмулалармен жүргізіледі:

$$S_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad (3.21^{*})$$

$$S_{1j} = \frac{a_{1j}}{S_{11}},\; j = 2,\ldots, n \qquad (3.22^{*})$$

$$S_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} S_{kj}^{\;2}} \qquad (3.23^{*})$$

$$S_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{ki} S_{kj}}{S_{ii}}\,, i < j \qquad (3.\ 24^{*})$$

$S_{ij} = 0$, i > j (3.25*)

Бұл формулаларды қолданғаннан кейін шыққан матрицаны мынадай үшбұрышты жүйе құрамыз:

$$\begin{cases} S^{*} D y = b \\ S x = y \end{cases} \qquad (3.26)$$

$$y_1 = \frac{b_1}{S_{11} - d_{11}} \qquad (3.27)$$

$$y_k = \frac{b_k - \sum_{S=1}^{k-1} \bar{S}_{sk} y_s d_{ss}}{S_{kk} d_{kk}}, k = 2,..., n \qquad (3.28)$$

$$x_n = \frac{y_n}{S_{nn}} \qquad (3.29)$$

$$x_k = \frac{y_k - \sum_{S=k+1}^{n} S_{ks} x_s}{S_{kk}}, k = n-1, n-2,...,1 \qquad (3.30)$$

Практикада бұл әдіс мына 4-кестені толтырады.

4-кесте . Квадрат түбірлер әдісінің схемасы.

i	x_1	x_2	x_3	b_i
1	A_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
2	A_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
3	A_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
	y_1	y_2	y_3	b_i
1	$\bar{S}_{11}$	0	0	b_1
2	$\bar{S}_{12}$	$\bar{S}_{22}$	0	b_2
3	$\bar{S}_{13}$	$\bar{S}_{23}$	$\bar{S}_{33}$	b_3
	x_1	x_2	x_3	y_i
1	S_{11}	S_{21}	S_{31}	y_1
2	0	S_{22}	S_{32}	y_2
3	0	0	S_{33}	y_3

$$\begin{cases} S^*_{11}\, y_1 = b_1 \\ S^*_{12} y_1 + S^*_{22}\, y_2 = b_2 \\ S^*_{13}\, y_1 + S^*_{23}\, y_2 + S^*_{33}\, y_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{11}x_1 + S_{12}x_2 + S_{13}x_3 = y_1 \\ S_{22}x_2 + S_{23}x_3 = y_2 \\ S_{33}x_3 = y_3 \end{cases}$$ немесе матрицалық –векторлық түрде:

$$\begin{cases} S^* y = b \\ Sx = y \end{cases}.$$

Ал үшбұрышты түрге келтірілген жүйенің белгісіздері қарапайым табылады.

1-мысал

$$4.25x_1 - 1.48x_2 + 0.73x_3 = 1.44$$

$$-1.48x_1 + 1.73x_2 - 1.85x_3 = 2.73$$

$$0.73x_1 - 1.85x_2 + 1.93x_3 = -0.64$$

$e=0.5*10^{-3}$

Жүйе симметриялы элементтерден тұрады, яғни квадрат түрбірлер әдісін қолдануға болады: (3.21*) - формула бойынша:

$s_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4.25} = 2.0616$

(3.22*)-формула бойынша : $s_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{s_{11}}, \quad j = 2,3,4$

$$s_{12} = \frac{a_{12}}{s_{11}} = \frac{-1.48}{2.0616} = -0.7179$$

$$s_{13} = \frac{a_{13}}{s_{11}} = \frac{0.73}{2.0616} = 0.3541$$

$$s_{14} = \frac{a_{14}}{s_{11}} = \frac{b_1}{2.0616} = \frac{1.44}{2.0616} = 0.6985 = y_1 \text{ деп белгілейік}$$

(3.23*) - формула бойынша: $S_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} S_{kj}^{\ 2}}$ j=2,3 формуласы бойынша диагональдық элементтерді табамыз:

$$s_{22} = \sqrt{a_{22} - s_{12}^2} = \sqrt{1.73 - 0.7179^2} = 1.1021$$

$$s_{33} = \sqrt{a_{33} - s_{13}^2 + s_{23}^2}$$

s_{23} элементі әлі табылған жоқ, сондықтан мына формуланы қолданып тауып аламыз:

(3.24*) - формула бойынша: $S_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{S}_{ki} S_{kj}}{S_{ii}}, i < j$

$s_{23} = \dfrac{a_{23} - s_{12} \cdot s_{13}}{s_{22}} = \dfrac{-1.85 - (-0.7179) \cdot 0.3541}{1.1021} = -1.4480$. Енді (3.21*) - формуламен s_{33}-ті табуға болады:

$$s_{33} = \sqrt{a_{33} - s_{13}^2 + s_{23}^2} = \sqrt{1.93 - 0.3541^2 + 1.4480^2} = 0.5405$$

Енді (3.21*) - формуламен қалған элементтерді табамыз:

$s_{24} = \dfrac{a_{24} - s_{12} \cdot s_{14}}{s_{22}} = \dfrac{2.73 - (-0.7179) \cdot 0.6985}{1.1021} = 2.9323$ =y_2 деп белгілейміз

$s_{34} = \dfrac{a_{34} - (s_{13} \cdot s_{14} + s_{23} \cdot s_{24})}{s_{33}} = \dfrac{-0.64 - (0.3541 \cdot 0.6985 + (-1.4480) \cdot 2.9323)}{0.5405} = -6.2141 =$ y_3 деп белгілейміз

Енді элементтерден S үшбұрышты матрица құраймыз:

$$\begin{cases} 2.0616x_1 - 0.7179x_2 + 0.3541x_3 = 0.6985 \\ \qquad\qquad 1.1021x_2 - 1.4480x_3 = 2.9323 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0.5405x_3 = -6.2141 \end{cases}$$

Бұдан $x_3 = \dfrac{-6.2141}{0.5405} = -11.4969$. $\quad x_2 = \dfrac{2.9323 + 1.4480 \cdot (-11.4969)}{1.1021} = -12.4446$

$$x_1 = \frac{0.6985 + 0.7179 \cdot (-12.4446) - 0.3541 \cdot (-11.4969)}{2.1606} = -2.0200$$

Бақылау сұрақтары:

1. Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін (САТЖ) сандық шешудің неше тәсілі бар?
2. Гаусс әдісі қалай жүзеге асады?
3. Жордан – Гаусс әдісі қалай жүзеге асады?
4. Жордан – Гаусс әдісінің тура әдісі қалай жүзеге асады?

Тәжірибелік жұмыс №7: Бір айнымалы функцияны кубтық сплайнмен интерполяциялау
Мақсаты: *Функцияны интерполяциялау есептерін шығаруды үйрену*
Тапсырма:

Тапсырма:

1. Функцияның мәндер кестесі берілген:

X	1,50	1,54	1,56	1,60	1,63	1,70
У	3,873	3,924	3,950	4,000	4,037	4,123

Лагранж формуласын қолданып көрсетілген нүктелердегі функция мәндерін анықтау:
a) 1,52 b) 1,55 c) 1,58 d) 1,61 e) 1,67.

2. Функцияның мәндер кестесі берілген:

X	2,0	2,3	2,5	3,0	3,5	3,8	4,0
У	5,848	6,127	6,300	6,694	7,047	7,243	7,368

Лагранж формуласын қолданып көрсетілген нүктелердегі функция мәндерін анықтау:
a) 2,22 b) 2,41 c) 2,78 d) 3,34 e) 3,75, f) 3,88.

3. sin(x) функциясының x=0, $\pi/6$, $\pi/4$ $\pi/3$ $\pi/2$ нүктелеріндегі мәндерін біле отырып x=$\pi/12$ нүктесіндегі мәнін және қателігін анықтау.

4. Cos(x) функциясының x=0, $\pi/6$, $\pi/4$ $\pi/3$ $\pi/2$ нүктелеріндегі мәндерін біле отырып x=$\pi/5$ нүктесіндегі мәнін және қателігін анықтау.

5. Эйткен схемасын бойынша кестеде берілген функция мәндерін қолданып, берілген нүктелердегі функция мәндерін есептеу:

a) y(27).

X	14	17	31	35
У	68,7	64,0	44,0	39,1

b) Y(102).

X	93.0	96.2	100.0	104.2	108.7
У	11.38	12.80	14.70	17.07	19.91

c) Y(5).

X	0	2	3	6	7	9
У	658 503	704 969	729 000	804 357	830 584	884 736

4.Кесте түрінде берілген функция үшін Эйткен схемасын қолданып 10^{-5} дәрежесі дәлдікке дейін x-тің берілген мәндеріндегі функция мәндерін анықтау:

X	1,00	1,08	1,13	1,20	1,27	1,31	1,38
У	1,17520	1,30254	1,38631	1,50946	1,21730	1,22361	1,23470

a) 1,134 b) 1,139 c) 1,143 d) 1,151 e) 1,166 f) 1,175 g) 1,182 i) 1,197
k) 1,185 l) 1,192 m) 1,195.

6. Функцияның берілген кестелік мәндер бойынша берілген функция мәніне сәйкес аргумент мәнін анықтау:

a) y=0

X	1	2	2,5	3
У	-6	-1	5,625	16

b) y=20

X	4	6	8	10
Y	11	27	50	83

c) y=2.00139; y=2.00194; y=2.00373; y=2.00484

X	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25
Y	2.00000	2.00238	2.00909	2.01957	2.03313	2.05000

1. $y=e^x$ функциясының мәндері кестемен берілген. Сызықты интерполяциялау формуласын қолданып функцияның берілген нүктелердегі мәндерін анықтау.

x	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.60
e^x	1.6487	1.6653	1.6820	1.6989	1.7160	1.7333	1.7507	1.7683	1.7860	1.8040	1.8221

a) 0,507; b) 0,512; c) 0,523; d) 0,535; e) 0,541;
f) 0,556; i) 0,568; j) 0,571; k) 0,589; l) 0,594.

2. y=sin(x) функциясының мәндері берілген. Ньютонның сәйкес формуласын қолдану арқылы берілген нүктелердегі мәндерді және қателіктерін анықтау.

X	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
Sin(x)	0.89121	0.93204	0.96356	0.98545	0.99749	0.999957	0.99166

1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
0.97385	0.94630	0.90930	0.86321	0.80850	0.74571	0.67546	0.59847

a) 1,151; b)1,218; c)1,345; d)1,421; e)1,538; f)1,609; i)1,732; j) 1,849;
k) 1,929; l) 2,031; m) 2,173; n) 2,218; o) 2,313; p) 2,437; r) 2,478.

3. f(x) функциясының мәндері кестемен берілген. Көрсетілген нүктелердегі функция мәндерін Ньютонның формулаларымен анықтау.

X	1.50	1.51	1.52	1.53	1.54	1.55	1.56	1.57	1.58	1.59	1
F(x)	0.51183	0.50624	0.50064	0.49503	0.48940	0.48376	0.47811	0.47245	0.46678	0.46110	0

a) 1.50911; b) 1.50820; c) 1.50253; d) 1.50192; e) 1.59513; f) 1.59575; i)

4. g(x) функциясының мәндері кестемен берілген. Көрсетілген нүктелердегі функция мәндерін Ньютонның формулаларымен анықтау.

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
g(x)	0.5652	0.6375	0.7147	0.7973	0.8861	0.9817	1.0848	1.1964	1.3172	1.4482	1.5906

a) 1.113; b) 1.219; c) 1.321; d) 1.428; e) 1.9592; f) 1.9675; i) 1.9728; j)

5. h(x) функциясының мәндері кестемен берілген. Көрсетілген нүктелердегі функция мәндерін Ньютонның формулаларымен анықтау.

a) 0.01928; b) 0.01392; c) 0.02713; d) 0.47113; e) 0.47531; f) 0.48398;

x	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
h(x)	0.28081	0.31270	0.34549	0.37904	0.41318	0.44774	0.48255	0.51745	0.55226	0.58682	0.62096

Тапсырманы орындауға әдістемелік нұсқаулар:
Лагранждың интерполяциялық көпмүшелігі.

$$L_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot\dots\cdot(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot\dots\cdot(x_1-x_n)} +$$
$$\dots + y_n \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdot(x_n-x_1)\cdot\dots\cdot(x_n-x_{n=1})} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\prod_{i\neq k}\frac{(x-x_k)}{(x_k-x_i)} \tag{4.4}$$

Кей жағдайда есептеу процесін жеңілдету үшін x=at+b, $x_j=at_j+b$ j=0,1,…,n сызықты алмастыруын жасау арқылы Лагранж коэффициенттерінің инварианттылығын қолдануға болады, онда (4.4)-формула келесі түрге келеді:

$$L_i^{(n)}(x) = L_i^n(t) \tag{4.5}$$

Эйткен схемасы.

Егер Лагранж көпмүшелігінің жалпы өрнегін анықтамай, тек белгілі бір нүктедегі функция мәнін есептеу керек болса, онда Эйткен схемасын қолдануға болады:

$$L_{i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1}-x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1}-x \end{vmatrix}$$

$$L_{i,i+1,i+2}(x) = \frac{1}{x_{i+2}-x_i}\begin{vmatrix} L_{i,i+1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1,i+2}(x) & x_{i+2}-x \end{vmatrix}$$

$$L_{i,i+1,i+2,i+3}(x) = \frac{1}{x_{i+32}-x_i}\begin{vmatrix} L_{i,i+1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1,i+2}(x) & x_{i+1}-x \end{vmatrix} \text{ т.с.с.} \tag{4.6}$$

Эйткен схемасы келесі 1-кестені толтыру арқылы орындалады.

1-кесте. Эйткен схемасының толтырылу кестесі

x_i	y_i	X_i-x	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$	…
X_0	Y_0	X_0-x				
X_1	Y_1	X_1-x	L_{01}(x)			
X_2	Y_2	X_2-x	L_{12}(x)	L_{012}(x)		
X_3	Y_3	X_3-x	L_{23}(x)	L_{123}(x)	L_{0123}(x)	…
X_4	Y_4	X_4-x	L_{34}(x)	L_{234}(x)	L_{1234}(x)	…

Эйткен схемасын есептеуді көршілес $L_{0123\dots n}$(x), $L_{0123\dots n,n+1}$(x) мәндері берілген дәлдік маңайында бір бірімен беттессе тоқтатуға болады.

X_i нүктелерінде y_i мәндерін қабылдайтын n-ші дәрежелі интерполяциялық көпмүшелік келсі түрде де жазылады:

$$L_{0123\dots n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0}\begin{vmatrix} L_{012(n-1)}(x) & x_0 - x \\ L_{123\dots n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}. \tag{4.7}$$

1-Мысал: Кестемен берілген функция үшін Лагранж көпмүшелігін құру.

I	0	1	2	3
x_i	0	0.1	0.3	0.5
y_i	-0.5	0	0.2	1

(4.8)

Шешімі: (4.4)-формула бойынша n=3, i=0,1,2,3 болғандағы өрнекті анықтаймыз:

$$L_0^3(x) = \frac{(x-0.1)\cdot(x-0.3)\cdot(x-0.5)}{(-0.1)\cdot(-0.3)\cdot(-0.5)} = -\frac{x^3-0.9x^2+0.23x-0.015}{0.015},$$

$$L_2^3(x) = \frac{x(x-0.1)\cdot(x-0.5)}{0.3\cdot 0.2\cdot(-0.2)} = -\frac{x^3-0.6x^2+0.05x}{0.012},$$

$$L_3^3(x) = \frac{x(x-0.1)\cdot(x-0.3)}{0.5\cdot 0.4\cdot 0.2} = \frac{x^3-0.4x^2+0.03x}{0.04}.$$

$L_1^3(x)$ мүшесін есептемейміз, себебі $y_1=0$. Бәрін бір біріне қосамыз да көпмүшеліктің соңғы түрін аламыз:

$$L_3(x) = L_0^3(x)\cdot y_0 + L_2^3(x)\cdot y_2 + L_3^3(x)\cdot y_3 = \frac{125}{3}x^3 - 30x^2 + \frac{73}{12}x - 0.5.$$

2-мысал: Кесте мен берілген функцияның x=0.45 нүктесіндегі мәнін анықтау керек.

X	0.05	0.15	0.20	0.25	0.35	0.40	0.50	0.55
y	0.9512	0.8607	0.8187	0.7788	0.7047	0.6703	0.6065	0.5769

Шешімі: (4.9)

Есептеуді жеңілдету үшін x=0.05t деп алайық. X-тердің мәні бе анда t-лардың мәндерін тауып алуға болады, олар: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11. Және x=0.45 болғандағы t=9 болады. Есептеу қадамдары 2-кесте да келтірілген.

2-кесте. (4.9)-есептің есептелу қадамдары.

i	t_i-t_j (i<>j)								D_i	y_i	$\frac{y_i}{D_i}$
0	8	-2	-3	-4	-6	-7	-8	-10	-725 760	0.9512	$-0.0131*10^{-4}$
1	2	6	-1	-2	-4	-5	-7	-8	26 880	0.8607	$0.3202*10^{-4}$
2	3	1	5	-1	-3	-4	-6	-7	-7 560	0.8187	$-1.0829*10^{-4}$
3	4	2	1	4	-2	-3	-5	-6	5 760	0.7788	$1.3520*10^{-4}$
4	6	4	3	2	2	-1	-3	-4	-3 456	0.7047	$-2.0390*10^{-4}$
5	7	5	4	3	3	1	-2	-3	2 520	0.6703	$2.6599*10^{-4}$
6	9	7	6	5	5	2	-1	-1	11 340	0.6065	$0.5348*10^{-4}$
7	10	8	7	6	6	3	1	-2	-80 640	0.5769	$-0.0715*10^{-4}$
$\prod(t) = 3840$									$s = \sum_{i=0}^{7}\frac{y_i}{D_i} = 1.6604*10^{-4}$		

Сонымен y(0.45)= $\prod(t)\sum_{i=0}^{7}\frac{y_i}{D_i} = \prod(t)\ s = 3840*1.6604*10^{-4}=0.6376$.

Егер есепте керісінше функция мәні белгілі болып сол мәнге сәйкес абсцисса мәнін табу керек болса, ондай есепті кері интерполяциялау деп атайды. Кері интерполяциялау формуласы:

$$x = x_0\frac{(y-y_1)\cdot(y-y_2)\cdot\dots\cdot(y-y_n)}{(y_0-y_1)\cdot(y_0-y_2)\cdot\dots\cdot(y_0-y_n)} + x_1\frac{(y-y_0)\cdot(y-y_2)\cdot\dots\cdot(y-y_n)}{(y_1-y_0)\cdot(y_1-y_2)\cdot\dots\cdot(y_1-y_n)} + \cdots + x_n\frac{(y-y_0)\cdot(y-y_1)\cdot\dots\cdot(y-y_{n-1})}{(y_n-y_0)\cdot(y_n-y_1)\cdot\dots\cdot(y_n-y_{n=1})} = \sum_{k=0}^{n}x_k\prod_{i\neq k}\frac{(y-y_k)}{(y_k-y_i)} \qquad (4.10)$$

Ньютоннның интерполяциялық формулалары

Егер интерполяциялық түйіндердің бір бірінен ара қашықтығы тұрақты болса, практикада Ньютонның интерполяциялық формулалары қолданылады. Бұл формулалар екіге бөлінеді:

1. Алдыға қарай интерполяциялау
2. Кері интерполяциялау

Егер берілген x нүктесінің мәні кестенің бас жағында жатса, 1-формуласы қолданылады:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ... \qquad (4.11)$$

$$+ \frac{q(q-1)(q-2)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Мұндағы $q = \dfrac{x - x_0}{h}$

Егер берілген x нүктесінің мәні кестенің соңғы жағянда жатса, 2-формула қолданылады:

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + ... \qquad (4.12)$$

$$+ \frac{q(q+1)(q+2)...(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

Формулалардағы Δy_0, $\Delta^2 y_0$, т.с. сияқтылар шектік айырымдар деп аталады және 3-кестені толтыру арқылы анықталады. Кестедегі мысал үшін 6 интерполяциялық түйін және шектік айырымдардың 4-ші дәрежесіне дейінгі мәндер қарастырылған. 1-формула үшін кестенің бірінші жолындағы мәндер, 2-формула үшін кестенің соңғы жолындағы мәндер қолданылады.

3-кесте . Шектік айырымдар кестесі.

x	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
X_0	Y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$	$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$
X_1	Y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	$\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1$
X_2	Y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_4$	$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_1$	
X_3	Y_3	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_3 = \Delta y_5 - \Delta y_4$		
X_4	Y_4	$\Delta y_3 = y_5 - y_4$			
X_5	Y_5				

Егер интерполяциялық түйіндер саны 1 немесе 2-ге тең болса сызықты интерполяциялық формуланы қолдануға болады: $y(x) = y_0 + q\Delta y_0$.

Қателіктерін бағалау:

1-формула үшін мына формула қолданылады:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)(q-2)...(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),\ \xi \in x_i, \quad \mathrm{i} = 0,1,2,...$$

немесе $R_n(x) = \dfrac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)(q-2)...(q-n) \ \ \xi \in x_i, \quad \mathrm{i} = 0,1,2,...$

2-формула үшін мына формула қолданылады:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)(q+2)...(q+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\,,\ \xi \in x_i\,,\quad \mathrm{i} = 0,1,2,...$$

Мысал: y=lg(x) функциясының мәндері кесте да берілген, lg1001 мәнін табу керек.

4-кесте . y=lg(x) функциясының мәндері және шектік айырымдары кестесі

x	Y	$\Delta\ y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3.0000000	43 214	-426	8
1010	3.0043214	42 788	-418	9
1020	3.0086002	42 370	-409	8
1030	3.0128372	41 961	-401	
1040	3.0170333	41 560		
1050	3.0211893			

3-ретті шектік айырымдар тұрақты бола бастағандықтан кесте ны толтыруды тоқтатамыз. Формулада n=3 деп аламыз. Q=0,1. x=1001. Ньютонның бірінші формуласын қолданамыз, себебі x-тің мәні кестенің бас жағында жатыр, сонда lg1001=3.00043417+0.5*10^{-9} болатынын қалдық мүшенің формуласын қолдану арқылы анықтаймыз.

Бақылау сұрақтары:

1. Лагранждың интерполяциялық көпмүшелігі?
2. Эйткен схемасы?
3. Ньютонның интерполяциялық формулалары?
4. Шектік айырымдар кестесі қалай есептеледі?

Тәжірибелік жұмыс №8: Гаусс квадратурасын қолданып, Рунге принципінің негізінде интегралды есептеу

Мақсаты: *Функцияны интерполяциялау есептерін шығаруды үйрену*

Тапсырма:

E=10^{-5} дәлдікпен тұмендегі интегралдарды сәйкес әдісті таңдау арќылы есептеңіздер.

1. $\int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$;
2. $\int_{1.2}^{2} \frac{\lg(x+2)}{x}dx$
3. $\int_{1.2}^{2.7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3.2}}$
4. $\int_{1.6}^{2.4} (x+1)\sin x dx$
5. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.3}}$
6. $\int_{0.2}^{1} \frac{\lg(x^2)}{x^2+1}dx$
7. $\int_{0.2}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $\int_{0.6}^{1.4} \frac{\cos x}{x+1}dx$
9. $\int_{0.8}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$
10. $\int_{0.4}^{1.2} \sqrt{x\cos(x^2)}dx$
11. $\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{2+0.5x^2}}$
12. $\int_{0.8}^{1.2} \frac{\sin(2x)}{x^2}dx$
13. $\int_{1.4}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$
14. $\int_{0.8}^{1.6} \frac{\lg(x^2+1)}{x}dx$
15. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^4}\cdot\sqrt[4]{(1-x)^3}} = 5.24426$, аралыќты 2-ге бұлу арќылы есептеу.

16. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 1.570796$

17. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(e^{\frac{x}{2}}+3)} = 0.64041$

18. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.785398$

19. $\int_1^3 \frac{dx}{1+x}$; n = 4

20. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)\cdot(3t^2+4)}}$; $n = 4$

Тапсырманы орындауға әдістемелік нұсқаулар:

Канторовичтің интеграл астындағы функцияның ерекшелігін айшыќтау әдісі.

Б±л єдістіњ негізгі идеясы f(x) функциясынан єлдебір g(x) функциясын бµліп алады да f(x)-g(x) айырымынан интеграл алады, м±ндаѓы f(x)-элементарлы интегралданатын болуы керек, ал g(x) – сандыќ єдістердіњ біреуімен интегралданатын болуы керек:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b [f(x)-g(x)]dx \qquad (5.7)$$

Б±л єдіс интеграл астындаѓы функция келесі т‰рде берілген жаѓдайда ќолданылады:

$f(x) = (x-c)^{\alpha}\varphi(x),\ \ a \le c \le b,\ -1 < \alpha < 0$

М±ндаѓы $\varphi(x)$ функциясы [a,b] аралыѓында ‰зіліссіз дифференциалданатын функция болсын. Онда б±л функцияны Тейлор ќатарына жіктеуге болады. Тейлор ќатарына жіктелген функция т‰рін $\psi(x)$ деп белгілесек:

$g(x) = (x-c)^{\alpha}\cdot\psi(x)$ болады. Сонда айырманы $\varphi_1(x) = f(x) - g(x)$ деп ќарастыруѓа болады.

Мысалы: $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

Интеграл астындаѓы функияны келесі т‰рде жазып алуѓа болады:

$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$. Онда $\alpha = -\frac{1}{2};\ \ c = 0;\ \ \varphi(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ болады. Б±л функцияны Тейлор ќатарына жіктеуге болады:

$\psi(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + R_n.$ Онда: $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}\cdot\psi(x)$,

$\varphi_1(x) = f(x) - g(x) = x^{-\frac{1}{2}}[(1-x)^{-\frac{1}{2}} - \psi(x)]$ болады.

$$\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{0.5} (x^{-\frac{1}{2}}\cdot\psi(x))dx + \int_0^{0.5} [x^{-\frac{1}{2}}\cdot((1-x)^{-\frac{1}{2}} - \psi(x))]dx =$$

$$\int_0^{0.5} (x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{16}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{128}x^{\frac{7}{2}})dx + \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{x}}(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 - \frac{35}{128}x^4)dx =$$

$1.5691 + 0.001638 = 1.5707970.$

Дәрежелік ќатарлар кµмегімен интегралдау єдісі.

Интеграл астындаѓы функция [a,b] аралыѓы жатќан (-R,+R) интервалында жинаќталатын дєрежелік ќатарѓа жіктелетін болсын:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \qquad (5.8)$$

Дєрежелік ќатарды м‰шелеп интегралдауѓа болады, сонда:

$$\int_a^b f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}(b^{k+1}-a^{k+1}) \qquad (5.9)$$

Егер (5.9)-ќатар жинаќты болса, онда $\int_a^b f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{k+1}(b^{k+1}-a^{k+1})$ (5.10)

Єдіс ќателігі ќатар ќалдыѓы мен дµњгелектеу ќателігінен т±рады.

Егер ќатардыњ тањбасы ауыспалы жєне абсолютті шамасы бойынша монотонды кемімелі болса, онда ќатар ќалдыѓы тасталатын (отбрасываемый) ќатар м‰шелерінің ењ біріншісінің абсолют ќателігінен аспайды.

Басќа жаѓдайларда ќатар ќалдыѓын баѓалау ‰шін ќатарлары жењіл баѓаланатын сандыќ ќатарлармен мажорлайды.

Мысал:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x^2)dx,\quad e=10^{-4}$$

Интеграл астындаѓы функция дєрежелік ќатарѓа жіктеледі жєне кез келген x ‰шін жинаќталады:

$$\sin(x^2)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\dots$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x^2)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\dots)dx=[\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}-\frac{x^{15}}{15\cdot 7!}+\dots]_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\dfrac{\pi^{11}}{11\cdot 5!\cdot 4^{11}}<\dfrac{(\frac{\pi}{4})^{11}}{11\cdot 5!}= \\ \dfrac{0.051}{1320}=0.000000386<\dfrac{e}{4}\approx 4\cdot 10^{-5}\end{array}\right|=\frac{1}{3}(\frac{\pi}{4})^3-\frac{1}{7\cdot 3!}(\frac{\pi}{4})^7=0{,}1571$$

Ќатардыњ ‰шінші м‰шесінен бастап ќалѓан м‰шелерін тастап кетуге болады, себебі олар нµлге µте жуыќ.

Гаусстыњ квадратуралыќ формулалары.

Б±л єдісте x айнымалысын µрнекпен алмастырады: $x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t$. Сонда Гаусс формуласы былай жазылады:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}A_i f(x_i)+R \qquad (5.11)$$

м±ндаѓы $x_i=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_i$, ал $R=(\frac{b-a}{2})^{2n+1}+r$, $r=\frac{(b-a)^{2n+1}\cdot(n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3\cdot(2n+1)}$, $-1<\xi<1$

Б±л єдістіњ ыњѓайсыздыѓы, абсциссадаѓы мєндер мен коэффициенттер иррационал сандар. Біраќ соѓан ќарамай интегралдау т‰йіндерініњ саны аз болса да, дєлдігі жоѓары.

Абсциссадаѓы мєндер мен коэффиценттер м‰мкін, жоѓары дєрежелі кµпм‰шеліктердіњ барлыѓы ‰шін (5.11)-формула д±рыс болатындай етіп тањдалынып алуы керек. A_i, t_i, $i=0,1,\dots,n$ сандары N=2n-1 болѓанда бірмєнді болатыны дєлелденген.

$t_i,\ \ i=0,1,...,n$ мєндерін анықтау ‰шін Лежандр кµпм‰шелігі қолданылады:

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n],\quad n=0,1,2,...$$

Ал A_i-лерді табу ‰шін тµмендегі ж‰йе шешіледі:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}A_i=2\\ \sum_{i=1}^{n}A_it_i=0\\ ...\\ \sum_{i=1}^{n}A_it_i^{2n-2}=\dfrac{2}{2n-1}\\ \sum_{i=1}^{n}A_it_i^{2n-1}=0\end{cases}\qquad (5.11.1^{`})$$

Б±л ж‰йені шешу барысында коэффициенттерді тµмендегі 1-кесте кµмегімен де анықтауға болады.

1-кесте . (5.11.1`)-жүйені шешу барысында анықталған коэффициенттер.

n	I	t_i	A_i
1	1	0	2
2	1;2	∓ 0.57735027	1
3	1;3 2	∓ 0.77459667 0	$\frac{5}{9}=0.55555556$ $\frac{8}{9}=0.88888889$
4	1;4 2;3	∓ 0.86113631 ∓ 0.33998104	0.34785484 0.65214516
5	1;5 2;4 3	∓ 0.90617985 ∓ 0.53846931 0	0.23692688 0.47862868 0.56888889

Мысалы:

N=5 болғанда $I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ интегралын Гаусс формуласымен есептеу керек болсын.

Айнымалыны ауыстырамыз: $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$. Сонда интеграл мына т‰рге келеді:

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=2\int_{-1}^{1}\frac{dt}{4+(t+1)^2};\qquad (5.12)$$

$dx=\frac{1}{2}dt$;

x=0 болғанда t=-1;

x=1 болғанда t=1;

Интеграл астындағы функцияның мєндер кесте сын қ±рамыз:

$f(-t_1) = f(-0{,}906179846) = 0{,}24945107;\qquad A_1 = 0{,}236926885$

$f(-t_2) = f(-0{,}538469310) = 0{,}23735995;\qquad A_2 = 0{,}478628670$

$f(t_3) = f(0) = 0{,}2;\qquad A_3 = 0{,}568888889$

$f(t_4) = f(0{,}538469310) = 0{,}15706261;\qquad A_4 = 0{,}478628670$

$f(t_5) = f(0{,}906179846) = 0{,}13100114;\qquad A_5 = 0{,}236926885$

Алынѓан мєндерді (4)-ќою арќылы интегралды есептейміз:

$I = 2\cdot[A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + A_3 f(t_3) + A_4 f(t_4) + A_5 f(t_5)] = 0{,}78539816.$

Интегралдау ќадамдарын тањдау.

Берілген интегралды сандыќ єдістердіњ ќайсысымен болса да шешу уаќытында берілген дєлдікті ќамтамасыз ететін ќадам тањдау керек. Кейде интегралдау аралыѓын бірнеше бµлікке бµлу барысында дµњгелектеу, есептеу ќателіктері µсуі м‰мкін. М±ндай ыњѓайсыздыќќа ±шырамас ‰шін интегралдау ќадамын д±рыс тањдау керек. Практикада интегралдау ќадамын 2 тєсілмен тањдайды:

1. Ќалдыќ м‰шені баѓалау арќылы
2. Екілік есептеу арќылы.

1-тєсілде берілген интегралды шешуге тиімді бір сандыќ єдісті тањдап алып, сол єдістіњ ќалдыќ м‰шесініњ формуласын

$$|R_n| < \frac{e}{2} \qquad (5.13)$$

баѓалау арќылы h –ты аныќтайды.

Мысалы:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x+x^2};\quad e = 0{,}01$$

Трапеция єдісін тањдайыќ. Ол єдістіњ ќалдыќ м‰шесініњ формуласы:

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi).$$

$$f''(x) = -\frac{2(x^3+x+1)}{(1+x+x^2)^3};\quad f''(0) = -2;\quad f''(1) = -0{,}2;\quad f''(\xi) = 2;$$

Табылѓан мєндерді $R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$ формуласына ќойып (5.13)-баѓалауды баќылаймыз, сонда $n \le \frac{1}{\sqrt{0{,}06}} \approx 4$ екендігі табылады. Енді ќадамды табуѓа болады: $h = \frac{b-a}{n} = 0{,}25.$ Трапеция формуласына ќойсаќ:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x+x^2} = 0{,}25[f(0{,}125) + f(0{,}375) + f(0{,}625) + f(0{,}875)] = 0{,}2725 \pm 0{,}005.$$

2-тєсілде берілген интеграл h ќадаммен аралыќты n рет бµледі жєне $\frac{h}{2}$ ќадаммен аралыќты 2n рет бµледі де екі рет есептеледі. алынѓан интегралдарды сєйкесінше I_n жєне I_{2n} деп белгілесек, $|I_n - I_{2n}| < e$ шарты орындалса, онда $I = I_{2n}$ деп есептеуге болады, м±ндаѓы I – интегралдыњ дєл мєні. Егер б±л шарт орындалмаса, онда ќадамды таѓы да 2-ге кішірейтеді.

Интегралдау ќадамы берілмеген есептерде, алѓашќы ќадамды $\sqrt[m]{e}$ санына жуыќ сан ретінде алуѓа болады, м±ндаѓы m=2 трапеция формуласы ‰шін, m=4 – Симпсон формуласы ‰шін. Б±л тєсіл есепті ЭЕМ кµмегімен шешу кезінде ќадамды автоматты т‰рде компьютер таңдайтындай жаѓдай тудырады жєне бірмезгілде есептеу ќадамдары да баќыланып отырады.

Бақылау сұрақтары:
1. Канторовичтің интеграл астындағы функцияның ерекшелігін айшыќтау әдісі?
2. Дәрежелік ќатарлар кµмегімен интегралдау єдісі?
3. Гаусстың квадратуралыќ формулалары?
4. Интегралдау ќадамдарын таңдау қалай жүзеге асады?

Тәжірибелік жұмыс №9: Монте-Карло әдісімен еселі интегралды есептеу

Мақсаты: *Интегралдап жуықтап есептеу есептерін шығаруды үйрену*

Тапсырма:

$E=10^{-5}$ дєлдікпен тµмендегі интегралдарды сєйкес єдісті таңдау арќылы есептеңіздер.

1. $\int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$;

2. $\int_{1.2}^{2} \frac{\lg(x+2)}{x}dx$

3. $\int_{1.2}^{2.7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3.2}}$

4. $\int_{1.6}^{2.4} (x+1)\sin x dx$

5. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.3}}$

6. $\int_{0.2}^{1} \frac{\lg(x^2)}{x^2+1}dx$

7. $\int_{0.2}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

8. $\int_{0.6}^{1.4} \frac{\cos x}{x+1}dx$

9. $\int_{0.8}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

10. $\int_{0.4}^{1.2} \sqrt{x\cos(x^2)}dx$

11. $\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{2+0.5x^2}}$

12. $\int_{0.8}^{1.2} \frac{\sin(2x)}{x^2}dx$

13. $\int_{1.4}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$

14. $\int_{0.8}^{1.6} \frac{\lg(x^2+1)}{x}dx$

15. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^4}\cdot\sqrt[4]{(1-x)^3}} = 5.24426$, аралыќты 2-ге бµлу арќылы есептеу.

16. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 1.570796$

17. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(e^{\frac{x}{2}}+3)} = 0.64041$

18. $\int_{0}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.785398$

19. $\int_{1}^{3} \frac{dx}{1+x}$; n = 4

20. $\int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)\cdot(3t^2+4)}}$; $n = 4$

Тапсырманы орындауға әдістемелік нұсқаулар:

Сандық интегралдау есебі

Сандық интегралдау инженерлік және ғылыми деректерді анализдеу немесе сараптау үшін қажетті. Интегралды классикалық әдістермен аналитикалық түрде алу мүмкін болмаған жағдайларда сандық интегралдау есебі қойылады. Кейде интеграл астындағы функция өте күрделі, кейде функцияның кесте лық мәндері ғана берілуі мүмкін.

Сандық интегралдауды сандық квадратура деп те атайды. Ал қолданылатын формулалар квадратуралық формулалар деп аталады.

Сандық интегралдау да дәл және жуықтау болып екіге бөлінеді.

Егер абсцисса өсі бойынан алынатын нүктелер бірқалыпты орналасатын болса, онда Ньютон – Котестің дәл квадратуралық формулалары қолданылады, басқа жағдайда жуықтау – Гаусс формулалары қолданылады.

Сандық интегралдаудың негізгі идеясы - интеграл астындағы функцияны [a,b] аралығында интерполяциялық полиномға жіктеу және полиномның әр мүшесін интегралдау арқылы есептеу процесін жеңілдету.

Интегралдың қателігін төмендету үшін интеграл астындағы функция анықталған [a,b] аралығы h қадаммен бірнеше аралыққа бөлу керек: $x_{i+1}-x_i=h$, $i=1,2,\ldots,n-1$. Қадам тұрақты болған жағдайды қарастырайық.

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (5.1)$$

түрдегі интеграл берілсін. Дәл әдістерге Ньютон-Котес квадратуралық формулалары жататыны жоғарыда айтылған.

Трапеция әдісі

Егер n=1 болса квадратуралық формула трапеция әдісі деп аталады. Әдіс бойынша; интегралдық қисық пен ох өсі аралығындағы фигура ауданын табу үшін сол фигураны трапециямен толықтырып, ауданын табуға болады:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \qquad (5.2)$$

Қателікті азайту үшін аралықты бірнеше бөлікке бөліп әр трапецияның ауданын тауып барлығының қосындысы берілген интегралдың мәні деуге болады:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}(\frac{1}{2}f(a)+f(a+kh)+f(a+(k+1)h+\ldots+\frac{1}{2}f(b))+r_n \qquad (5.3)$$

Мұндағы

$$r_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi), \quad a \le \xi \le b, \qquad (5.4)$$

$$f''(\xi) = M = \max_{[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

(5.4)-формула әдістің қателігін бағалау формуласы деп аталады. Геометриялық мағынасы трапециямен толықтырылған уақытта осы облысқа кірмей қалған аймақтардың қосындысы, кейде оны қиылу қателігі де дейді. Оның мәні өте аз шама болуы керек.

<u>1-мысал:</u>

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad \text{n} = 10;$$

$$h = \frac{b-a}{n} = 0.1$$

(5.3)- формулаға қоямыз:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{10}[\frac{1}{2} + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + ... + f(0.9) + \frac{1}{2} f(1)], \quad n = 10;$$

$$f(0,1) = \frac{1}{1+0.1} = 0.9091$$

$$f(0,2) = 0.8333$$

$$f(0,3) = 0.7692$$

$$f(0,4) = 0.7143$$

$$f(0,5) = 0.6667$$

$$f(0,6) = 0.6250$$

$$f(0,7) = 0.5882$$

$$f(0,8) = 0.5556$$

$$f(0,9) = 0.5263$$

$$f(1) = 0.5$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0.69377 + r_n$$

$$r_n = -\frac{(1-0)^3}{12 \cdot 10^2} f''(\xi), \qquad f''(\xi) = \frac{2}{(1+x)^3} = 2, \quad r_n = -\frac{0.001 \cdot 2}{12} = -0.00096$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0.69377 \pm 0.00096$$

Симпсон әдісі.

N=2 болса Ньютон – Котес формуласы Симпсон єдісін анықтайды. [a,b] аралығын екі симметриялы бµлікке бµледі: $x_0 = a;\ x_1 = \frac{a+b}{2};\ x_2 = b$ н‰ктелері болса, аралық ж±п болады, есептеу формуласы:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}[f(a) + 2 \cdot [f(a+2h) + f(a+4h) + ... + f(a+(n-2)h] + 4 \cdot [f(a+h) + \tag{5.5}$$
$$+ f(a+3h) + ... + f(a+(n-1)h] + f(b)] + R_n$$

$$R_n = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(IV)}(\xi),\ a \le \xi \le b,\ \ f^{(IV)}(\xi) = \max_{[a,b]} \left| f^{(IV)}(x) \right|$$

Онда есептеу қателігі 16-ға азаяды. Ал бµлу аралығы тақ болса, онда [a,b] аралықтың алғашқы ‰ш бµлігінен ‰шінші дєрежелі парабола ж‰ргізнміз, б±л жағдайда Симпсонннның ‰штен сегіздік формуласы қолданылады:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}(f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b))$$

Мысал:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x},\ n = 4;$$

a=0; h=0.25; b=1;

$a+h=\dfrac{1}{4}$; $f(a+h)=0.8000;$

$a+2h=\dfrac{1}{2}$; $f(a+2h)=0.6667;$

$a+3h=\dfrac{3}{4}$; $f(a+3h)=0.5715;$

$b=1;$ $f(b)=\dfrac{1}{2};$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{12}[f(0)+2f(\frac{1}{2})+4\cdot(f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4}))+f(1)]+R_n = 0.6932+R_n$$

$$f^{(IV)}(x)=\frac{24}{(1+x)^5};\quad f^{(IV)}(\xi)=24;\ R_n=-\frac{24}{180\cdot 256}=0.0020.$$

Тіктөртбұрыштар әдісі.

[a,b] аралығынан x_0 бір түйін алатын болсақ, чғни f(x)=const болады, онда қарастырып отырған аралықта $I=f(x_0)\cdot(b-a)$ деуге болады. X_0 нүктесін аралықтың тура ортаңғы нүктесі деп алсақ $I=f(\frac{b+a}{2})\cdot(b-a)$ формуласы шығады, оны тіктөртбұрыштар формуласы дейді, әдістің қателігін азайту мақсатында аралықты бірнеше бөлікке бөліп, әр аралықты тіктөртбұрышпен толтырып, ауданын тауып, барлық аудандарды бір біріне қосады:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}[f(a+\frac{h}{2})+f(a+\frac{3h}{2})+\dots+f(a+\frac{2n-1}{2}h)]+R \qquad (5.6)$$

$$R=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\xi);$$

$$f''(\xi)=\max_{[a,b]}|f''(x)|$$

Мысалы:

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x};$ n = 5

$h=0,2;$

$a+\frac{h}{2}=0,1$

$a+\frac{3h}{2}=0,3$

$a+\frac{5h}{2}=0,5$

$a+\frac{7h}{2}=0,7$

$a+\frac{9h}{2}=0,9$

$f(0,1) = 0.9091$

$f(0,3) = 0.7692$

$f(0,5) = 0.6667$

$f(0,7) = 0.5882$

$f(0,9) = 0.5263$

Табылған мәндерді (5.6)-формулаға қойсақ:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{5}[f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7) + f(0,9)] + R = 0.6919 + 0.0033$$

Жоғарыда келтірілген мысалдармен салыстыру арқылы қай әдістің қателігі аз екенін анықтай аласыздар.

Бақылау сұрақтары:

1. Сандық интегралдау есебіне мысал келтіріңіз?
2. Трапеция әдісі қалай жүзеге асады?
3. Симпсон әдісі қалай жүзеге асады?
4. Тіктөртбұрыштар әдісі қалай жүзеге асады?

Тәжірибелік жұмыс №10: Болжау-түзеу схемасын пайдаланып КДТ сандық шешімін табу.

Мақсаты: *Қарапайым дифференциалдық теңдеулерді шешудің бірқадамды сандық әдістерімен есептер шығаруды үйрену*

Тапсырма:

Төмендегі қарапайым дифференциалдық теңдеулерді [0.2; 1.2] аралығында 0.1 қадаммен y(0.2)=0.25 бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімін Эйлер және Эйлер-Коши әдістерімен тауып, қателіктерін бағалау. Есептеуді үтірден кейін 4 орынмен жүргізу.

№ 1.

$$y' = 0.133(x^2 + \sin 2x) + 0.872y$$

№ 2.

$$y' = 0.215(x^2 + \cos 1.5x) + 1.283y$$

№ 3

$$y' = 0.158(x^2 + \sin 0.8x) + 1.164y$$

№ 4

$$y' = 0.173(x^2 + \cos 0.7x) + 0.754y$$

№ 5

$$y' = 0.221(x^2 + \sin 1.2x) + 0.452y$$

№ 6

$$y' = 0.163(x^2 + \cos 0.4x) + 0.635y$$

№ 7

$$y' = 0.218(x^2 + \sin 1.6x) + 0.718y$$

№ 8

$$y' = 0.145(x^2 + \cos 0.5x) + 0.842y$$

№ 9

$$y' = 0.213(x^2 + \sin 1.8x) + 0.368y$$

№ 10

$$y' = 0.127(x^2 + \cos 0.6x) + 0.573y$$

2. Берілген аралықта h=0,2 қадаммен теңдеулерді және теңдеулер жүйелерін Рунге-Кутта әдісімен шешу.

a) $y' = y - x,$ y(0)=1.5; a=0; b=1;

b) $y' = \frac{y}{x} - y^2,$ y(1)=1; a=1; b=2;

c) $\begin{cases} y' = z + 1 \\ z' = y - x \end{cases},$ y(0)=1; z(0)=1; a=0; b=1;

d) $y' = x + y$, y(0)=1, табу керек y(0.5)

e) $y' = x^2 + y$, y(0)=1, табу керек y(1)

f) $y' = 2y - 3$, y(0)=1, табу керек y(0.5)

g) $\begin{cases} y' = -x + 2y + z \\ z' = x + 2y + 3z \end{cases}$ y(0)=2, z(0)=-2, x=0.5 болғандағы y,z-тің мәндерін табу керек

i) $\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases}$ y(0)=2, z(0)=-1, x=0.5 болғандағы y,z-тің мәндерін табу керек

3. Рунге-Кутта әдісін қолданып берілген аралықта 10^{-4} дәлдікпен төмендегі ҚДТ –ді шешу.

a) $y' = xy^3 - y$, y(0)=1, a=0, b=1

b) $y' = y^2 e^x - 2y$, y(0)=1, a=0, b=1

c) $y' = \dfrac{1}{y^2 - x}$, y(1)=0, a=1, b=2

4. Рунге-Кутта әдісін қолданып бастапқы шарты x(0)=0 болғанда төмендегі теңдеулердің шешімдерін анықтау. h=0,1 болсын.

a) $y' = \dfrac{\cos(bt)}{a + x^2}$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.8k, k=0,1,2

b) $y' = \dfrac{a}{t^2 + x^2 + b}$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.4k, k=0,1,2,3,4,5

c) $y' = e^{-at}(x^2 + b)$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.4k, k=0,1,2,3,4,5

d) $y' = \cos(at + x) + (t - x)$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5

e) $y' = 1 - \sin(at + x) + \dfrac{bx}{2 + t}$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.8k, k=0,1,2

f) $y' = \dfrac{\cos x}{a + t} + x^2$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5

g) $y' = 1 + ax\sin t - x^2$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5

5. Рунге-Кутта әдісін қолданып 10^{-4} дәлдікке дейін төмендегі теңдеулерді шешу.

a) $y' = -\dfrac{y}{x} - \dfrac{2y^2}{\alpha} Lnx$, y(1)=1, a=1, b=2, $\alpha = 0.5 + 0.25 \cdot k$, $\mathrm{k} = 0,1,2,...,20$

b) $y' = \dfrac{1}{\alpha \cos x} - ytgx$, y(0)=1, a=0, b=1, $\alpha = 0.5 + 0.01 \cdot k$, $\mathrm{k} = 0,1,2,...,20$

Тапсырманы орындауға әдістемелік нұсқаулар:

Эйлер әдісі

Коши есебін шешудің бұл әдісі бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді интегралдауға мүмкіндік береді. Бұл әдістің дәлдігі төмен. Сондықтан практикада көп қолданылмайды. Бірақ бұл әдістің негізінде басқа тиімді, бірақ күрделі әдістерді меңгеру жеңілдейді.

(6.1)-(6.2) Коши есебі берілсін.

Геометриялық мағынасы: h қадам таңдап алып берілген аралықта бірдей қадаммен нүктелер жиынын құраймыз:

$$x_i = x_0 + ih \qquad (i=0,1,2,\ldots). \qquad (6.4)$$

$M_0(x_0,y_0)$ нүктесінен өтетін ізделінді y=y(x) интегралдық қисықты төбелері M_i (x_i,y_i) (i=0,1,2,…) болатын Эйлер сынықтарымен $M_0M_1M_2$… алмастырылады:

$$\frac{y_{i+1} + y_i}{h} = f(x_i, y_i) \qquad (6.5)$$

Әрбір M_iM_{i+1} сынықтары бағыты M_i нүктелерінен өтетін (6.1)-теңдеумен берілген интегралдық қисықтың бағытымен беттеседі.

Сонда есептеу формуласы келесі түрде жазылады:

$$Y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad (6.6)$$

$$\Delta y_i = hf(x_i,y_i) \quad (i=0,1,2,\ldots)$$

Әдіс теңдеулер жүйесіне де қолданылады. Ол 2-мысалмен келтірілген.

1-Мысал:

Эйлер әдісін қолданып [0,1] аралығында h=0,2 қадаммен $y' = y - \dfrac{2x}{y}$ теңдеуін және y(0)=1 бастапқы шартты қанағаттандыратын мәндер кестесін құру керек болсын.

Есептеу нәтижелері 1-кестеде келтірілген. Кестенің толтырылуы:

Бірінші жолға i=0 болғанда бастапқы мәндер жазылады: $x_0=0$; $y_0=1{,}0000$. Үтірден кейін мәнді цифрларды жоғалтпау үшін 4 орын сақтап отырайық. Осы мәндер және (6)-формула бойынша $f(x_0,y_0)=1$, сосын $\Delta y_0 = 0.2$, $y_1=1+0{,}2=1{,}2$ мәндері есептеледі.

Екінші жолға i=1 болғанда $x_1=0.2$, $y_1=1.2000$ мәндері жазылады. Осы мәндерді қолданып $f(x_1,y_1)=0.8667$ мәні, $\Delta y_1 = hf(x_1, y_1) = 0.2 \cdot 0.8667 = 0.1733$ мәні есептеледі. Сосын $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1.2 + 0.1733 = 1.3733$ мәнін анықтауға болады. Дәл осылайша i=2,3,4,5 болғандағы есептеулерді анықтауға болады.

Кестенің ең соңғы бағанында салыстыру үшін теңдеудің дәл шешімінің $y = \sqrt{2x+1}$ мәндері келтірілген. Кестеден абсолютті қателіктің мәні e=0,0917, салыстырмалы қателігінің 5% екендігі көрінеді.

1-кесте . $y' = y - \dfrac{2x}{y}$ теңдеуін есептеу алгоритмі.

I	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$-ді есептеу		Δy_i	$y = \sqrt{2x+1}$
			$\dfrac{2x_i}{y_i}$	$y_i - \dfrac{2x_i}{y_i}$		
0	0	1,0000	0	1,0000	0,2000	1,0000
1	0,2	1,2000	0,3333	0,8667	0,1733	1,1832
2	0,4	1,3733	0,5928	0,7805	0,1561	1,3416
3	0,6	1,5294	0,7846	0,7458	0,1492	1,4832
4	0,8	1,6786	0,9532	0,7254	0,1451	1,6124
5	1,0	1,8237				1,7320

2-мысал:

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$$

Бастапқы шарттары: $y(1) = 0.77; \quad y' = -0.44$.

Аралық [1, 1.5], қадам h=0.1 болсын. Мұндай жағдайда $y' = z$; $y'' = z'$ алмастыру қолдану арқылы 1-ретті теңдеулер жүйесін құрып алуға болады:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -\dfrac{z}{x} - y \end{cases}$$ және бастапқы шарттары: $y(1) = 0.77; \quad z(1) = -0.44.$

Мұндай жүйелер үшін Эйлер формуласы келесі түрде жазылады:

$Y_{i+1}=y_i+hf_1(x_i,y_i,z_i)$

$z_{i+1}=z_i+hf_2(x_i,y_i,z_i)$, i=0,1,2,… (6.7)

(6.7)-ні қолдансақ және $f_1(x,y,z)=z$; $f_2(x,y,z)= -\dfrac{z}{x} - y$ болатынын ескерсек:

i=0; $x_0=1.00$; $y_0=0.77$; $z_0=-0.44$; $f_1(x_0,y_0,z_0)=-0.44$; $f_2(x_0,y_0,z_0)= -\dfrac{z_0}{x_0} - y_0 =-0.33$;

$y_1=y_0+\Delta y_0=0.726$; $z_1=z_0+\Delta z_0=-0.473$ екендігі шығады. Дәл осылайша келесі мәндерді табу оңайға түседі.

Эйлер – Коши әдісі

Бастапқы нүктедегі ақиқат қисыққа жанама көлбеуі бұрышының тангенсі белгілі және $y'(x_0)$-ға тең болса да, ол тәуелсіз айнымалының өзгеруіне байланысты өзгеріп отырады. Сондықтан x_0+h нүктесінде жанама көлбеуі x_0 нүктесіндегі жанама көлбеуіндей болмайды. Осыдан, h интервалында бастапқы жанама көлбеуін сақтай отырып есептеу барысында қателік пайда болады. Эйлер әдісінің дәлдігін арттыру үшін туынды аппроксимациясын жақсарту керек, яғни интервалдың бастапқы және соңғы нүктелерінде туындының орта мәнін алуға болады. Бұл әдісті Эйлер – Коши әдісі дейді. Бұл әдісте алдымен Эйлер формуласы қолданылады:

$y^*_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, i=0,1,2,… Сосын осы мәнді интервал соңындағы $f(x_{i+1}, y^*_{i+1})$ туынды мәнін жуықтап есептеуге қолданады. Табылған екі мәннің ортасын анықтап, дәл мәнге өте жуық мән аламыз, бұл формула Эйлер – Коши формуласы деп аталады:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})] \qquad (6.8)$$

Рунге-Кутта әдісі

Бұл әдіс те бірқадамды әдіске жатады.

$$y' = f(x, y) \qquad (6.9)$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad (6.10)$$

(6.9)-теңдеу екі өлшемді қарапайым дифференциалдық теңдеу (ҚДТ) және (6.10)-бастапқы шарт берілсін. [x_0, x_n] аралығында y-тің мәндерін анықтап, функция графигін сызу керек болсын.

$x_i = x_0 + ih$ нүктелерінде $y(x_i)$, $i = 1,2,3,..., n$ мәндерін Рунге-Кутта формуласымен табамыз:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(K_1^i + 2K_2^i + 2K_3^i + K_4^i), \quad i = 0,1,2,3,...$$

Мұндағы К аралық сандары төмендегідей табылады:

$$K_1^i = hf(x_i, y_i)$$

$$K_2^i = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^i}{2})$$

$$K_3^i = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^i}{2})$$

$$K_4^i = hf(x_i + h, y_i + K_3^i)$$

Практикада есептеу қадамдарын 2-кестеге толтырған тиімді.

2-кесте. Рунге-Кутта әдісінің схемасы.

i	X	Y	K=hf(x,y)	Δy
0	x_0 $x_0 + \frac{h}{2}$ $x_0 + \frac{h}{2}$ $x_0 + h$	y_0 $y_0 + \frac{K_1^0}{2}$ $y_0 + \frac{K_2^0}{2}$ $y_0 + K_3^0$	$K_1^0 = hf(x_0, y_0)$ $K_2^0 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^0}{2})$ $K_3^0 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^0}{2})$ $K_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3^0)$	$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0)$
1	x_1	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$K_1^1 = hf(x_1, y_1)$	$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(K_1^1 + 2K_2^1 + 2K_3^1 + K_4^1)$

	$x_1+\frac{h}{2}$ $x_1+\frac{h}{2}$ x_1+h	$y_1+\frac{K_1^1}{2}$ $y_1+\frac{K_2^1}{2}$ $y_1+K_3^1$	$K_2^1=hf(x_1+\frac{h}{2},y_1+\frac{K_1^1}{2})$ $K_3^1=hf(x_1+\frac{h}{2},y_1+\frac{K_2^1}{2})$ $K_4^1=hf(x_1+h,y_1+K_3^1)$	
2	x_2	$y_2=y_1+\Delta y_1$	Т.с.с.	

Қадамның дұрыс таңдалуын $\Theta=\left|\frac{K_2^i-K_3^i}{K_1^i-K_4^i}\right|$ бөлшегін есептеу арқылы қадағалауға болады, оның мәні бірнеше жүздіктен аспаса қадам дұрыс таңдалынды, кері жағдайда қадамды кішірейту керек.

Бұл әдістің дәлдігі 4-ші ретті. Қателігін бағалау өте күрделі, сондықтан екілік есептеу арқылы алынған мәндер бір бірімен салыстырылып, айырмасы дәлдіктен асып кетпеуі тексеріледі, егер айырма мәндері көп ауытқыса, есептеудің келесі қадамындағы х мәнін екі еселенген қадаммен алады, әйтпесе қадамның жартысын алады.

<u>1-мысал:</u> Рунге-Кутта әдісін қолданып $y'=0,25y^2+x^2$ теңдеуін шешу. Бастапқы шарты y(0)=-1, h=0.1, аралық [0,0.5] болсын.

Шешімі:

Есептеу қадамдарын 3-кестеге толтырып отырған дұрыс. Кестені толтыру ережесі:

1. 1-ші жолға бастапқы шарт мәндерін жазамыз. $X_0=0$, $y_0=-1$.
2. $f(x_0, y_0)=0.25$, $K_1^0=0.1*0.25=0.025$ мәндерін тауып аламыз.
3. 2-ші жолға $x_0+\frac{h}{2}=0.05,\ \ y_0+\frac{K_1^0}{2}=-1+0,025:2=-0.098750$ мәндерін жазамыз.
4. $f(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{K_1^0}{2})=0,25\cdot(-0,98750)^2+0,05^2=0,24629,$

   $K_2^0=0,1\cdot f(x_0+\frac{0,1}{2},y_0+\frac{K_1^0}{2})=0,1\cdot 0,24629=0,0224629$ мәндерін есептейміз.
5. 3-ші жолға $x_0+\frac{h}{2}=0.05,\ \ y_0+\frac{K_2^0}{2}=-1+0,0224629:2=-0.098769$ мәндерін жазамыз.
6. $f(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{K_2^0}{2})=0,25\cdot(-0,98769)^2+0,05^2=0,24638,$

   $K_3^0=0,1\cdot f(x_0+\frac{0,1}{2},y_0+\frac{K_2^0}{2})=0,1\cdot 0,24638=0,024638$ мәндерін есептейміз.
7. 4-ші жолға $x_0+h=0,1,\ \ y_0+K_3^0=-1+0,024638=-0,97536$ мәндерін жазамыз.
8. $f(x_0+h,y_0+K_3^0)=0,25\cdot(-0,97536)^2+0,1^2=0,24783,$

   $K_4^0=0,1\cdot f(x_0+h,y_0+K_3^0)=0,1\cdot 0,24783=0,024783$ мәндерін есептейміз.
9. 5-ші жолға $\Delta y_0=\frac{1}{6}(K_1^0+2K_2^0+2K_3^0+K_4^0)=\frac{1}{6}0.148317=0.02472$ мәнін жазамыз.
10. 6-шы жолға $y_1=y_0+\Delta y_0=-1+0.02472=-0.97528$
11. Осы алгоритмді қайталау арқылы кестенің қалған жолдары толтырылады.

Рунге-Кутта әдісін КДТ жүйесіне де қолдануға болады. Егер жүйе жоғарғы ретті болса, теңдеуді 1-ретті түрге келтіріп алу керек.

3-кесте . $y'=0,25y^2+x^2$ теңдеуін шешудің кестелік алгоритмі.

i	X	Y	K_1^0	Δy	Θ
0	0 0.05 0.05 0.1	-1 -0.98750 -0.98769 -0.97536	$K_1^0 = 0.025$ $K_2^0 = 0.024629$ $K_3^0 = 0.024638$ $K_4^0 = 0.024783$	$\Delta y_0 = 0.02472$	0.024
1	0.1 0.15 0.15 0.2	-0.97528 -0.96289 -0.96257 -0.94987	$K_1^1 = 0.024779$ $K_2^1 = 0.025429$ $K_3^1 = 0.025413$ $K_4^1 = 0.026557$	$\Delta y_1 = 0.02550$	0.025
2	0.2 0.25 0.25 0.3	-0.94978 -0.93650 -0.93569 -0.92164	0.026553 0.028176 0.028138 0.030236	0.02824	0.023
3	0.3 0.35 0.35 0.4	-0.92154 -0.90642 -0.90514 -0.88881	0.030231 0.032790 0.032732 0.035743	0.03284	0.023
4	0.4 0.45 0.45 0.5	-0.88870 -0.87083 -0.86910 -0.84957	0.035745 0.039209 0.039134 0.04307	0.03925	0.022
5	0.5	-0.84945			

Бақылау сұрақтары:

1. Эйлер әдісі?
2. Сандық интегралдау есебі дегеніміз не?
3. Эйлер – Коши әдісі?
4. Рунге-Кутта әдісі?

Тәжірибелік жұмыс №11: Адамс схемасын екі теңдеу жүйесінің сандық шешімін табу
Мақсаты: *Қарапайым дифференцилдық теңдеулерді шешудің көпқадамды сандық әдістерімен есептер шығаруды үйрену*
Тапсырма:
1. Адамс әдісін қолданып 10^{-2} дәрежесіне дейінгі дәлдікпен төмендегі қарапайым дифференциалдық теңдеулер мен теңдеулер жүйелерін шешу. Бастапқы мәндерді Рунге-Кутта әдісімен есептеу.

a) $y' = x + y$, y(0)=1, табу керек y(0.5)

b) $y' = x^2 + y$, y(0)=1, табу керек y(1)

c) $y' = 2y - 3$, y(0)=1, табу керек y(0.5)

d) $\begin{cases} y' = -x + 2y + z \\ z' = x + 2y + 3z \end{cases}$ y(0)=2, z(0)=-2, x=0.5 болғандағы y,z-тің мәндерін табу керек

e) $\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases}$ y(0)=2, z(0)=-1, x=0.5 болғандағы y,z-тің мәндерін табу керек

2. Адамс әдісін қолданып берілген аралықта 10^{-4} дәлдікпен төмендегі ҚДТ –ді шешу. Бастапқы мәндерді Рунге-Кутта әдісімен анықтау.

a) $y' = xy^3 - y$, y(0)=1, a=0, b=1

b) $y' = y^2 e^x - 2y$, y(0)=1, a=0, b=1

c) $y' = \dfrac{1}{y^2 - x}$, y(1)=0, a=1, b=2

3. Адамс әдісін қолданып бастапқы шарты x(0)=0 болғанда төмендегі теңдеулердің шешімдердің мәндер кесте сын екі қадамға жалғастыру. h=0,1 болсын. Бастапқы мәндерді Рунге-Кутта әдісімен анықтау.

a) $y' = \dfrac{\cos(bt)}{a + x^2}$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.8k, k=0,1,2

b) $y' = \dfrac{a}{t^2 + x^2 + b}$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.4k, k=0,1,2,3,4,5

c) $y' = e^{-at}(x^2 + b)$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.4k, k=0,1,2,3,4,5

d) $y' = \cos(at + x) + (t - x)$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5

e) $y' = 1 - \sin(at + x) + \dfrac{bx}{2 + t}$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.8k, k=0,1,2

f) $y' = \dfrac{\cos x}{a + t} + x^2$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5

g) $y' = 1 + ax\sin t - x^2$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5

4. Милн әдісін қолданып 10^{-4} дәлдікке дейін төмендегі теңдеулерді шешу. Бастапқы мәндерді бірқадамды әдістердің біреуімен анықтау.

a) $y' = -\dfrac{y}{x} - \dfrac{2y^2}{\alpha} Lnx$, y(1)=1, a=1, b=2, $\alpha = 0.5 + 0.25 \cdot k$, $k = 0,1,2,...,20$

b) $y' = \dfrac{1}{\alpha \cos x} - ytgx$, y(0)=1, a=0, b=1, $\alpha = 0.5 + 0.01 \cdot k$, $k = 0,1,2,...,20$

5. Адамс әдісін қолданып $y' = f(x, y)$ дифференциалдық теңдеудің $y(x_0) = y_0$ бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімдерін $[0,1]$ аралығында $h = 0,1$ қадаммен анықтау. Есептеуді төрт ондық таңбамен жүргізу. Бастапқы аралықтағы мәндерді Рунге-Кутта әдісімен анықтау.

a) $y' = 1 + 0{,}2y\sin x - y^2$, $y(0) = 0.$

b) $y' = \cos(x + y) + 0{,}5(x - y)$, $y(0) = 0.$

c) $y' = \dfrac{\cos x}{x+1} - 0{,}5y^2, \qquad y(0) = 0.$

d) $y' = (1 - y^2)\cos x + 0{,}6y, \qquad y(0) = 0.$

e) $y' = 1 + 0{,}4y\sin x - 1{,}5y^2, \qquad y(0) = 0.$

f) $y' = \dfrac{\cos y}{x+2} + 0{,}3y^2, \qquad y(0) = 0.$

g) $y' = \cos(1{,}5x + y) + (x - y), \qquad y(0) = 0.$

h) $y' = 1 - \sin(x + y) + \dfrac{0{,}5y}{x+2}, \qquad y(0) = 0.$

i) $y' = \dfrac{\cos y}{1{,}5 + x} + 0{,}1y^2, \qquad y(0) = 0.$

j) $y' = 0{,}6\sin x - 1{,}25y^2 + 1, \qquad y(0) = 0.$

Тапсырманы орындауға әдістемелік нұсқаулар:

$$y' = f(x, y) \qquad (6.11)$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad (6.12)$$

(6.11)-теңдеу екі өлшемді қарапайым дифференциалдық теңдеу (ҚДТ) және (6.12)-бастапқы шарт берілсін. $[x_0, x_n]$ аралығында у-тің мәндерін анықтап, функция графигін сызу керек болсын. Бұл есепті шешудің көпқадамды әдістері: Адамс және Милн әдістері деп аталады.

Адамс әдісі

Адамс әдісінің идеясы бірқадамды әдіспен табылған мәндер кесте сын толықтыру немесе жалғастыру. Сондықтан есептеің берілгенінде бастапқы шартпен бірге бірнеше нүктедегі функция мәндері табылған болады.

Бастапқы шартты пайдаланып, функция өсімшесінің мәндерін анықтаймыз, оларды q_i (i=0,1,2,3) деп белгілейік:

$$q_0 = h \cdot y_0' = h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$q_1 = h \cdot y_1' = h \cdot f(x_1, y_1)$$

$$q_2 = h \cdot y_2' = h \cdot f(x_2, y_2)$$

$$q_3 = h \cdot y_3' = h \cdot f(x_3, y_3)$$

Енді осы мәндердің шектік айырымдарын табамыз:

$$\Delta q_k = q_{k+1} - q_k$$

$$\Delta^2 q_k = \Delta q_{k+1} - \Delta q_k$$

$$\Delta^3 q_k = \Delta^2 q_{k+1} - \Delta^2 q_k, \; k = 0,1,2,3$$

Енді функцияның мәндерін есептеу үшін Адамс формуласын қолданамыз. Ол екі түрлі:

1. Экстраполяциялық формула:

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3},$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \; k = 3,4,5,6,... \qquad (6.13)$$

Бұл формуламен табылған y_{k+1} мәндерін алдын ала анықталған функция мәндері деп атаймыз және $y^{пред}{}_{k+1}$, $\Delta y_k^{пред}$ деп белгілейміз. (6.13)-формуламен табылған мәндерді тереңірек анықтау үшін интерполяциялық формуланы қолданамыз.

2. Интерполяциялық формула :

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_k - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 q_{k-2},$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k,\ k = 3,4,5,6,... \qquad (6.14)$$

Бұл формуламен табылған y_{k+1} мәндерін жөнделген немесе түзетілген функция мәндері деп атаймыз және $y^{корр}{}_{k+1},\ \Delta y_k^{корр}$ деп белгілейміз. Сосын (6.13) және (6.14)-формулалармен алынған мәндерді бір бірімен салыстырамыз. Егер төмендегі шарт орындалса:

$\left|\Delta y_k^{пред} - \Delta y_k^{корр}\right| \le \frac{1}{14}\left|y_k^{пред}\right|$ онда әдіс өзінің жалғыз шешіміне жинақталады, орындалмаса – қадамды кішірейтіп есептеуді қайта жүргізу керек.

Практикада есептеуді жеілдету үшін Адамстың басқа формулалары да қолданылады:

1-формуласы: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}),\ k = 3,4,5,6,7,...$ (6.15)

2-формуласы: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9y'_{k+1} + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}),\quad k = 3,4,5,6,7,...$ (6.16)

Адамс әдісі дифференциалдық теңдеулер жүйесіне де қолданылады:

$y' = f_1(x, y, z)$

$y' = f_2(x, y, z)$ жүйесі берілсе, оған қолданылатын Адамс формулалары төмендегідей болады:

$$\Delta y_k = p_k + \frac{1}{2}\Delta p_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 p_{k-1} + \frac{3}{8}\Delta^3 p_{k-3} \qquad (6.17)$$

$$\Delta z_k = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_k + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3} \qquad (6.18)$$

Мұндағы: $p_k = h\cdot y'_k = h\cdot f_1(x_k, y_k, z_k)$,

$q_k = h\cdot z'_k = h\cdot f_2(x_k, y_k, z_k)$

Милн әдісі.

Бұл әдіс те Адамс әдісі сияқты мәндер кесте сын жалғастыруға мүмкіндік береді. Теңдеу, бастапқы шарт, және қандай да бір әдіспен табылған функцияның бірнеше мәндері берілсін. Функцияның қалған мәндерін анықтау керек.

$y' = f(x, y)$ (6.19)

$y(x_0) = y_0$ (6.20)

$x_i = x_0 + ih,\ \ y(x_i),\ \ \mathrm{i} = 1,2,3$

$y(x_i),\ \ \mathrm{i} = 4,5,6,...$ мәндерді анықтау үшін Милн формулаларын қолданамыз:

1. Алдын ала анықтау: $y^{пред}{}_i = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2y'_{i-3} - y'_{i-2} + 2y'_{i-1})$,
2. Осы мәндерді қолданып $y'_i = f(x_i, y_i^{пред})$
3. Милннің 2-ші формуласымен алдында табылған мәндерді түзетеміз немесе дәлдейміз: $y_i^{корр} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(2y'_{i-2} + 4y'_{i-1} + y'_i)$.
4. Табылған мәндердің қателігін бағалаймыз: $e_i \approx \frac{1}{29}\left|y_i^{корр} - y_i^{пред}\right|$. Бұл формула есептеудің әр қадамында алынған мәннің дәлдігін тексеріп отырады. Егер дәлдік берілсе және $e_i \le e$ болса, онда $y_i^{корр} \approx y_i$ деп алып y_{i+1}-лерді есептеуге болады, кері жағдайда қадамды кішірейту керек.

Милн әдісін жүйені шешуге де қолдануға болады. Егер жоғарғы ретті теңдеу берілсе оны 1-ші ретті теңдеуге келтіру керек.

1- **мысал:** Адамс әдісін қолданып $y' = 0,25y^2 + x^2$ теңдеуін шешу. Бастапқы шарты y(0)=-1

Шешімі:

(6.15)-(6.16)-формулаларды қолданып есептейік. Рунге-Кутта әдісімен алдын ала бірнеше мәндер табылған болсын.

$X_1=0.1$ $y_1=-0.97528$

$X_2=0.2$ $y_2=-0.94978$

$X_3=0.3$ $y_3=-0.92154$

Есептеу қадамдарын 1-кестеге жазуға болады.

Кестені толтыру ережесіне тоқталайық:

1,2- бағандарға белгілі мәндерді толтырамыз. 3-бағанда y_k-дің (k=0,1,2,3) белгілі мәндерін толтырамыз. Осы мәндерді қолданып,

1-кесте . $y' = 0,25y^2 + x^2$ теңдеуін шешудің алгоритмі.

K	x_k	y_k	$Y`_k$	$\frac{\alpha_k}{24}$	$\frac{\beta_k}{24}$	$h\frac{\alpha_k}{24}$	$h\frac{\beta_k}{24}$
0	0.0	-0	0.25				
1	0.1	-0.97528	0.24779				
2	0.2	-0.94978	0.26552				
3	0.3	-0.92154	0.30232	0.32834	0.32840	0.03283	0.03284
4	0.4	-0.88871	0.35745	0.39237	0.39246	0.03924	0.03925
		-0.88870					
5	0.5	-0.84946	0.43040				
		-0.84946					

$y'_k = f\,(x_k, y_k)$ формуласымен 3-бағандағы сәйкес мәндерді анықтаймыз. 5-6 – бағандардағы α, β белгілеулері (6.15)- (6.16)- формулалардағы жақша ішіндегі қосындыны білдіреді. K=3 болғанда $\frac{\alpha_3}{24} = \frac{1}{24}(55y''_3 - 59y'_2 + 37y'_1 - 9y'_0) = 0.32834$ мәнін 5-бағанның сәйкес жолына жазамыз. K=4 болғанда (6.15)-формуламен $y_4^{пред} = y_3 + h\frac{\alpha_3}{24} = -0.92154 + 0.1 \cdot 0.32834 = -0.88871$ мәнін тауып, кестеде өз орнына жазамыз. Осы табылған x_4, y_4 мәндерін қолданып табамыз. $y'_4 = f\,(x_4, y_4) = 0,35745$ мәнін есептеп өз орнына жазамыз. Әрі қарай K=3 болғанда $\frac{\beta_3}{24} = \frac{1}{24}(9y'_4 + 19y'_3 - 5y'_2 + y'_1) = 0.32840$ мәнін есептеп өз орнына жазамыз. Енді табылған y_4 мәнін (6.16)- формуламен түзетеміз: $y_4^{корр} = y_3 + h\frac{\beta_3}{24} = -0.92154 + 0.1 \cdot 0.32840 = -0.88870$. Табылған екі мән бір біріне өте жуық болғандықтан кестедегі алдыңғы табылған $y_4^{пред}$ мәнін $y_4^{корр}$ мәнімен түзетеміз. Осы әдіспен кестенің келесі жолын толтыруға болады.

Бақылау сұрақтары:

1. Қарапайым дифференциалдық теңдеулерді шешудің көпқадамды сандық әдістерін атаңыз?
2. Адамс әдісі?
3. Милн әдісі?
4. Қарапайым екіөлшемді дифференциалдық теңдеу қалай жазылады?

СОӨЖ-НА АРНАЛҒАН ТАПСЫРМАЛАР ЖӘНЕ НҰСҚАУЛАР

СОӨЖ ТАПСЫРМАЛАРЫ:

Тапсырмалар

1-СОӨЖ: «Сызықты емес теңдеулерді және теңдеулер жүйесін шешудің сандық әдістері»

Берілген теңдеулердің түбір жатқан аралығын тауып, жоғарыда келтірілген сандық әдістермен түбірлерін анықтау. Әр түрлі әдіспен анықталған түбірлерді бір бірімен салыстырып қателіктерін көрсету. Дәлдікті өздеріңіз таңдап алыңыздар.

№	Теңдеулер	түсіндірме
1	$(0,2x)^3=\cos(x)$	
2	x-10sin(x)=0	
3	$2^{-x}=\sin(x)$	X<10
4	$2^x-2\cos(x)=0$	x>-10
5	Lg(x+5)=cos(x)	X<5

1.1. Берілген сызықты емес теңдеулер жүйелерінің түбірлерін Ньютон, Зейдель, қарапайым итерация әдістерімен анықтау.

№	Жүйелер	Қосымша шарт
1	$\begin{cases} 2x^2-xy-5x+1=0 \\ x+3\lg x-y^2=0 \end{cases}$	
2	$\begin{cases} 2x^2-xy--y^2+2x-2y+6=0 \\ y-x-1=0 \end{cases}$	Y=0, y=x, x=0.5 түзулерімен шектелген облыстағы түбірлерін табу.
3	$\begin{cases} \alpha x^3-y^2-1=0 \\ xy^3-y-4=0 \end{cases}$	$\alpha=1+0.5\cdot k$ $(\mathrm{k}=0,10,2,...)$ Y=0, y=x, x=0.5 түзулерімен шектелген облыстағы түбірлерін табу.
4	$\begin{cases} x^2y^2-3x^3-6y^3+8=0 \\ x^4-9y+2=0 \end{cases}$	Y=0, y=x, x=0.5 түзулерімен шектелген облыстағы түбірлерін табу.
5	$\begin{cases} \sin x-y=1.32 \\ \cos y-x=-0.85 \end{cases}$	Y=0, y=x, x=0.5 түзулерімен шектелген облыстағы түбірлерін табу.

2 - СОӨЖ: «Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің сандық әдістері»

Гаусс, Жордан-Гаусс, квадрат түбірлер, Зейдель, қарапайым итерация әдістерін қолданып төмендегі жүйелерді шешу.

№1

$$\begin{cases} 4.4x_1-2.5x_2+19.2x_3-10.8x_4=4.3 \\ 5.5x_1-9.3x_2-14.2x_3+13.2x_4=6.8 \\ 7.1x_1-11.5x_2+5.3x_3-6.7x_4=-1.8 \\ 14.2x_1+23.4x_2-8.8x_3+5.3x_4=7.2 \end{cases}$$

№2

$$\begin{cases} 8.2x_1-3.2x_2+14.2x_3+14.8x_4=-8.4 \\ 5.6x_1-12x_2+15x_3-6.4x_4=4.5 \\ 5.7x_1+3.6x_2-12.4x_3-2.3x_4=3.3 \\ 6.8x_1+13.2x_2-6.3x_3-8.7x_4=14.3 \end{cases}$$

№3

№4

$$\begin{cases} 5.7x_1 - 7.8x_2 - 5.6x_3 - 8.3x_4 = 2.7 \\ 6.6x_1 + 13.1x_2 - 6.3x_3 + 4.3x_4 = -5.5 \\ 14.7x_1 - 2.8x_2 + 5.6x_3 - 12.1x_4 = 8.6 \\ 8.5x_1 + 12.7x_2 - 23.7x_3 + 5.7x_4 = 14.7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 - 15.5x_4 = 28 \\ 8.3x_1 - 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 = -4.7 \\ 6.4x_1 - 8.5x_2 - 4.3x_3 + 8.8x_4 = 7.7 \\ 17.1x_1 - 8.3x_2 + 14.4x_3 - 7.2x_4 = 13.5 \end{cases}$$

№5

$$\begin{cases} 15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 = -2.4 \\ 8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 = 5.6 \\ 6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 = 7.7 \\ 14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 = 23.4 \end{cases}$$

3 – СОӨЖ: «Функцияны интерполяциялау»

Функцияның мәндер таблицасы берілген:

X	1,50	1,54	1,56	1,60	1,63	1,70
У	3,873	3,924	3,950	4,000	4,037	4,123

Лагранж формуласын қолданып көрсетілген нүктелердегі функция мәндерін анықтау:

a) 1,52 b) 1,55 c) 1,58 d) 1,61 e) 1,67.

3. Функцияның мәндер таблицасы берілген:

X	2,0	2,3	2,5	3,0	3,5	3,8	4,0
У	5,848	6,127	6,300	6,694	7,047	7,243	7,368

Лагранж формуласын қолданып көрсетілген нүктелердегі функция мәндерін анықтау:

a) 2,22 b) 2,41 c) 2,78 d) 3,34 e) 3,75, f) 3,88.

3. sin(x) функциясының x=0, $\pi/6$, $\pi/4$ $\pi/3$ $\pi/2$ нүктелеріндегі мәндерін біле отырып x=$\pi/12$ нүктесіндегі мәнін және қателігін анықтау.

4. Cos(x) функциясының x=0, $\pi/6$, $\pi/4$ $\pi/3$ $\pi/2$ нүктелеріндегі мәндерін біле отырып x=$\pi/5$ нүктесіндегі мәнін және қателігін анықтау.

5. $y=e^x$ функциясының мәндері таблицамен берілген. Сызықты интерполяциялау формуласын қолданып функцияның берілген нүктелердегі мәндерін анықтау.

X	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.60
e^x	1.6487	1.6653	1.6820	1.6989	1.7160	1.7333	1.7507	1.7683	1.7860	1.8040	1.8221

b) 0,507; b) 0,512; c) 0,523; d) 0,535; e) 0,541;
f) 0,556; i) 0,568; j) 0,571; k) 0,589; l) 0,594.

4 – ОСӨЖ: «Сандық интегралдау есебі»

Тапсырмалар:

1 $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 1.570796$

2 $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(e^{\frac{x}{2}}+3)} = 0.64041$

3 $\int_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.785398$

4 $\int_{1}^{3} \frac{dx}{1+x}$; n = 4

5 $\int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)\cdot(3t^2+4)}}$; $n = 4$

5 -СОӨЖ: «Қарапайым дифференциалдық теңдеулерді (ҚДТ) шешудің сандық әдістері»

Тапсырмалар:

1. Төмендегі қарапайым дифференциалдық теңдеулерді [0.2; 1.2] аралығында 0.1 қадаммен $y(0.2)=0.25$ бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімін Эйлер және Эйлер-Коши әдістерімен тауып, қателіктерін бағалау. Есептеуді үтірден кейін 4 орынмен жүргізу.

a) $y' = 0.163(x^2 + \cos 0.4x) + 0.635y$

b) $y' = 0.218(x^2 + \sin 1.6x) + 0.718y$

c) $y' = 0.145(x^2 + \cos 0.5x) + 0.842y$

d) $y' = 0.213(x^2 + \sin 1.8x) + 0.368y$

e) $y' = 0.127(x^2 + \cos 0.6x) + 0.573y$

2. Берілген аралықта h=0,2 қадаммен теңдеулерді және теңдеулер жүйелерін Рунге-Кутта әдісімен шешу.

g) $\begin{cases} y' = -x + 2y + z \\ z' = x + 2y + 3z \end{cases}$ y(0)=2, z(0)=-2, x=0.5 болғандағы y,z-тің мәндерін табу керек

i) $\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases}$ y(0)=2, z(0)=-1, x=0.5 болғандағы y,z-тің мәндерін табу керек

3. Рунге-Кутта әдісін қолданып бастапқы шарты x(0)=0 болғанда төмендегі теңдеулердің шешімдерін анықтау. h=0,1 болсын.

a) $y' = \frac{\cos(bt)}{a+x^2}$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.8k, k=0,1,2

b) $y' = \frac{a}{t^2+x^2+b}$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.4k, k=0,1,2,3,4,5

c) $y' = e^{-at}(x^2+b)$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.4k, k=0,1,2,3,4,5

d) $y' = \cos(at+x) + (t-x)$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5

e) $y' = 1 - \sin(at+x) + \frac{bx}{2+t}$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.8k, k=0,1,2

f) $y' = \frac{\cos x}{a+t} + x^2$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5

g) $y' = 1 + ax\sin t - x^2$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5

1. Адамс әдісін қолданып бастапқы шарты x(0)=0 болғанда төмендегі теңдеулердің шешімдердің мәндер кесте сын екі қадамға жалғастыру. h=0,1 болсын. Бастапқы мәндерді Рунге-Кутта әдісімен анықтау.

a) $y' = \dfrac{\cos(bt)}{a + x^2}$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.8k, k=0,1,2

b) $y' = \dfrac{a}{t^2 + x^2 + b}$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.4k, k=0,1,2,3,4,5

c) $y' = e^{-at}(x^2 + b)$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.4k, k=0,1,2,3,4,5

d) $y' = \cos(at + x) + (t - x)$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5

e) $y' = 1 - \sin(at + x) + \dfrac{bx}{2 + t}$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5, b=1+0.8k, k=0,1,2

f) $y' = \dfrac{\cos x}{a + t} + x^2$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5

g) $y' = 1 + ax\sin t - x^2$, a=1+0.4n, n=0,1,…, 5

2. Милн әдісін қолданып 10^{-4} дәлдікке дейін төмендегі теңдеулерді шешу. Бастапқы мәндерді бірқадамды әдістердің біреуімен анықтау.

a) $y' = -\dfrac{y}{x} - \dfrac{2y^2}{\alpha} Lnx$, y(1)=1, a=1, b=2, $\alpha = 0.5 + 0.25 \cdot k$, $k = 0,1,2,...,20$

b) $y' = \dfrac{1}{\alpha \cos x} - ytgx$, y(0)=1, a=0, b=1, $\alpha = 0.5 + 0.01 \cdot k$, $k = 0,1,2,...,20$

3. Адамс әдісін қолданып $y' = f(x, y)$ дифференциалдық теңдеудің $y(x_0) = y_0$ бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімдерін $[0,1]$ аралығында $h = 0,1$ қадаммен анықтау. Есептеуді төрт ондық таңбамен жүргізу. Бастапқы аралықтағы мәндерді Рунге-Кутта әдісімен анықтау.

k) $y' = 1 + 0,2y\sin x - y^2, \quad y(0) = 0.$

l) $y' = \cos(x + y) + 0,5(x - y), \quad y(0) = 0.$

m) $y' = \dfrac{\cos x}{x + 1} - 0,5y^2, \quad y(0) = 0.$

n) $y' = (1 - y^2)\cos x + 0,6y, \quad y(0) = 0.$

o) $y' = 1 + 0,4y\sin x - 1,5y^2, \quad y(0) = 0.$

p) $y' = \dfrac{\cos y}{x + 2} + 0,3y^2, \quad y(0) = 0.$

q) $y' = \cos(1,5x + y) + (x - y), \quad y(0) = 0.$

r) $y' = 1 - \sin(x + y) + \dfrac{0,5y}{x + 2}, \quad y(0) = 0.$

s) $y' = \dfrac{\cos y}{1,5 + x} + 0,1y^2, \quad y(0) = 0.$

t) $y' = 0,6\sin x - 1,25y^2 + 1, \quad y(0) = 0.$

6 – СОӨЖ: «Қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін шектік есептер.»
Тапсырмалар:

Қуалау және ақырлы-айырымдық, вариациялық әдістерді қолданып төмендегі қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін шектік есепті шешу:

a) $y'' + y'\sin ax + y = \dfrac{1}{b+\sin^2 ax}$, y(0)= y(1)=0, a=1+0,4k, k=0,1,2., b=2,5+0,5n, n=0,1,2,3,4,5.

b) $y'' + \dfrac{y'}{\sqrt{x^2+b}} + ay = x$, y(0)= y(1)=0, a=1+0,4k, k=0,1,2., b=2,5+0,5n, n=0,1,2,3,4,5.

c) $y'' - y'\cos x + y\sin x = f(x);\ \mathrm{y}(-\pi) = \mathrm{y}(\pi) = 2;$
$1.\ \mathrm{f(x) = cosx};\ 2.\ \mathrm{f(x) = sinx};\ 3.\ \mathrm{f(x) = cos(2x)}$

d) $y'' - 2xy' + 2y = f(x);\ \mathrm{y}(0) = 0;\ \mathrm{y}'(1) = 1;$
$1.\ \mathrm{f(x) = x};\ 2.\ \mathrm{f(x)} = 3\mathrm{x}^2 + x - 1;\ 3.\ \mathrm{f(x)} = 5\mathrm{x}^3 - 3x + x$

СӨЖ-НА АРНАЛҒАН ТАПСЫРМАЛАР ЖӘНЕ НҰСҚАУЛАР

1.	**2. Қателіктер теориясы.** Қателіктің басты бөлімін бағалау формуласы. Қателік көздері. Машиналық арифметикадағы кателіктер. **3. Матрица сипаттамасының белгісі-шарттасу саны.** Гаусстың белгісізді біртіндеп жою әдісі. Квадрат түбір әдісі. **4. Функцияны жуықтау.** Түпті айырымдар. Жоғарғы ретті түпті айырымдар. Жалпылама дәреже. Ньютонның бірінші және екінші интерполяциялық формулалары. Ньютон формулаларының қателігін бағалау. **5. Интегралдаудың сандық әдістері.** Тікбұрыш, трапеция, формулалары қателіктерін бағалау. Квадратуралық формулаларды қолдану. Рунге принципі.
6.	**7. Кәдімгі дифференциалдық теңдеулердің (КДТ) сандық әдістері.** Болжау-түзеу схемасы. Аппроксимация реті және жинақталуы. КДТ үшін Рунге-Кутта әдісі. Коэффициенттерін анықтау. $P = \frac{v}{dt} + f\frac{d}{du}$ операторының қасиеттері. Рунге-Кутта әдісінің жинақталуы. **8. Математикалық физиканың теңдеулерінің сандық әдістері.** Тор туралы түсінік. Тордағы айырымдық туындылар және олардың аппроксимациялау реті. Екінші ретті КДТ-ға сәйкес келетін айырымдық есеп. Қуалау әдісі және оның орнықтылығы. **9. Дербес туындылы математикалық физиканың теңдеулеріне сандық әдістер.** Бір өлшемді параболалық теңдеулер. Жылу өткізгіштік теңдеуі үшін аралас Коши есебіне сәйкес келетін айқындалған айырымдық есептер. Айырымдық схемалардың орнықтылығын зерттеу әдістері, энергетика теңсіздігі және максимум принциптерін пайдалану. **10. Гиперболалық теңдеулер.** Бір өлшемді тасымалданудың теңдеуіне аралас Коши есебі. Айқындалған айырымдық схемалар. Олардың аппроксимациясы мен орнықтылығын зерттеу. Компьютерде сандық шешімін табу алгоритмі. 11. **Эллиптикалық теңдеу.** Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебіне сәйкес келетін айырымдық есеп. Итерация әдісін негіздеу.

Тақырыптар бойынша сұрақтарға ауызша және жазбаша жауаптар берілуі керек.

МАТЕРИАЛДЫ МЕҢГЕРГЕНДІГІН БАҒАЛАУҒА АРНАЛҒАН СҰРАҚТАР

1. Абсолютті және салыстырмалы қателіктер
2. Қателіктерді бағалау әдістері
3. Қателіктер теориясының тура есебі
4. Қателіктер теориясының кері есебі
5. Қателіктерге қолданылатын арифметикалық амалдар
6. Функциялардың қателіктері
    7. Сызықты емес теңдеулердің түрлері
    8. Сызықты және сызықты емес теңдеулер туралы ұғым.
    9. Аралықты қақ бөлу әдісі
    10. Хорда әдісі
    11. Біріктірілген хорда және жанама әдісі
12. Сызықты және сызықты емес теңдеулер жүйесі
13. Теңдеулердің итерациялық түрі
14. Теңдеулер жүйесінің итерациялық түрі
15. Теңдеулерді және теңдеулер жүйесін итерациялық түрге келтіру әдістері
    16. Алгебралық және трансцендентті теңдеулер туралы ұғым.
    17. Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі
    18. Матрица және вектор ұғымы.
    19. Меншікті мәндер және меншікті векторлар
    20. Норма ұғымы. Метрикалық кеңістіктер.
    21. Сандық әдістердің нормада, метрикалық кеңістікте жинақтылығы
    22. Итерациялық әдістердің жинақтылығы
    23. Итерациялық процестерді құру
24. Сандық интегралдау есебі.
25. Интегралдау қадамын таңдау.
26. Интегралдау қателіктерін бағалау
27. Канторович әдісі және қателігі
28. Гаусс әдісі және қателігі
29. Қарапайым дифференциалдық теңдеулерді шешудің бірқадамды әдісі
30. Қарапайым дифференциалдық теңдеулерді шешудің көпқадамды әдісі
31. ҚДТ-ны шешу әдістерінің жинақтылығы
32. Бастапқы және шекаралық шарттардың берілуі және айырмашылықтары
33. Липшиц теоремасы және оның дифференциалдық теңдеулер шешіміне қатысы
    34. Шектік есептер ұғымы.
    35. ҚДТ үшін шектік есептердің қойылуы
    36. ҚДТ үшін шектік есептердің шешімінің жинақтылық шарттары
    37. ҚДТ үшін шектік есептерді шешудің итерациялық әдістері
    38. ҚДТ үшін шектік есептерді шешудің вариациялық әдістері
39. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің классификациясы
40. Гиперболалық типті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер және оларды шешу әдістері
41. Параболалық типті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер және оларды шешу әдістері
42. Эллипстік типті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер және оларды шешу әдістері
43. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешу әдістерінің жинақтылығы мен орнықтылығы

Диагностикалық-бақылаушы блок

Оқыту нәтижелеріне сәйкес тексеру сынақтарының сипаттамасы

1) Жоғарғы және дискреттік математика мен сандық әдістердің негіздерін қолдану	**1-есеп**: $y = \frac{C_1}{x} + C_2$ функциясының екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі болатынын табу керек. **2-есеп**: $y = \sqrt{1-2x}$ функциясының анықталу облысы мен өзгеру облысын табу **3-есеп**: $\frac{5}{7}; \frac{7}{10}; \frac{9}{13}; \frac{11}{16}; ... \frac{2n+3}{3n+4}; ...$ тізбектің шегін табу керек.
Берілген уақыт	1 сағат 20 минут
Оқыту нәтижесі	Пәнді оқытудағы мақсат студенттерді қолданбалы есептерді шығаруға бағытталған, математикалық әдістермен модельдердің, тілдердің өзара тығыз байланысқан жиынтығы ретінде қарауға болатын математикалык аппаратпен каруландыру.
Орындауды бағалау критерийлері	3 есепті шығарған студент «үздік» баға 2 есепті шығарған студент «жақсы» баға 1 есепті шығарған студент «қанағат» деген баға
Тапсырманы орындау тәртібі	«Дискретті математика» пәнін оқып білу үшін жоғары математиканың бірқатар бөлімдерімен таныс болуы және алгоритмдерге программалар құру дағдысы болу керек
Қажетті жабдықтар мен құралдардың тізбесі:	Дәптер, қалам, сызғыш, қарындаш, әдістемелік нұсқаулар, компьютер
Өткізу орны:	Дәрісхана № 216
Өткізу уақыты:	**«____» _______ 20____г.**

2) Математикалық және статистикалық	**1-есеп**: . $F(x)=x=x_1+x_2+x_3+…+x_n$ қосындысының абсолютті қателігін табу

<table>
<tr><td>операцияларды, сондай-ақ сызықтық емес және сызықтық теңдеулердің сандық шешімдерін орындау</td><td>2-есеп: Екі теңдеуден тұратын екі белгісізді сызықты емес теңдеулер жүйесі берілген: $\begin{cases} F(x,y)=0; \\ G(x,y)=0 \end{cases}$
<u>Ньютон әдісі және Қарапайым итерация әдісі арқылы</u> екі теңдеудің графигінің қиылысу нүктелерін анықтау.
3-есеп<u>:</u> Төмендегі кестемен берілген функция үшін Лагранж көпмүшелігін құру.
<table>
<tr><td>I</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>0.1</td><td>0.3</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>-0.5</td><td>0</td><td>0.2</td><td>1</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Берілген уақыт</td><td>1 сағат 20 минут</td></tr>
<tr><td>Оқыту нәтижесі</td><td>«Есептеу әдістері» курсының мақсаты – қолданбалы есептерді шешудің жуықтау әдістері, математикалық модельдеу әдістері, кате көздері және нәтиже дәлдігінің әдістері жайындағы түсінікті студенттерге жүйелендірілген түрде қалыптастыру.</td></tr>
<tr><td>Орындауды бағалау критерийлері</td><td>3 есепті шығарған студент «үздік» баға
2 есепті шығарған студент «жақсы» баға
1 есепті шығарған студент «қанағат» деген баға</td></tr>
<tr><td>Тапсырманы орындау тәртібі</td><td>Таным үрдісінде пайда болатын математикалық есептерді ЭЕМ-ның көмегімен шешудің есептеу алгоритмдерін құрып, қолдана білуге дайындау. Сонымен қатар, оны практикалық іс-әрекетінде математикалық модельдеудің көмегімен шынайы әлемнің заңдылықтарын пайдалана білу.</td></tr>
<tr><td>Қажетті жабдықтар мен құралдардың тізбесі:</td><td>Дәптер, қалам, сызғыш, қарындаш, әдістемелік нұсқаулар, компьютер</td></tr>
<tr><td>Өткізу орны:</td><td>Дәрісхана № 216</td></tr>
<tr><td>Өткізу уақыты:</td><td>«____» _______ 20____г.</td></tr>
</table>

БАҚЫЛАУ ПАРАҒЫ

«<u>Жобалау және автоматтандырылған ақпаратты өңдеу әдістерін, есептеу техникасы құралдарын қолдану</u>» модулі бойынша

ТЕКСЕРУ СЫНАУ ТҮРІ ТИП ПРОВЕРОЧНОГО ИСПЫТАНИЯ / **ОҚЫТУ НӘТИЖЕЛЕРІ/ БАҒАЛАУ КРИТЕРИЙЛЕРІ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ/ КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ**	**Тест/ тест**	**ЗПС қорғау/ защита ЛПЗ**	**Тапсырма/задание**	**Үй тапсырмасы**	**Жазбаша жұмыс**	**Өздік жұмыс**	

Оқыту нәтижесі: **1. Жоғарғы және дискреттік математика мен сандық әдістердің негіздерін қолдану**							
Бағалау критерийлері1: Кешенді сан түсінігін біледі.		V	V	V			
Бағалау критерийлері2: Кешенді сандар үстіндегі операцияларды орындау		V			V		
Бағалау критерийлері3: Дифференциалдық теңдеулер I, II және жоғарғы рет; қатарды шешеді: қатарлар мен олардың үстіндегі операциялар түрлері; интеграл түсінігі; фигуралардың аландарын табу; бірнеше ауыспалы функциясы: дифференциалдау және интегралдау	V			V	V	V	
Бағалау критерийлері4: Негізгі дискреттік құрылымдарды есептейді: көптік, қарым-қатынас, бағандар, комбинаторлық құрылымдар, санау жүйесі.		V	V		V		
Бағалау критерийлері 5: Бағандар теориясының негізгі әдістері мен алгоритмдерін қолданады		V		V			
Бағалау критерийлері 6: Түрлі табиғаттағы оңтайландыру және модельдеу жүйесімен байланысты қарым-қатынас теориясымен, комбинаторияны сипаттайды.		V		V			
Бағалау критерийлері 7: Қателіктердің түрлерін, сызықтық емес теңдеулер шешудің негізгі әдістерін, сызықтық теңдеулер жүйесін, интерполяция міндеттерін, дифференциалдық теңдеулер интегралдарды сипаттайды.		V	V				
Бағалау критерийлері 8: Адамс,Фибоначчи әдісін қолданады	V	V					
Оқыту нәтижесі: **2) Математикалық және статистикалық операцияларды, сондай-ақ сызықтық емес және сызықтық теңдеулердің сандық шешімдерін орындау**							
Бағалау критерийлері 1: Интегралдау мен дифференциалдау операцияларын орындау, тапсырмаларды шешу үшін ережелерді қолдану, берілген қасиеттерде бір нысаннан екінші нысанға ауысу ережесін зерттеу.		V	V	V		V	
Бағалау критерийлері 2: Объектілер арасындағы сандық және сапалық қатынасты білдіру үшін арнайы математикалық символиканы қолданады;		V			V	V	
Бағалау критерийлері 3: Жиындар үстіндегі операцияларды орындау, тапсырмаларды шешу үшін жиындар теориясының аппаратын қолдану; берілген қасиеттердегі бинарлық қатынастарды зерттеу.	V			V		V	
Бағалау критерийлері 4: Бағандардағы оңтайландырған тапсырмаларды шешеді				V	V	V	
Бағалау критерийлері 5: Кездейсоқ оқиғалармен және оларды жүзеге асыру ықтималдығымен еркін іс-әрекетті орындау			V				
Бағалау критерийлері 6: Тапсырмаларды шешу		V			V	V	

әдістерін таңдайды							
Бағалау критерийлері 7: Математикалық тапсырмаларды шешудің алгоритмдік бағдарламасын құрастырады Выполняет операции интегрирования и дифференцирования, применять правила для решения задач, исследовать правила перехода из одной формы в другую на заданные свойства			˅	˅		˅	
Модуль бойынша қорытынды бақылау: Итоговый контроль по модулю:	˅						

Критерии оценивания студентов в процессе обучения с учетом модульно-компетентностного подхода.

Деңгейлер	Балдар	Әріптік мәні	Бағалау көрсеткіштері
Төмен (рецептивті)	«1»	F- «өте қанағаттанарлықсыз»	Зерттеу объектісіне қызығушылық жоқ, құбылыстың мәнін тануға ұмтылу.
	«2»	F+ «қанағаттанарлықсыз»	Зерттеу объектісін тану,олардың мәнін меңгермей терминдермен операция жасау, Имитациялық тапсырмаларды орындау (үлгі бойынша), өзгертілген жағдайларда орындаудың берілген алгоритмін қолдана білу
Қанағаттанарлық (рецептивті-репродуктивті)	«3»	D- «орташаландыру»	Ұсынылған оқу материалының тұтас құрылымын көрудің болмауы, оның туыстық қарым-қатынасты және себеп-салдар байланыстарын игермей-ақ ішінара қайта шығуы; жауапта Елеулі қателіктердің болуы;

			біреудің көмегімен орындау алгоритмін пайдалану; тапсырмаларды орындаудың дербес дағдыларының болмауы.
	«4»	D+« қанағаттанарлық»	Оқу материалын репродуктивті деңгейде мазмұнын ұғынусыз механикалық игеру, жетекші мәселелер негізінде оны үзбелі қайта шығару; алған білімін тәжірибеде қолдана алмау, міндеттерді шешу алгоритмін өз бетінше пайдалануға ұмтылу және 50% -ға қол жеткізу.
Орташа (репродуктивті-өнімді)	«5»	С - «ортадан төмен»	Түсіну-оқу материалдарын түрлендіруге, оның 70%; қызығушылығын, оқуға, қосымша күш ретінде қалауына қол жеткізуге үстіңгі нәтижесі (мотивация оқу – жаттығу алуға оң белгілер); меңгеру деңгейі орта оқу біліктерін (тапсырмаларды 70%), заключающимся да қайталанған іс-әрекеттер құрдастарының терең түсіну үшін маңыздылығы одан арғы танымдық процесс.
	«6»	С+ «орташа»	Оқу материалын 75% - ға жаңғырту; типтік жағдайларда үлгі бойынша тапсырмаларды орындау дағдыларын меңгеру; вариативті жағдайларда тапсырманы орындаудың қиындығы; нәтижесінде толық емес болып табылатын тапсырмаларды өз бетінше орындауға ұмтылу, қателіктерге әкеп соқтыратын іс-әрекеттердің бірізділігінің болмауы; топта шығармашылық жұмысты орындауға ұмтылу; Міндеттерді өз бетінше шығармашылық шешу дағдысының болмауы
Жеткілікті (өнімді)	«7»	В - «жетерлік»	Оның когнитивті құрылымын (семантикалық блоктарды) анықтау негізінде бағдарламалық материалды меңгеру, оқылатын материал бөліктерінің өзара байланысын, оның тектік-түрлік және себеп - салдарлық байланыстарын көру; білімді типтік, вариативтік және кейде проблемалық жағдайларда қолдана білу; тапсырмаларды 80% орындау, оларды көрсету кезінде өз қателіктерін түзету қабілетін көрсету; шығармашылық тапсырмаларды орындауда табиғи мотивация; топта шығармашылық тапсырмаларды орындауға белсенді қатысу; өз қателіктерін жою бойынша өз бетінше сынай білу және мақсат қоя білу.
	«8»	В+ «жақсы»	Оқу материалын меңгеру және оларды типтік, вариативті және проблемалық жағдайларда өз бетінше қолдану; алған білімді шығармашылық қолдану дағдыларын меңгеру; тапсырмаларды 85% орындау, өз қателіктерін түзету, өзін-өзі сындыру, міндеттерді шешу дағдыларын жетілдіру бойынша іс-қимылдарды жоспарлау; өмірлік жағдайларда мәселелерді шешу үшін алынған

			білімді пайдалану.
Жоғары (өнімді - шығармашылық)	«9»	А - «үздік»	Оқу материалын толық меңгеру және оны өз толықтыруларымен және аргументтерімен жаңғырту; проблемалық және креативті жағдайларда күрделілігі әр түрлі деңгейдегі оқу материалына еркін әрекет ету; шығармашылық сипаттағы тапсырмаларды орындау; дербестік пен шығармашылық тәсілдің жоғары деңгейі; тапсырмаларды 90% орындау; іс-әрекеттер немесе ресімдеу жүйелеріндегі елеусіз қателіктерге жол беру; өмірлік жағдайларда мәселелерді шешу үшін Алған білімдерді шығармашылықпен пайдалану.
	«10»	А+ «керемет»	Оқу материалын шығармашылық тұрғыдан түсіну, құбылыстардың мәнін терең ұғыну үшін қосымша көздерді пайдалану, материалдың когнитивтік құрылымын көру, құрылымның жетіспейтін элементтерін анықтау, олармен толықтыру; оқытылатын материалдың проблемалық аспектілерін бөлу; 95-100% тапсырмаларды орындау; пәнді оқытудағы табиғи мотивация; өмірлік жағдайларда мәселелерді шешу үшін алынған білімді креативті пайдалану

Модульді бағалау критерийлері

№	Бақылау түрлері	апта																	Ең жоғ. балл
1	Қатысуы	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	
2	Үй жұмысы																		
3	Тәжірибелік жұмыс																		
4	Тестік тапсырма																		
5	Бақылау жұмысы																		
6	Реферат																		
7	Презентация																		
8	Аралық бақылау (экзамен)																		
9	Барлығы:																		

Бақылау-өлшеу материалдары

Тест сұрақтары

1. Комплекс(кешенді) сан қандай сандар?

A. A) $z=a_1+b_1i$

B. B) $z=a_2+b_1i$

C. C) $z=a_2+b_2i$

D. D) A,C жауабы

E. E) A,B жауабы

2. Комплекс санның қосу амалы

A. A) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}++\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$

B. B) $z_1 + z_2 = a_1 + b_1i - (a_2 + b_2i) = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i$

C. C) $z_1 + z_2 = a_1 + b_1i + a_2 + b_2i = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$

D. D) A,C жауабы

E. E) $z_2 + z_3 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = a_2 - a_3 + (b_1 - b_2)i$

3. Комплекс санның алу амалы

A. A) $z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i$

B. B) $z=a_2+b_1 i$

C. C) $z=a_2+b_2 i$

D. D) A,C жауабы

E. E) $z_2 + z_3 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = a_2 - a_3 + (b_1 - b_2)i$

4. Комплекс санның көбейту амалы

A. A) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$

B. B) $z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i$

C. C) $z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$

D. D) A,C жауабы

E. E) $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, i$

5. ABCD төртбұрышына іштей шеңбер сызылған. AB=15 см, BC=21 см, CD=18 см екендігі белгілі. Келесі тұжырымдардың қайсысы орынды?

A. AD қабырғасы BC қабырғасынан қысқа, бірақ CD-дан ұзын.

B. AD қабырғасының ұзындығы 12 см.

C. AD қабырғасының ұзындығы 14 см.

D. AD қабырғасы CD қабырғасынан ұзын.

E. AD қабырғасы CD қабырғасынан қысқа, бірақ AB-дан ұзын.

6.Осы сандардың $z = a + bi$, *bi*саны қалай аталады ?

A. Нақты сандар

B. Комплекс санының жалған бөлігі

C. Комплекс санынының нақты бөлігі

D. Комплекс сан

E. Дұрыс жауабы жоқ

7. Осы сандардың $z = a + bi$, *a*саны қалай аталады ?

A. Нақты сандар

B. Комплекс санының жалған бөлігі

C. Комплекс санының нақты бөлігі

D. Комплекс сан

E. Дұрыс жауабы жоқ

8.Сан ұғымының даму тарихына қарағанда ежелгі грематематиктер тек қандай сандарды шын мағынасындағы сан деп қарастырған?

A. Нақты

B. Комплекс

C. Теріс

D. Кері

E. Жанама

9.Теріс санды қандай мемлекеттер енгізілді ?

A. Англия

B. Франция

C. Қытай

D. АҚШ

E. Германия

10. Теріс сандарға амалдар қолдануды іс жүзінде пайдаланған математигі?

A. Диофант

B. Аристотель

C. Платон

D. Маркс
E. Джон

11. a+bi түріндегі өрнекті қалай аталады ?

A. Комплекс сан
B. Нақты сан
C. Анықталу облысы
D. Функция
E. Түбір

12. Жорамал бірлігін көрсетіңіз.

A. $i = \sqrt{-1}$
B. β
C. $z = a + oi$
D. $z = a + bi$
E. $z = a + oi$

13. $OP = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ **саны** z **комплекс санының модулі деп, ал** $\varphi = \arg z$ z **комплекс санының _____ деп аталады.**

A. Функциясы
B. Аргументі
C. Жауабы
D. Өрнегі
E. Түбірі

14. $z = a + bi$ **және** $\bar{z} = a - bi$ **сандарықалай аталады ?**

A. Көпмүшелі
B. Тәуелсіз
C. Түйіндес
D. Көпмәнді
E. Тәуелді

15. Ашық шексіз облысты көрсетіңіз.

A. $y = \ln x \Rightarrow D = (0; \infty)$
B. $y = \arcsin x \Rightarrow D = [-1; 1]$
C. $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow r^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq r^2$
D. $f(-x) = f(x)$
E. $z = a + oi$

16. Натурал сандар жиынында анықталған f функциясының мәндерін қалай аталады?

A. сан тізбегі немесе тізбек
B. тізбегін шектелген
C. тізбегінің шегі
D. тізбекті шексіз
E. Түбірсіз

17. Егер $f(n) = a_n$ тізбегі берілсе, оны $\{a_n\}$ символымен белгілейді немесе былай жазады:

A. $a_{n+1} \geq a_n$
B. $(a_n) \leq M$
C. $a_1, a_2, ..., a_n, ...$
D. $|a_n - a| < \varepsilon$
E. $z = a + oi$

18. Егер кез келген n үшін $a_{n+1} \geq a_n$ теңсіздігі орындалса, онда $\{a_n\}$ тізбегін

A. өспелі дейді.

B. кемімелі дейді.
C. шектелген деп атайды.
D. шексіз аз деп атайды.
E. Түбірлі сан

19. $\{a_n\}$ **тізбегін кемімелі түрін көрсетіңіз.**

A. $a_{n+1} \geq a_n$
B. $a_{n+1} \leq a_n$
C. $(a_n) \leq M$
D. $| a_n - a |< \varepsilon$
E. $z = a + oi$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ **немесе** $n \to \infty$ **ұмтылғанда _____ деп жазады.**

A. $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$
B. $\{a_n\}$
C. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
D. $a_n \to a$
E. $z = a + oi$

21. $\dfrac{5}{7};\dfrac{7}{10};\dfrac{9}{13};\dfrac{11}{16};...\dfrac{2n+3}{3n+4};...$ **тізбектің шегін табу керек.**

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{3+\dfrac{4}{n}} = \dfrac{2}{3}$
B. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{4}{n}}{3+\dfrac{3}{n}} = \dfrac{3}{2}$
C. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{3}{n}}{2+\dfrac{4}{n}} = \dfrac{2}{3}$
D. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{n}{3}}{3+\dfrac{4}{n}} = \dfrac{2}{3}$
E. Дұрыс жауабы жоқ

22. Жинақты тізбектің неше шегі бар.

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

23. Егер тізбектің шегі нөльге тең болса, онда мұндай тізбекті қалай аталады ?

A. шексіз
B. шексіз аз

C. екі шекті
D. нөлді шек
E. Түбірлі

24. Егер кез келген $A > 0$ саны үшін N нөмірі табылып, барлық $n > N$ үшін $(a_n) > A$ теңсіздігі орындалса, онда $\{a_n\}$ тізбегін шексіз үлкен шама дейді және былай жазады:

A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
B. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$
C. $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$
D. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \quad (\lim b_n \neq 0)$
E. Дұрыс жауабы жоқ

25. $\lim\limits_{x_n\to 0} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$ **шек қалай аталады ?**

A. екінші тамаша шек.
B. бір ретті ақырсыз аз
C. бірінші тамаша шек.
D. төменгі ретті ақырсыз
E. Дұрыс жауабы жоқ

26.Айқындалған функцияны көрсетіңіз.

A. $y = f(x)$
B. $F(x, y)$
C. $x^2 + y^2 = 1,$
D. $xy - y^2 - 15 = 0$
E. Дұрыс жауабы жоқ

27.Айқындалмаған функцияны көрсетіңіз.

A. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$
B. $x^2 + y^2 = 1,$
C. $y = x$
D. $y = f(x)$
E. Дұрыс жауабы жоқ

28.Бір мәнді функцияны табыңыз.

A. $y = \arg tgx$
B. $y = \arg\sin x,$
C. $y = \arg tgx$
D. $y = \sin x,$
E. Дұрыс жауабы жоқ

29. $y = f(x)$ **функциясының кері функциясы ?**

A. $x = \varphi(y),$
B. $y = x$
C. $y = \sin x,$
D. $z = x^2 + 1$
E. Дұрыс жауабы жоқ

30. $y = 2x + 4,$ **кері функцияны табыңыз .**

A. $y = 2x - 4$
B. $y = \frac{x - 4}{2}$

C. $y = \frac{x-2}{4}$

D. $z = x^2 + 1$

E. Дұрыс жауабы жоқ

31.Күрделі функция дегеніміз не ?

A. Функцияны функциядан функция алу әдісімен анықталған

B. Қосындының шегі шектердің қосындысына тең.

C. Теңсіздіктерін қолдану арқылы есептеледі.

D. x-тің x_0-ге ұмтылғандығы A_2-ге тең шегі

E. Дұрыс жауабы жоқ

32.Функциялар суперпозициясы дегеніміз не ?

A. Күрделі функция.

B. Шектері

C. Үзілістер

D. Кері функция

E. Түбір

33. $z = x^2 + 1$**,** $y = \sqrt{2z+3}$ **кері функциясын құрыңыз.**

A. $y = \pm\sqrt{1-x^2},$

B. $y = \sin x,$

C. $y = \sqrt{2(x^2+1)+3}$

D. $z = x^2 + 1$

E. Дұрыс жауабы жоқ

34. $y = 1 - 3x,$ **1. Сандарды өсу ретімен орналастыр:** $\sqrt{0{,}16}$ **; 0,4(4);** $\frac{11}{25}$

A. $\sqrt{0{,}16}$; 0,4(4); $\frac{11}{25}$;

B. 0,4(4); $\frac{11}{25}$; $\sqrt{0{,}16}$;

C. $\frac{11}{25}$ $\sqrt{0{,}16}$;0,4(4);

D. $\sqrt{0{,}16}$; $\frac{11}{25}$;0,4(4);

E. Дұрыс жауабы жоқ

35. $\frac{1}{8}$ **саны мына санның арифметикалық түбірі:**

A. $\frac{1}{4}$

B. 0,64

C. $\frac{1}{64}$

D. $\frac{1}{16}$

$\frac{1}{6}$

E.

36. Есепте $\sqrt{25} + \sqrt{225}$

A. A. 30

B. Б. 20
C. В. 25
D. Г. 35
E. Д. 45

37. Өрнекті ықшамда: $\sqrt{12}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{28}-\sqrt{6}$

A. А. $13\sqrt{6}$
B. Б. $27\sqrt{6}$
C. В. $14\sqrt{12}-\sqrt{6}$
D. Г. $55\sqrt{6}$
E. Д. $16\sqrt{6}$

38. Есепте: $\sqrt{\sqrt{27}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{27}-\sqrt{2}}$

A. А. 5
B. Б. 25
C. В. $\sqrt{29}$
D. Г. $\sqrt{725}$
E. Д. $\sqrt{6}$

39. Сандарды өсу ретімен орналастыр $\frac{11}{50}$ **; 0,2(2);** $\sqrt{0{,}04}$

A. А. $\frac{11}{50}$; 0,2(2); $\sqrt{0{,}04}$
B. Б. $\sqrt{0{,}04}$ $\frac{11}{50}$; 0,2(2);
C. В. 0,2(2); $\frac{11}{50}$; $\sqrt{0{,}04}$
D. Г. $\sqrt{0{,}04}$;0,2(2); $\frac{11}{50}$;
E. Д. $13\sqrt{6}$

40. 0,8 санымына санның арифметикалық квадрат түбірі болады:

A. А. 1,6
B. Б. 0,64
C. В. 0,064
D. Г. 6,4
E. Д. $13\sqrt{6}$

41. Есепте $\sqrt{16}+\sqrt{169}$

A. 17
B. 25
C. 23
D. 27
E. 26

42. Өрнекті ықшамда $\sqrt{18}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{48}-\sqrt{8}$

A. $7\sqrt{8}$
B. $24\sqrt{2}-\sqrt{8}$
C. $70\sqrt{2}$

D. $35^{\sqrt{8}}$
E. 3,2

43. Есепте: $\sqrt{\sqrt{14}+5}\cdot\sqrt{\sqrt{14}-\sqrt{5}}$

A. 3
B. 9
C. 19
D. 70
E. 20

44. Егер үшбұрыштың екі бұрышы 50^0 және 30^0 болса үшінші бұрышын табыңыз..

A. 40^0
B. 100^0
C. 110^0
D. 70^0
E. 60^0

45. Қорапта 3 қара 5 ақ доп бар қарамай неше доп алғанда кемінде екеуі қара бола алады.

A. 4;
B. 5;
C. 6;
D. 7;
E. 3;

46.Егер тең бүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы 90^0 болса, қалған бұрыштарын табыңыз.

A. 40^0; 40^0
B. 50^0 ; 40^0
C. 60^0;40^0
D. $70^0 40^0$
E. 45^0 ; 45^0

47. Қорапта 30 қызыл, 30 жасыл, 30 ақ, 10 қара барлығы 100 доп бар. 5-тен кем емес бір түсті доп болу үшін қарамай кемінде неше доп алу керек.

A. 40;
B. 50;
C. 16;
D. 17;
E. 15;

48.Екі қабырғасы 2см және 5см болатын тең бүйірлі үщбұрыштың үшінші қабырғасын табыңыз.

A. A.1,5см;
B. 2см;
C. C.6см;
D. D.5см;
E. 8см;

49. 0,5 кг пияз, 3кг картоп, 1кг қияр 1050 тенге, ал 2кг пияз, 4кг қияр 1800 тенге болса 1кг пияз, 2кг картоп, 2кг қиярды неше теңгеге алуға болады.

A. 1400;
B. 1500;
C. 1700;
D. 1750;
E. 1450;

50. Шеңбердің радиусы 2,5см болса диаметрін табыңыз.

A. A.3,5см;
B. 2,6см;
C. C.4,6см;

D. D.5см;
E. 4см;

51. Екі оқушы кітап алуға дүкенке келді. Бірақ кітап алуға бірінің 7$(доллар)-ы, екіншісінің 1$(доллар)-ы кеміді. Екеуі бірігіп бір кітап алуға тағы да ақшалары жетпеді. Кітаптың бағасы қанша $(доллар) еді.

A.15$(доллар)
B. 10$(доллар)
C.7$(доллар)
D. 8$(доллар)
E. $(доллар)

52. Радиустары 25см және 35см болатын екі шеңбер іштей жанасқан болса, олардың центрлерінің ара қашықтығын табыңыз.

A.15см;
B. 60см;
C.36см;
D.10см;
E. 28см;

53. Әсел поездың басынан есептегенде 8-вагонға отырды. Айбар поездың соңынан есептегенде 8-вагонға отырды. Олар бір вагонда болды. Поезда неше вагон болды.

A.15;
B. 16;
C.36;
D.10;
E. 8;

54. Өрнектің мәнін тап Егер $f(x) = x^2 - x$ болса, $3f(1) + f(2) + f(-1)$-ді табыңыз.

A. A)*5*
B. B)*6*
C. C)*4*
D. Д)*7*
E. E)*2.*

55. $f:\ [-2;5) \to B,\ f(x) = 2x - 1$ **берілген** $[-2;5)$ **мәнін табыңыз.**

A. A) $[-5;7)$
B. B) $(0;9]$
C. C) $[-5;9)$
D. Д) $(-1;9)$
E. E) $(-2;5)$.

56. $x_0 = b - 1$ **нүктесінде** $f(x) = x^2 - 2x - 1$ **фунцкциясының мәнін табыңдар.**

A. A) $4b$
B. B) $-4d - 2$
C. C) $b^2 - 1$
D. Д) b^2
E. E) $4d - 2$.

57. $g(x) = 3\sin 4x - \sqrt{2}$ **фунцкциясының** $x = \frac{\pi}{2}$ **нүктесіндегі мәнін табыңдар.**

A. $-\sqrt{2}$

B. $3\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$

E. $3-\sqrt{2}$.

58. Егер $f(x)=\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{2}$, $g(x)=\frac{2+x^2}{x+1}+x$ **және** $x=0$ **болса, онда** $3f(x)-2g(x)$ **- тің мәні қандай?**

A. -3

B. $2{,}5$

C. 1

D. 2

E. $-2{,}5$.

59. Төмендегілердің қайсысы тақ?

I. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ II. $f(x)=3x^2-x^2$ III. $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ IV. $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$

A. ешқайсысы

B. *VI*

C. *III,IV*

D. *III*

E. *I,Y.*

60. Төмендегілердің қайсысы тақ функция?

A. x^7-x

B. x^3+2x^2-x+3

C. x^2+x

D. x^5-x^2-1

E. x^2+x^2+2.

61. Төмендегі функциялардың қайсысы жұп?

A. x^6+5x^2-1

B. x^7-x+1

C. x^3+5x^2+3

D. $x^5-12x-1$

E. $x+\cos x$.

62. $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ **функциясының анықталу облысын табыңыз.**

A. $1\le x\le 3$

B. $0\le x\le 4$

C. $0<x<3$

D. $-3<x\le 1$

E. $-1\le x\le 3$.

63. $f(x)=\sqrt{(x-1)(x-2)}$ **функциясының анықталу облысын табыңыз.**

A. $x\le 1, x\ge 2$

B. $x\le 0$

C. $x\ge 2$

D. $x\ge 1, x\ge 2$

E. $1\le x\le 2$.

64. $f(x)=\sqrt{-x^2-2x+3}$ **функциясының мәндер облысын табыңыз.**

A. $[0,1)$

B. $(-3,1)$

C. $(0,1)$
D. $[-3,1]$
E. $[0;2)$.

65. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-4}}{x^2+x+1}$ **функциясының анықталу облысын табыңыз.**

A. $x \geq 4$
B. $0 < x < 4$
C. $x > 4$
D. $0 \leq x \leq 4$
E. $x \neq 4$.

66. $f(x)=3x^2+4x+2$ **функциясының мәндер облысын табыңыз.**

A. $E(y)=\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$
B. $E(y)=\left[-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$
C. $E(y)=\left[-\dfrac{5}{3};+\infty\right)$
D. $E(y)=[-4;+\infty)$
E. $E(y)=[2;+\infty)$.

67. $f(x)=-2x^2+4x+1$ **функциясының мәндер облысын табыңыз.**

A. $E(y)=[-\infty;3)$
B. $E(y)=\left[-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$
C. $E(y)=\left[-\dfrac{5}{3};+\infty\right)$
D. $E(y)=\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$
E. $E(y)=-[2;+\infty)$.

68. Төмендегі функциялардың қайсысы жұп?

A. $y=|x-4|-2x$
B. $y=|x-4|$
C. $y=|x+2|+x$
D. $y=|x+1|+2x-1$
E. $y=|x-5|-x$.

69. Ең кіші функцияның мәнін тап $y=|x|+|x-5|$

A. $y=3$
B. $y=-5$
C. $y=5$
D. $y=0$
E. $y=-2$.

70. Функцияның өсу аралықтарын табындар $y=|3-2x|$**.**

A. $[-2;0]\cup[2;+\infty]$
B. $(-\infty;0]\cup[0;+\infty)$
C. $(-\infty;2]$

D. $[1,5;+\infty)$

E. $(0;-2]$.

71. $y=\dfrac{x}{5}-\dfrac{5}{x}$ **функциясы үшін нөлдерін, өсу аралықтарын, кему аралықтарын табыңыз.**

A. $-5,5$; $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$; *жоқ.*

B. $5; (0,5)$; $(5,11)$

C. $-5; (-\infty,5]$; *жоқ.*

D. $0;5;1.$

E. $1; (-5;5); (5;+\infty)$

72. $y=\dfrac{1}{x}-\tilde{o}$ **функциясы үшін нөлдерін, өсу аралықтарын, кему аралықтарын табыңыз.**

A. $0,1;\ (0,+\infty)$; $(-\infty,0)$

B. $-1,1;\ (0,+\infty)$; $(-\infty,0)$

C. $-1,1;$ *жоқ;* $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

D. $0,1;\ (1,+\infty)$; $(-\infty,0)$

E. $-1,1;\ (0,+\infty)$; $(-\infty,1)$.

73. $y=-x^2+2x$ **функциясы үшін нөлдерін, өсу аралықтарын, кему аралықтарын анықтаңыз.**

A. $-2,1;\ (-\infty,-1)$**;** $(-1,\infty)$

B. $-2,0;\ (-\infty,-1)$; $(-1,\infty)$.

C. $-2,0;\ (-\infty,0)$; $(-1,\infty)$

D. $-2,1;\ (-\infty,-1)$; $(0,\infty)$

E. $-1,0;\ (-\infty,-1)$; $(-1,\infty)$.

74. $y=x^2-4x-5$ **функциясы үшін нөлдерін, өсу аралықтарын, кему аралықтарын анықтаңыз.**

A. $0,5;\ (2,\infty)$; $(-\infty,2)$

B. $-1,5;\ (1,\infty)$; $(-\infty,2)$

C. $-5,5;\ (2,\infty)$; $(-\infty,2)$

D. $-1,5;\ (2,\infty)$; $(-\infty,1)$

E. $-1,5;\ (2,\infty)$; $(-\infty,2)$.

75. $y=-x^2+6x-5$ **функциясы үшін нөлдерін, өсу аралықтарын, кему аралықтарын анықтаңыз.**

A. $1,5;\ (3;\infty)$; $(-\infty;3)$.

B. $1,5;\ (3;5)$; $(-\infty;3)$

C. $1,5;\ (3;\infty)$; $(-\infty;5)$

D. $1,0;\ (3;\infty)$; $(-\infty;3)$

E. $0,5;\ (3;\infty)$; $(-\infty;3)$.

76. $y=4x+x^2$ **функциясы үшін нөлдерін, өсу аралықтарын, кему аралықтарын анықтаңыз.**

A. $0,-2;\ (-2,\infty)$; $(-\infty,-2)$.
B. $2,-4;\ (-2,\infty)$; $(-\infty,-2)$.
C. $0,-4;\ (-2,\infty)$; $(-\infty,-2)$.
D. $0,-4;\ (-2,\infty)$; $(-\infty,0)$.
E. $0,-4;\ (-2,0)$; $(-\infty,-2)$.

77. Функцияның мәнін табындар $f(x)=\begin{cases} x, & егер \quad x\geq 0 \\ -x, & егер \quad x<0 \end{cases}$ $f(-1)$ **нүктесінде**

A. -1
B. 2
C. 1
D. -2
E. 3.

78. Функцияның мәнін табындар $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & егер \quad x\geq 0 \\ 1-x, & егер \quad x<0 \end{cases}$ $f(-1)$ **нүктесіңде**

A. -1
B. 2.
C. 1
D. -2
E. 3.

79. Функцияның мәнін табындар $f(x)=\begin{cases} 1, & егер \quad x>0 \\ 0, & егер = 0 \\ -1, & егер \quad x<0 \end{cases}$ $f(-1{,}6)$ **нүктесіңде**

A. 0
B. -1.
C. 1
D. 2
E. -2.

80. Төмендегі функциялардың қайсысы жұп?
A. $y=\sin x+ctgx-x$
B. $y=\dfrac{|\tilde{o}|}{\sin x\cos x}$
C. $y=x^4+tg^2x+x\sin x$
D. $y=\dfrac{tgx-ctgx}{|x|}$.
E. Дұрыс жауабы жоқ

81. Төмендегі функциялардың қайсысы тақ?
A. $y=\sin x+ctgx-x$
B. $y=\dfrac{|\tilde{o}|}{\sin x\cos x}$
C. $y=x^4+tg^2x+x\sin x$
D. $y=\dfrac{tgx-ctgx}{|x|}$.
E. Дұрыс жауабы жоқ

82. Төмендегі функциялардың қайсысы тақ емес, жұп емес?

A. $y = \sin x + ctgx - x$

B. $y = x^2$

C. $y = x^4 + tg^2 x + x \sin x$

D. $y = \dfrac{tgx - ctgx}{|x|}$.

E. Дұрыс жауабы жоқ

83. $y = \left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2} \right)^2$ **функциясының ең кіші оң периоды**

A. π

B. 4π.

C. 2π

D. $\dfrac{1}{2}\pi$

E. 3π.

84.Өрнекті ықшамдаңыз: $\sin(180^0 + \alpha) - \cos(\alpha - 270^0)$

A. 0

B. 1

C. $2\sin\alpha$

D. $\sin\alpha$

E. $\cos\alpha$.

85. Өрнекті ықшамдаңыз: $\dfrac{6\sin 2^0 \sin 88^0}{\sin 176^0}$

A. 3

B. -1

C. 2

D. 0

E. $-1/2$.

86. Өрнекті ықшамдаңыз:

$8\sqrt{3}\sin 7{,}5^0 \cdot \cos 7{,}5^0 \cdot \cos 15^0 = ?$

A. $\sqrt{3}$

B. -1

C. 2

D. 4

E. $1/2$.

87.Есептеңіз: $3\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$

A. $0{,}75\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. 4

E. $1/2$.

88.Есептеңіз: $\cos 43^0 + \cos 47^0$

A. $\sqrt{2}\cos 2^0$

B. $\sqrt{2}\sin 4^0$

C. $\sqrt{2}\sin 2^0$

D. $\cos 4^0$

E. $\cos 90^0$.

89. Есептеңіз: $\arcsin(-1)-\arccos\frac{1}{2}=?$

A. $\frac{7\pi}{6}$
B. 1
C. 0
D. $\frac{\pi}{6}$
E. $-\frac{3}{2}$.

90. Өрнекті ықшамдаңыз: $\sin\left(45^0+\alpha\right)-\sin\left(45^0\alpha\right)$

A. $-\sqrt{2}\sin\alpha$
B. $\sqrt{2}\cos\alpha$
C. $-\sqrt{2}\cos\alpha$
D. $\sqrt{2}\sin\alpha$
E. 0.

91. Өрнекті ықшамдаңыз: $\cos 165^0\cdot\cos 285^0$

A. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{2}$
C. 0
D. $-\frac{1}{2}$
E. $-\frac{1}{4}$.

92. $\cos 750^0$; $\sin 1280^0$; $tg1540^0$ **өрнектерінің таңбаларын анықтаныз.**

A. $+,+,-$
B. $-,-,+$
C. $+,-,-$
D. $-,+,-$
E. $-,+,+$.

93. $x=\sin 160^0$; $y=tg250^0$; $z=\cos(-10)$ **сандарын салыстырыңыз.**

A. $x<y<z$
B. $x<z<y$
C. $z<y<x$
D. $z<x<y$
E. $y<x<z$.

94. Есептеңіз: $\sin^2 x,\quad åãåð\ \cos 2x=\frac{1}{4}$

A. $-1{,}5$
B. $0{,}75$
C. 2
D. Д) 2

E. $-0{,}5$.

95.Өрнекті ықшамдаңыз: $\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$

A. $\sin x\cdot|\cos x|$.

B. $\dfrac{\sin x}{|\cos x|}$.

C. $\sin x\cdot\cos x$.

D. $|\sin x|\cdot\cos x$.

E. $|\sin x\cdot\cos x|$.

96. Егер $tg\left(\dfrac{\pi}{4}-\tilde{o}\right)=-2\ tgx=?$

A. $-1{,}5$

B. $0{,}75$

C. 2

D. -3

E. $-0{,}5$

97. Ықшамдаңыз: $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}-\dfrac{\cos x+1}{\sin x}$

A. 1

B. $\sin x$

C. $\sin x-1$

D. 0

E. -1.

98. Қайсы теңдеу дұрыс емес?

A. $\cos(\pi+x)=-\cos x$

B. $ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=tgx$

C. $\cos(-x)=-\cos x$

D. $tg(2\pi-x)=-tgx$

E. $tg(\pi+x)=tgx$.

99. Үшбұрыштың қабырғасы 2, ал оған іргелес бұрыштар 30°пен 45°-қа тең. Үшбұрыштың басқа қабырғаларын табыңыз.

A. $2\sqrt{3}-1, \sqrt{6}-\sqrt{5}$.

B. $2\sqrt{5}-3, \sqrt{6}-\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{6}-2\sqrt{5}, \sqrt{7}-\sqrt{5}$.

D. $2\sqrt{5}-2, \sqrt{6}-\sqrt{3}$.

E. $2\sqrt{3}-2$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

100. Есептеңіз: $\dfrac{1}{\sin 10^0}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}$

A. 4

B. 2

C. 1

D. $\sqrt{3}$

E. 3.

101. Есептеңіз: $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
B) 0
C) 1
Д) $\sqrt{3}$
E) -1.

102. $10ctg\,\frac{3\pi}{4}\,\sin\frac{5\pi}{4}\,\cos\frac{7\pi}{4}$

A) 0
B) 2
C) 1
Д) $\sqrt{3}$
E) 5.

103. Ықшамданыз : $\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}-\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

A) $\frac{1}{\cos x}$
B) $-2tg2x$
C) $2tgx$
Д) $tg2x$
E) $2tg2x$.

104. Үшбұрыштың қабырғасы 2, ал оған іргелес бұрыштар 30° пен 45°-қа тең. Үшбұрыштың басқа қабырғаларын табыңыз.

A) $2\sqrt{3}-1,\sqrt{6}-\sqrt{5}$.
B) $2\sqrt{5}-3,\sqrt{6}-\sqrt{3}$.
C) $2\sqrt{6}-2\sqrt{5},\sqrt{7}-\sqrt{5}$.
D) $2\sqrt{5}-2,\sqrt{6}-\sqrt{3}$.
E) $2\sqrt{3}-2,\ \sqrt{6}-\sqrt{2}$.

105. Егер $\sin 18^0=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ **және** $\sin 72^0=a\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ **болса,** $a-$**ны табыныз.**

A) $\frac{1}{8}$
B) $\frac{1}{6}$
C) $\frac{1}{4}$
Д) $\frac{1}{3}$

E) $\frac{1}{2}$.

106. $\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}$ **өрнегінің мәнін есептеніз.**

A) $\frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{2}$

B) $\frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}$

C) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

Д) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

E) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

107. Егер $tgx=2$ *болса,* $\cos^2 x-\cos x\sin x$ **өрнегінің мәні неге тең.**

A) -1

B) $-\frac{1}{5}$

C) $\frac{3}{5}$

Д) $\frac{4}{5}$

E) 1.

108. Егер $0<x<\frac{\pi}{2}$ **және** $tgx=\frac{4}{3}$ ***болса,*** $\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{1+\frac{1}{2}\sin 2x}$ **өрнегінің мәні неге тең.**

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{3}{5}$

Д) $\frac{4}{5}$

E) 1.

109. $\cos^2(x-y)-\sin^2(x+y)$ **өрнегін ықшамданыз.**

A) $1+\sin^2 y\cos^2 x$

B) $1+\sin 2x\cos 2y$

C) $1+\sin x\sin y$

Д) $1+\cos x\cos y$

E) $1-\sin 2x\sin 2y$.

110. Теңдеулерді шешіндер: $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

А) $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

В) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

С) $\pi n,\ n \in Z$

Д) $-\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

Е) $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

111. Теңдеулерді шешіңдер: $ctgx = \sqrt{3}$

А) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

В) $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

С) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Д) $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

Е) $\pi n,\ n \in Z$.

112. Теңдеулерді шешіңдер: $tgx = 1$

А) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

В) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

С) $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

Д) $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

Е) $-\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

113. Теңдеулерді шешіңдер: $\sin x = -0,6$

А) $(-1)^n \arccos 0,6 + \pi n, n \in Z$

В) $(-1)^{k+1} \arcsin 0,6 + \pi k,\ k \in Z$

С) $\pm \arcsin 0,6 + \pi n, n \in Z$

Д) $\pm \arcsin 0,6 + 2\pi n, n \in Z$

Е) $-0,6 + \pi n$.

114. Теңдеулерді шешіндер: $ctgx = 2,5$

А) $(-1)^n \arccos 2,5 + \pi n, n \in Z$

В) $(-1)^{k+1} \arcsin 0,6 + \pi k,\ k \in Z$

C) $\pm\arcsin 0{,}6+\pi n, n\in Z$

Д) $\pm\arcsin 2{,}5+2\pi n, n\in Z$

E) $arcctg 2,5+\pi n,\ n\in Z$.

115. Теңдеулерді шешіндер: $\cos x=0,3$

A) $(-1)^n \arccos 0{,}3+\pi n,\ n\in Z$

B) $\pm\arccos 0,3+2\pi n,\ n\in Z$

C) $\pm\arcsin 0{,}3+\pi n,\ n\in Z$

Д) $\pm\arcsin 0{,}3+2\pi n,\ n\in Z$

E) $arcctg 2,5+\pi n,\ n\in Z$.

116. Теңдеулерді шешіндер: $tgx=-3,5$

A) $(-1)^n \arccos 3{,}5+\pi n,\ n\in Z$

B) arctg3,5

C) $\pm\arcsin 3{,}5+\pi n,\ n\in Z$

Д) $\pm\arcsin 3{,}5+2\pi n,\ n\in Z$

E) $-arctg 3,5+\pi n,\ n\in Z$.

117. Теңдеулерді шешіндер: $\sqrt{3}\ tgx-1=0$

A) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

B) $\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

C) $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

Д) $-\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

E) $-\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

118. Теңдеулерді шешіндер: $2\cos x+\sqrt{3}=0$

A) $\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$

B) $\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

C) $\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$

Д) $-\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

E) $-\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$.

119. Теңдеулерді шешіндер: $2\cos x+\sqrt{2}=0$

A) $\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$

B) $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

C) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$

Д) $-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

E) $-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$.

120. Теңдеулерді шешіндер: $2\sin x+\sqrt{2}=0$

A) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

B) $(-1)^{n}\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

C) $(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+k, k\in Z$

Д) $-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

E) $-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$.

121. Теңдеулерді шешіндер: $2\sin x+\sqrt{3}=0$

A) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$

B) $(-1)^{n}\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$

C) $(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+k, k\in Z$

Д) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$

E) $-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$.

122. Теңдеулерді шешіндер: $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

A) $(-1)^{k}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$

B) $(-1)^{n}\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

C) $(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+k, k\in Z$

Д) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$

E) $-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$.

123. Теңдеулерді шешіндер: $\cos\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}$

A) $x = \pm 2\pi + 3\pi n, n \in Z$

B) $x = \pm 2\pi + \pi m,\ m \in Z$

C) $x = \pm 2\pi + 6\pi n,\ n \in Z$

Д) $x = (-1)^{ò} \pi + \pi m, m \in Z$

E) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

124. Теңдеулерді шешіңдер: $\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$

A) $(-1)^k \frac{2\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in Z$

B) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

C) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + k, k \in Z$

Д) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$

E) $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

125. Теңдеулер жүйесін шешіңіз: $\begin{cases} 2x + 11y = 15 \\ 10x - 11y = 9 \end{cases}$

A) (3,5; 2)
B) (-2; 1)
C) (-3,5; 2)
D) (-9; 3)
E) (2; 1)

126. y(x) = cosx функциясының x = -π нүктесіндегі туындысының мәнін табыңыз.

A) $\frac{1}{2}$.
B) 1.
C) 0.
D) -1.
E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

127. Токарь және оның шәкірті бір кезекте 65 деталь жасап шығарады. Егер токарь жоспардан 10%, ал шәкірті - 20% артық жасайтын болса, онда олар 74 деталь жасап шығарады. Жоспар бойынша бір кезекте токарь және оның шәкірті қанша деталь жасап шығарады?

A) 40; 25.
B) 35; 30.
C) 20; 45.
D) 15; 50.
E) 50; 15.

128. **y =** $\sqrt{2^{2x} - 2^{x+3} + 15}$ **функциясының өзгеру облысын табыңыз.**

A) $[\log_2 5; \infty)$
B) $(-\infty; 0]$
C) $[0; \infty)$
D) $(-\infty; \infty)$
E) $(-\infty; \log_2 3]$

129.Теңсіздіктер жүйесін шешіңіз: $\begin{cases} 3x-4<8x+6 \\ 2x-1>5x-4 \\ 11x-9\le 15x+3 \end{cases}$ **.**

A) (1; 2).
B) (2; 3).
C) (-2; 1).
D) (-2; 5).
E) (4; 3).

130. Есептеңіз: cos105° - sin195° + sin(-135°).

A) 0.
B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
D) $-\frac{1}{2}$.
E) $\frac{1}{2}$.

131. **y = -x^2 +3x-2 қисығының бойынан оған жүргізілген жанама y = x түзуіне параллель болатындай нүктені табыңыз.**

A) (1; 0).
B) (-1; 0).
C) (1; 2).
D) (0; 2).
E) (-1; 1).

132. **a-ның қандай мәндерінде** $x^2 + y^2 = 16$ **және** $x = a$ **сызықтарының тек бір ғана ортақ нүктесі болатынын көрсетіңіз:**

A) $a > 4$
B) $a < 4$
C) $a = \pm 16$
D) $a = 0$
E) $a = \pm 4$

133. Есептеңіз: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{8}} 2\sin 2x dx$.

A) 0.
B) 1.
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
D) $\sqrt{2}$.
E) - $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

134. Теңдеулер жүйесін шешіңіз: $\begin{cases} 2x + 11y = 15 \\ 10x - 11y = 9 \end{cases}$

A) (3,5; 2)
B) (-2; 1)
C) (-3,5; 2)
D) (-9; 3)
E) (2; 1)

135. Теңсіздікті шеш: $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

A) $\left(\pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right), n \in Z$
B) $\left(\pi n; \frac{3\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$
C) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$
Д) $\left(2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$
E) $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z$.

136. Теңсіздікті шеш: $\cos x \geq -\frac{1}{2}$

A) $\left(\pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right), n \in Z$
B) $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z$
C) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$
Д) $\left(2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$
E) $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z$.

137. $f(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x$ функциясының $[0; \frac{3\pi}{4}]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

A) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B) 0; $1\frac{1}{3}$.

C) 0; $\frac{3}{4}$.

D) 0; $\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$.

E) 0; $\frac{3\sqrt{2}+2}{6}$.

138. Теңсіздікті шешіңіз: $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

A) $[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n] \cup [\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n]$, $n \in Z$

B) $[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n] \cup (\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n]$, $n \in Z$

C) $(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n) \cup (\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n)$, $n \in Z$

D) $[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n]$, $n \in Z$

E) $[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n]$, $n \in Z$

139. Арифметикалық прогрессияның $S_4 = 42$ және $S_8 = 132$ тең. a_1 және d табыңыз.

A) $a_1 = 6$; $d = 2$.
B) $a_1 = 3$; $d = -6$.
C) $a_1 = 3$; $d = 6$.
D) $a_1 = 6$; $d = 3$.
E) $a_1 = -6$; $d = 2$.

140. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың диагональдық қимасы табанымен тең шамалы. Пирамиданың табанының ауданын табу керек, егер оның бүйір қыры 5-ке тең болса.

A) $12\sqrt{3}$.

B) $10\sqrt{2}$.

C) 13.

D) 10.

E) 12.

141. Өрнекті ықшамдаңыз: $\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$

A) $\sin x\cdot|\cos x|$.

B) $\dfrac{\sin x}{|\cos x|}$.

C) $\sin x\cdot\cos x$.

D) $|\sin x|\cdot\cos x$.

E) $|\sin x\cdot\cos x|$.

142. Тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрышты өзінің катетінен айналдырған. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 3$\sqrt{2}$ см-ге тең болса, шыққан конустың көлемін табыңыз.

A) 3π см^3.

B) 9π см^3.

C) 24π см^3.

D) 27π см^3.

E) 18π см^3.

143. Екі заттан тұратын салмағы 18 кг қоспа бар. Қоспадан 40% бірінші, 25% екінші затты айырып алғаннан кейін екінші зат қанша қалса, бірінші зат та сонша қалды. Қоспада әрқайсысынан неше кг зат бар еді?

A) 8 кг, 10 кг.

B) 5 кг, 13 кг.

C) 12 кг, 6 кг.

D) 7 кг, 11 кг.

E) 9 кг, 9 кг.

144. Үшбұрыштың қабырғасы 2, ал оған іргелес бұрыштар 30°пен 45°-қа тең. Үшбұрыштың басқа қабырғаларын табыңыз.

A) $2\sqrt{3}-1, \sqrt{6}-\sqrt{5}$.

B) $2\sqrt{5}-3, \sqrt{6}-\sqrt{3}$.

C) $2\sqrt{6}-2\sqrt{5}, \sqrt{7}-\sqrt{5}$.

D) $2\sqrt{5}-2, \sqrt{6}-\sqrt{3}$.

E) $2\sqrt{3}-2,\ \sqrt{6}-\sqrt{2}$.

145. Теңсіздікті шеш: $2\cos x-\sqrt{3}\le 0$

A) $\left(-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n; -\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right), n\in Z$

B) $\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n; \dfrac{5\pi}{4}+2\pi n\right), n\in Z$

C) $\left[-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n; \dfrac{7\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$

D) $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n; -\dfrac{\pi}{4}+\pi n\right), n\in Z$

E) $\left[\dfrac{\pi}{6}+2\pi n; \dfrac{11\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$

.

146. Теңсіздікті шеш: $3tgx+\sqrt{3}\ge 0$

A) $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right), n\in Z$

B) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$

C) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$

D) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{4}+\pi n\right), n\in Z$

E) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{11\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$

.

147. Теңсіздікті шеш: $\sin\frac{x}{2}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$

A) $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right), n\in Z$

B) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$

C) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$

D) $\left(-\frac{4\pi}{3}+4\pi n;-\frac{2\pi}{3}+4\pi n\right), n\in Z$

E) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{11\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$

.

148. Теңсіздікті шеш: $tg5x>1$

A) $\left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5};\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}\right), n\in Z$

B) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$

C) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$

D) $\left(-\frac{4\pi}{3}+4\pi n;-\frac{2\pi}{3}+4\pi n\right), n\in Z$

E) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{11\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$

.

149. Теңсіздікті шеш: $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\ge 1$

A) $\left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5};\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}\right), n\in Z$

B) $\left[4\pi n; \pi + 2\pi n\right], n \in Z$

C) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

D) $\left(-\frac{4\pi}{3} + 4\pi n; -\frac{2\pi}{3} + 4\pi n\right), n \in Z$

E) $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

.

150. Теңсіздікті шеш: $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$

A) $\left(\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}\right), n \in Z$

B) $\left[4\pi n; \pi + 2\pi n\right], n \in Z$

C) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

D) $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z$

E) $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

.

151. Теңсіздікті шеш: $4\sin 2x\cos 2x \geq \sqrt{2}$

A) $\left(\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}\right), n \in Z$

B) $\left[\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}\right], n \in Z$

C) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

D) $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z$

E) $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

.

152. Теңсіздікті шеш: $\cos\frac{\pi}{8}\cos x - \sin x\sin\frac{\pi}{8} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

A) $\left(\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}\right), n \in Z$

B) $\left[\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}\right], n \in Z$

C) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

D) $\left(\frac{17\pi}{24} + 2\pi n; \frac{25\pi}{24} + 2\pi n\right), n \in Z$

E) $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

153. Теңсіздікті шеш: $\sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6} \le \frac{1}{2}$

A) $\left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}\right), n \in Z$

B) $\left[-\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right], n \in Z$

C) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], n \in Z$

D) $\left(\frac{17\pi}{24}+2\pi n; \frac{25\pi}{24}+2\pi n\right), n \in Z$

E) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right], n \in Z$

.

154. Теңсіздікті шеш: $\sin^2 x < \frac{1}{2}$

A) $\left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}\right), n \in Z$

B) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z$

C) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], n \in Z$

D) $\left(-\frac{4\pi}{3}+4\pi n; -\frac{2\pi}{3}+4\pi n\right), n \in Z$

E) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right), n \in Z$

.

155. Теңсіздікті шеш: $\cos^2 x > \frac{1}{2}$

A) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right), n \in Z$

B) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z$

C) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], n \in Z$

D) $\left(-\frac{4\pi}{3}+4\pi n; -\frac{2\pi}{3}+4\pi n\right), n \in Z$

E) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right), n \in Z$

.

156. Теңсіздікті шеш: $tg^2 x > 3$

A) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right), n \in Z$

B) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z$

C) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$

D) $\left(-\frac{4\pi}{3}+4\pi n;-\frac{2\pi}{3}+4\pi n\right), n\in Z$

E) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{3}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$.

157. Теңсіздікті шеш: $\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x<0$

A) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right), n\in Z$

B) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right), n\in Z$

C) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$

D) $\left(-\frac{4\pi}{3}+4\pi n;-\frac{2\pi}{3}+4\pi n\right), n\in Z$

E) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{3}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$.

158. Теңсіздікті шеш: $tg^2x-tgx<0$

A) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right), n\in Z$

B) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right), n\in Z$

C) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$

D) $\left(\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right), n\in Z$

E) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{3}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$.

159. $f(x)=\frac{1}{x^3}+x^2$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз:**

A) $\frac{1}{2x^2}+x^3+C$

B) $-\frac{1}{2x^2}+\frac{x^3}{3}+C$

C) $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2x^3}+C$

D) $\frac{1}{x^4}+\frac{x^3}{3}+C$

E) $\frac{1}{x^4}+x^3+C$

160. $f(x)=11x^{10}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз:**

A)x^{11}-$8\sqrt{x}+C$

B) $x^{11}+2\sqrt{x}+C$

C) $x^{11}+C$

D) $x^{12}-8\sqrt{x}+C$

E) $x^{11}+8\sqrt{x}+C$

161. $f(x)=(x+1)^2$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз:**

A) $\dfrac{(x+1)^2}{2}+C$

B) $\dfrac{x^2+1}{2}+C$

C) $x^2(x+1)+C$

D) $\dfrac{x^3}{3}(x^2+x+1)+C$

E) $\dfrac{(x+1)^3}{3}+C$

162. $f(x)=6x^5$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз:**

A) x^5+C

B) $\dfrac{x^6}{6}+C$

C) $-x^6+C$

D) x^6+C

E) $\dfrac{x^5}{6}+C$

163. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз:**

A) $2\sqrt{x}+C$

B) $-\dfrac{2\sqrt{x}}{3}+C$

C) $\dfrac{3\sqrt{x}}{2}+C$

D) $\dfrac{2}{3x\sqrt{x}}+C$

E) $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+C$

164.y=3x^2-1 функциясы үшін А(0;0) нүктесі арқылы өтетін алғашқы функцияны табыңдар:

A)x^3-x+1

B) x^3-x

C) x^3-x-1
D) x^3+x+1
E) x^3+1

165. $f(t)=t^7$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз:**
A) t^8+C
B) $-\frac{t^8}{7}+C$
C) $\frac{t^8}{8}+C$
D) $\frac{t^7}{8}+C$
E) $-\frac{7t^8}{8}+C$

166. $f(t)=x$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз**:
A) $xt+C$
B) $x+C$
C) x^2+C
D) $\frac{x^2}{2}+C$
E) x^2t+C

167. С-ның қандай мәнінде $f(x)=5\sin 5x$ **функциясының F(x) алғашқы функциясы** К $\left(\frac{\pi}{5};1\right)$ **нүктесі арқылы өтеді:**
A) 0
B) 2
C) -1
D) 1
E) 3

168.Алғашқы функциясы F(x)=x^4-cos2x болатын f(x) функциясын көрсетіңдер:
A) f(x)=4x^3+sin2x
B) f(x)=$\frac{x^5}{5}$+sin2x
C) f(x)=4x^3+2sin2x
D) f(x)=4x^3-cos2x
E) f(x)=4x^3-2sin2x

169. Қай функция f(x)=4x^3-2x функциясының алғашқы функциясы болады?
A) F(x)= $12x^2-2$
B) F(x)= $12x^2+2$
C) F(x)= x^4+x^2
D) F(x)= x^4-x^2
E) F(x)= x^4-2x^2

170. f(x)= $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ **функциясының барлық алғашқы функциясын табыңыз**

A) $\frac{1}{2}\sqrt{2x+3}+C$

B) $2\sqrt{2x+3}+C$

C) $\sqrt{2x+3}+C$

D) $\frac{1}{2\sqrt{2x+3}}+C$

E) $3\sqrt{2x+3}+C$

171. Есептеңіз: $\int(\cos x-\sin x)\,dx$

A) $\cos x+\sin x$
B) $\sin 2x+C$
C) $\sqrt{1-\sin 2x}$
D) $\sqrt{\tan x}$
E) $\cos 2x+C$

172. $f(x)=\frac{1}{x^3}+x$ **Функциясының алғашқы функциясын табыңыз**.

A) $\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{2}+C$

B) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}+C$

C) $-\frac{1}{2x^2}+\frac{x^2}{2}+C$

D) $\frac{1}{2x^2}-x^2+C$

E) $\frac{1}{x^4}+x^2+C$

173. $f(x)=cos^2\frac{x}{4}-sin^2\frac{x}{4}$**функциясының алғашқы функциясын табыңыз.**

A)$2sin\frac{x}{2}+C$

B) $sin\frac{x}{2}+C$

C) $2sin\frac{x}{4}+C$

D) $sin\frac{x}{4}+C$

E) $sin\frac{x}{4}+C$

174.$f(x)=cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$ функциясының алғашқы функциясын табыңыз.

A) $cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{C}$

B) $\frac{1}{3}cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{C}$

C)$\frac{1}{3}sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{C}$

D) $sin\frac{x}{4}+C$

E) $sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{C}$

175. $f(x)=\cos^2 3x-\sin^2 3x$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз**

A) $\frac{1}{6}\sin 6x+C$

B) $\sin 6x+C$

C) $6\sin 6x+C$

D) $-\frac{1}{6}\cos 6x+C$

E) $6\cos 6x+C$

176. $f(x)=6x+4$ **функциясы үшін** $F(x)$ **алғашқы функциясы болса, онда** $F(x)=0$ **теңдеуін шешіңіз, мұндағы** $F(-2)=5$

A) $\left\{-\frac{1}{3};1\right\}$

B) $\left\{1;\frac{1}{3}\right\}$

C) $\left\{-1;\frac{1}{3}\right\}$

D) $\left\{-\frac{1}{3};-1\right\}$

E) $\{1;3\}$

177. $f(x)=-5x+3$ **функциясының алғашқы функциясын табыңыз.**

A) $-5x^2+3x+C$

B) $-\frac{5}{2}x^2+3x+C$

C) $\frac{5}{2}x^2-3x+C$

D) $-\frac{5}{2}x^2-3x+C$

E) $\frac{5}{2}x^2+3x+C$

178. $f(x)=x^2+3\sin x$ **функциясының алғашқы функциясын табыңыз.**

A) $\frac{x^3}{3}-3\cos x+C$

B) $\frac{x^3}{3}+3\cos x+C$

C) $\frac{x^3}{3}-3\sin x+C$

D) $x^3+3\cos x+C$

E) $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\cos x+C$

179. $f(x)=\frac{1}{x^3}+x^3$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз:**

A) $\frac{1}{2x^2}+x^3+C$

B) $-\frac{1}{2x^2}+\frac{x^4}{4}+C$

C) $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2x^4}+C$

D) $\frac{1}{x^4}+\frac{x^4}{4}+C$

E) $\frac{1}{x^4}+x^3+C$

180. $f(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз:**

A) $\frac{x^2}{2}+2\sqrt{x}+C$

B) $\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$

C) $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+C$

D) $\frac{x^2\sqrt{x}}{3}+C$

E) $\frac{x^3}{3}+C$

181. $f(x)=(2x+1)^3$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз:**

A) $\frac{(2x+1)^4}{8}+C$

B) $\frac{(2x+1)^4}{4}+C$

C) $\frac{(2x+1)^3}{8}+C$

D) $\frac{(2x+1)^3}{4}+C$

E) $\frac{(2x+1)^3}{3}+C$

182. $f(x)=7x^6$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз:**

A) x^7+C

B) $\frac{x^6}{6}+C$

C) $-x^6+C$

D) $7x^6+C$

E) $\frac{x^5}{6}+C$

183. $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз:**

A) $4\sqrt{x}+C$

B) $-\frac{2\sqrt{x}}{3}+C$

C) $\frac{3\sqrt{x}}{2}+C$

D) $\frac{2}{3x\sqrt{x}}+C$

E) $\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$

184.y=3x²-1 функциясы үшін А(1;0) нүктесі арқылы өтетін алғашқы функцияны табыңдар:

A) x^3-x+1

B) x^3-x

C) x^3-x-1

D) x^3+x+1

E) x^3+1

185. $f(t)=t^8$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз:**

A) t^8+C

B) $-\frac{t^8}{7}+C$ B

C) $\frac{t^9}{9}+C$

D) $\frac{t^7}{8}+C$

E) $-\frac{7t^8}{8}+C$

186. $f(t)=x+2$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз:**

A) $xt+C$

B) $x+C$

C) x^2+C

D) $\frac{x^2}{2}+2x+C$

E) x^2t+C

187. С-ның қандай мәнінде $f(x)=6\sin 6x$ **функциясының F(x) алғашқы функциясы** К $\left(\frac{\pi}{12};1\right)$ **нүктесі арқылы өтеді:**

A) 0

B) 2

C) -1

D) 1

E) 3

188.Алғашқы функциясы F(x)=x^4-sin2x болатын f(x) функциясын көрсетіңдер:

A) f(x)=4x^3+sin2x

B) f(x)=$\frac{x^5}{5}$+$\frac{1}{2}$cos2x

C) f(x)=4x^3+2sin2x

D) f(x)=4x^3-cos2x

E) f(x)=4x^3-2sin2x

189. Қай функция f(x)=5x^4-2x^3 функциясының алғашқы функциясы болады?

A) F(x)= $x^5-\frac{x^4}{6}+C$

B) F(x)= $x^4-\frac{x^4}{3}+C$

C) F(x)= $x^5-\frac{x^4}{3}+C$

D) F(x)= $x^5-\frac{x^4}{2}+C$

E) F(x)= $20x^5-\frac{x^4}{3}+C$

190. f(x)= $\frac{1}{\sqrt{3x+3}}$ функциясының барлық алғашқы функциясын табыңыз

A) $\frac{2}{3}\sqrt{3x+3}+C$

B) $2\sqrt{3x+3}+C$

C) $\sqrt{3x+3}+C$

D) $\frac{1}{3\sqrt{3x+3}}+C$

E) $3\sqrt{2x+3}+C$

191. Есептеңіз: $\int(\cos x-\sin x)\,dx$

A) $\cos x+\sin x$

B) $\sin 2x+C$

C) $\sqrt{1-\sin 2x}$

D) $\sqrt{\tan x}$

E) $\cos 2x+C$

192. $f(x)=\frac{1}{x^3}+x$ **Функциясының алғашқы функциясын табыңыз.**

A) $\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{2}+C$

B) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}+C$

C) $-\frac{1}{2x^2}+\frac{x^2}{2}+C$

D) $\frac{1}{2x^2} - x^2 + C$

E) $\frac{1}{x^4} + x^2 + C$

193. $f(x) = cos^2\frac{x}{4} + sin^2\frac{x}{4}$ **функциясының алғашқы функциясын табыңыз.**

A) $2sin\frac{x}{2} + C$

B) $sin\frac{x}{2} + C$

C) $2sin\frac{x}{4} + C$

D) $sin\frac{x}{4} + C$

E) $x + C$

194. $f(x) = cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ функциясының алғашқы функциясын табыныз.

A) $cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{C}$

B) $\frac{1}{2}cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{C}$

C) $\frac{1}{2}sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{C}$

D) $sin\frac{x}{4} + C$

E) $sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{C}$

195. $f(x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$ **функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңыз**

A) $\frac{1}{4}\sin 4x + C$

B) $\sin 2x + C$

C) $2\sin 2x + C$

D) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$

E) $2\cos 2x + C$

196. $f(x) = 6x + 4$ **функциясы үшін** $F(x)$ **алғашқы функциясы болса, онда** $F(x) = 0$ **теңдеуін шешіңіз, мұндағы** $F(-2) = 5$

A) $\left\{-\frac{1}{3};1\right\}$

B) $\left\{1;\frac{1}{3}\right\}$

C) $\left\{-1;\frac{1}{3}\right\}$

D) $\left\{-\frac{1}{3};-1\right\}$

E) $\{1;3\}$

197. $f(x) = -4x + 2$ **функциясының алғашқы функциясын табыңыз.**

A) $-2x^2 + 2x + C$

B) $-\frac{5}{2}x^2+2x+C$

C) $\frac{5}{2}x^2-2x+C$

D) $-\frac{5}{2}x^2-2x+C$

E) $\frac{5}{2}x^2+2x+C$

198. $f(x)=x^3+3\sin x$ **функциясының алғашқы функциясын табыңыз.**

A) $\frac{x^4}{4}-3\cos x+C$

B) $\frac{x^4}{4}+3\cos x+C$

C) $\frac{x^4}{4}-3\sin x+C$

D) $x^4+3\cos x+C$

E) $\frac{x^4}{4}-\frac{1}{3}\cos x+C$

199. Егер x=2 болғанда $y=x^2-1$ **функция мәні неге тең болады?**
A) 3
B) 2
C) -2
D) 1
E) 4

200. $[x_i, x_{i+1}, ..x_{i+n}] = \frac{[x_{i+1}, ..x_{i+n}] - [x_i, ..x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$ **. Бұл**

A) n-ші ретті ақырлы айырымдар;
B) n-ретті болінген айырымдар
C) i+n-ретті бөлінген айырымдар;
D) интерполяцияның қателігі
E) функциянын осімшесі

201. [1; 2] интегралдау кесіндісі 10 бµлікке бµлінген. Қадамды табыњыздар.
A) h=0.2;
B) h=0.1;
C) h=1;
D) h=0.4
E) дұрыс жауабы жоқ.

202. Квадраттық интерполяциялау формуласы Ньютонның I –ші интерполяциялық формуласынан қай жағдайда шығады?
A) n=1;
B) n=2 ;
C) n=3;
D) n=4

E) д±рыс жауабы жоқ

203. 90/11=8.18 теңдігінің абсолюттік қателігін табыңыз.
A) 0.0019 4 ;
B) 0.0;
C) 2.4%;
D) 8.18
E) дұрыс жауабы жоқ.

204. $\int_0^1 x^2\, dx$ **анықталѓан интегралдың мәнін [0;1] аралығында 0,5 қадаммен оң жақты тіктөртбұрыш формуласымен есептеңіз.**
A) 5/8 ;
B) 0,3333 ;
C) ¼ ;
D) 1/8 ;
E) 0

205. $\bar{x} = (4,3,0,1)$ **векторының нормасын** $||\,x\,||_3$ **есептеу керек.**
A) $\sqrt{15}$;
B) $\sqrt{17}$;
C) $\sqrt{26}$;
D) $\sqrt{18}$
E) дұрыс жауабы жоқ

206. $\|A\|_1 = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ **формуласы бойынша А матрицасының бірінші нормасын есепте.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

A) 11 ;
B) 12 ;
C) 13 ;
D) 5 ;
E) 8

207. $\int_0^1 x^3\, dx$ **анықталған интегралдың мєнін (0; 1) кесіндісінде 0,5 қадаммен трапециялар формуласын қолданып есепте.**

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

A) 3/ 8;
B) 0,3125 ;
C) 1/8;
D) 1,2125;
E) 1/4

208. Гаусс әдісінің есептеу алгоритмі қанша бағыттан тұрады?
A) 2
B) 3
C) 1

D) 5
E) 10

209. Келесі жүйе үшін
| 11 21 31 | 11 |
| 10 40 15 |-15 |
|-12 12 -13| 22 |
бас элементтер әдісі бойынша 1-ші қадамда шешуші элемент ретінде қай элементі алынады?
A) -11;
B) 22;
C) -13 ;
D) 12;
E) 40

210. Егер a<в<c< d< e және
f (A) *f (в) <0
f (в)*f (C) >0
f (C) *f (D) <0
f (D) *f (e) >0
болса, онда f (x) функциясының [a,e] аралығында неше түбірі болғаны ?
A) 4;
B) 3;
C) 2 ;
D) 5;
E) түбірлері жоқ

211. $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ **матрицасының меншікті мәндерін тап.**
A) λ_1=0; λ_2=-9;
B) λ_1=0; λ_2=5;
C) λ_1=0; λ_2=9
D) λ_1=-3; λ_2=3;
E) λ_1=9; λ_2=1

212. Сызықтық емес $y=x^3-2x^2+6$ теңдеуі берілген. Осы теңдеудің түбірі бар [a,b] аралығын анықта.
A) [-3,-2];
B) [-2,-1] ;
C) [–1,0] ;
D) [0,1];
E) [1,2]

213. A операторы озіне туйіндес, егер
A) $A=A^{-1}$
B) $A=(A^{-1})^{-1}$
C) $A=A^*$
D) $A=(A^{-1})^*$
E) дурысжауабыжоқ

214. Хорда әдісі
A) алгебралық теңдеудің түбірлерін бөлу үшін;

B) матрицаның анықтауышын табу үшін;
C) матрицаның келісімділік санын табу үшін;
D) матрицалардың көбейтіндісін есептеу үшін
E) басқа жағдайларда
қолданылады.

215. Келесі формулалардың қайсысы Лагранж интерполяциялық кµпм‰шесі болады?

A) $\Phi_j(x) = c(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n);$

B) $\Phi_j(x) = \dfrac{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)};$

C) $\Phi_j(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}{\prod\limits_{i,j=1}(x_i-x_j)};$

D) $\Phi_j(x) = \dfrac{(x-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} = \prod\limits_{i\neq j}\dfrac{x-x_i}{x_i-x_j};$

E) $\Phi_j(x) = \prod\limits_{i\neq j}\dfrac{x_i-x_j}{x-x_j};$

216. Ньютон әдісінде x_0 алғашқы шартын мынандай шарттан аламыз

A) $f(x_0)\cdot f'(x_0) > 0$;
B) $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$;
C) $f(x_0)\cdot f''(x_0) = 0$;
D) $|f(x_0)\cdot f'(x_0)| < 1$;
E) $|f(x_0)| < 1$;

217. Жуық санның шектік салыстырмалы қателігін (% бойынша) анықтау керек: a=35,178+0,0001.
A) 0,00028%
B) 0,178%
C) 0,1779%
D) 0,01%
E) 0,02%

218. Кестедегі функцияның мәнін x=1.210 болғанда Ньютон формуласы бойынша есептеу ушін (алға интерполяциялау) X_0 неге тең деп алынады?

x	**1.215**	**1.220**	**1.225**	**1.230**	**1.235**
y	**0.106**	**0.113**	**0.119**	**0.125**	**0.13**

A) 1.225
B) 1.215
C) 1.220
D) 1.235
E) 1.230

219. Лагранж интерполяциялық полиномы:

A) $Ln(x) = \sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{y_i\varphi(x_i)}{\varphi'(x_i)(x-x_i)}$

B) $L(x) = \sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{y_i\varphi(x_i)}{f(x_i)(x-x_i)}$

C) $L(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i\varphi(x_i)}{\varphi''(x_i)}$

D) $L(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i\varphi(x_i)}{(x-x_i)}$

E) $L(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{y\varphi(x_i)^2}{(x-x_i)}$

220.Егер x=2 болғанда $y=x^2-1$ функция мәні неге тең болады?

A) 3

B) 2

C) -2

D) 1

E) 4

221.Лагранж интерполяциялық көпмүшесін табыңыз:

A) $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{(x-x_0)\cdot....\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{n+1})\cdot...\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot...\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot...\cdot(x_i-x_n)}$

B) $L_n(x)=\sum_{i=0}^{10}y_i\frac{(x-x_0)\cdot....\cdot(x-x_{i-1})\cdot...\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot...\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot...\cdot(x_i-x_n)}$

C) $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{(x+x_0)\cdot....\cdot(x+x_{i-1})(x+x_{n+1})\cdot...\cdot(x+x_n)}{(x_i-x_0)\cdot...\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot...\cdot(x_i-x_n)}$

D) $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{(x-x_0)\cdot....\cdot(x-x_{i-1})\cdot...\cdot(x-x_n)}{(x_i+x_0)\cdot...\cdot(x_i+x_{i-1})\cdot...\cdot(x_i+x_n)}$

E) $L_n(y)=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{(x-x_0)\cdot....\cdot(x-x_n)}{(x_i+x_0)\cdot...\cdot(x_i+x_n)}$

222. $\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+4x_3=9 \\ 3x_1-44x_2+5x_3=5 \\ x_1+6x_2+3x_3=10 \end{array}\right\}$ **Берілген САТЖ үшін Гаусс әдісінің бірінші қадамында қандай формула алынады?**

A) $x_1=9-2x_2-4x_3$

B) $x_1=10-6x_2-3x_3$

C) $x_1=\frac{5+44x_2-5x_3}{3}$

D) $x_1=5-6x_2-3x_3$

E) $x_1=10+6x_2-3x_3$

223. Гаусс әдісінің есептеу алгоритмі қанша бағыттан тұрады?

A) 2

B) 3

C) 1

D) 5

E) 10

224. Гаусс әдісінің есептеу алгоритмінің бағыттары қалай аталады?

A) Тура жол және кері жол
B) Сызықты және сызықты емес
C) Алгебралық, дискретті және резидентті
D) Гаусс, матрица және тіктөртбұрыштар
E) Оң жол және сол жол

225.Белгісіздерді біртіндеп жоя отырып, матрицаны үшбұрыш түрге келтіру бағыты қалай аталады?
A) Гаусс әдісінің тура жолы
B) Гаусс әдісінің кері жолы
C) Гаусс әдісінің қысқаша жолы
D) Зейдель бағыты
E) Крамер бағыты

226. Егер САТЖ-ның анықтауышы нөлден өзгеше болса, онда САТЖ-ның қанша шешімі бар?
A) 5
B) 3
C) 2
D) 1
E) Шексіз көп

227.Қандай жағдайда бірінші теңдеуді x_1- дің коэфициенті нөлден өзгеше болатын басқа теңдеуге алмастырамыз?
A) $a_{11} = 0$
B) $a_{11} = 1$
C) $a_{11} <> 0$
D) $a_{11} = \infty$
E) $a_{11} = a_{22}$

228.Интерполяциялық көпмүшенің максимальды дәрежесі қандай?
A) m=n
B) m > n
C) m > n +1
D) m < n+1
E) m<n

229.Ең үлкен ортақ бөлгішін табыңыз: 200; 240; 320
A) 40
B) 80
C) 20
D) 10
E) 8

230. Пропорция қасиетін пайдаланып теңдеуді шеш: $\frac{2x-1}{4}=\frac{3x+5}{9}$

A) $2\frac{1}{3}$

B) $6\frac{4}{5}$

C) $1\frac{1}{2}$

D) $4\frac{5}{6}$

E) -6

231. Теңдеуді шешіңіз: 6(x+5)=-18

A) 3
B) 2
C) 8
D) –2
E) –8

232. Көпмүше түрінде жазыңыз: $(x^2- 11)(11+x^2)$

A) $x^2 -22x - 121$
B) $121-x^4$
C) x^4-121
D) $x^2 + 22x^2+121$
E) $x^4 -22x^2 - 121$

233. ABCD параллелограмның периметрі 24см,егер AD-AB=3см болса,әр қабырғасы қаншадан болады?

A) 7,5; 4,5; 7,5;4,5
B) 9; 3; 9; 3
C) 5; 7; 5; 7;
D) 8,5; 3,5; 8,5; 3,5
E) 4; 4; 8; 8

234. Жұмысшы жалақысының 11 % - ін жұмсағаннан кейін 7120 теңге қалды. Оның алған жалақысы қанша?

A) 783 теңге.
B) 6336 теңге.
C) 2970 теңге.
D) 8000 теңге.
E) 64700 теңге.

235. Теңсіздікті шешіңіз: $2^{x^2-4x}< 1$.

A) (-2; 2).
B) (-4; 4).
C) (-4; 0).
D) (0; 4).
E) (0; 2).

236. Бөлшектің бөліміндегі иррационалдықтан құтылыңыз:

$$\frac{2}{2-\sqrt{3}}.$$

A) 2 - $\sqrt{3}$.

B) 2(2 - $\sqrt{3}$).

C) 2(2 + $\sqrt{3}$).

D) $\frac{1}{2}$(2 + $\sqrt{3}$).

E) $\sqrt{2}$ - 3.

237. Теңдеулер жүйесін шешіңіз: $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18 \end{cases}$

A) (49; 25).
B) (36; 4).
C) (25; 9).
D) (81; 25).
E) (64; 25).

238. Функциянықанықталу облысынтап $y = \arcsin\frac{x-5}{2}$

A) $(3;7]$
B) $[3;7)$
C) $(-\infty;3]$
D) $[7;+\infty)$
E) $[3;7]$

239. f(x) = 3x^2 + 5x - 3 функциясының туындысын тауып, f ' (0) + f ' (3) өрнегінің мәнін есептеңіз.
A) 40.
B) 28.
C) 33.
D) 36.
E) 25.

240. f(x) = e^x функциясының графигіне x$_0$ = 0 нүктесінде жүргізілген жанаманың көлбеулік бұрышының тангенсін табыңыз.

A) $\frac{\pi}{2}$.

B) $\frac{\pi}{4}$.

C) $\frac{\pi}{3}$.

D) -1.
E) 1.

241. Ромбының диагональдары 6 см және 8 см-ге тең. Ромбының ауданын табу керек.

A) 60 см^2.
B) 48 см^2.
C) $24\sqrt{2}$ см^2.
D) 36 см^2.
E) 24 см^2.

242. Тік бұрышты параллелепипедтің үш өлшемі 2 см, 3 см және 6 см. Оның диагоналінің ұзындығын табыңыз.

A) 6 см.
B) 11 см.
C) 7 см.
D) 9 см.
E) 8 см.

243. Саяхатқа шығу үшін ақша жинау керек еді. Егер әр саяхатшы 75 теңгеден өткізсе, барлық шығынға 440 теңге жетпейді, егер әрқайсысы 80 теңгеден өткізсе, онда 440 теңге артылып қалған болар еді. Саяхатқа қанша адам шығады?

A) 170.
B) 166.
C) 186.
D) 150.
E) 176.

244. Теңсіздіктің дұрыс шешімін анықтаңыз: $\log_{\frac{1}{3}}(1-2x) > -1$.

A) $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.
B) $(-\infty;-1)$.
C) $(-1;+\infty)$.
D) $\left(\frac{1}{2};1\right)$.
E) $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$.

245. Мүшелері оң өспелі геометриялық прогрессияның бірінші және төртінші мүшелерінің көбейтіндісі 27, ал екінші мен үшінші мүшелерінің қосындысы 12 тең. Екінші мен бесінші мүшелерінің қосындысын табыңыз.

A) 84.
B) 82.
C) 85.
D) 86.
E) 83.

246. Амалдарды орындаңыз.

$$\frac{a^2-2ab+b^2}{x^5}\cdot\frac{x^6}{a^2-b^2}.$$

A) $\frac{a+b}{x(a-b)}$.

B) $\frac{a+b}{a-b}$.

C) $\frac{x(a-b)}{a+b}$.

D) $\frac{x(a+b)}{a-b}$.

E) $\frac{a-b}{a+b}$.

247.Функцияның анықталу облысын табыңыз:

$$\mathrm{y}=\sqrt{\log_{0,3}\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+5}}$$

A) (1; +∞).
B) (-∞; 1).
C) (-5; ∞).
D) (-∞; -5).
E) (-5; 1).

248. Интегралды есептеңіз: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} s\mathrm{in}2\mathrm{x}\mathrm{dx}$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C) -0,5
D) 0,5
E) 1

249. Қабырғалары 8, 15, 17 болатын үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы неге тең?

A) 6.
B) 8,5.
C) 4.
D) 7,5.
E) 5,5.

250.$\angle$A=α, AC=b болатын ABC тең бүйірлі (AB=BC) үшбұрышының AE биссектрисасын табыңыз.

A) $\dfrac{b\cos\alpha}{\cos\dfrac{3\alpha}{2}}$

B) $\dfrac{b\cos\alpha}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$

C) $\dfrac{b\sin\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

D) $\dfrac{b\sin\alpha}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$

E) $\dfrac{b\sin\alpha}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$

251. Үш жақты бұрыштың екі жазық бұрышы 60°-тан. Олардың ортақ қыры бойымен төбеден бастап 2 см кесінді жүргізілген. Мөлшері 90°-қа тең үшінші жазық бұрышы жазықтығына түсетін осы кесіндінің проекциясын табыңыз.

A) $\sqrt{6}$ см.

B) $\sqrt{3}$ см.

C) $\sqrt{7}$ см.

D) $\sqrt{2}$ см.

E) $\sqrt{5}$ см.

252. Конустың осьтік қимасының ауданы 60 см^2-қа, ал табанының радиусы
5 см-ге тең. Конустың бүйір бетінің ауданын табу керек.

A) 70π см^2.
B) 120π см^2.
C) 65π см^2.
D) 80π см^2.
E) 75π см^2.

253. Бөлшекті қысқартыңыздар: $\dfrac{x^2-x+1}{x^4+x^2+1}$

A) $\dfrac{x-1}{x+1}$

B) $-\dfrac{1}{x^2+x+1}$

C) $\dfrac{1}{x+1}$

D) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$

E) $\dfrac{1}{x-1}$

254.Теңдеуді шешіңіз: $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{5}{8}$

A) $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

B) Шешімі жоқ.

C) $\pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k,\ k \in Z.$

D) $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

E) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k,\ k \in Z.$

255. $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=a$ **теңдеуінің түбірі қандай?**

A) $x=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{a^3}{a-2}\right)^3}$.

B) $x=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{a^3-2}{3a}\right)^3}$.

C) $x=\pm\sqrt{1-\dfrac{a^3}{2}}$.

D) $x=\sqrt[3]{1+a+a^2}$.

E) $x=\sqrt[3]{1+\dfrac{a^3}{4}}$.

256. Өрнекті ықшамдаңыз:

$$\left(1+\frac{x^2-2x+4}{x^2-4}\right)\cdot\left(\frac{3x}{2x-2}-\frac{3x+2}{x}+1\right).$$

A) 3(1 - x).
B) 5x - 1.
C) x.
D) 4(x + 2).
E) -1.

257. Функцияның туындысын табыңыз: f(x) = sin3x + cos5x.
A) 3cos3x + 5sin5x.
B) 3cos3x - 5sin5x.
C) cos3x - sin5x.
D) 3sin3x + 5cos5x.
E) sin3x - cos5x.

258. а-ның қандай мәндерінде у=3lnx+ax-2 функциясының кризистік нүктелері болмайтынын табыңыз.
A) [0; +∞)
B) (-∞; 0)
C) (0; +∞)
D) 0
E) (-∞; 0]

259. Жай көбейткіштерге жіктелген санадрдың ең үлкен ортақ бөлгішін табыңыз: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \textit{жjне}\, 2\cdot 3\cdot 7$
A) 12
B) 2
C) 6
D) 35
E) 3

260. Бүлдіргеннің 6% құмшекер болады. 27 кг. бүлдіргеннің неше кг құмшекер болады?
A) 2,24 кг
B) 2,42 кг
C) 1,62 кг
D) 1,82 кг
E) 2,5 кг

261. Көпмүше түрінде жазыңыз: 5у ($у^2$ - 3) ($у^2$ + 3)
A) $5у^5$ $30у^2$ + 45у
B) $5у^3$ –15
C) $5у^5$ – 15у
D) $5у^4$- 45у
E) $5у^5$ – 45у

262. Өрнектің мәнін тап: x+2xy; мұнда x=3, y= $-1\frac{1}{2}$

A) 2
B) –6
C) 4
D) 6
E) –4

263. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 20 см, бүйір қабырғасы табанынан екі есе ұзын. Оның қабырғаларының ұзындығын табыңыз.
A) 7,5; 7,5; 5
B) 8; 8; 4
C) 10; 5; 5
D) 6; 7; 7
E) 8; 6; 6

264. Теңдеуді шешіңіз: cos(-x) = -1.
A) $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$.
B) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.
C) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.
D) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.
E) $\pi + \pi n,\ n \in Z$.

265. Тізбектес екі натурал санның көбейтіндісі 182-ге тең. Осы сандардың қосындысын табыңыз.
A) 42
B) 36
C) 37
D) 24
E) 27

266. Теңсіздікті шешіңіз: $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x) > -1$.

A) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
B) $[-1; 0) \cup (2; 3)$.
C) $(-1; 3)$.
D) $(-1; 0) \cup (2; 3)$.
E) $(3; +\infty)$.

267. Ықшамдаңыз:
sin(90° - α) - cos(180° - α) + tg(180° - α) - ctg(270° + α).
A) -2cosα
B) -cosα.
C) 2cosα.
D) sinα.
E) cosα.

268. (C_n) **геометриялықпрогрессияда** $c_4 = 24, q = -2$ **болса, онда** c_1 **-нітабыңыз**.
A) –6.
B) –12.
C) –4.
D) –3.
E) –8.

269. Көбейткіштерге жіктеңіз: $x^2 - 7x + 7y - y^2$.
A) $\frac{x+y-7}{2}$.
B) $\frac{x+y}{3}$.
C) $\frac{x+y-7}{x-y}$
D) $(x - y)(x + y - 7)$.
E) $x + 2y$.

270. Теңсіздіктер жүйесін шешіңіз: $\begin{cases} 3x+6>0, \\ 5x-15<0 \end{cases}$
A) [-2; 3].
B) (-2; 3).
C) (-∞; -2).
D) [-2; +∞).
E) (-∞; 3].

271. $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$ **функциясының туындысын табыңыз**.
A) $3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
B) $3x + 2\sqrt{x}$.
C) $x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
D) $3x^2 + \frac{1}{x}$.
E) $3x^2 + 2\sqrt{x}$.

272. Конустың жасаушысы $2\sqrt{3}$ см-ге тең, ал осьтік қимасының төбесіндегі бұрышы 120°. Конус табанының ауданын табыңыз.
A) $6\sqrt{2}\pi$ см^2.
B) $6\sqrt{3}\pi$ см^2.
C) $8\sqrt{2}\pi$ см^2.
D) 9πсм^2.
E) 8π см^2.

273. Сыйымдылығы 200 л бөшкедегі бензиннің массасы ќандай болса, сондай суды ќұю үшін сыйымдылығы төмендегідей ыдыс керек.
1дм^3=1л бензиннің массасы 710г;
1дм^3=1л судың массасы 1кг.
A) 142 л.
B) 710 л.
C) 177 л.
D) 284 л.
E) 355 л.

274.Теңдеуді шешіңіз: $\sqrt[3]{16-x^3}=4-x$**.**
A) 5.
B) 4.
C) 6.
D) 2.
E) 1.

275. Теңсіздікті шешіңіз: (x+2)(x-1)(x-3) > 0.
A) (-2;1)$\cup$(3;∞).
B) (1;8) $\cup$(0;3).
C) (6;4) $\cup$(1;3).
D) (3;5) $\cup$(3;5).
E) (1;6) $\cup$(1;2).

276.Теңдеулер жүйесін шешіңіз: $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24 \\ 2^y \cdot 3^x = 54 \end{cases}$

A) (6; 4).
B) (2; 0).
C) (4; 2).
D) (3; 1).
E) (5; 3).

277.g(x) = lg(x - 1)(x- 2) функциясының анықталу облысын табыңыз.
A) x < 1; x > 2.
B) x > 1.
C) x $\geq$ 2.
D) 1 < x < 2.
E) x $\leq$ 1; x $\geq$ 2.

278.Абсциссасыx = π/4 болатынн үктедеу = $\dfrac{ctgx}{2}$ **қисығынажүргізілгенжанамаОхосінеқандайбұрышпенкөлбеген?**
A) π.
B) $\dfrac{3\pi}{4}$.
C) -arctg2.
D) arctg2.
E) $\dfrac{\pi}{4}$.

279. [0; $\frac{\pi}{2}$] кесіндісінде у = $\frac{\cos 2x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ функциясының ең үлкен мәнін табыңыз.

A) 2.
B) $\sqrt{3}$.
C) $\sqrt{2}$.
D) -$\sqrt{2}$.
E) -1.

280. Трапецияның доғал бұрышы төбесінен түсірілген биіктігі табанын 6 см және 30 см кесіндіге бөледі. Трапеция тең бүйірлі болса, табандарын табыңыз.
A) 12 см және 24 см.
B) 41 см және 20 см.
C) 22 см және 32 см.
D) 26 см және 34 см.
E) 24 см және 36 см.

281. Қабырғасының ұзындығы 12 см-ге тең дұрыс көпбұрышқа сырттай радиусы 4$\sqrt{3}$ **см тең шеңбер сызылған. Дұрыс көпбұрыштың қабырғалар санын табыңыз.**
A) 5.
B) 8.
C) 3.
D) 6.
E) 4.

282. Егер A(0; 2; 0), B(1; 0; 0), C(2; 0; 2) нүктелері ромбының үш тізбектес төбелері болса, онда ромбының ауданын табыңыз:
A) $2\sqrt{3}$
B) $\sqrt{6}$
C) 2
D) 3
E) $2\sqrt{6}$

283. Теңдеуді шешіңіз: $2^{x^2}\cdot 5^{x^2}=0{,}001\cdot(10^{3-x})^2$.
A) -3; 2.
B) 1; 6.
C) 1; -3.
D) 6; 4.
E) 0; 5.

284.Теңдеулер жүйесін шешіңіз: $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=5\\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1\end{cases}$

A) (625; 1).
B) (256; 81).
C) (64; 25).
D) (16; 1).
E) (81; 16).

285. Көрсетілген аралықтардың қайсысында функция f (x) = $\sqrt{x-x^2}$ монотонды өспелі?

A) [$\frac{1}{2}$; ∞).

B) [0; $\frac{1}{2}$].

C) (1; ∞).

D) [$\frac{1}{2}$; 1].

E) [0; 1].

286. Мына сызықтармен шектелген фигураның ауданын табыңыз
y = $\sqrt{x}$, y = 1, x = 4

A) $\frac{2}{3}$

B) 3

C) $7\frac{2}{3}$

D) $4\frac{2}{3}$

E) $1\frac{2}{3}$

287.Тең бүйірлі үшбұрыштың табаны $\sqrt{32}$ -ге , ал бүйір қабырғасының медианасы 5-ке тең. Бүйір қабырғаның ұзындығын табу керек.

A) 6.
B) 6,5.
C) 8.
D) 7,5.
E) 7.

288. Тік параллелепипедтің табаны бір бұрышы βболатын ромб. Параллелепипедтің көлемі V-ға тең болса,параллелепипедке іштей сызылған цилиндрдің көлемін табыңыз.

A) $\frac{\pi V \cdot \sin^2\beta}{4}$.

B) $\frac{\pi V \cdot \sin\beta}{4}$.

C) $\frac{\pi V \cdot \sin\beta}{2}$.

D) $\frac{\pi V \cdot \sin^2\beta}{2}$.

E) $\frac{\pi V \cdot \cos\beta}{2}$.

289.Бөлшектін мәнін табыңыз: $\frac{15a^2 - 10ab}{3ab - 2b^2}$ **, мұндағыа =-2; b =-0,1**

A) –43,75
B) 50
C) 10
D) 100
E) 107

290. Теңдеуді шеш: x^2+2x-48=0

A) (-6; 8)
B) (-6; -8)
C) (12; 16)
D) (6; 8)
E) (6; -8)

291.Стандарт түрдегі көпмүшеге түрлендіріңіз:(в^2-в+7)-(в^2+8)

A) 2в^2-в+15
B) –(в+1)
C) –в+1
D) –в+15
E) –в

292.Квадраттың қабырғасы 9 см-ге тең. Ауданын табыңыз.

A) 36 см^2
B) 72 см^2
C) 18 см^2
D) 81 см^2
E) 20,25 см^2

293.Тең қабырғалы үшбұрыштың бұрыштары нешеге тең?
A) 30^0-тан
B) 75^0-тан
C) 45^0-тан
D) 60^0-тан
E) 50^0-тан

294. Өрнекті ықшамдаңыз: $\frac{x^2}{x-5}+\frac{25}{5-x}$**.**

A) $\frac{x^2+25}{5x}$.
B) 5.
C) x + 5.
D) x^2 + 25.
E) $-\frac{x}{5}$.

295.Теңсіздікті шешіңіз:
$|x| \geq 1$.
A) $(-\infty;-1)$.
B) $(0;+\infty)$.
C) $(-1;1)$.
D) $(1;+\infty)$.
E) $(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$.

296. Теңдеуді шешіңіз: $\frac{x+3}{8}=\frac{1}{3}$

A) -4.
B) $-5\frac{2}{3}$.
C) -3.
D) $-\frac{1}{3}$.
E) $5\frac{2}{3}$.

297. Теңдеуді шешіңіз: $\log_3$ (7x - 7) = 3.

A) 2.
B) 1.
C) $\frac{34}{7}$.
D) $\frac{3}{7}$.
E) $\frac{16}{7}$.

298. 8 кг-ның 500 г-ға қатынасын есептеңіз.
A) 18.
B) 16.
C) 14.
D) 15.
E) 17.

299.Теңдеуді шешіңіз: 2sin2x = $\sqrt{2}$

A) $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.
B) $(-1)^k \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.
C) $(-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k,\ k \in Z$.
D) $(-1)^k \frac{\pi}{8} + \pi k,\ k \in Z$.
E) $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k,\ k \in Z$.

300.Функциянıңтуындысынтап:

$$f(x) = \frac{\cos^2 2x - x + \sin^2 2x}{x^2}$$

A) $\frac{x-2}{x^3}$
B) $-tgx$
C) tgx
D) 1
E) 0

Рефераттар мен баяндамалардың тақырыптары.
Тематика рефератов и докладов.

1. Ұштастыру. Комбинация санын есептеу тәсілдері.
2. Паскаль үшбұрышы.
3. Шектің геометриялық мағынасы.
4. Бірінші тамаша шек.
5. Екінші керемет шек.
6. Графикке қатысты функцияның теңдеуі.
7. Функцияның дифференциалы және оның геометриялық мағынасы.
8. Эйлерді қою..
9. Қолдану меншіксіз интегралдар.
10. Жазық фигуралардың ауданын есептеу.
11. Доғаның ұзындығы қисық.
12. Айналу денелерінің бетін есептеу.
13. Айналу денелерінің көлемін есептеу.
14. Пікір түсінігі. Негізгі логикалық операциялар.
15. Логика формулалары. Тең-шынайы формулалар.
16. Дизъюнктивтік қалыпты форма (ДНФ).
17. Конъюнктивтік қалыпты форма (ҚКФ).
18. Жасалған дизъюнктивтік қалыпты форма (СДНФ).

19. Кемелденген конъюнктивтік қалыпты форма (СКНФ).
20. Ең төменгі дизъюнктивтік қалыпты форма (МДНФ).
21. Көп функциялардың толықтығы.
22. Көп функциялардың тұйықталуы. Негізгі тұйық кластар. Постының теоремасы.
23. Жартылай бөлу әдісі.
24. Хорд әдісі.
25. Жанама әдіс.
26. Хорд және жанасудың аралас әдісі.
27. Итерация әдісі.
28. Крамер әдісі бойынша сызықты теңдеулер жүйесін шешу.
29. Гаусс схемасы бойынша сызықты теңдеулер жүйесін шешу.
30. Ньютонның бірінші интерполяциялық формуласы.
31. Ньютонның екінші интерполяциялық формуласы.
32. Интерполяция тораптары үшін Ньютонның интерполяциялық формуласы.
33. Сандық дифференциалдау және интегралдау.
34. Ньютон квадраттық формулалары.
35. Жоғары ретті Ньютон формуласы.
36. Трапеция мен Симпсонның жалпы формуласы.
37. Қарапайым дифференциалдық теңдеулердің сандық шешімі

Қорытынды бақылауға арналған сұрақтар
Вопросы для итогового контроля

1 Кешенді санның түсінігі.
2 Кешенді санның тригонометриялық, көрсеткіш формасы.
3 Сандық тізбекті анықтау.
4 Шектеулі және шексіз тізбектер.
5 Монотонды тізбектер.
6 Реттілік шегін анықтау.
7 Шектің геометриялық мағынасы.
8 Жүйелілік және шығындалатын тізбектер.
9 Нүктедегі және аралықтағы функция шегін анықтау.
10 Функцияның үздіксіздігі, үзілу нүктелері және олардың жіктелуі. Үздіксіз функциялардың қасиеттері.
11 Бірінші тамаша шегі.
12 Екінші тамаша шегі.
13 Шексіз кіші және шексіз үлкен функциялар.
14 Шексіз кіші және шексіз үлкен функциялар арасындағы байланыс.
15 Бір жақты шектер. Шексіз аз эквивалентті алмастыру принципі.
16 Туындыны анықтау.
17 Туындының геометриялық және физикалық мағынасы.

18 Туынды сомалар, туындылар және жеке
19 Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі.
20 Туындылар кестесі.
21 Графикке қатысты функцияның теңдеуі.
22 Функцияның дифференциалы және оның геометриялық мағынасы.
23 Функцияның тұрақты, өсу және кему белгілері.
24 Функция экстремумы.
25 Функцияның және иілу нүктесінің дөңес, қисық графигінің қисықтығы.
26 Функциялар графигінің Асимптоты.
27 Туынды көмегімен функцияны зерттеу схемасы және функцияның графигін құру.
28 Нүктедегі функцияның ең үлкен және ең кіші мәні.
29 Алғашқы түсінік.
30 Белгісіз интегралды анықтау.
31 Белгісіз интегралдың негізгі қасиеттері.
32 Интегралдардың кестесі.
33 Тікелей интегралдау әдісі.
34 Қойындымен интегралдау әдісі.
35 Бөлшектер бойынша интегралдау әдісі.
36 Рационалды бөлшектерді интегралдау.
37 Иррационалды бөлшектерді интегралдау.
38 Тригонометриялық функцияларды интегралдау.
39 Белгілі интеграл және оның геометриялық мәні.
40 Белгілі интегралдың негізгі қасиеттері.
41 Ньютон-Лейбниц Формуласы.
42 Белгілі интегралды есептеу тәсілдері.
43 Жазық фигуралардың ауданын есептеу.
44 Математикалық индукция принципі.
45 Таңдау ұғымы, реттелген таңдау.
46 Орнын ауыстыру және орналастыру үшін формулалар.
47 Комбинациясы. Комбинация санын есептеу тәсілдері.
48 Әмбебап тригонометриялық орналастыру.
49 Эйлерді Қою.
50 Пікір түсінігі. Негізгі логикалық операциялар.
51 Логика формулалары. Тең-шынайы формулалар.
52 Дизъюнктивтік қалыпты форма (ДНФ).
53 55 конъюнктивтік қалыпты форма (КНФ).
54 Логиканың екі формуласының тепе-теңдігі. Логика заңдары.
55 57 Булев векторы.
56 58 Булев функциясы. Негізгі булевтар функциялары.
57 Көптеген функциялардың толықтығы.
58 Көптеген функциялардың тұйықталуы. Негізгі тұйық кластар.
59 Жиындар операциялары.
60 Жиындарға операция жасау қасиеттері.
61 Теориялық-көпше және логикалық операциялар, олардың байланысы.
62 Предикат. Предикаттарға операциялар. Предикат алдындағы формула.
63 Предикаттардың жүруі және теңдігі.
64 Бинарлық қатынас. Екілік қатынастардың қасиеттері.
65 Эквиваленттілік қатынасы.
66 Түрлері дыбыс бейнелерін көпшіліктің қабылдауына.
67 Көрініс композициясы. Кері көрсету.
68 Жұп және тақ қойындылар. Қою дәрежесі. Алгебра орынға қою.
69 Доғаның ұзындығы қисық.
70 Айналу денелерінің бетін есептеу.
71 Айналу денелерінің көлемін есептеу.

72 Жақын сандар және олардың қателіктері.
73 Абсолюттік және салыстырмалы қателіктер. Сандарды дөңгелектеу ережесі.
74 Алгебралық және трансценденттік теңдеулердің сандық шешімі.
75 Алгебралық және трансценденттік теңдеулер туралы түсінік. Теңдеулердің графикалық шешімі.
76 Тамыр бөлімі (графикалық және аналитикалық әдістер).
77 Жартылай бөлу әдісі.
78 Хорд әдісі.
79 Жанасу әдісі.
80 Хорд және жанасудың аралас әдісі.
81 Итерация әдісі.
82 Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешу.
83 Крамер әдісі бойынша сызықты теңдеулер жүйесін шешу.
84 Гаусс схемасы бойынша сызықты теңдеулер жүйесін шешу.
85 Гаусс сұлбасы бойынша анықтағыштарды есептеу. Гаусс схемасы бойынша матрицаның айналымы.
86 Тізбекті жақындау әдісімен сызықты теңдеулер жүйесін шешу, әдістің мәні.
87 Зейдель әдісі бойынша сызықтық теңдеулер жүйесін шешу
88 Интерполирлеу.
89 Интерполяция есебі. Соңғы айырмашылық. Айырмашылық кестесі.
90 Ньютонның бірінші интерполяциялық формуласы.
91 Ньютонның екінші интерполяциялық формуласы.
92 Сандық интегралдау.
93 Сандық дифференциалдау және интегралдау. Сандық интегралдау есебін қою.
94 Қарапайым дифференциалдық теңдеулердің сандық шешімі.