МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Ю.Я. Кацман

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по образованию в области прикладной информатики
в качестве учебника для студентов, обучающихся по направлению
и специальности «Прикладная информатика»*

Издательство
Томского политехнического университета
2013

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
К31

Кацман Ю.Я.

К31 Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы: учебник / Ю.Я. Кацман; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – 131 с.

ISBN 978-5-4387-0173-6

Учебник направлен на первоначальное изучение теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов. Изложены основные понятия, свойства и методы современной теории. Обоснование теоретического материала сопровождается большим количеством примеров решения задач, представляющих практический интерес в различных областях науки и техники.

Предназначен для студентов, обучающихся по направлению ООП 230400 «Информационные системы и технологии», профиль подготовки «Геоинформационные системы, информационные системы в технологии и бизнесе».

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ

Г.М. Кошкин

Кандидат физико-математических наук, доцент ТУСУРа

Н.Э. Лугина

Кандидат технических наук, доцент ТПУ

В.А. Воловоденко

ISBN 978-5-4387-0173-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель учебника – изучить основы теории вероятностей, ознакомиться с элементами математической статистики и основами теории случайных процессов. Одноименная дисциплина изучается в течение одного семестра, поэтому первостепенное внимание в учебнике уделяется основам теории вероятностей, без знания которых рассмотрение методов математической статистики и случайных процессов просто невозможно.

Теория вероятностей – *математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений*. Под случайными явлениями понимаются явления с неопределенным исходом, происходящие при неоднократном воспроизведении (повторении) одного и того же опыта при неизменных условиях.

В природе и технике, в экономике и спорте нет ни одного физического явления, в котором не присутствовали бы элементы случайности. Разработка и изучение методов теории вероятности и вероятностных моделей дает возможность понять различные свойства случайных явлений на абстрактном и обобщенном уровне, не прибегая к эксперименту.

Цель вероятностных методов состоит в том, чтобы, минуя слишком сложное (а зачастую и невозможное) исследование отдельного случая, изучить закономерности массовых случайных явлений, прогнозировать их характеристики, влиять на ход этих явлений, контролировать их, ограничивать область действия случайности.

Математизация знаний, опирающаяся на мощную техническую поддержку в виде современных ЭВМ, привела к широкому применению статистических методов в работе специалистов, деятельность которых связана с компьютерной обработкой данных. Статистические методы, основываясь на законах теории вероятностей, позволяют изучить технологии сбора, систематизации и интерпретации числовых (случайных) данных.

Главная цель статистики – *получение осмысленных заключений из несогласованных* (подверженных разбросу) *данных*.

Действительно, исключая тривиальные ситуации, реальные данные всегда являются несогласованными, что требует применения статистических методов. Рассогласованность (разброс) между индивидуальными наблюдениями может быть, например, обусловлена ошибкой считывания позиции стрелки прибора, когда она расположена между двумя делениями шкалы стрелочного прибора, либо как следствие нестабильности работы электронного оборудования при передаче сообщений и т. п.

Случайный процесс (случайная функция времени) – *процесс изменения во времени состояний системы в соответствии с вероятностными закономерностями.* Значение случайного процесса в произвольный момент времени определяется распределением вероятностей соответствующей случайной величины.

Для современных вычислительных машин, систем и сетей характерна работа в режиме решения потока случайных по своим характеристикам задач, поступающих в общем случае в случайные моменты времени. Анализ и, самое главное, синтез систем с учетом вероятностного характера протекающих в них процессов возможен методами *теории массового обслуживания*.

Изучаемая дисциплина – очень молодая наука. Первые работы, посвященные основным понятиям теории вероятности, появились в XVI–XVII вв. и связаны с анализом азартных игр в карты и кости. Одними из первых авторов были Дж. Кардано (1501–1570), Г. Галилей (1564–1642), Б. Паскаль (1623–1662) и П. Ферма (1601–1665). Первый более или менее полный трактат по теории вероятностей «О расчетах при игре в кости или о расчетах при азартной игре» был написан в 1657 году Х. Гюйгенсом (1629–1695). Уже в этой работе Гюйгенс подчеркнул, что дело не в азартных играх, а в том, что «закладывается основа очень интересной и глубокой теории».

Развитие производства, возникшие задачи страхования и демографии, усложнение физических экспериментов и астрономических наблюдений, связанных с измерениями, с методами оптимального регулирования, линейной фильтрацией и теорией передачи сигналов по каналам связи, очень быстро подтвердили предсказание Гюйгенса и резко расширили границы применения теории вероятностей. Эти достижения были связаны с именами таких великих математиков, как Я. Бернулли (1654–1705), А. Муавр (1667–1754), Д. Бернулли (1700–1782), Т. Байес (1702–1761), Л. Эйлер (1707–1783), П. Лаплас (1749–1827), С. Пуассон (1781–1840), К. Гаусс (1777–1855).

Современное развитие теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов связано с именами П.Л. Чебышева (1821–1894), А.А. Маркова (1856–1922), А.М. Ляпунова (1857–1918), К. Пирсона (1857–1936), Р. Фишера (1890–1962), А.Я. Хинчина (1894–1959), В.И. Гливенко (1897–1940), А.Н. Колмогорова (1903–1987), Стьюдента (В. Госсета) (1876–1937).

Раздел 1
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Элементы комбинаторики

Правило произведения. Если элемент x_1 строки (x_1, x_2, ..., $x_к$) можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора x_1 элемент x_2 можно выбрать n_2 способами, и после выбора x_1 и x_2 элемент x_3 можно выбрать n_3 способами и т. д., наконец, $x_к$ независимо от выбора всех предыдущих элементов можно выбрать $n_к$ способами. Тогда количество возможностей (комбинаций) образования строки (x_1, x_2, ..., $x_к$) равно:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k . \tag{1.1}$$

ПРИМЕР 1. Обед в университетской столовой состоит из трех блюд. Первое блюдо в меню может быть выбрано 5 способами, второе блюдо – 4, а третье блюдо – 3. Сколько дней студент может съедать новый обед, если любая комбинация блюд возможна, и один обед от другого должен отличаться хотя бы одним блюдом?

РЕШЕНИЕ. При решении данной задачи применим *правило произведения* (комбинаторика) и учтем, что строка состоит из трех элементов. Первое блюдо (первый элемент строки) можно выбрать пятью различными способами, второе – четырьмя различными способами независимо от выбора первого. Таким образом, первые два блюда можно выбрать $5 \cdot 4$ различными комбинациями. Учитывая выбор третьего блюда, окончательно получим:

$$N = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Правило суммы. Пусть множество E_1 содержит n_1 элемент, множество E_2 – n_2 элементов, ..., и множество $E_к$ – n_k элементов. И если эти множества попарно не пересекаются (нет одинаковых элементов), то число элементов в их объединении равно сумме чисел элементов, содержащихся в каждом из этих множеств:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k . \tag{1.2}$$

Перестановки. Пусть $E^{(n)} = \left\{ x_1, x_2, ..., x_n \right\}$ – произвольное (неупорядоченное) n-элементное множество. Рассмотрим различные комбинации его упорядочивания. Получаемые при этом упорядоченные множества отличаются друг от друга только порядком следования входящих в них элементов и называются перестановками из n элементов. Число всех таких перестановок обозначается символом P_n и находится по формуле:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n. \quad (0! = 1! = 1). \tag{1.3}$$

ПРИМЕР 2. Пятеро гостей случайным образом рассаживаются за столом. Сколькими способами можно их рассадить так, чтобы хотя бы 2 гостя поменялись местами (изменился порядок)?

РЕШЕНИЕ. При решении данной задачи, учитывая, что за столом всегда сидят все 5 гостей, применим *правило перестановки*.

$$N = P_5 = 5! = 120.$$

Размещения. Различные упорядоченные m-элементные подмножества данного неупорядоченного множества $E^{(n)}$ ($m < n$) называются размещениями из n элементов по m. Число таких размещений обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1).....(n-m+1). \tag{1.4}$$

ПРИМЕР 3. Десять участников финала разыгрывают одну золотую, одну серебряную и одну бронзовую медали. Сколькими способами эти награды могут быть распределены между спортсменами?

РЕШЕНИЕ. Согласно условию данной задачи награды получат только три финалиста из десяти, а ценность медалей различна, т. е. порядок призеров имеет значение. Тогда для определения числа комбинаций призеров применим *правило размещений*:

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Сочетания. Различные неупорядоченные m-элементные подмножества множества $E^{(n)}$ ($m < n$) называются сочетаниями из n элементов по m. Число всех таких сочетаний обозначается символом C_n^m и определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.5}$$

Можно доказать справедливость следующих формул:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \qquad (m \le n),$$
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n, \tag{1.6}$$
$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}, \qquad (1 < m < n).$$

ПРИМЕР 4. В полуфинальном забеге участвуют десять спортсменов. Три спортсмена, показавшие лучший результат, попадают в финал. Сколько существует различных троек финалистов?

РЕШЕНИЕ. По условию задачи в финал войдут только три спортсмена из десяти, причем место в призовой тройке не имеет значения. Тогда для определения числа комбинаций призеров применим *правило сочетаний:*

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120.$$

Примечания.

Размещения из n элементов по m представляют собой такие m-элементные выборки из неупорядоченного множества $E^{(n)}$, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их расположения.

Сочетания же из n элементов по m представляет собой m-элементные выборки, отличающиеся только самими элементами.

Размещения с повторениями. Любая строка длиной m, составленная из элементов множества $E^{(n)}$, причем элементы в строке могут повторяться, называется размещением с повторением из n элементов по m. Число всех размещений с повторениями обозначается символом $\overline{A}_n^m$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{A}_n^m = n^m. \tag{1.7}$$

ПРИМЕР 5. Для автомобильных номеров используются 10 цифр и 28 букв. Каждый номер состоит из 3 букв и 4 цифр. Какое максимальное число машин может получить номера при такой системе нумерации?

РЕШЕНИЕ. Сначала осуществим выбор 4 цифр. Каждый такой комплект цифр представляет собой четырехэлементную выборку из 10-элементного массива цифр, т. е. является размещением с повторениями из 10 элементов по 4. Следовательно, общее число таких элементов равно 10^4. Исключим из выборки номер 00-00, если он недопустим. Аналогично выбор трех букв из 28 осуществляется 28^3 числом способов. Т. к. номер каждой машины есть упорядоченная «пара», состоящая из комплекта цифр и комплекта букв, то по правилу произведения число всех номеров будет равно:

$$N = (10^4 - 1) \times 28^3 = 219\,498\,048.$$

Сочетания с повторениями. Рассмотрим сочетания из n элементов по m и предположим, что в комбинации возможны повторения. В этом случае выбор элементов комбинации осуществляется не только по одному разу из n элементов, но и еще до $(m - 1)$ раза одного из этих элементов. В этом случае общее число элементов, из которых осуществляется комбинация, следует увеличить до $(n + m - 1)$ элементов. Следовательно, число сочетаний из n элементов по m с повторениями определяется по формуле

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m. \tag{1.8}$$

ПРИМЕР 6. В цветочном киоске продается 10 наименований цветов. Покупатель желает приобрести букет из 5 цветов. Сколько существует комбинаций таких букетов?

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что цветы одного наименования могут повторяться в букете, и так как порядок цветов в букете не имеет значения, то здесь применима формула числа сочетаний с повторениями:

$$\overline{C}_{10}^5 = C_{10+5-1}^5 = C_{14}^5 = \frac{14!}{5!\cdot 9!} = 2002.$$

Перестановки с повторениями. Рассмотрим перестановки, содержащие одинаковые элементы. Например, в перестановках из n элементов имеются k различных элементов $(k < n)$. При этом первый элемент встречается n_1 раз. Это означает, что общее число перестановок должно быть уменьшено в $n_1!$ раз, так как взаимные перестановки одного и того же элемента равнозначны.

Аналогично происходит и с остальными элементами, которые могут встречаться $n_2,\ n_3,\ \ldots,\ n_k$ раз, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$ Поэтому общее число перестановок с повторениями подсчитывается по формуле

$$P_n(n_1; n_2; \ldots; n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}. \tag{1.9}$$

ПРИМЕР 7. Имеется шестизначная кодовая комбинация, состоящая из трех цифр 1, 3, 5, в которой цифра 1 встречается один раз, цифра 3 – два раза и цифра 5 – три раза. Сколько существует комбинаций таких наборов?

РЕШЕНИЕ. В данном случае имеют место перестановки с повторениями. Их число будет равно

$$P_6(1;\ 2;\ 3) = \frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!} = 60.$$

1.2. Пространство элементарных событий. Случайные события

Под **событием** в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Примеры событий:

A – появился герб при бросании монеты;

B – появление трех гербов при трехкратном бросании монеты;

C – попадание в цель при выстреле;

D – появление туза при извлечении карты из колоды и т. д.

Рассматривая вышеперечисленные события, мы видим, что каждое из них обладает какой-то степенью возможности: одни – большей, другие – меньшей. Причем для некоторых событий мы сразу же можем решить, какое из них более, а какое менее возможно. Чтобы количественно сравнить между собой события по степени их возможности, очевидно нужно с каждым событием связать определенное число, которое тем больше, чем более возможно событие. Такое число мы называем *вероятностью события*.

Рассмотрим множество событий M, которые можно наблюдать в некотором эксперименте. Выделим, прежде всего, два специальных события – *достоверное событие* – U, которое обязательно происходит в эксперименте, и *невозможное событие* – V, которое не может произойти в эксперименте никогда.

Для каждого события A из M введем противоположное событие $\overline{A}$, которое состоит в том, что событие A не произошло.

Событие $A+B\ (A\bigcup B)$, заключающееся в том, что из двух событий A и B происходит по крайней мере одно (либо A, либо B, либо A и B вместе), называется *суммой* (или *объединением*) событий A и B.

Событие $AB\ (A\bigcap B)$, заключающееся в том, что события A и B происходят одновременно, называется *произведением* (или *пересечением*) событий A и B.

Событие $A \setminus B$ называется *разностью* событий A и B; оно заключается в том, что происходит A и не происходит B.

Операции над событиями обладают следующими свойствами:

- $A+B=B+A-$ коммутативность сложения;
- $A+(B+C)=(A+B)+C-$ ассоциативность сложения;

- $AB = BA -$ коммутативность умножения;
- $A(BC) = (AB)C -$ ассоциативность умножения;
- $A(B + C) = AB + AC; \quad A + BC = (A + B)(A + C)$ – законы дистрибутивности.

Предположим, что среди всех возможных событий *A*, которые в данном опыте по воле случая происходят или не происходят, можно выделить совокупность так называемых *элементарных событий*, или *элементарных исходов*, обладающих следующими свойствами:

- во-первых, все они взаимоисключают друг друга, т. е. являются непересекающимися;
- во-вторых, в результате данного опыта обязательно происходит одно из этих элементарных событий;
- в-третьих, каково бы ни было событие *A*, по наступившему элементарному исходу всегда можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Элементарные исходы обычно обозначаются греческой буквой ω, а их совокупность Ω называется *пространством элементарных событий*.

Достоверное событие U, наступающее в результате любого из элементарных исходов ω, при таком отождествлении событий множеством совпадает с пространством: $U = \Omega$.

Невозможное событие V, не наступающее ни при каком элементарном исходе ω, совпадает с пустым множеством и обозначается $V = \varnothing$.

Теперь можно указать дополнительные свойства операций над событиями:

- $A + A = A,\ A \bigcap A = A;$
- $A + \Omega = \Omega,\ A \bigcap \Omega = A;$
- $A + \overline{A} = \Omega,\ A \bigcap \overline{A} = \varnothing;$
- $\overline{\varnothing} = \Omega, \quad \overline{\Omega} = \varnothing, \quad \overline{\overline{A}} = A;$
- $A - B = A \bigcap \overline{B};$
- $\overline{A + B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}, \quad \overline{A \bigcap B} = \overline{A} + \overline{B} -$ законы де Моргана.

Два события *A* и *B* несовместимы (или несовместны), если $A \bigcap B = \varnothing$ (т. е. событие невозможно).

События E_1, E_2, ..., E_n образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и $E_1 \bigcup E_2 \bigcup E_3 \bigcup ... \bigcup E_k = \bigcup\limits_K E_k = E_k$, т. е. из этих событий происходит одно и только одно.

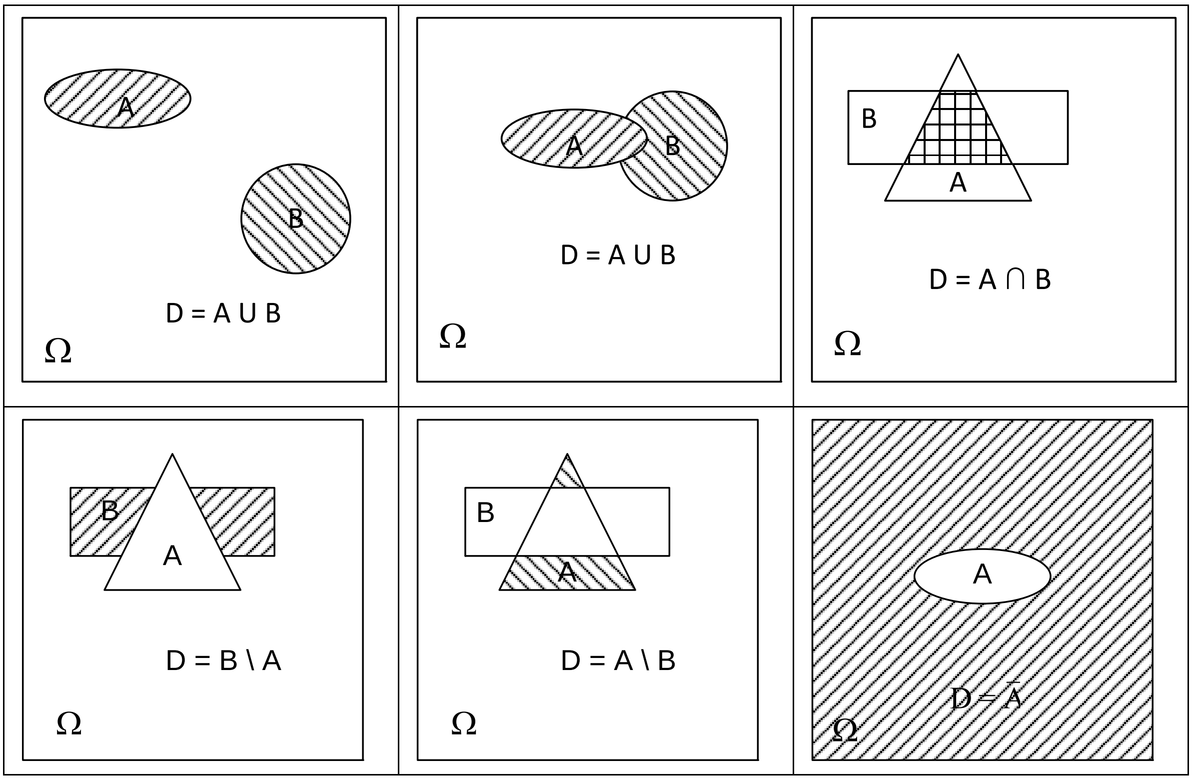
ПРИМЕР 8. Победитель соревнования награждается: призом (событие *A*), денежной премией (событие *B*), медалью (событие *C*). Что представляют собой события: а) $A+B$; б) ABC; в) $AC-B$?

РЕШЕНИЕ: а) событие $A+B$ состоит в том, что победитель награжден призом или премией, или призом и премией одновременно;

б) событие ABC состоит в том, что победитель награжден призом, премией и медалью одновременно;

в) событие $AC-B$ состоит в награждении победителя призом и медалью одновременно, без выдачи премии.

Для наглядной иллюстрации алгебры событий воспользуемся диаграммами ***Эйлера–Венна***.



Здесь каждой картинке (прямоугольнику) соответствует пространство элементарных событий Ω.

ПРИМЕР 9. Описать пространство элементарных событий следующего опыта – брошены две игральные кости.

РЕШЕНИЕ. Очевидно, элементарным исходом данного опыта можно считать пару чисел $\omega=(a,b)$, где a – число очков на первой кости, b – число очков на второй кости. Известно, что ($1 \le a$, $b \le 6$), причем количество очков на первой кости не зависит от того, сколько очков выпадет на второй кости и наоборот. Отсюда получим:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{llllll} \omega_1 = (1,1); & \omega_2 = (2,1); & \omega_3 = (3,1); & \omega_4 = (4,1); & \omega_5 = (5,1); & \omega_6 = (6,1); \\ \omega_7 = (1,2); & \omega_8 = (2,2); & \omega_9 = (3,2); & \omega_{10} = (4,2); & \omega_{11} = (5,2); & \omega_{12} = (6,2); \\ \omega_{13} = (1,3); & \omega_{14} = (2,3); & \omega_{15} = (3,3); & \omega_{16} = (4,3); & \omega_{17} = (5,3); & \omega_{18} = (6,3); \\ \omega_{19} = (1,4); & \omega_{20} = (2,4); & \omega_{21} = (3,4); & \omega_{22} = (4,4); & \omega_{23} = (5,4); & \omega_{24} = (6,4); \\ \omega_{25} = (1,5); & \omega_{26} = (2,5); & \omega_{27} = (3,5); & \omega_{28} = (4,5); & \omega_{29} = (5,5); & \omega_{30} = (6,5); \\ \omega_{31} = (1,6); & \omega_{32} = (2,6); & \omega_{33} = (3,6); & \omega_{34} = (4,6); & \omega_{35} = (5,6); & \omega_{36} = (6,6). \end{array} \right\}$$

1.3. Статистическое определение вероятности

Испытанием называется эксперимент, который можно (хотя бы принципиально) провести в одинаковых условиях любое число раз. Простейший результат испытания называется *элементарным событием* или *исходом*. При испытании неизбежно наступает какой-то исход и только один.

Если событие может привести к n различным равновозможным исходам и если в m случаях появится признак A, то относительная частота (частость) события A обозначается $r(A)$ и равна отношению m к n:

$$r(A) = \frac{m(A)}{n}. \tag{1.10}$$

Это так называемое ***статистическое*** (комбинаторное) определение вероятности. Событие A, для которого относительная частота $r(A)$ при достаточно больших n мало отличается от некоторого фиксированного числа, не зависящего от серии проводимых испытаний, называется *статически устойчивым.*

Вероятностью статически устойчивого случайного события A называется число $P(A)$, около которого группируются относительные частоты этого события в длинных сериях независимых испытаний:

$$P(A) = r_n(A) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1.11}$$

Вероятности $P(A)$ обладают свойствами, аналогичными свойствам частости:

1. Статистическая вероятность любого события заключена между нулем и единицей:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Статистическая вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\varnothing) = 0.$$

3. Статистическая вероятность достоверного события равна единице:

$$P(\Omega) = 1.$$

ПРИМЕР 10. При подбрасывании идеальной монеты вероятность появления герба в каждом отдельном испытании равна $P(A)=0,5$. Ниже в таблице приведены результаты длинных серий опытов.

Экспериментатор	***n***	***m*(*A*)**	**$r_n(A)$**
Ж.Л.Л. Бюффон	4040	2048	0,5069
К. Пирсон	12000	6019	0,5016
К. Пирсон	24000	12012	0,5005

ПРИМЕР 11. Имеется колода тщательно перемешанных карт (36 листов). Наугад вытаскивается одна карта. Сколько в среднем надо провести опытов, чтобы этой картой был туз пиковый?

РЕШЕНИЕ. Так как в колоде только одна карта туз пиковый, то частость (относительная частота) появления туза пикового равна 1/36. Вспомним, что $r(A)=m/n$. Отсюда $n=m/r(A)$. В нашем случае $m=1$, тогда $n=36$.

1.4. Классическая вероятностная схема

В этой схеме для определения вероятности нет необходимости проводить опыты. Сама же вероятность основывается на равной возможности любого из конечного числа исходов, что характерно для первых попыток исчисления шансов в азартных играх. Исход бросания монеты в одном опыте случаен, однако при многократном повторении опыта можно наблюдать определенную закономерность.

Рассмотрим классическую вероятностную схему как событийную, то есть предположим, что мы имеем дело с пространством элементарных исходов, состоящим из конечного числа N элементов: $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_n\}$. Более того, предположим, что из каких-либо соображений мы можем считать элементарные исходы *равновозможными*. Тогда вероятность любого из них принимается равной 1 / *N*. Эти соображения чаще всего не имеют отношения к математической модели и основаны на какой-либо симметрии в следующих экспериментах:

Бросание монеты. Рассмотрим такой простой опыт, как бросание монеты. Он имеет два взаимно исключающих друг друга исхода: выпал «герб», выпала «цифра».

Бросание игральной кости. Подбрасывается правильный кубик (игральная кость). При этом случайным образом выпадает та или иная грань, то или иное число очков: a = 1, 2, …, 6.

Игра в рулетку. Рассмотрим тяжелый диск, разделенный на n правильных секторов. Диск находится в горизонтальном положении и легко может вращаться вокруг своей оси. Вдоль окружности по краю диска имеется однородное углубление (желоб), в котором находится маленький, свободно перемещающийся шарик. На каждом отдельном шаге (опыте) диску сообщается сильное вращение, при котором шарик катится по желобу. После остановки диска останавливается и шарик, попадая в один из секторов диска (обозначенных на диске номерами от 1 до n).

По поводу каждого из описанных выше опытов (бросание монеты или игральной кости, бросание шарика при игре в рулетку) можно сказать следующее: во-первых, исход опыта является случайным; во-вторых, имеется конечное число различных, взаимно исключающих друг друга исходов; в-третьих, все эти исходы равновероятны.

В случае, когда рассматриваемые опыты имеют равновозможные исходы, вероятность события A может быть вычислена по следующей формуле:

$$P(A)=\frac{n(A)}{N}, \tag{1.12}$$

где N – общее число равновозможных и взаимно исключающих друг друга исходов, $n(A)-$ число тех из них, которые приводят к наступлению события A.

ПРИМЕР 12. Рассмотрим игру в преферанс, когда старшие 32 карты карточной колоды случайным образом распределяются между тремя игроками, получающими по 10 карт, и «прикупом», куда кладут 2 карты. Какова вероятность того, что в прикупе окажутся 2 туза?

РЕШЕНИЕ. Число всех комбинаций из 32 карт по 2 равно числу сочетаний и вычисляется по формуле: $N=\frac{32!}{2!\cdot 30!}=496.$ В карточной колоде имеется ровно 4 туза и число различных комбинаций, дающих 2 туза, равно числу сочетаний из 4 по 2: $n(A)=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6.$ Окончательно получим

$$P(A)=\frac{n(A)}{N}=\frac{6}{496}\approx 0,012.$$

ПРИМЕР 13. Предположим, что один из играющих имеет 5 старших карт одной масти (черви), исключая даму. При объявлении ранга игры участнику приходится учитывать возможность образования у одного из вистующих – противников – комбинации из трех оставшихся червей. Какова вероятность этого события?

РЕШЕНИЕ. У двух «вистующих» 20 карт. Количество различных комбинаций получения карт одним из игроков равно $N=C_{20}^{10}=\frac{20!}{10!\cdot 10!}$.

Если комбинацию «третья дама» зафиксировать у одного игрока, то число совместимых с этим случаем распределений равно числу сочетаний из 17 оставшихся карт по 7: $n(A)=\frac{17!}{7!\cdot 10!}$. Таким образом,

$$P(A)=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{18\cdot 19\cdot 20}=\frac{2}{19}\approx 0{,}105.$$

Вероятность появления третьей дамы у любого из вистующих очевидно в 2 раза больше.

ПРИМЕР 14. В поступившей партии из 30 швейных машинок 10 машинок имеют внутренние дефекты. Какова вероятность того, что из партии в пять наудачу взятых машинок три окажутся бездефектными?

РЕШЕНИЕ. Введем следующие обозначения: $N=30$ – общее число машинок, $n=20$ – число бездефектных машинок, $m=5$ – число отобранных в партию (подмножество) машинок, $k=3$ – число бездефектных машинок в отобранной партии.

Общее число комбинаций по m машинок равно числу сочетаний из N элементов по m, т. е. C_N^m. Однако в каждой отобранной комбинации должно содержаться по три бездефектные машинки. Число таких комбинаций равно числу сочетаний из n элементов по k, т. е. C_n^k. С каждой такой комбинацией в отобранной партии оставшиеся дефектные элементы тоже образуют множество комбинаций, число которых равно числу сочетаний из $N-n$ элементов по $m-k$, т. е. C_{N-n}^{m-k}. Тогда общее число благоприятствующих исходов равно произведению (комбинаторика – правило произведения) $C_n^k\cdot C_{N-n}^{m-k}$. Согласно (1.12), окончательно получим:

$$P(A)=\frac{C_n^k\cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}. \qquad (1.13)$$

Подставим в формулу (1.13) численные значения и окончательно получим:

$$P(A)=\frac{C_{20}^3\cdot C_{10}^2}{C_{30}^5}\approx 0{,}36.$$

Замечание. Выражение (1.13) носит название *формулы гипергеометрического распределения.*

1.5. Аксиоматическое построение теории вероятностей

Приведенные выше классическое и статистическое определения вероятности события позволяют создавать основные соотношения, используемые в теории вероятностей и математической статистике.

Однако существует и иной подход к построению основ теории вероятностей, опирающийся на специально вводимые в рассмотрение аксиомы. Этот подход был предложен А.Н. Колмогоровым.

При аксиоматическом построении теории вероятностей первичным понятием является не элементарное случайное событие, а просто элементарное событие любой природы. Множество таких событий образует поле элементарных событий. Из подмножества данного множества составляются некоторые ансамбли, которые и носят название случайного события. Множество таких событий образует поле событий S. На этом поле случайных событий вводится числовая функция, называемая вероятностью и определяемая следующими аксиомами.

Аксиома 1. Каждому случайному событию A из поля событий S поставлено в соответствие неотрицательное число $P(A)$, называемое вероятностью, такое, что

$$P(\Omega \bigcup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing) = P(\Omega).$$

Аксиома 2. Вероятность достоверного события $U = \Omega$ равна единице:

$$P(\Omega) = 1.$$

Аксиома 3. Вероятность суммы (объединения) двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Примечания.

Рассмотрим теперь следствие, которое служит примером использования этих аксиом. Пусть $\varnothing$ – пустое множество событий, иначе говоря, $\varnothing$ означает отсутствие событий. Тогда $(\Omega \bigcup \varnothing) = \Omega$ и Ω не имеет общих элементов с $\varnothing$. Следовательно:

$$\begin{gathered} P(\Omega \bigcup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing) = P(\Omega), \\ P(\varnothing) = 0. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Аксиоматический подход позволяет с более общих позиций подойти к построению теории вероятностей и преодолевает некоторые недостатки классического и статистического определений вероятности событий. Однако для большинства практических задач рассмотренные ранее определения вероятностей событий оказываются достаточно удобными и надежными, так что в дальнейшем будем опираться именно на них. В этом случае третья аксиома должна быть выражена на основе доказательной базы, что и будет сделано позднее.

1.6. Геометрическое определение вероятности

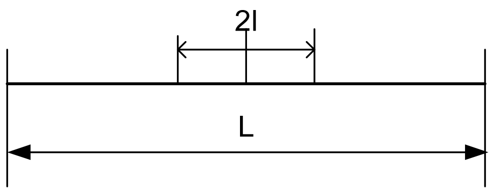
Множество всех задач, возникающих при изучении случайных событий, к сожалению, не сводится только к рассмотренным выше определениям вероятности. Геометрическое определение вероятности применяется в тех случаях, когда множество всех исходов (возможных и благоприятных) бесконечно и эти исходы определяются одним или несколькими числовыми параметрами.

Геометрической вероятностью *события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A, к мере всей области*:

$$P(A) = \frac{\text{mes g}}{\text{mes G}}. \tag{1.15}$$

Рассмотрим несколько примеров подсчета геометрических вероятностей.

ПРИМЕР 15. Предположим, что на отрезок длиной L действительной прямой наугад бросается точка, которую обозначим ξ. Какова вероятность того, что она отклонится не дальше чем на расстояние l от середины указанного отрезка (см. рис.)?

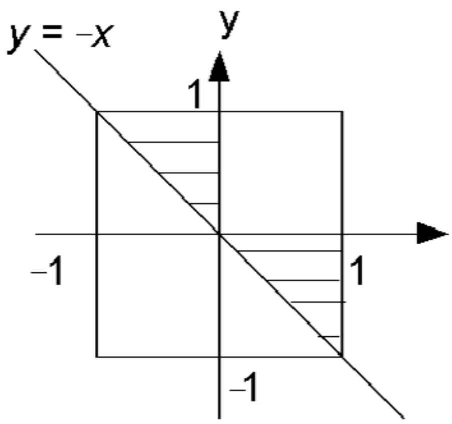


РЕШЕНИЕ. Здесь имеется бесконечное множество возможных исходов: ведь точка ξ может попасть в любую точку рассматриваемого отрезка длиной L. Кроме того, условия опыта таковы, что ξ с одинаковой вероятностью может оказаться в любой точке x этого отрезка, расположенного на оси абсцисс. Событие A: точка ξ находится от середины отрезка на расстоянии не больше l, наступает в результате попадания в любую точку x, отстающую от середины не далее, чем на величину l. «Доля» таких точек x на всем отрезке может быть определена как отношение $L(A)\ /\ L$, где L – длина всего рассматриваемого отрезка. $L(A) = 2l$ – длина отрезка, попадание в который влечет за собой наступление события A. Таким образом, искомая вероятность $P(A)$ равна:

$$P(A) = \frac{L(A)}{L} = \begin{cases} \dfrac{2l}{L}, & \text{если } l < L/2; \\ 1, & \text{если } l \ge L/2. \end{cases}$$

ПРИМЕР 16. Найти вероятность того, что сумма двух случайно выбранных чисел из промежутка [–1, 1] больше нуля, а их произведение отрицательно.

РЕШЕНИЕ. Чтобы ответить на поставленный вопрос, построим следующую модель. Координаты первого числа отложим на отрезке [–1, 1] оси абсцисс, а другое число отложим на отрезке [–1, 1] оси ординат. Множество всех возможных значений двух чисел лежит в квадрате (см. рис.). Множество чисел, произведение которых отрицательно, а сумма положительная, расположено во втором и четвертом квадранте выше прямой $y = -x$ (см. рис.).



Таким образом, интересующая нас вероятность равна отношению площади фигуры (заштрихована) к площади квадрата:

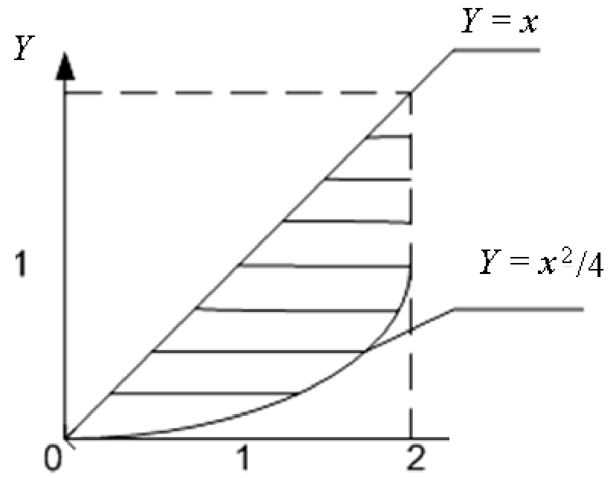
$$P(A) = 1/4.$$

ПРИМЕР 17. Из промежутка [0; 2] наудачу выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенству:

$$x^2 \leq 4y \leq 4x. \qquad \text{(I)}$$

РЕШЕНИЕ. Испытание состоит в случайном выборе из промежутка [0; 2] пары чисел x и y. Будем интерпретировать это как выбор наудачу точки $M(x, y)$ из множества всех точек квадрата со стороной, равной двум. Построим фигуру, представляющую все точки квадрата, удовлетворяющие неравенству (I), которое для простоты представим эквивалентной системой:

$$\begin{cases} y \geq \dfrac{x^2}{4}, \\ y \leq x. \end{cases}$$



Очевидно, что событие произойдет тогда и только тогда, когда точка попадет в заштрихованную область. Тогда по формуле искомая вероятность равна:

$$P = \frac{\int_0^2 (x - \frac{x^2}{4})dx}{4} = \frac{1}{3}.$$

Глава 2
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Теорема. Вероятность суммы конечного числа несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right). \qquad (2.1)$$

Доказательство. Докажем эту теорему для случая суммы двух несовместных событий A_1 и A_2.

Пусть событию A_1 благоприятствуют m_1 элементарных исходов, а событию $A_2 - m_2$ исходов. Так как события A_1 и A_2 по условию теоремы несовместны, то событию $A_1 + A_2$ благоприятствуют $m_1 + m_2$ элементарных исходов из общего числа n исходов. Следовательно,

$$P\left(A_1 + A_2\right) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right),$$

где $P(A_1)$ и $P\left(A_2\right) -$ соответственно вероятности событий A_1 и A_2.

Следствие 1. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) = 1. \qquad (2.2)$$

Это следствие очевидно, если вспомнить, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ составляют полную группу попарно несовместных событий. Тогда их сумма – событие достоверное, а вероятность достоверного события равна 1.

Противоположными событиями называются два несовместных события, составляющие (образующие) полную группу A и $\overline{A}$.

Примеры противоположных событий:

1. $A -$ попадание при выстреле; $\overline{A} -$ промах при выстреле.
2. $C -$ при бросании кубика выпала шестерка; $\overline{C} -$ при бросании кубика шестерка не выпала.

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P\left(A\right) + P\left(\overline{A}\right) = 1. \qquad (2.3)$$

ПРИМЕР 1. Для отправки груза со склада может быть выделена одна из двух машин различного вида. Известны вероятности выделения каждой машины: $P(A_1)=0,2$, $P(A_2)=0,4$.

РЕШЕНИЕ. Так как выделение одновременно двух машин – невозможное событие, то по формуле (2.1) вероятность прибытия к складу хотя бы одной из этих машин будет равна:

$$P(A_1+A_2)=0,2+0,4=0,6.$$

ПРИМЕР 2. В лотерее 1000 билетов: из них на один билет падает выигрыш 500 рублей, на 10 билетов – выигрыши по 100 рублей, на 50 билетов выигрыши по 20 рублей, на 100 билетов – выигрыши по 5 рублей, остальные билеты – невыигрышные. Некто покупает один билет. Найти вероятность выиграть не менее 20 рублей.

РЕШЕНИЕ. Обозначим события: $A-$ выигрыш не менее 20 рублей, A_1 – выигрыш 20 рублей, A_2 – выигрыш 100 рублей, A_3 – выигрыш 500 рублей.

Очевидно, что события A_1, A_2, A_3 попарно несовместны, причем справедливо выражение: $A=A_1+A_2+A_3$.

По теореме сложения вероятностей:

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0,050+0,010+0,001=0,061.$$

2.2. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Как было указано выше, теорема сложения вероятностей справедлива только для несовместных событий. В случае, когда два события A и B совместны, справедлива следующая теорема.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{2.4}$$

Доказательство. Событие $A+B$ наступит, если наступит одно из трех несовместных событий: $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, AB. По теореме сложения вероятностей несовместных событий (2.1) имеем:

$$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB). \tag{2.5}$$

Событие A произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: $A\overline{B}$, AB. Вновь применяя терему (2.1), получим $P(A)=P(A\overline{B})+$ $+P(AB)$, откуда

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB). \tag{2.6}$$

Аналогично для события B: $P(B)=P(\overline{A}B)+P(AB)$, откуда

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB). \tag{2.7}$$

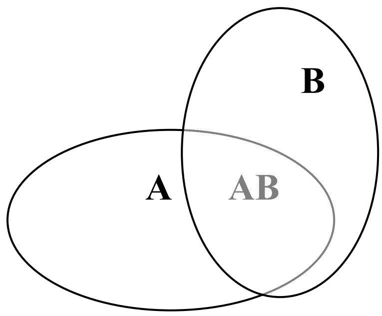
Подставив (2.6) и (2.7) в (2.5), получим выражение (2.4), теорема доказана.

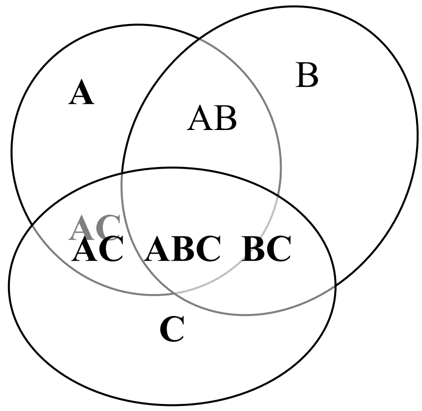
Как несложно заметить, формула (2.1) является частным случаем выражения (2.4). Действительно, если события несовместны, то их произведение – пустое множество, то есть невозможное событие. А вероятность невозможного события равна нулю.

Аналогично выражению (2.4) запишем вероятность суммы трех совместных событий:

$$\begin{gathered}P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-\\-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).\end{gathered} \tag{2.8}$$

Справедливость формул (2.4) и (2.8) наглядно иллюстрируется рисунками:





Из выражения (2.4) можно получить формулу для вероятности произведения двух событий. Действительно:

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B). \tag{2.9}$$

ПРИМЕР 3. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

РЕШЕНИЕ. Обозначим события: $A-$ появление шестерки на первой кости, $B-$ на второй кости. Понятно, что эти события совместные, т. е. шестерка может выпасть как на первой, так и на второй кости.

а) Для вычислений воспользуемся формулой (2.4). Однако здесь возникла сложность, как вычислить вероятность произведения, т. е. вероятность того, что на каждой из двух костей выпали шестерки. По формуле классической вероятности, количество «удачных» комбинаций равно 1, а число всех равновозможных комбинаций вычислим по правилу произведения (комбинаторика):

$$P\left(A+B\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{36}.$$

b) Рассмотрим другой способ решения, воспользовавшись следствием закона сложения вероятностей:

$$P\left(A+B\right)=1-P\left(\overline{A+B}\right)=1-P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)=1-\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{11}{36}.$$

2.3. Независимость событий

Перед тем как изложить теорему умножения вероятностей, введем одно важное понятие – понятие о *зависимых* и *независимых* событиях.

Событие A называется независимым от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие A называется зависимым от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

ПРИМЕР 4. Подбрасываются 2 монеты. Рассмотрим события:

A – появления герба на первой монете; B – появление герба на второй монете.

РЕШЕНИЕ. Очевидно, событие A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A независимо от события B.

ПРИМЕР 5. В урне два белых шара и один черный. Два человека последовательно вынимают по одному шару, не возвращая их в урну. Рассмотрим события:

A – появление белого шара у первого человека,

B – появление белого шара у второго человека.

РЕШЕНИЕ. Вероятность события A равна 2/3. Если стало известно, что событие A произошло, то в урне осталось два шара, из которых только один белый. Тогда вероятность события B становится равной 1/2. Из этого заключаем, что событие B зависит от события A.

Вероятность события B, вычисленная при условии, что имело место другое событие A, называется ***условной вероятностью события*** *B и* ***обозначается***: $P(B/A)$.

Для *ПРИМЕРА 5*: $P(A)=2/3; P(B/A)=1/2$.

Теперь условие *зависимости* или *независимости* событий можно выразить математически. Если соотношение

$$P(A/B)=P(A) \tag{2.10}$$

верно, то события A и B называются *независимыми*.

Если верно выражение

$$P(A/B) \neq P(A), \tag{2.11}$$

то события A и B называются *зависимыми*.

Рассмотрим еще раз *ПРИМЕР 5*, это так называемая «урновая схема». В урне (закрытой емкости) находится a белых и b черных шаров. Два человека поочередно вынимают по одному шару из урны. Если реализуется *схема без возвращения*, то события – зависимые. Если реализуется *схема с возвращением*, после каждого опыта шар возвращается в урну, то события – независимые.

2.4. Теорема умножения вероятностей

Теорема. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B). \tag{2.12}$$

Доказательство. Предположим, что из n всевозможных элементарных исходов событию A благоприятствуют m исходов, из которых k исходов благоприятствуют событию B. Тогда вероятность события A будет $P(A) = m/n$, условная вероятность события B относительно события A равна $P(B/A) = k/m$.

Произведению событий A и B благоприятствуют только те исходы, которые благоприятствуют и событию A, и событию B одновременно, то есть k исходов. Поэтому вероятность произведения событий A и B равна $P(AB) = k/n$. Умножив числитель и знаменатель этой дроби на m, получим

$$P(AB) = mk/mn = (m/n)\cdot(k/m) = P(A)\cdot P(B/A).$$

Аналогично можно показать, что $P(AB) = P(B)P(A/B)$.

Следствие 1. Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A.

Доказательство. Согласно условию, событие A не зависит от события B, тогда с учетом (2.10) получим $P(A/B) = P(A)$. Подставим это уравнение в формулу (2.12):

$$\cancel{P(A)}\cdot P(B/A) = P(B)\cdot \cancel{P(A)}.$$

Разделив левую и правую часть уравнения на $P(A) \neq 0$, получим

$$P(B/A) = P(B).$$

Таким образом, следствие доказано.

Следствие 2. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Доказательство. Для независимых событий условные вероятности равны безусловным:

$$P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2\right) \cdot \ldots \cdot P(A_k).$$

ПРИМЕР 6. Прибор, работающий в течение времени *t*, состоит из трех узлов, каждый из которых независимо от других может в течение времени *t* отказать. Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора. За время *t* вероятность безотказной работы узлов соответственно равна: $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}9$; $p_3 = 0{,}7$. Какова надежность прибора (вероятность безотказной работы) за время *t*?

РЕШЕНИЕ. Обозначим события:

$A -$ безотказная работа прибора;

$A_1 -$ безотказная работа первого узла;

$A_2 -$ безотказная работа второго узла;

$A_3 -$ безотказная работа третьего узла.

Безотказная работа прибора обеспечивается независимой и безотказной работой каждого из трех узлов: $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Тогда по теореме умножения вероятностей независимых событий получим:

$$P\left(A\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2\right) \cdot P\left(A_3\right) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

ПРИМЕР 7. Экзаменующимся по теории вероятностей было предложено 34 билета. Студент дважды извлекает по одному билету из предложенных (не возвращая их). Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен, если он подготовил лишь 30 билетов и в первый раз вытянул «неудачный» билет?

РЕШЕНИЕ. Испытание состоит в том, что два раза подряд извлекают по одному билету, причем вынутый в первый раз билет назад не возвращается. Пусть событие $A -$ «в первый раз вынут «неудачный» билет», $B -$ во второй раз вынут «удачный» билет». Очевидно, что события A и B зависимы, так как извлеченный в первый раз билет не возвращается в число всех билетов. Требуется найти вероятность события $A \bigcap B$. По формуле умножения вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A);$$

$$P(A) = 4/34; P(B/A) = 30/33, \text{ тогда } P\left(A \bigcap B\right) = \frac{4 \cdot 30}{34 \cdot 33} \approx 0{,}107.$$

2.5. Формула полной вероятности

Следствием обеих основных теорем – теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей – является так называемая *формула полной вероятности*.

Пусть требуется определить вероятность некоторого события A, которое может *произойти* или *не произойти* вместе с одним из событий: $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий, то есть $H_i \bigcap H_j = \varnothing,\ i, j = 1, \ldots, n;\quad i \neq j;\quad \sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Будем эти события называть *гипотезами*. В этом случае сформулируем формулу (теорему) полной вероятности.

Теорема. Вероятность события A равна сумме произведений вероятности гипотезы на соответствующую условную вероятность этого события:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) P\left(A / H_i\right). \tag{2.13}$$

Доказательство. Вспомним операции над событиями $A = A \bigcap \Omega = A \bigcap \left(\sum_{i=1}^{n} H_i \right) = A \cdot H_1 + \ldots + A \cdot H_n$. Так как $H_i \cdot H_j = \varnothing$, то и $\left(A \cdot H_i\right) \cdot \left(A \cdot H_j\right) = \varnothing,\ i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j$, то есть события $A \cdot H_i$ и $A \cdot H_j$ также несовместны. Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P\left(A\right) = P\left(A \cdot H_1\right) + P\left(A \cdot H_2\right) + \ldots + P(A \cdot H_n), \text{ т. е.}$$

$P\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A \cdot H_i\right)$. По теореме произведения вероятностей $P\left(A \cdot H_i\right) = P(H_i) \cdot P(A / H_i)$, откуда и следует формула (2.13). Теорема доказана.

ПРИМЕР 8. Имеются три одинаковые урны. В первой урне находятся два белых и один черный шар. Во второй урне – три белых и один черный, а в третьей урне – два белых и два черных. Какова вероятность того, что некто подойдет и из произвольной урны извлечет белый шар?

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим 3 гипотезы:

H_1 – выбор первой урны;

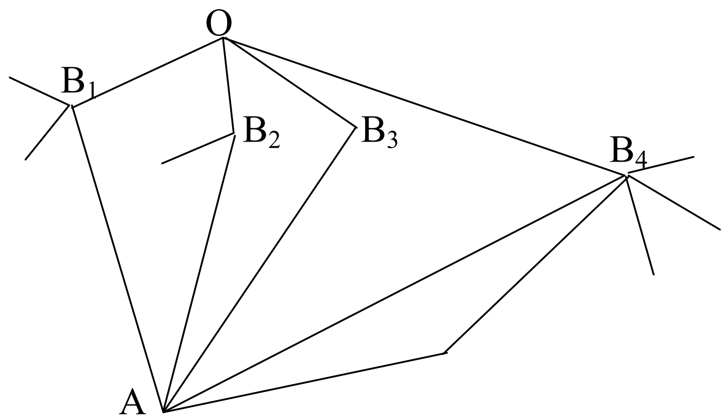
H_2 – выбор второй урны;

H_3 – выбор третьей урны.

Событие $A-$ вынут белый шар. Из условия задачи следует, что гипотезы равновозможны: $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3.$ Если случайно подойти к первой урне, то вероятность извлечь из нее белый шар равна $2/3$. Рассуждая аналогичным образом, вычислим условные вероятности события A при этих гипотезах соответственно: $P(A/H_1)=2/3,$ $P(A/H_2)=3/4,$ $P(A/H_3)=1/2.$ По формуле полной вероятности (2.13) окончательно получим:

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{23}{36}.$$

ПРИМЕР 9. Представим себе странника, идущего из некоторого пункта O и на разветвлении дорог выбирающего наугад один из возможных путей. Какова вероятность того, что странник из пункта O попадет в пункт A?



РЕШЕНИЕ. Как видно из рисунка, странник обязательно должен пройти через один из пунктов B_1, B_2, B_3 и B_4. Обозначим H_k гипотезы, состоящие в том, что путник при своем движении попадет из пункта O в пункт B_k. Очевидно, что события H_1, H_2, H_3 и H_4 образуют полную группу событий. Эти гипотезы (события) равновероятны, так как по условию задачи странник наугад выбирает один из путей OB_1, OB_2, OB_3 или OB_4. Тогда $P(H_k)=1/4.$ Из пункта B_1 в A можно прийти лишь по одному из трех равновероятных направлений. Так что условная вероятность достичь A при условии H_1 равна $1/3$. Аналогично рассуждая, получим:

$$P(A/H_1)=1/3;\ P(A/H_2)=1/2;\ P(A/H_3)=1;\ P(A/H_4)=2/5.$$

Теперь по формуле полной вероятности:

$$P(A)=1/4\cdot(1/3+1/2+1+2/5)=67/120.$$

2.6. Теорема гипотез (Формула Байеса)

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является теорема гипотез, или формула Байеса.

Сформулируем задачу. Имеется полная группа несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Вероятности этих гипотез известны и равны соответственно $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$. Произведен опыт, в результате которого наблюдалось событие A.

Спрашивается, как следует изменить вероятности гипотез в связи с появлением этого события?

Фактически нам необходимо найти условную вероятность $P(A) \neq 0$ для каждой гипотезы. Из теоремы умножения вероятностей (2.12) имеем:

$$P\left(A \cdot H_i\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(H_i / A\right) = P(H_i) \cdot P(A / H_i); \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Отсюда

$$P\left(A\right) \cdot P\left(H_i / A\right) = P(H_i) \cdot P(A / H_i); \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Разделим на $P(A) \neq 0$ левую и правую часть уравнения, тогда окончательно получим:

$$P\left(H_i / A\right) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)}; \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right). \tag{2.14}$$

Выражая $P(A)$ с помощью формулы полной вероятности (2.13), получим **формулу Байеса**:

$$P\left(H_i / A\right) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) \cdot P\left(A / H_i\right)}; \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right). \tag{2.15}$$

ПРИМЕР 10. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества. 40 % приборов собирается из высококачественных деталей, и их надежность за время t равна 95 %. Приборы из обычных деталей за время t имеют надежность 0,7. Прибор испытан и за время t работал безотказно. Какова вероятность того, что он собран из высококачественных деталей?

РЕШЕНИЕ. Возможны 2 гипотезы:

H_1 – прибор собран из высококачественных деталей;

H_2 – прибор собран из обычных деталей.

Вероятности этих гипотез до опыта соответственно равны: $P\left(H_1\right) = 0{,}4$, $P\left(H_2\right) = 0{,}6$. В результате опыта наблюдалось событие A – прибор безотказно работал время t. Условные вероятности этого события при гипотезах H_1 и H_2 соответственно равны: $P(A / H_1) = 0{,}95$, $P(A / H_2) = 0{,}7$.

По формуле Байеса найдем условную вероятность гипотезы H_1:

$$P\left(H_1 / A\right)=\frac{0,4\cdot 0,95}{0,4\cdot 0,95+0,6\cdot 0,7}=0,475.$$

ПРИМЕР 11. В урне находятся три шара белого и черного цвета, причем распределение числа шаров по цветам неизвестно. В результате испытания из урны извлекли один шар. **a)** Сформулируйте гипотезы о содержимом урны до испытания и укажите их вероятности. **b)** Найдите вероятности гипотез после испытания, состоящего в извлечении из урны белого шара.

РЕШЕНИЕ.

a) До испытания выскажем четыре попарно несовместимых и равновероятных гипотезы:

H_1- в урне 3 белых и 0 черных шара;

H_2- в урне 2 белых и 1 черный шар;

H_3- в урне 1 белый и 2 черных шара;

H_4- в урне 0 белых и 3 черных шара.

$$P\left(H_1\right)=P\left(H_2\right)=P\left(H_3\right)=P\left(H_4\right)=1/4.$$

b) Так как извлечен белый шар – событие A, то условные вероятности этого события соответственно равны: $P(A/H_4)=0,\ \ P(A/H_3)=1/3,$ $P(A/H_2)=2/3,\ \ \ P(A/H_1)=1.$ По формуле Байеса вычислим:

$$P(H_1/A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{2},\qquad P(H_2/A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}\cdot(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3})}=\frac{1}{3},$$

$$P(H_3/A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{6},\qquad\qquad P(H_4/A)=0.$$

ПРИМЕР 12. Три организации представили в налоговую инспекцию отчеты для выборочной проверки. Первая организация представила 15 отчетов, вторая – 10, третья – 25. Вероятности правильного оформления отчетов у этих организаций известны и соответственно равны: 0,9; 0,8 и 0,85. Наугад был выбран один отчет, и он оказался правильным. Какова вероятность того, что этот отчет принадлежит второй организации?

РЕШЕНИЕ. Пусть H_1, H_2, H_3 – гипотезы, соответствующие выбору отчета первой, второй или третьей организации. Вероятности этих гипотез соответственно равны:

$$P(H_1)=15/50,\ \ P(H_2)=10/50,\ \ P(H_3)=25/50.$$

По формуле полной вероятности вычислим вероятность события: A – выбран правильно оформленный отчет

$$P(A)=0,9\cdot 15/50+0,8\cdot 10/50+0,85\cdot 25/50=0,855.$$

По формуле Байеса вычислим искомую вероятность:

$$P(H_2/A)=0,2\cdot 0,8/0,855=0,19.$$

Формула Байеса (2.15) называется формулой апостериорной (обратной) вероятности, так как в ней используется информация о произошедшем событии. Это позволяет корректировать уровень имеющейся априорной вероятности по мере поступления сведений о рассматриваемых событиях на основе проводимых экспериментов. Поэтому байесовский подход получил широкое распространение в статистических исследованиях.

Глава 3
ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

3.1. Схема Бернулли

Если производится несколько испытаний (*опытов*), *причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события A.*

В схеме Я. Бернулли рассматривается серия, состоящая из n независимых испытаний, каждое из которых имеет лишь два исхода: наступление какого-то события A (успех) или его ненаступление $\overline{A}$ (неудача). Причем вероятность успеха при одном испытании равна $P(A) = p$, $(0 \le p \le 1)$ – постоянна и не зависит от номера испытания. Следовательно, вероятность неуспеха $P(\overline{A}) = 1 - p = q$ тоже постоянна.

Сформулируем задачу – вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n - k$ раз (см. рис.):

$$\underbrace{\overbrace{p\,p\ldots\ldots\ldots p}^{k}\quad\overbrace{qq\ldots\ldots\ldots qq}^{n-k}}_{n}$$

По теореме умножения вероятностей независимых событий искомая вероятность будет равна:

$$P = p \cdot p \cdot \ldots \cdot p \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q = p^k \cdot q^{n-k}. \qquad (3.1)$$

Однако интересующее нас событие (k успехов при n опытах) может произойти не только одним способом. Число возможных вариантов (комбинаций) выборки k элементов из n вычисляется по формуле (1.5):

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Окончательно получим:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n! \cdot p^k \cdot q^{n-k}}{k! \cdot (n-k)!}. \qquad (3.2)$$

Это и есть формула Бернулли (биномиальное распределение). Вспомним формулу бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \tag{3.3}$$

Отсюда, и непосредственно из формулы Бернулли (3.2), следует:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1. \tag{3.4}$$

Очевидно этот же результат получится, если учтем, что для $k = \{0, 1, \ 2, \ \ldots, \ n\}$ получим полную группу событий, вероятность которых равна 1.

ПРИМЕР 1. В семье 10 детей. Считая, что вероятность рождения мальчика равна 0,5, найдем вероятность того, что в семье имеются 0, 1, ..., 10 мальчиков.

РЕШЕНИЕ. Отметим, что в силу предположения $p = q = 0{,}5$ и равенства $C_n^m = C_n^{m-n}$ имеют место равенства: $P_n(m) = P_n(n-m)$. Отсюда получим:

$$P_{10}(0) = P_{10}(10) = C_{10}^0 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024},$$

$$P_{10}(1) = P_{10}(9) = C_{10}^1 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{10}{1024},$$

$$P_{10}(2) = P_{10}(8) = C_{10}^2 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{45}{1024},$$

$$P_{10}(3) = P_{10}(7) = C_{10}^3 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{120}{1024},$$

$$P_{10}(4) = P_{10}(6) = C_{10}^4 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{210}{1024},$$

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{252}{1024}.$$

В многодетной семье с десятью детьми мальчиков и девочек будет поровну с вероятностью ~ 0,25. Вероятность того, что в семье будут дети одного пола (мальчики или девочки) – чуть меньше одной пятисотой.

Введем следующее обозначение, пусть $P_n(m_1 \le k \le m_2)$ означает вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли успех наступит не менее чем m_1 раз и не более чем m_2 раз $(0 \le m_1 \le m_2 \le n)$. Так как события, соответствующие различному числу успехов, попарно несовместны, то имеет место формула:

$$P_n\left(m_1 \le k \le m_2\right) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P_n\left(k\right). \tag{3.5}$$

Вероятность $P_n(1 \le m \le n)$ того, что в результате n испытаний, успех наступит хотя бы один раз, вычисляется по формуле:

$$P_n\left(1 \le k \le n\right) = 1 - P_n\left(0\right) = 1 - q^n. \tag{3.6}$$

Типичный график биномиального распределения приведен на рис. 3.1 для $p = 0{,}5;\ n = 20.$

Сформулируем задачу: необходимо найти $k_0 -$ наивероятнейшее число успехов, то есть такое k_0, вероятность которого максимальна.

Запишем условия максимума вероятности:

$$a)\ \frac{P_n(k_0)}{P_n(k_0-1)} \ge 1; \qquad b)\ \frac{P_n(k_0)}{P_n(k_0+1)} \ge 1.$$

Запишем неравенства $a)$ и $b)$ в явном виде:

$$a)\quad \frac{P_n(k_0)}{P_n(k_0-1)} = \frac{n!}{k_0!\left(n-k_0\right)!} \cdot \frac{\left(k_0-1\right)!(n-k_0+1)}{n!} \cdot \frac{p^{k_0} q^{n-k_0}}{p^{k_0-1} q^{n-k_0+1}} =$$

$$= \frac{(n-k_0+1)p}{k_0 q} \ge 1,$$

$$k_0 \le np + p;$$

$$b)\quad \frac{P_n(k_0)}{P_n(k_0+1)} = \frac{n!}{k_0!\left(n-k_0\right)!} \cdot \frac{\left(k_0+1\right)!(n-k_0-1)}{n!} \cdot \frac{p^{k_0} q^{n-k_0}}{p^{k_0+1} q^{n-k_0-1}} =$$

$$= \frac{(k_0+1)q}{(n-k_0)p} \ge 1,$$

$$k_0 \ge np - q.$$

Учитывая оба неравенства, окончательно получим:

$$np - q \le k_0 \le np + p. \tag{3.7}$$

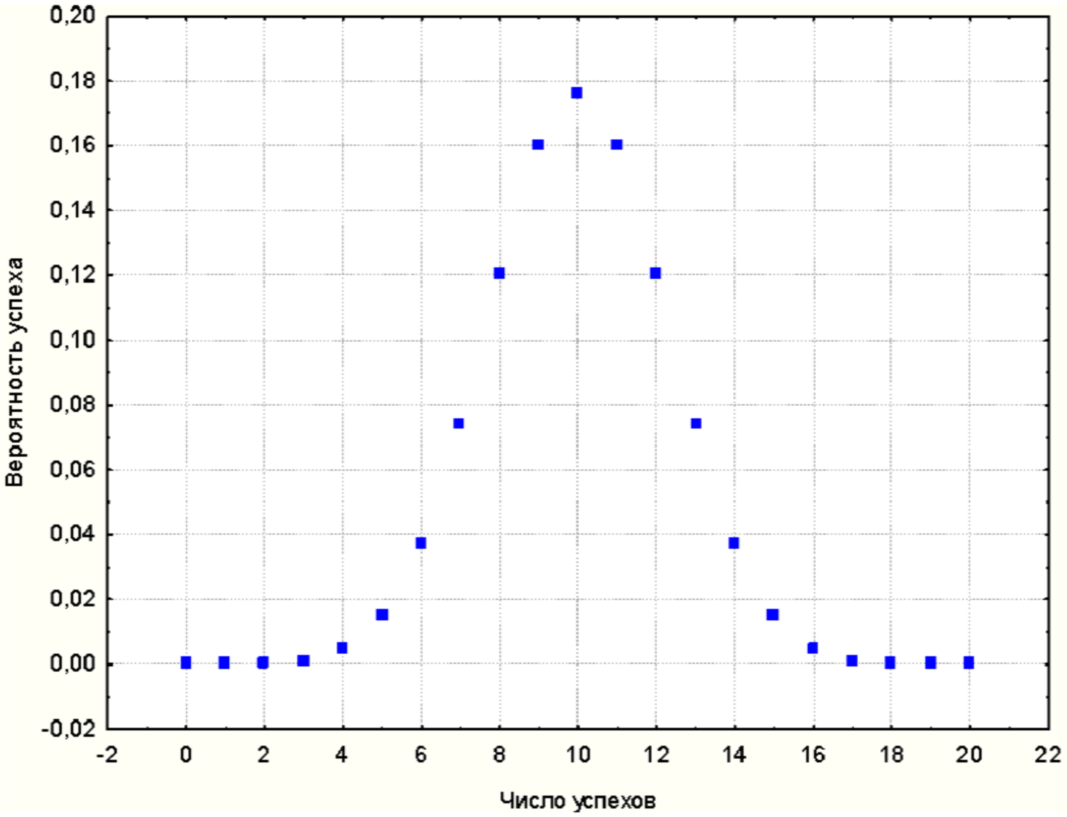


Рис. 3.1. График вероятностей биномиального распределения
(p = 0,5; n = 20)

В n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p наиболее вероятным числом успехов является

- *единственное число $k_0 = \lceil np + p \rceil$, если число $np + p$ нецелое;*
- *два числа $k_0 = np + p$ и $k_0 = np + p - 1$, если число $np + p$ целое.*

При достаточно большом числе испытаний $(n \to \infty)$ из выражения (3.7) получим $p \approx \dfrac{k_0}{n}$ (статистическое определение вероятности).

При больших значениях n наиболее вероятная относительная частота успеха совпадает с *вероятностью успеха при одном испытании.*

ПРИМЕР 2. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превышает установленной нормы, равна $p = 0,75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

РЕШЕНИЕ. Вероятность нормального расхода $p = 0,75$. Вероятность перерасхода $q = 0,25$. Искомая вероятность по формуле Бернулли:

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^2 = \frac{6! \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^2}{4! \cdot 2!} \approx 0,3.$$

3.1.1. Обобщение схемы Бернулли

Рассмотрим обобщение схемы Бернулли. Пусть производится n независимых испытаний, каждое из которых имеет m $(m > 2)$ попарно несовместных и возможных исходов, которые обозначим A_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$. События A_j составляют полную группу событий. Вероятности наступления каждого события $p_j = P\left(A_j\right)$ в общем случае различны и удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$. Тогда для произвольно заданных целых неотрицательных чисел k_i таких, что $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$, определим вероятность $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ того, что при n испытаниях исход A_1 наступит ровно k_1 раз, исход $A_2 - k_2$ раз и т. д., исход A_m произойдет k_m раз:

$$P_n\left(k_1, k_2, \ldots, k_m\right) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}. \qquad (3.8)$$

Выражение (3.8) называется формулой ***полиномиального распределения***.

ПРИМЕР 3. Игральная кость подбрасывается 15 раз. Какова вероятность события – выпало ровно десять шестерок и три единицы?

РЕШЕНИЕ. Вероятности выпадения шестерки и единицы равны $1/6$, а вероятность третьего исхода (выпали любые другие грани) равна $4/6$. Тогда вероятность получить 10 шестерок, 3 единицы и 2 других значения чисел равна:

$$P_{15}\left(10,3,2\right) = \frac{15!}{10!3!2!} \cdot \frac{1}{6^{10}} \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 \approx 1{,}022 \cdot 10^{-6}.$$

3.2. Теорема Пуассона (Закон редких событий)

Формула Бернулли удобна для вычисления лишь при сравнительно небольшом числе испытаний n. При больших значениях n пользоваться этой формулой затруднительно. Еще большая проблема возникает, если в схеме Бернулли число испытаний велико, а вероятность успеха мала.

Пусть $n \to \infty$, $p_n \to 0$, *так что* $np_n \to \lambda > 0$. *Тогда для любого* $k \geq 0$ *вероятность получить* k *успехов в* n *испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха* p_n *стремится к величине* $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$:

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$
$$=\frac{\lambda^k}{k!}\left[\frac{n!}{n^k(n-k)!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right]\cong\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \qquad (3.9)$$

При решении конкретных задач понятия «число испытаний велико» и «вероятность успеха мала» субъективны. При более строгом подходе воспользуемся оценкой погрешности формулы Пуассона:

$$\Psi=\left|C_n^k p^k(1-p)^{n-k}-\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|\le np^2=\frac{\lambda^2}{n}. \qquad (3.10)$$

ПРИМЕР 4. На предприятии изготовлено и отправлено заказчику 100 000 бутылок пива. Вероятность того, что бутылка может оказаться битой, равна 0,0001. Какова вероятность того, что в отправленной партии будет ровно три битых бутылки?

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся формулой Пуассона, учитывая, что $n=100000,\ p=0{,}0001,\ \lambda=np=10$:

$$P_{100\,000}(3)=10^3\cdot\frac{e^{-10}}{3!}=0{,}007567.$$

По формуле (3.10) вычислим погрешность, которая не превышает 0,001, таким образом, искомая вероятность не превысит 0,008567.

3.3. Локальная теорема Муавра–Лапласа

Несмотря на элементарность формулы Бернулли $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, при большом числе испытаний n непосредственное вычисление по ней связано с большой вычислительной работой (погрешностью). Разрешить эту проблему поможет **локальная теорема Муавра–Лапласа:**

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1 $(0<p<1)$, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A произойдет k раз в n независимых испытаниях при достаточно большом числе n, приближенно равна

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (3.11)$$

где $$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}. \qquad (3.12)$$

Данная формула (теорема) тем точнее, чем $n \to \infty$. Вычисление по этой формуле дает незначительную погрешность уже при выполнении условия $npq \geq 20$. Функция $\varphi(x)$ табулирована и обладает следующими свойствами:

1) функция $\varphi(x)$ является четной, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

2) функция $\varphi(x)$ – монотонно убывающая при положительных значениях *x*, причем при $x \to \infty$ $\varphi(x) \to 0$;

3) при $x \geq 4$ $\varphi(x) \leq 0{,}0001$.

ПРИМЕР 5. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют автомобили. Какова вероятность того, что из 400 семей у 300 имеются автомобили?

РЕШЕНИЕ. Вероятность того, что в семье имеется автомобиль, равна $p = 80/100 = 0{,}8$. Так как $n = 400$ достаточно велико (условие $npq = 400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 64 \geq 20$ выполнено), то применим локальную теорему Муавра–Лапласа:

$$x = \frac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}50;$$

$$P_{400}(300) \approx \frac{\varphi(-2{,}50)}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{0{,}0175}{8} \approx 0{,}0022.$$

Замечание. *Значение функции $\varphi(-2{,}50)$ получено из соответствующих статистических таблиц.*

3.4. Интегральная теорема Муавра–Лапласа

Пусть в условиях *ПРИМЕРА 5* необходимо найти вероятность того, что от 300 до 360 семей (включительно) имеют автомобили. Тогда по теореме сложения вероятностей событий, и учитывая (3.5), получим:

$$P_{400}(300 \leq k \leq 360) = P_{400}(300) + P_{400}(301) + \ldots + P_{400}(360).$$

В принципе вычислить каждое слагаемое можно по *локальной формуле Муавра–Лапласа*, но большое количество слагаемых делает расчет очень трудоемким. В таких случаях справедлива **интегральная теорема Муавра–Лапласа**:

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что число k наступления события A в n независимых испытаниях заключено в пределах от m_1 до m_2 (включительно) при достаточно большом числе n, *приближенно равна*

$$P_n\left(m_1 \le k \le m_2\right) = \sum_{m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad (3.13)$$

где $$\alpha = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \qquad \beta = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Для вычисления по этой формуле вводится функция Лапласа (интеграл вероятности):

$$\Phi_0\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad (3.14)$$

обладающая следующими свойствами:

1) функция $\Phi_0\left(x\right)$ нечетная, то есть $\Phi_0\left(-x\right) = -\Phi_0\left(x\right)$;

2) функция $\Phi_0\left(x\right)$ – монотонно возрастающая, причем при $x \to +\infty$ $\Phi_0(x) \to 0,5$ (практически можно считать, что уже при $x > 4$ $\Phi_0(4) \approx 0,5$).

Учитывая свойства функции Лапласа, окончательно получим:

$$P_n\left(m_1 \le k \le m_2\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi_0\left(\beta\right) - \Phi_0\left(\alpha\right). \qquad (3.15)$$

Интегральная формула, как и локальная, тем точнее, чем больше n. При условии $npq \ge 20$ интегральная формула (3.15) дает незначительную погрешность вычисления вероятностей.

ПРИМЕР 6. По данным ПРИМЕРА 5 вычислим вероятность того, что от 300 до 360 (включительно) семей из 400 имеют автомобили.

РЕШЕНИЕ. Применим интегральную теорему Муавра–Лапласа $(npq = 64 > 20)$.

$$\alpha = \frac{300 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -2,50; \qquad \beta = \frac{360 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 5,0.$$

$$P_{400}\left(300 \le k \le 360\right) \approx \Phi_0\left(5,0\right) - \Phi_0\left(-2,50\right) = \Phi_0\left(5,0\right) + \Phi_0\left(2,50\right) \approx 0,9938.$$

Глава 4
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.1. Классификация случайных величин. Закон распределения дискретной случайной величины

Числовая величина ξ*, значение которой может меняться в зависимости от случая, называется случайной величиной* (*СВ*).

В рамках теоретико-вероятностной схемы, когда предполагаем, что имеется некоторое пространство Ω элементарных исходов ω, случайной величиной ξ называют функцию от элементарных исходов ω: $\xi = \xi(\omega)$, где $\omega \in \Omega$.

Различают два основных типа случайных величин: **дискретные** и **непрерывно распределенные**.

Дискретные величины $\xi = \xi(\omega)$, в зависимости от элементарных исходов ω, принимают конечное или счетное число различных значений x с соответствующими вероятностями:

$$P_\xi(x) = P(\xi = x). \tag{4.1}$$

Здесь $\xi = x$ обозначает, что случайная величина ξ принимает значение x, то есть $\{\xi = x\} = \{\omega : \xi(\omega) = x\}$.

Вероятность события $x' \le \xi \le x''$, состоящего в том, что случайная величина ξ принимает одно из значений x, лежащее в пределах $x' \le \xi \le x''$, есть

$$P\{x' \le \xi \le x''\} = \sum_{x'}^{x''} P_\xi(x). \tag{4.2}$$

В формуле (4.2) суммирование производится по конечному или счетному числу значений x, которые может принимать дискретная случайная величина ξ.

Соответствие между возможными значениями СВ *и вероятностями этих значений называют распределением вероятностей* СВ *и обозначают* $P_\xi(x)$.

Законом распределения СВ называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и соответствующими им вероятностями.

Простейшей формой задания этого закона является таблица, в которой перечислены возможные значения СВ и соответствующие им вероятности:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Такую таблицу будем называть **рядом распределения дискретной СВ.**

События $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$, состоящие в том, что в результате испытаний случайная величина X примет соответственно значения x_1, …, x_n, являются несовместными и единственно возможными (в таблице перечислены все возможные значения СВ), то есть составляют полную группу. Следовательно, сумма их вероятностей равна 1. Таким образом, для любой *дискретной случайной величины* справедливо соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{4.3}$$

Чтобы придать ряду распределения более наглядный вид, часто прибегают к его графическому отображению (рис. 4.1). Такое представление СВ называется **многоугольником распределения**.

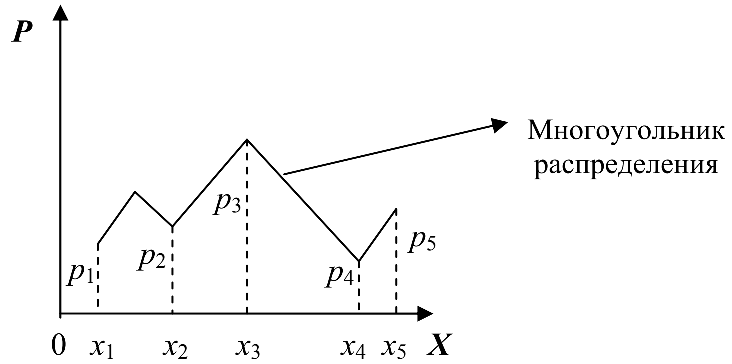


Рис. 4.1. Закон распределения дискретной случайной величины

ПРИМЕР 1. Стрелок ведет стрельбу по мишени до первого попадания, имея боезапас 4 патрона. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Построить ряд распределения боезапаса, оставшегося неизрасходованным.

РЕШЕНИЕ. СВ X – число неизрасходованных патронов, которое имеет четыре возможных значения: 0, 1, 2 и 3. Стрелок израсходует весь боезапас, если первые три выстрела – «промахи», а результат четвертого никак не скажется на оставшемся боезапасе. Останется один патрон, если стрелок дважды промахнется и попадет при третьем выстреле. Если спортсмен сначала промахнется, а затем попадет в мишень, у него останется два патрона, и, наконец, останется три патрона, если будет попадание при первом выстреле. Вероятности этих значений равны соответственно: $p_0 = 0{,}4^3$; $p_1 = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6$; $p_2 = 0{,}4 \cdot 0{,}6$; $p_3 = 0{,}6$.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,064	0,096	0,24	0,6

Очевидно, что **ряд распределения** не универсальная характеристика. Нетрудно убедиться, что для непрерывной СВ такую характеристику построить нельзя (так как СВ имеет бесчисленное множество значений). Поэтому составить таблицу, в которой бы были перечислены все возможные значения СВ, невозможно. Кроме того, как мы убедимся в дальнейшем, каждое отдельное значение непрерывной СВ обычно не обладает никакой, отличной от нуля, вероятностью.

Однако различные области возможных значений СВ все же не являются одинаково вероятными и для непрерывной СВ существует «*распределение вероятностей*», хотя и не в том смысле, как для дискретной.

4.1.1. Интегральная функция распределения

Для количественного описания распределения вероятностей удобно воспользоваться не вероятностью события $X = x$, а вероятностью события $X < x$, где x – некоторая текущая переменная. Вероятность этого события, очевидно, зависит от x и является некоторой функцией от x. Эта функция называется **функция распределения** случайной величины X и обозначается $F(x)$:

$$F(x) = P(X < x). \tag{4.4}$$

Функцию $F(x)$ иногда называют интегральной функцией распределения, или интегральным законом распределения.

Функция распределения – самая универсальная характеристика СВ. Она существует как для дискретных, так и непрерывных СВ. Функция распределения полностью характеризует СВ с вероятностной точки зрения и является одной из форм закона распределения.

Общие свойства интегральной функции распределения:

1. Функция распределения $F(x)$ неубывающая функция своего аргумента, то есть при $x_2 > x_1$ $F(x_2) \ge F(x_1)$.

2. На минус бесконечности функция распределения равна нулю: $F(-\infty) = 0$.

3. На плюс бесконечности функция распределения равна единице: $F(+\infty) = 1$.

4. $P(x_1 \le x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

График функции распределения в общем случае представляет собой график неубывающей функции, значение которой начинается от 0 и доходит до 1, причем в отдельных точках функция может иметь разрыв.

Зная ряд распределения дискретной СВ, можно легко построить функцию распределения этой величины. Действительно:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

ПРИМЕР 2. Произведем один опыт, в котором может произойти или не произойти событие A. Вероятность события A равна $p = 0{,}3$. СВ X – число появлений события A в опыте (дискретная СВ). Необходимо построить функцию распределения СВ.

РЕШЕНИЕ. Ряд распределения СВ X имеет вид:

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3

Построим функцию распределения СВ X:

1) при $x \le 0$ $F(x) = P(X < x) = 0$;

2) при $0 < x \le 1$ $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0{,}7$;

3) при $x > 1$ $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1$.

ПРИМЕР 3. При тех же условиях (*ПРИМЕР 2*) провели 4 независимых опыта. Постройте функцию распределения числа появлений события A.

РЕШЕНИЕ. Пусть СВ X – число появлений события A в 4 опытах. Эта величина имеет ряд распределения:

x_i	0	1	2	3	4	> 4
p_i	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081	
F_i	0	0,2401	0,6517	0,9163	0,9919	1

Построим функцию распределения СВ X:

1) при $x \le 0$ $\quad F(x) = 0$;

2) $0 < x \le 1$ $\quad F(x) = 0{,}2401$;

3) $1 < x \le 2$ $\quad F(x) = 0{,}6517$;

4) $2 < x \le 3$ $\quad F(x) = 0{,}9163$;

5) $3 < x \le 4$ $\quad F(x) = 0{,}9919$;

6) $x > 4$ $\quad F(x) = 1$.

4.2. Непрерывная случайная величина, плотность распределения

Случайная величина X *называется* ***непрерывной****, если ее пространством элементарных событий является вся числовая ось* (*либо отрезок* (*отрезки*) *числовой оси*), *а вероятность наступления любого элементарного события равна нулю*.

Для непрерывной случайной величины вероятность попасть на интервал равна

$$P\left(a < X < b\right) = P\left(a \le X \le b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right). \qquad (4.5)$$

Пусть имеется непрерывная СВ X с функцией распределения $F(x)$, которую мы предполагаем непрерывной и дифференцируемой. Вычислим вероятность попадания этой СВ на участок от x до $x+\Delta x$, то есть приращение функции распределения на этом участке:

$$P\left(x < X < x+\Delta x\right) = F\left(x+\Delta x\right) - F\left(x\right). \qquad (4.6)$$

Найдем отношение этой вероятности к длине участка, то есть *среднюю вероятность*, приходящуюся на единицу длины на этом участке, и устремим Δx к 0. В пределе получим *производную функции распределения*:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F\left(x+\Delta x\right) - F(x)}{\Delta x} = F'\left(x\right) = \rho\left(x\right). \qquad (4.7)$$

Функция $\rho\left(x\right)$ – производная функции распределения, характеризует плотность, с которой распределяются значения СВ в данной точке.

Эта функция называется плотностью распределения (*иначе – «плотностью вероятности»*) *непрерывной СВ X*.

Плотность распределения является одной из форм закона распределения. Эта форма не является универсальной, так как $\rho\left(x\right)$ существует только для непрерывных СВ.

Рассмотрим непрерывную СВ X с плотностью распределения $\rho\left(x\right)$ и элементарный участок dx, примыкающий к точке x.

Вероятность попадания СВ X на этот элементарный участок (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) равна $\rho\left(x\right)dx$. Геометрически – это площадь элементарного прямоугольника, опирающегося на отрезок dx (рис. 4.2).

Выразим вероятность попадания СВ X на отрезок от α до β через плотность распределения. Очевидно, она равна сумме элементов вероятности на всем участке, то есть интегралу:

$$P\left(\alpha \le X \le \beta\right) = \int_{\alpha}^{\beta} \rho\left(x\right)dx. \qquad (4.8)$$

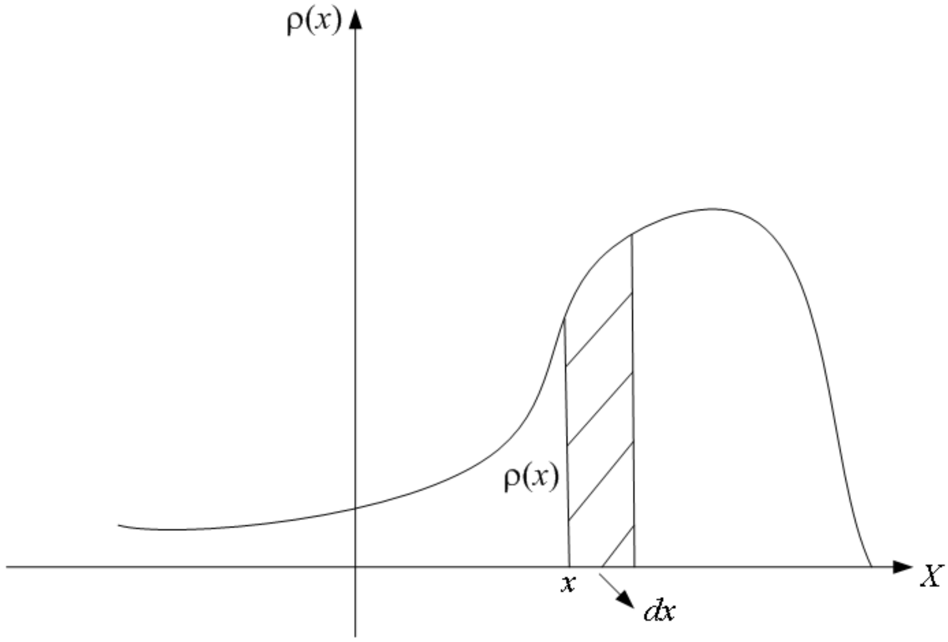


Рис. 4.2. Вероятность попадания на элементарный интервал

Геометрически вероятность попадания величины X на отрезок $[\alpha,\ \beta]$ равна площади фигуры, ограниченной кривой распределения и опирающейся на этот участок (рис. 4.3).

Формула (4.7) выражает плотность распределения СВ через интегральную функцию распределения. Поставим обратную задачу – выразим функцию распределения через плотность. Согласно определению

$$F\left(x\right) = P\left(X < x\right) = P\left(-\infty < X < x\right). \tag{4.9}$$

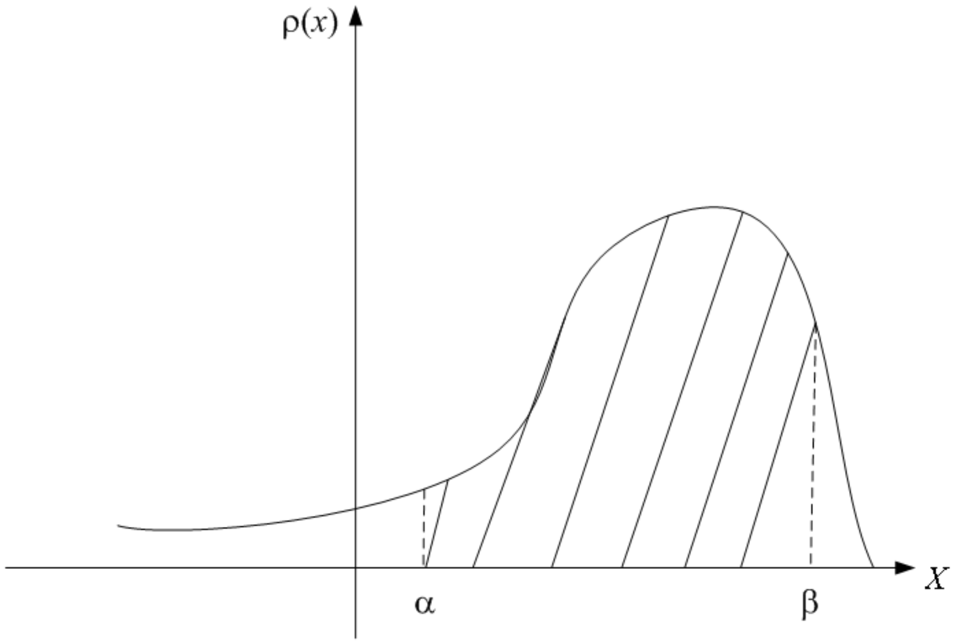


Рис. 4.3. Вероятность попадания на интервал

Из формулы (4.9) с учетом (4.8) получим:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)\,dt. \qquad (4.10)$$

Геометрически $F(x)$ есть не что иное, как площадь фигуры, ограниченной плотностью распределения (сверху) и осью абсцисс (снизу) и лежащей левее точки x (рис. 4.4).

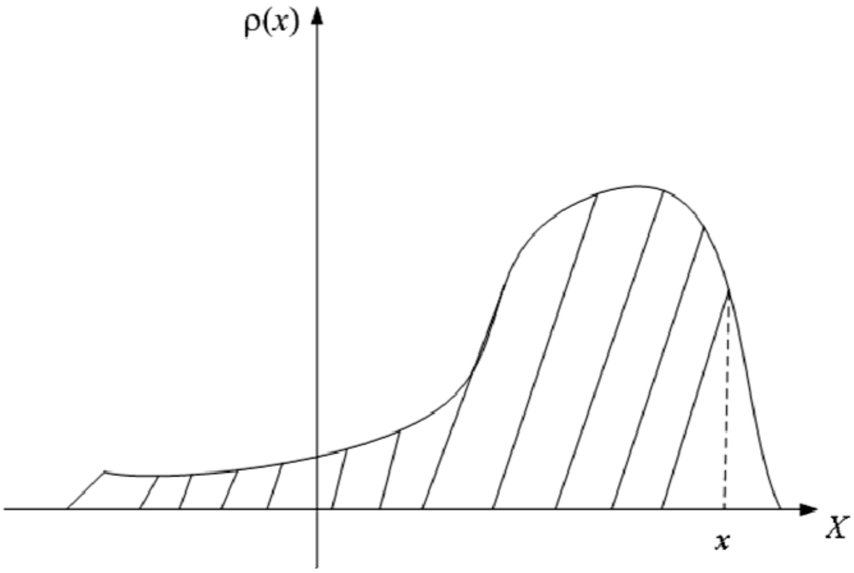


Рис. 4.4. Вычисление функции распределения через плотность СВ

4.2.1. Основные свойства плотности распределения

1. Плотность распределения является неотрицательной функцией

$$\rho(x) \ge 0. \qquad (4.11)$$

Это свойство непосредственно вытекает из того, что функция распределения $F(x)$ – неубывающая.

2. Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1. \qquad (4.12)$$

Геометрически основные свойства плотности распределения означают:

- кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс;
- площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 4. Функция распределения непрерывной СВ X равна

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0; \\ ax^2 & \text{при} \quad 0<x\le 1; \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$$

Необходимо найти: коэффициент a, плотность распределения $f(x)$, и, наконец, вероятность $P(0,25<x<0,5)$.

РЕШЕНИЕ:

a) Так как $F(x)-$ функция непрерывная, то при $x=1$, $ax^2=a\times 1^2=1$, то есть $a=1$;

b) $f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0; \\ 2x & \text{при} \quad 0<x\le 1; \\ 0 & \text{при} \quad x>1; \end{cases}$

c) $P(0,25<x<0,5)=F(0,5)-F(0,25)=0,25-0,0625=0,1875.$

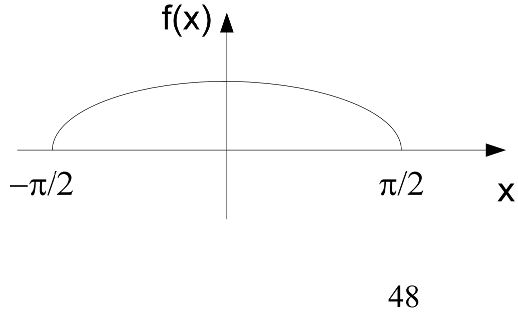
ПРИМЕР 5. СВ X подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x)=\begin{cases} a\cos x, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ 0, & x\notin\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Необходимо: **a)** найти коэффициент a, **b)** построить график плотности распределения $f(x)$, **c)** найти $F(x)$ и построить график, **d)** найти вероятность попадания СВ X на участок $[0, \dfrac{\pi}{4}]$.

РЕШЕНИЕ:

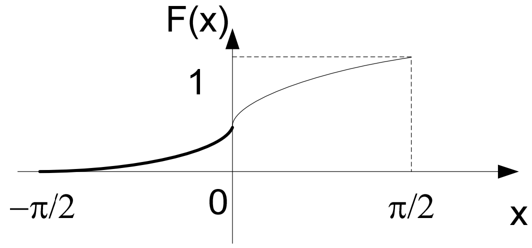
a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cdot\cos x dx=2a=1,\ \ a=\frac{1}{2};$

b) 

;

c) получим выражение для функции распределения (4.10):

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<-\dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{\sin x+1}{2} & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}; \\ 1 & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$



d) $P(0<x<\pi/4)=((sin\ (\pi/4)+1)-(sin(0)+1))\,/\,2=\sqrt{2}/4.$

4.3. Характеристики положения случайной величины

На практике в теории вероятностей применяют характеристики положения случайных величин, отражающие те или другие особенности распределения.

Модой $Mo(X)$ *случайной величины* X *называется ее наиболее вероятное значение* (для которого вероятность p_i или плотность вероятности $\rho(x)$ достигает максимума).

Если вероятность или плотность вероятности достигает максимума в одной точке, распределение называется *унимодальным,* если же максимум достигается в нескольких точках, распределение называется *полимодальным* (рис. 4.5).

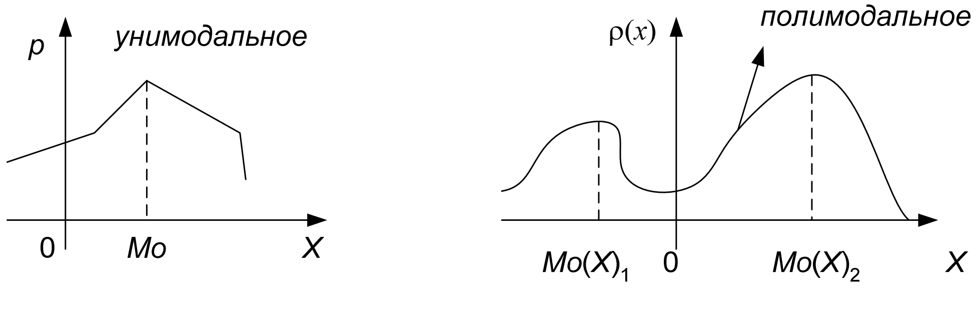


Рис. 4.5. Мода распределения СВ

Медианой $Me(X)$ *случайной величины* X *называется такое ее значение, при котором вероятность того, что СВ* $X < Me$, *одинаково вероятна тому, что СВ* $X > Me$, *и будет равна* 0,5.

$$P\left(-\infty \le x \le Me\right) = P\left(Me \le x \le \infty\right) = 0,5. \qquad (4.13)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{Me} \rho(x)dx = \int\limits_{Me}^{\infty} \rho(x)dx = 0,5. \qquad (4.14)$$

Геометрически медиана – это абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам (функция распределения равна 0,5, рис. 4.6).

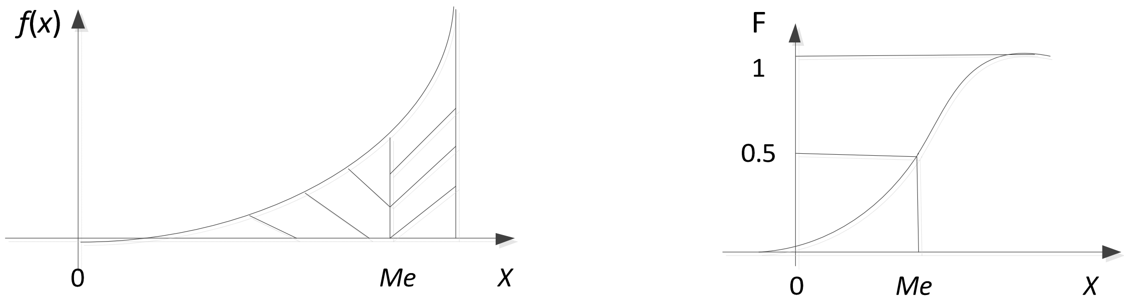


Рис. 4.6. Медиана распределения СВ

Квантилью уровня q (*или* ***q-квантилью***) *называется такое значение* x_q *случайной величины, при котором функция ее распределения принимает значение, равное q, то есть*

$$F\left(x_q\right) = P\left(X < x_q\right) = q. \qquad (4.15)$$

Некоторые квантили получили особое название. Очевидно, что определенная выше *медиана* случайной величины есть квантиль уровня 0,5, то есть $Me\left(X\right) = x_{0,5}$. Квантили $x_{0,25}$ и $x_{0,75}$ получили название *нижней* и *верхней квартилей* соответственно.

С понятием квантиля тесно связано понятие *процентной точки.* Под 100*q*%*-й точкой* подразумевается квантиль x_{1-q}, то есть такое значение случайной величины *X*, при котором $P\left(X \ge x_{1-q}\right) = q$.

ПРИМЕР 6. Найти моду, медиану, квантиль $x_{0,3}$ и 30%-ю точку СВ *X* с плотностью вероятности $\varphi\left(x\right) = 3x^2$ при $x \in \left[0;\ 1\right]$.

РЕШЕНИЕ. Для нахождения моды распределения необходимо найти максимум плотности (экстремум функции $\varphi\left(x\right) = 3x^2$). Однако эта функция возрастает на заданном интервале, следовательно, максимум достигается при $x = Mo(X) = 1$.

Для нахождения медианы воспользуемся формулой (4.14):

$$\int_{-\infty}^{Me} \varphi(x)dx = \frac{1}{2}; \Rightarrow \int_{-\infty}^{Me} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{Me} 3x^2 dx = x^3 |_0^{Me} = (Me)^3 = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $Me = \sqrt[3]{1/2} \approx 0,79$. По формуле (4.10) получим функцию распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} 3x^2 dx = x^3.$$

Учитывая (4.15), найдем квантиль $x_{0,3} \Rightarrow x_{0,3}^3 = 0,3$, откуда $x_{0,3} \approx 0,67$. 30%-ю точку случайной величины X или квантиль $x_{0,7}$ найдем из уравнения $x_{0,7}^3 = 0,7$, откуда $x_{0,7} \approx 0,89$.

4.4. Числовые характеристики одномерной случайной величины

***Математическим ожиданием**, или средним значением случайной величины ξ называется постоянная* (*константа*), *обозначаемая символом M_ξ ($M[X]$) и определяемая равенством*:

$$\overline{x} = m_x = M_x = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} x_i \cdot p_i - \text{для дискретной СВ}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx - \text{для непрерывной СВ}. \end{cases} \tag{4.16}$$

ПРИМЕР 7. Известны законы распределения СВ X и Y – числа очков, выбиваемых первым и вторым стрелками:

X	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

Y	y_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	p_j	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Необходимо выяснить, какой из двух стрелков стреляет лучше.

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что из двух стрелков лучше стреляет тот, кто *в среднем* выбивает большее число очков. Тогда по формуле (4.16) вычислим $M\left[X\right]$ *и* $M\left[Y\right]$:

$$M\left[X\right]=0\cdot 0{,}15+1\cdot 0{,}11+2\cdot 0{,}04+\ldots+9\cdot 0{,}12+10\cdot 0{,}20=5{,}36;$$

$$M\left[Y\right]=0\cdot 0{,}01+1\cdot 0{,}03+2\cdot 0{,}05+\ldots+9\cdot 0{,}04+10\cdot 0{,}02=5{,}36.$$

Так как среднее число выбиваемых очков у двух стрелков одинаковое, то предпочтение нельзя отдать ни одному стрелку: они равносильны.

ПРИМЕР 8. Непрерывная СВ X равномерно распределена на отрезке $[a,\, b]$. Определим m_x.

РЕШЕНИЕ. Прежде всего определим плотность распределения. Из условия задачи известно:

$$\rho(x)=\begin{cases}\text{const}, & x\in[a,b];\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

Используем свойство (4.12):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)dx=\int_{-\infty}^{a}0\cdot dx+\int_{a}^{b}\text{const}\cdot dx+\int_{b}^{\infty}0\cdot dx=\ \text{const}\cdot x\,\Big|_a^b=\text{const}\cdot(b-a)=1.$$

$$\text{const}=\frac{1}{b-a};\quad \bar{x}=\int_{a}^{b}\frac{x\cdot dx}{b-a}=\frac{a+b}{2}.$$

4.4.1. Свойства математического ожидания

1. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной*:

$$M[C]=C. \tag{4.17}$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания*:

$$M[kX]=k\cdot M[X]. \tag{4.18}$$

3. *Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий*:

$$M[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}M[X_i]. \tag{4.19}$$

4. *Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий* (*покажем это свойство для двух СВ*).

$$M[XY]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i\cdot\sum_{j=1}^{m}y_j\cdot p_j=M[X]\cdot M[Y]. \quad (4.20)$$

5. *Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю. Пусть математическое ожидание СВ X равно a, тогда*:

$$M[X-M[X]]=M[X-a]=M[X]-a=a-a=0. \quad (4.21)$$

Математическое ожидание *– одна из характеристик положения СВ. С этой точки зрения математическое ожидание СВ есть некоторое число, являющееся как бы ее «представителем» и заменяющее СВ при грубых (ориентировочных) расчетах.*

ПРИМЕР 9. Найти математическое ожидание случайной величины $Z=8X-5Y+7,$ если известно, что $M\left[X\right]=3,\ M\left[Y\right]=2.$

РЕШЕНИЕ. Используя свойства математического ожидания (4.17), (4.18) и (4.19), найдем

$$M\left(Z\right)=8M\left[X\right]-5M\left[Y\right]+7=8\cdot 3-5\cdot 2+7=21.$$

4.5. Моменты случайной величины

Понятие момента широко применяется в механике для описания распределения масс (статические моменты, момент инерции и т. п.).

Начальный момент *s-го порядка случайной величины X обозначается символом $\alpha_s(x)$ и определяется выражением*:

$$\alpha_s(x)=\begin{cases}\sum\limits_{-\infty}^{\infty}x_i^s\cdot p_i - \text{для дискретной СВ,}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}x^s\cdot\rho(x)dx - \text{для непрерывной СВ.}\end{cases} \quad (4.22)$$

Нетрудно убедиться, что введенная выше характеристика *математическое ожидание* представляет собой не что иное, как *первый начальный момент*. Используя символ математического ожидания, выражение (4.22) можно представить в следующем виде:

$$\alpha_s(x)=M[x^s]. \quad (4.23)$$

Пусть имеется СВ X с математическим ожиданием m_x. Введем новое понятие.

Центрированной случайной величиной, соответствующей величине X, называется отклонение СВ X от ее математического ожидания:

$$\dot{X}=X-m_x. \quad (4.24)$$

Моменты центрированной СВ называются ***центральными моментами***. Нетрудно показать, что математическое ожидание центрированной СВ равно нулю:

$$M[\dot{X}] = M[X - m_x] = m_x - m_x = 0. \tag{4.25}$$

Центральным моментом *s-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание s-й степени, соответствующей центрированной СВ*:

$$\mu_s(x) = M[\dot{X}^s] = M[(X - m_x)^s] =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_x)^s \cdot p_i - \text{для дискретной СВ}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s \cdot \rho(x) dx - \text{для непрерывной СВ}. \end{cases} \tag{4.26}$$

Очевидно, что для любой СВ *центральный момент первого порядка равен нулю*. Второй центральный момент СВ, ввиду его крайней важности среди других характеристик, называется ***дисперсией*** и обозначается $D[X]$:

$$\mu_2(x) = D[X] = M[\dot{X}^2]. \tag{4.27}$$

Дисперсией *$D[X]$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания*:

$$D[X] = M[(X - m_x)^2] =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_x)^2 \cdot p_i - \text{для дискретной СВ}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot \rho(x) dx - \text{для непрерывной СВ}. \end{cases} \tag{4.28}$$

Дисперсия СВ характеризует рассеяние (вариацию, разброс) этой величины относительно ее математического ожидания. Дисперсия $D[X]$ имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно. Поэтому в качестве показателя рассеяния используют также величину, равную $\sqrt{D[X]}$.

Средним квадратическим отклонением (***стандартным отклонением, или стандартом***) σ_x *случайной величины* X *называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии*:

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]}. \quad (4.29)$$

4.5.1. Свойства дисперсии

1. *Дисперсия константы равна нулю*:

$$D[C] = M[\dot{C}^2] = M[(C - M[C])^2] = M[(C - C)^2] = 0. \quad (4.30)$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его при этом в квадрат*:

$$\begin{gathered} D[CX] = M[(CX - M[CX])^2] = \\ = C^2 M[(X - M[X])^2] = C^2 D[X]. \end{gathered} \quad (4.31)$$

3. *Дисперсия алгебраической суммы конечного числа независимых СВ равна сумме их дисперсий.* Покажем это свойство для двух СВ:

$$\begin{gathered} D[X+Y] = M[(X+Y-M[X+Y])^2] = \\ = M[((X-m_x)+(Y-m_y))^2] = M[(X-m_x)^2] + \\ +2M[(X-m_x)(Y-m_y)] + M[(Y-m_y)^2] = \\ = D[X] + 2M[\dot{X} \cdot \dot{Y}] + D[Y]. \end{gathered} \quad (4.32)$$

Учтем, что X и $Y-$ независимые случайные величины, для которых выполняются свойства (4.20) и (4.25), то есть:

$$M[\dot{X}\dot{Y}] = M[\dot{X}] \cdot M[\dot{Y}], \quad M[\dot{X}] = M[\dot{Y}] = 0. \quad (4.33)$$

С учетом (4.33) выражение (4.32) примет окончательный вид:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y]. \quad (4.34)$$

Вычислим дисперсию разности СВ:

$$\begin{gathered} D[X-Y] = D[X+(-1)Y] = D[X] + D[(-1)Y] = \\ = D[X] + (-1)^2 D[Y] = D[X] + D[Y]. \end{gathered} \quad (4.35)$$

Таким образом, мы доказали следующее свойство: *дисперсия разности равна сумме дисперсий.*

4. *Второй центральный момент случайной величины равен разности между вторым начальным моментом и квадратом первого начального момента этой случайной величины.* Другими словами:

Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:

$$D[X] = M[(X - m_x)^2] = M[X^2 - 2m_x X - m_x^2] =$$
$$= M[X^2] - 2m_x M[X] + m_x^2 = M[x^2] - 2m_x^2 + m_x^2 = \qquad (4.36)$$
$$= M[X^2] - m_x^2 = \alpha_2(x) - \alpha_1^2(x).$$

5. *Дисперсия произведения независимых СВ X и Y равна произведению дисперсии X на дисперсию Y плюс произведение квадрата математического ожидания СВ X на дисперсию Y плюс произведение квадрата математического ожидания СВ Y на дисперсию X*. Покажем это:

$$D[XY] = M[(XY - M[XY])^2] =$$
$$= M[X^2Y^2 - 2m_x m_y XY + m_x^2 m_y^2] = M[X^2]M[Y^2] - 2m_x^2 m_y^2 +$$
$$+ m_x^2 m_y^2 = (D[X] + m_x^2)(D[Y] + m_y^2) - m_x^2 m_y^2 = \qquad (4.37)$$
$$= D[X]D[Y] + m_x^2 D[Y] + m_y^2 D[X].$$

4.5.2. Асимметрия и эксцесс

Третий центральный момент μ_3 *служит для характеристики асимметрии* (*скошенности*) *распределения*. Так как третий центральный момент имеет размерность куба случайной величины, то, чтобы получить безразмерную характеристику, третий центральный момент делят на куб среднего квадратического отклонения СВ *X*:

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \qquad (4.38)$$

Величина Sk называется ***коэффициентом асимметрии случайной величины***.

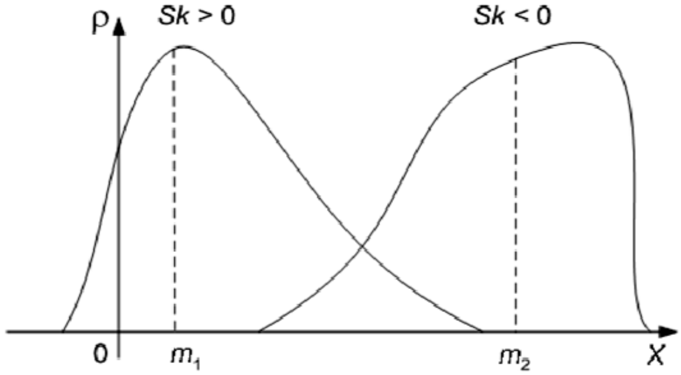


Рис. 4.7. Характеристика асимметрии распределений

На рис. 4.7 показаны два распределения, имеющих положительную (распределение 1) и отрицательную (распределение 2) асимметрию. Естественно, что для симметричного распределения $Sk \equiv 0$.

Четвертый центральный момент μ_4 *служит для характеристики крутости (островершинности) распределения.*

Эксцессом случайной величины называется число

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{4.39}$$

Число 3 в выражении (4.39) вычитается из отношения μ_4 / σ^4, потому что для наиболее часто встречающегося нормального распределения это отношение равно 3. Таким образом, распределения более островершинные, чем нормальное, имеют положительный эксцесс, распределения с меньшей крутостью, чем нормальное, – отрицательный эксцесс, для нормального распределения эксцесс равен нулю (рис. 4.8).

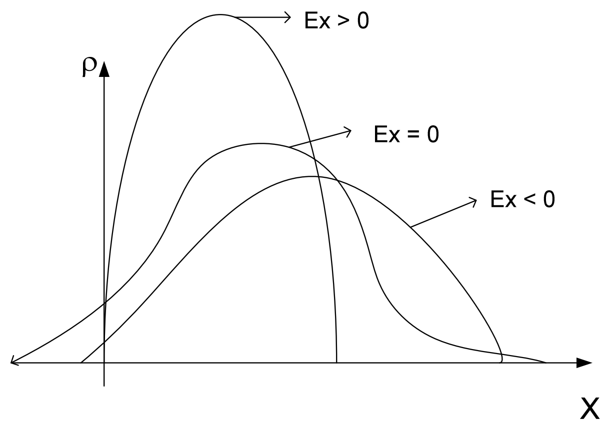


Рис. 4.8. Характеристика островершинности распределений

ПРИМЕР 10. Для равномерно распределенной СВ (см. *ПРИМЕР 8*) необходимо вычислить $D[X], Sk, Ex$.

РЕШЕНИЕ:

a) вспомним, что $m_x = (a+b)/2$;

b) дисперсию вычислим по формуле (4.36):

$$D[X] = M[X^2] - m_x^2 = \int_a^b \frac{x^2 dx}{b-a} - (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} =$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}};$$

c) $Sk = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}.$ $\qquad \mu_3 = \int\limits_a^b \dfrac{(x-m_x)^3}{b-a}dx = \dfrac{(x-m_x)^4}{4(b-a)}\Big|_a^b =$

$$= \frac{(b-\frac{a+b}{2})^4 - (a-\frac{a+b}{2})^4}{4(b-a)} = \frac{(b-a)^4-(a-b)^4}{4(b-a)\cdot 2^4} = 0. \qquad Sk = 0;$$

d) $Ex = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$ $\quad \mu_4 = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b (x-\dfrac{a+b}{2})^4 dx = \dfrac{1}{b-a}\cdot\dfrac{(x-\frac{a+b}{2})^5}{5}\Big|_a^b =$

$$= \frac{(b-a)^5-(a-b)^5}{(b-a)\cdot 5\cdot 2^5} = \frac{(b-a)\cdot(b-a)^4-(a-b)\cdot(a-b)^4}{5\cdot 32\cdot(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)^4\cdot(b-a)\cdot 2}{5\cdot 32\cdot(b-a)} = \frac{(b-a)^4}{80}. \quad Ex = \frac{(b-a)^4\cdot 144}{80\cdot(b-a)^4} - 3 = -1,2.$$

Глава 5
МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

5.1. Многомерная случайная величина и закон ее распределения

Очень часто результат испытания характеризуется не одной случайной величиной, а некоторой *системой случайных величин* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которую называют также *многомерной* (*n-мерной*) *случайной величиной*, или *случайным вектором* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, входящие в систему, могут быть как *дискретными*, так и *непрерывными*.

Приведем примеры многомерных случайных величин:

- физическое состояние человека можно охарактеризовать системой случайных величин: X_1 – рост, X_2 – вес, X_3 – возраст и т. п.;
- успеваемость студента можно описать многомерной случайной величиной $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где X_i – оценка по i-му предмету.

Геометрически двумерную и трехмерную случайные величины можно интерпретировать случайной точкой (вектором) на плоскости Oxy или в трехмерном пространстве $Oxyz$. Как отмечалось ранее, наиболее полным описанием СВ является *закон ее распределения*. Дальнейшее рассмотрение многомерных СВ проведем на примере двумерных случайных величин.

Определим, как и для одномерной СВ, интегральную функцию распределения двумерной СВ:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \tag{5.1}$$

Геометрически функция распределения $F(x, y)$ означает вероятность попадания случайной точки (X, Y) в заштрихованную область – бесконечный квадрант, лежащий левее и ниже точки $M(x, y)$ (рис. 5.1).

Правая и верхняя границы области в квадрант не включаются – это значит, что функция распределения непрерывна *слева* по каждому из аргументов.

В случае дискретной двумерной случайной величины ее функция распределения определяется по формуле:

$$F(x, y) = \sum_i \sum_j p_{ij}. \tag{5.2}$$

Здесь (5.2) суммирование вероятностей производится по всем значениям i, для которых $x_i < X$, и по всем j, для которых $y_j < Y$.

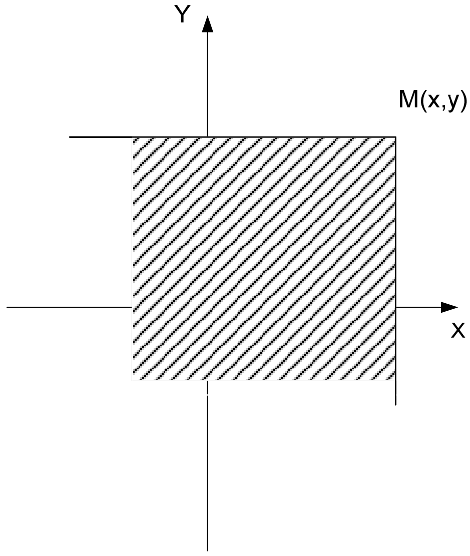


Рис. 5.1. Функция распределения двумерной СВ

5.1.1. Свойства двумерной функции распределения

1. Функция распределения $F(x, y)$ есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей, то есть

$$0 \le F(x, y) \le 1. \tag{5.3}$$

Это утверждение базируется на том, что интегральная функция распределения двумерной СВ есть *вероятность*.

2. Функция распределения $F(x, y)$ есть неубывающая функция, по каждому из аргументов:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad x_2 > x_1 \Rightarrow F(x_2, y) \ge F(x_1, y), \\ &\text{при} \quad y_2 > y_1 \Rightarrow F(x, y_2) \ge F(x, y_1). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Так как при увеличении какого-либо аргумента заштрихованная область на рис. 5.1 увеличивается, то вероятность попадания случайной точки в эту область, по крайней мере, уменьшиться не может.

3. Если хотя бы один из аргументов обращается в $-\infty$, функция распределения $F(x, y)$ равна нулю:

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0. \tag{5.5}$$

Функция распределения $F(x, y)$ в данных случаях равна нулю, так как события $X < -\infty$, $Y < -\infty$ и их произведение представляют невозможные события.

4. Если один из аргументов равен $+\infty$, двумерная функция распределения $F(x, y)$ становится равной одномерной функции распределения от другого аргумента:

$$F(x,+\infty) = F_1(x),$$
$$F(+\infty, y) = F_2(y), \tag{5.6}$$

где $F_1(x) = P(X < x)$, $F_2(y) = P(Y < y)$. Очевидность данного свойства (5.6) вытекает из того, что произведение события $(X < x)$ и достоверного события $(Y < +\infty)$ есть само событие $(X < x)$, аналогично можно показать и для $(Y < y)$.

5. *Если оба аргумента равны* $+\infty$, *то функция распределения* $F(x, y)$ *равна единице*:

$$F(+\infty,+\infty) = 1. \tag{5.7}$$

Это свойство обусловлено тем фактом, что совместная реализация двух достоверных событий $(X < +\infty)$ и $(Y < +\infty)$ есть событие достоверное, а вероятность достоверного события равна единице.

Рассмотрим вероятность попадания двумерной СВ в некоторый прямоугольник S (рис. 5.2). Вероятность попадания случайной точки в указанный прямоугольник можно записать:

$$P(S) = P(x_1 \le X \le x_2, y_1 \le Y \le y_2). \tag{5.8}$$

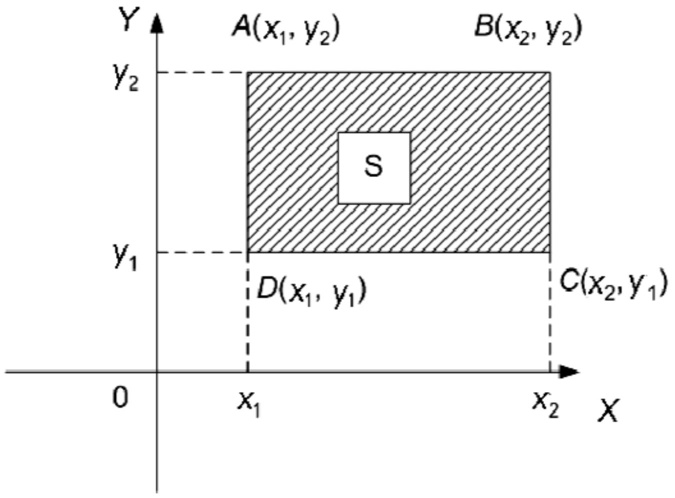


Рис. 5.2. Вероятность попадания в прямоугольник

Зная функцию распределения $F(x, y)$, выразим искомую вероятность. Эта вероятность равна вероятности попадания в бесконечный квадрант с вершиной $B(x_2, y_2)$ минус вероятность попадания в квадранты с вершинами $A(x_1, y_2)$ и $C(x_2, y_1)$ плюс вероятность попадания в квадрант $D(x_1, y_1)$ (так как эта вероятность вычиталась дважды). Окончательно получим:

$$P(S) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \tag{5.9}$$

5.2. Плотность вероятности двумерной случайной величины

Двумерная случайная величина (X,Y) *называется* ***непрерывной***, *если ее функция распределения* $F(x,y)$ – *непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, и существует вторая смешанная производная* $F_{xy}''(x,y)$.

Как и для одномерной случайной величины, введем понятие *плотности вероятности* двумерной СВ.

Оценим вероятность попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy. Средняя плотность вероятности в данном прямоугольнике равна отношению вероятности к площади прямоугольника $\Delta x \cdot \Delta y$. Будем неограниченно уменьшать стороны прямоугольника, устремив Δx и Δy к нулю. С учетом (5.9) получим:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \le X \le x+\Delta x, y \le Y \le \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} -$$

$$- \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x, y+\Delta y) + F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x \cdot \Delta y} = \tag{5.10}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} [\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)}{\Delta x} -$$

$$- \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x}].$$

Учитывая то, что функция $F(x,y)$ непрерывная и дифференцируемая по каждому аргументу, выражение (5.10) примет вид:

$$\lim_{\Delta y \to 0} [\frac{F_x'(x, y+\Delta y) - F_x'(x,y)}{\Delta y}] = [F_x'(x,y)]_y' = F_{xy}''(x,y). \tag{5.11}$$

Плотностью вероятности (***плотностью распределения***, или ***совместной плотностью***) *непрерывной двумерной случайной величины* (X,Y) *называется вторая смешанная частная производная ее функции распределения*:

$$\rho(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F_{xy}''(x,y). \tag{5.12}$$

Плотность распределения двумерной СВ обладает свойствами, аналогичными свойствам плотности вероятности одномерной СВ:

1. Плотность распределения двумерной случайной величины есть неотрицательная функция, то есть

$$\rho(x,y) \geq 0. \qquad (5.13)$$

Это свойство вытекает из того, что $F(x,y)$ – функция неубывающая по каждому аргументу.

2. Вероятность попадания непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) в область D равна

$$P[(X,Y) \in D] = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy. \qquad (5.14)$$

По аналогии с одномерной СВ, для двумерной СВ (X,Y) введем понятие «элемент вероятности», равный $\rho(x,y)dxdy$. Он представляет (с точностью до бесконечно малых более высоких порядков) вероятность попадания случайной точки в элементарный прямоугольник со сторонами dx и dy. Тогда *вероятность попадания двумерной СВ в область D на плоскости Oxy геометрически изображается объемом цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью распределения $\rho(x,y)$ и опирающегося на область D*, а аналитически – двойным интегралом (5.14).

3. Функция распределения непрерывной двумерной случайной величины выражается через ее плотность вероятности по формуле:

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} \rho(x,y)dxdy. \qquad (5.15)$$

Функция распределения $F(x,y)$ есть вероятность попадания в бесконечный квадрант D, который можно рассматривать как прямоугольник, ограниченный абсциссами $-\infty$ и x и ординатами $-\infty$ и y.

4. Двойной несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности двумерной СВ равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dxdy = 1. \qquad (5.16)$$

Несобственный интеграл (5.16) есть вероятность попадания во всю плоскость Oxy, а вероятность достоверного события равна 1.

Зная плотность вероятности двумерной СВ (X,Y), можно найти функции распределения и плотности вероятностей ее одномерных составляющих X и Y. Учитывая (5.6) и (5.15), получим:

$$F(+\infty, y) = F_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} \rho(x, y)dxdy.$$
$$F(x, +\infty) = F_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y)dxdy. \qquad (5.17)$$

Дифференцируя функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$ по аргументам x и y соответственно, получим плотности вероятности одномерных СВ:

$$\rho_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y)dy, \quad \rho_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y)dx, \qquad (5.18)$$

т. е. *несобственный интеграл в бесконечных пределах от совместной плотности* $\rho(x, y)$ *двумерной случайной величины по аргументу* x *дает плотность вероятности* $\rho_2(y)$*, а по аргументу* y *– плотность вероятности* $\rho_1(x)$.

ПРИМЕР 1. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	***X***		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Требуется: **a)** найти законы распределения составляющих X и Y; **b)** составить функцию распределения.

РЕШЕНИЕ:

a) сложив вероятности «по столбцам», найдем закон распределения составляющей X:

X	3	10	12	> 12
P	0,27	0,43	0,3	
F	0	0,27	0,7	1

Сложив вероятности «по строкам», аналогично найдем закон распределения составляющей Y:

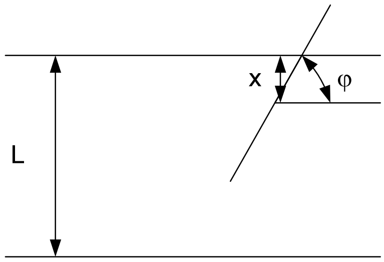
Y	4	5	> 5
P	0,55	0,45	
F	0	0,55	1

b) составим функцию распределения:

Y	***X***			
	3	10	12	> 12
4	0	0	0	0
5	0	0,17	0,30	0,55
> 5	0	0,27	0,7	1

ПРИМЕР 2. **(Задача Бюффона)**

Иглу длиной l бросают на плоскость, на которой на расстоянии L друг от друга проведены параллельные линии. Определите вероятность пересечения иглой одной из линий, если $l < L$.



РЕШЕНИЕ. Введем систему случайных величин X, Ф, где X – расстояние от середины иглы до ближайшей линии, а φ – острый угол между иглой и линией (см. рис.). Очевидно, что расстояние X распределено равномерно в интервале $[0, L/2]$, а угол φ распределен равномерно в интервале $[0, \pi/2]$. Учитывая, что СВ X и φ – независимые, получим $f(x,\varphi) = 2/L \cdot 2/\pi = 4/\pi L$ при $0 \le x \le L/2$, $0 \le \varphi \le \pi/2$. Пересечение иглой одной из линий происходит при заданном угле φ, если $0 \le x \le \dfrac{l \cdot \sin\varphi}{2}$. Отсюда получим искомую вероятность:

$$P = \frac{4}{\pi L} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\frac{l\sin\varphi}{2}} dx = 2l/\pi L.$$

5.2.1. Условная плотность распределения

Рассмотрим другой подход при определении вероятности попадания двумерной СВ в элементарный прямоугольник со сторонами Δx и Δy и устремим Δx и Δy к нулю (рис. 5.3).

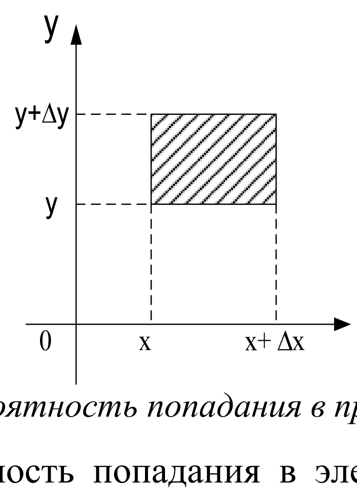


Рис. 5.3. Вероятность попадания в прямоугольник

Рассмотрим вероятность попадания в элементарный прямоугольник как произведение вероятности попадания в бесконечную по аргументу y полосу $[x, x+\Delta x]$, равную $\rho(x)dx$, на вероятность попасть в полосу $[y, y+\Delta y]$ при условии, что аргумент x попал в полосу $[x, x+\Delta x]$ – $\rho(y/x)dy$. В связи с тем, что аргументы x и y равносильны, запишем:

$$\rho(x,y)dxdy = \rho(x)dx\rho(y/x)dy = \rho(y)dy\rho(x/y)dx. \tag{5.19}$$

Таким образом, двумерная плотность распределения равна произведению одномерных плотностей распределения, одна из которых условная. Отсюда следует, что условная плотность распределения равна:

$$\begin{aligned} \rho(x/y) &= \frac{\rho(x,y)}{\rho(y)} = \frac{\rho(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dx}, \\ \rho(y/x) &= \frac{\rho(x,y)}{\rho(x)} = \frac{\rho(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dy}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Случайная величина не зависит от другой случайной величины, если безусловная плотность распределения этой величины равна условной плотности распределения:

$$\rho(x) = \rho(x/y) \Leftrightarrow \rho(y) = \rho(y/x). \tag{5.21}$$

В этом случае говорят, что случайные величины X и Y – ***статистически независимы***.

При независимости случайных величин X и Y плотность распределения двумерной СВ (5.19) равна произведению плотностей соответствующих одномерных СВ, а интегральная функция распределения двумерной СВ равна произведению одномерных функций:

$$\begin{aligned} &\rho(x,y) = \rho(x)\rho(y), \\ &F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} \rho(x,y)dxdy = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(x)dx \int\limits_{-\infty}^{y} \rho(y)dy = F_1(x)F_2(y). \end{aligned} \tag{5.22}$$

5.3. Числовые характеристики системы случайных величин

По аналогии с одномерными СВ, для двумерной случайной величины введем выражения для начального и центрального моментов:

$$\begin{aligned} \alpha_{k,l}(x,y) &= M[x^k, y^l], \\ \mu_{k,l}(x,y) &= M[\dot{x}^k, \dot{y}^l]. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Если говорим о моменте n-го порядка двумерной СВ, то это значит, что суммируются индексы: $n = k + l$.

Для однозначного задания момента двумерной СВ необходимо указать любые два числа из трех: *k*, *l* и *n*. Рассмотрим подробнее:

$$\begin{gathered}
\alpha_{1,0}(x,y) = M[x^1, y^0] = M[x] = \alpha_1(x), \\
\alpha_{0,1}(x,y) = M[x^0, y^1] = M[y] = \alpha_1(y), \\
\mu_{2,0}(x,y) = M[\dot{x}^2, \dot{y}^0] = M[\dot{x}^2] = D[x], \\
\mu_{0,2}(x,y) = M[\dot{x}^0, \dot{y}^2] = M[\dot{y}^2] = D[y], \\
\mu_{1,1}(x,y) = M[\dot{x}^1, \dot{y}^1] = M[\dot{x}, \dot{y}].
\end{gathered} \tag{5.24}$$

Как видим, для двумерной СВ можно указать три центральных момента второго порядка, особый интерес вызывает *смешанный момент*.

Ковариацией (*или* ***корреляционным моментом***) *случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий* (*смешанный центральный момент второго порядка*):

$$\operatorname{cov}(x,y) = K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)]. \tag{5.25}$$

Для дискретной СВ:

$$\operatorname{cov}(x,y) = K_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}. \tag{5.26}$$

Для непрерывной СВ:

$$\operatorname{cov}(x,y) = K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y)\, \rho(x,y) dx dy. \tag{5.27}$$

Теорема. *Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и Y равен нулю.*

Доказательство. Докажем эту теорему для непрерывных СВ. Пусть *X и Y – независимые случайные величины*, *тогда согласно* (5.22) $\rho(x,y) = \rho(x)\rho(y)$. Подставим это в выражение (5.27)

$$\begin{gathered}
\operatorname{cov}(x,y) = K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y)\, \rho(x,y) dx dy = \\
= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) \rho(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) \rho(y) dy = 0.
\end{gathered} \tag{5.28}$$

Ковариация двух случайных величин характеризует как *степень зависимости* случайных величин, так и их *рассеяние* вокруг точки (m_x, m_y). Если рассеяние (степень разброса) мало, то и ковариация мала.

Ковариация двух случайных величин равна математическому ожиданию их произведения минус произведение математических ожиданий:

$$K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[XY] - m_y M[x] - \\ - m_x M[y] + m_x m_y = M[XY] - m_x m_y. \quad (5.29)$$

Коэффициентом корреляции *двух случайных величин называется отношение ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин*:

$$r(x, y) = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{D[x]D[y]}}. \quad (5.30)$$

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной и не зависит от степени разброса, так как функция нормирована на меру разброса $[\sigma_x, \sigma_y]$.

ПРИМЕР 3. Имеются линейно зависимые случайные величины X и Y: $y = ax + b$. Необходимо вычислить коэффициент корреляции.

РЕШЕНИЕ. Пусть для заданной СВ X известно, что $M[x] = m_x$, $D[x] = \sigma_x^2$. Тогда, учитывая свойства математического ожидания и дисперсии, вычислим математическое ожидание и дисперсию СВ Y:

$$M[y] = m_y = am_x + b,$$

$$D[y] = a^2 D[x],$$

$$\sigma_y = |a|\sigma_x.$$

$$r(x, y) = \frac{M[(x - m_x)(y - m_y)]}{|a|\sigma_x \sigma_x} = \frac{M[(x - m_x)(ax + b - am_x - b)]}{|a|\sigma_x \sigma_x} =$$

$$= \frac{a M[(x - m_x)(x - m_x)]}{|a|\sigma_x \sigma_x} = \frac{a M[(x - m_x)^2]}{|a| D[x]} = \pm 1 = 1 \cdot \operatorname{sign} a.$$

5.3.1. Свойства коэффициента корреляции

1. Коэффициент корреляции принимает значения на отрезке $[-1, 1]$:

$$-1 \le r \le 1. \quad (5.31)$$

2. Если случайные величины независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю. Справедливость этого свойства очевидна, если учесть выражение (5.28), так как в этом случае $K_{xy} = 0$.

3. Равенство нулю коэффициента корреляции – необходимое, но недостаточное условие независимости случайных величин.

Из независимости случайных величин вытекает их некоррелированность. Обратное не всегда верно. Убедимся в этом на примере.

ПРИМЕР 4. Имеются две СВ: $X \Rightarrow m_x = 0, \alpha_3(x) = 0;\quad Y = x^2$. Докажите, что эти величины некоррелированные.

РЕШЕНИЕ. Вычислим ковариацию:

$$\operatorname{cov}(x,y) = M[(x-m_x)(y-m_y)] = M[x(x^2-\overline{x^2})] = M[x^3] -$$

$$-M[x]\cdot M[x^2] = \alpha_3(x) - m_x \cdot \overline{x^2} \equiv 0.$$

На практике для n-мерного случайного вектора $X = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ достаточно сложно найти закон распределения (интегральную функцию, плотность распределения и т. п.). Поэтому обычно указывают n математических ожиданий $M[\xi_1], M[\xi_2], \ldots, M[\xi_n]$, n дисперсий $D[\xi_1], D[\xi_2], \ldots, D[\xi_n]$ и $n-1$ корреляционных моментов K_{ξ_i,ξ_j} $(i \neq j)$, характеризующих парные корреляции всех величин, составляющих вектор X. Все корреляционные моменты, дополненные дисперсиями K_{ξ_i,ξ_i} $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, располагают в виде матрицы:

$$K_{i,j} = \begin{bmatrix} K_{\xi_1,\xi_1} & K_{\xi_1,\xi_2} & \ldots & K_{\xi_1,\xi_n} \\ K_{\xi_2,\xi_1} & K_{\xi_2,\xi_2} & \ldots & K_{\xi_2,\xi_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{\xi_n,\xi_1} & K_{\xi_n,\xi_2} & \ldots & K_{\xi_n,\xi_n} \end{bmatrix}, \tag{5.32}$$

которую называют ***корреляционной матрицей*** системы случайных величин.

Замечание. *Корреляционная матрица симметрична относительно главной диагонали* (*см. формулы* (5.26) и (5.27)).

ПРИМЕР 5. Двумерная СВ $(X,\ Y)$ задана дифференциальной функцией:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi}, & \text{внутри эллипса} \quad \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1; \\ 0, & \text{вне эллипса.} \end{cases}$$

Докажите, что X и $Y -$ зависимые и некоррелированные СВ.

РЕШЕНИЕ. Зная двумерную плотность распределения, вычислим одномерные плотности:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{6\pi}\int\limits_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy=\frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}.$$

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\frac{1}{6\pi}\int\limits_{-3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} dx=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}.$$

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}, & |x|<3;\\ 0, & |x|\geq 3;\end{cases}\qquad f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}, & |y|<2;\\ 0, & |y|\geq 2.\end{cases}$$

Так как $f(x,y)=1/6\pi \neq f_1(x)\cdot f_2(y)$, то X и Y – зависимые величины. Найдем ковариацию: $K_{xy}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy.$ Так как $f_1(x)$ – функция симметричная относительно OY, то $m_x=0,$ аналогично $m_y=0.$ Учитывая эти результаты, получим:

$$K_{xy}=\frac{1}{6\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xdx\int\limits_{-\infty}^{\infty} ydy\equiv 0.$$

Действительно, каждый интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю. Таким образом, СВ X и Y – *зависимые и некоррелируемые*.

Глава 6
ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

6.1. Нормальный (гауссов) закон распределения

Нормальный закон распределения (закон Гаусса) играет исключительно важную роль в теории вероятностей. Это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения СВ. Главная особенность, выделяющая закон Гаусса, состоит в том, что он является ***предельным законом***, к которому приближаются другие законы при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Доказано, что сумма достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения (при соблюдении некоторых весьма нежестких ограничениях), приближенно подчиняется нормальному закону. И это свойство выполняется тем точнее, чем большее количество СВ суммируется. По нормальному закону распределены ошибки измерений, белый шум в электронике и т. п.

Непрерывная случайная величина X имеет ***нормальный закон распределения*** (***закон Гаусса***) *с параметрами a и σ, если ее плотность вероятности определена на всей числовой оси $x \in (-\infty, \infty)$ и имеет вид*:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{6.1}$$

Кривую нормального закона распределения называют нормальной, или гауссовой кривой (рис. 6.1). Гауссова кривая имеет симметричный холмообразный вид с максимумом в точке $x = a$, причем сам максимум равен $f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Выясним смысл параметров a и σ, входящих в выражение (6.1).

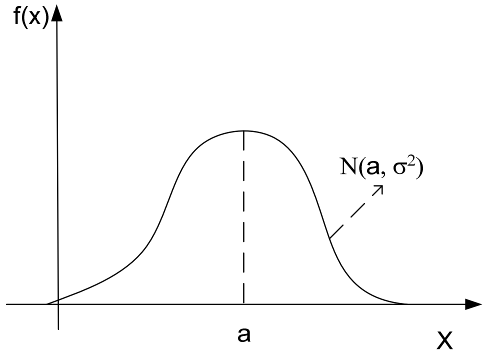


Рис. 6.1. Нормальное распределение

Для этого вычислим сначала математическое ожидание СВ X, распределенной по нормальному закону:

$$M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \tag{6.2}$$

Произведем замену переменных, определив $t = \dfrac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}$, тогда $x = \sigma\sqrt{2}t + a$, а $dx = \sigma\sqrt{2}dt$. Подставив в (6.2), получим:

$$\begin{aligned} M[x] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma\sqrt{2}t + a)\cdot\sigma\sqrt{2}\cdot e^{-t^2}dt = \\ &= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt. \end{aligned} \tag{6.3}$$

В выражении (6.3) первый интеграл равен нулю, как интеграл от нечетной функции в симметричных относительно начала координат пределах; второй интеграл – это интеграл Пуассона–Эйлера, который равен $\sqrt{\pi}$. Тогда окончательно получим:

$$M[x] = m_x = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = a. \tag{6.4}$$

Итак, параметр а в плотности вероятности нормального распределения равен математическому ожиданию СВ X.

Вычислим теперь дисперсию *СВ X*:

$$D[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Произведя ту же замену переменных, что и при вычислении математического ожидания, получим:

$$\begin{aligned} D[x] &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underset{U}{t}\cdot\underbrace{2t\cdot e^{-t^2}dt}_{dV} = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left\{(-t\cdot e^{-t^2})\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right\} = \sigma^2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Поясним немного полученный результат. Действительно, первое слагаемое в выражении (6.5) равно нулю, так как e^{-t^2} стремится к нулю при $t = \pm\infty$ быстрее, чем возрастает любая степень *t*. А второе слагаемое – это интеграл Пуассона–Эйлера.

Следовательно, параметр σ *в формуле* (6.1) *есть не что иное, как среднее квадратическое отклонение СВ X.*

Выведем общую формулу для центрального момента любого порядка СВ *X*, распределенной по нормальному закону. По определению:

$$\mu_s(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^s \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^s\cdot e^{-t^2}dt.$$

Здесь, как и в предыдущих интегралах, применили подстановку, а полученный интеграл будем брать по частям:

$$\mu_s = \frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{t^{s-1}}_{U} \underbrace{te^{-t^2} dt}_{dV} =$$

$$= \frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{2\cdot\sqrt{\pi}} \left\{ \underbrace{(-t^{s-1}e^{-t^2})\big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + (s-1)\int_{-\infty}^{\infty} t^{s-2}\cdot e^{-t^2}dt \right\} = \qquad (6.6)$$

$$= \frac{(s-1)(\sigma\sqrt{2})^s}{2\cdot\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{s-2}\cdot e^{-t^2}dt.$$

При интегрировании по частям отметим, что первое слагаемое равно нулю, так как e^{-t^2} стремится к нулю быстрее, чем возрастает любая степень *t*. Теперь запишем центральный момент $s-2$ порядка:

$$\mu_{s-2} = \frac{(\sigma\sqrt{2})^{s-2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{s-2}\cdot e^{-t^2}dt. \qquad (6.7)$$

Сравнивая правые части выражений (6.6) и (6.7), окончательно получим:

$$\mu_s = (s-1)\sigma^2\mu_{s-2}. \qquad (6.8)$$

Рекуррентное соотношение (6.8) справедливо для центральных моментов любого порядка. Известно, что $\mu_0 = 1$, а $\mu_1 = 0$. Тогда все центральные моменты нечетных порядков для нормального распределения равны нулю.

Нормальное распределение симметрично:

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0, \quad \text{так как} \quad \mu_3 = 0. \qquad (6.9)$$

Коэффициент эксцесса нормального распределения, согласно (6.8), *равен*:

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\cdot\sigma^2\cdot\sigma^2}{\sigma^4} - 3 = 0. \qquad (6.10)$$

Нормальный закон распределения СВ с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$ обозначается $N(0;1)$ и называется *стандартным*, или *нормированным*, а соответствующая нормальная кривая – *стандартной*, или *нормированной*.

6.1.1. Вероятность попадания на интервал

Рассмотрим вероятность попадания на интервал $[\alpha, \beta]$ СВ X, подчиненной нормальному закону распределения с параметрами m и σ. Для вычисления этой вероятности воспользуемся общей формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \tag{6.11}$$

где $F(x)-$ интегральная функция распределения СВ X. Найдем $F(x)$:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx. \tag{6.12}$$

Сделаем замену переменных в (6.12) $\Rightarrow t = (x-m)/\sigma$:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{6.13}$$

Отметим, что этим преобразованием (заменой переменных) нормальное распределение с произвольными значениями m и σ приводится к стандартному нормальному закону с параметрами $a = 0,\ \sigma^2 = 1$.

Интеграл (6.13) *не выражается через элементарные функции, но его обычно выражают через специальную функцию, выражающую определенный интеграл от* e^{-t^2} *или* $e^{-\frac{t^2}{2}}$ (*так называемый интеграл вероятности, для которого составлены статистические таблицы*).

Вообще существует множество разновидностей таких функций, например:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Rightarrow \text{функция Лапласа;}$$

$$\Phi_1(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-t^2} dt; \quad \Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{6.14}$$

Выберем в качестве такой функции так называемую ***нормальную функцию распределения*** $\Phi^*(x)$. Выразим функцию распределения (6.13) через $\Phi^*(x)$:

$$F(x) = \Phi^*(\frac{x-m}{\sigma}). \tag{6.15}$$

Подставим теперь (6.15) в (6.11) и окончательно получим:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi^*(\frac{\beta - m}{\sigma}) - \Phi^*(\frac{\alpha - m}{\sigma}). \tag{6.16}$$

6.1.2. Свойства нормальной функции распределения

1. $\Phi^*(-\infty)=0$.

2. $\Phi^*(+\infty)=1$.

3. $\Phi^*(x)-$ функция неубывающая.

4. Из-за симметричности стандартного нормального распределения относительно начала координат следует (рис. 6.2): $\Phi^*(-x)=1-\Phi^*(x)$.

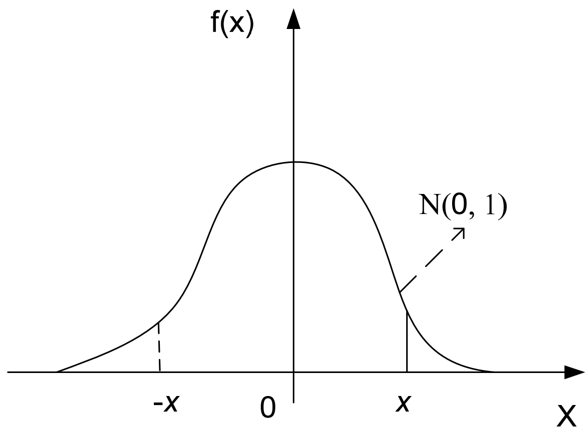


Рис. 6.2. Стандартное распределение

На практике очень часто встречается задача вычисления вероятности попадания СВ X на участок, симметричный относительно центра рассеивания m. Рассмотрим такой участок длиной $2l$. Вычислим эту вероятность:

$$P(m-l<X<m+l)=\Phi^*(\frac{l}{\sigma})-\Phi^*(-\frac{l}{\sigma})=2\Phi^*(\frac{l}{\sigma})-1. \qquad (6.17)$$

Часто расстояние l выражают в единицах σ. На рис. 6.3 для стандартного нормального распределения показаны вероятности (односторонние) отклониться от математического ожидания на σ, 2σ, 3σ.

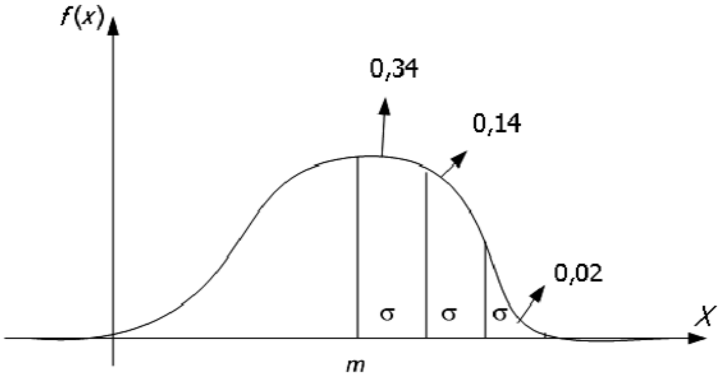


Рис. 6.3. Свойства нормального закона

ПРИМЕР 1. Полагаем, что рост студентов – нормально распределенная случайная величина X с параметрами $a = 173$ см и $\sigma^2 = 36$. Необходимо найти:

a) выражение плотности вероятности и функции распределения СВ X;

b) доли костюмов 4-го роста (176–182 см) и 3-го роста (170–176 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства;

c) квантиль $x_{0,7}$ и 10%-ю точку СВ X;

d) сформулировать «правило трех сигм» для СВ X.

РЕШЕНИЕ:

a) по формулам (6.1), (6.12) и (6.15) запишем

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-173)^2}{2\cdot 36}}; \quad F(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-173)^2}{2\cdot 36}} dx = \Phi^*(\frac{x-173}{6});$$

b) долю костюмов 4-го роста (176–182 см) в общем объеме производства определим по формуле (6.16):

$$P(176 < X < 182) = \Phi^*\left(\frac{182-173}{6}\right) - \Phi^*\left(\frac{176-173}{6}\right) =$$

$$= \Phi^*(1{,}5) - \Phi^*(0{,}5) = 0{,}9332 - 0{,}6915 = 0{,}2417.$$

Долю костюмов 3-го роста (170–176 см) можно определить аналогичным образом, но если учесть, что данный интервал симметричен относительно $m = a = 173$, то по формуле (6.17) оценим:

$$P(m-3 < X < m+3) = 2\Phi^*(\frac{3}{6}) - 1 = 0{,}383.$$

c) Квантиль $x_{0,7}$ СВ X найдем из уравнения (6.15):

$$F(x_{0,7}) = \Phi^*\left(\frac{x_{0,7}-173}{6}\right) = 0{,}7; \ \Rightarrow 0{,}525 = \frac{x_{0,7}-173}{6}; \quad x_{0,7} \approx 176.$$

Это значит, что 70 % студентов имеют рост до 176 см. 10%-я точка СВ X – это квантиль $x_{0,9}$, который, вычислив аналогично, получим $x_{0,9} \approx 181$.

d) «Правило трех сигм» для нормального распределения:

$$P(m-3\sigma < X < m+3\sigma) = 2\Phi^*\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}9974.$$

Тогда с вероятностью, равной 0,9974, рост студентов находится в интервале: $155 < X < 191$.

ПРИМЕР 2. Средняя стоимость ценной бумаги составляет 2000 руб., а среднее квадратичное отклонение равно 100 руб. Предполагается, что цена имеет нормальное распределение. Определить вероятность того, что в день покупки цена будет заключена в пределах от 1800 до 2300 руб. Найти с надежностью 0,9 интервал Δ изменения цены бумаги, симметричный относительно математического ожидания.

РЕШЕНИЕ:

а) $$P(1800 < X < 2300) = \Phi^*\left(\frac{2300-2000}{100}\right) - \Phi^*\left(\frac{1800-2000}{100}\right) =$$

$$= \Phi^*(3) - \Phi^*(-2) = 0,99865 - 0,02275 = 0,9759;$$

b) $$\Phi^*\left(\frac{\Delta}{100}\right) - \Phi^*\left(\frac{-\Delta}{100}\right) = 0,9 \Rightarrow 2\Phi^*\left(\frac{\Delta}{100}\right) - 1 = 0,9;\ \Phi^*\left(\frac{\Delta}{100}\right) = 0,95;$$

$$\Delta = 1,645 \cdot 100 = 164,5.$$

Значит, стоимость ценной бумаги заключена в интервале (1835,5; 2164,5) рублей.

6.2. Распределение χ^2 («хи-квадрат»)

Так называется распределение вероятностей СВ вида:

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \ldots + \xi_n^2, \tag{6.18}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n -$ независимые случайные величины, имеющие одно и то же нормальное распределение с параметрами $m = 0$, $\sigma = 1$. Число n называется числом степеней свободы распределения χ^2. Соответствующая плотность (рис. 6.4) описывается формулой:

$$\rho(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}; \quad x \in (0; \infty). \tag{6.19}$$

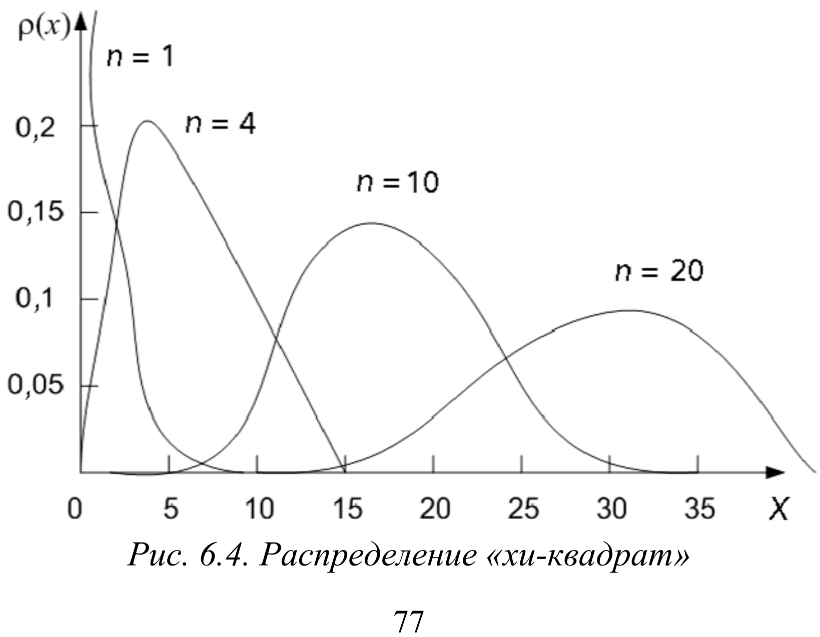


Рис. 6.4. Распределение «хи-квадрат»

Распределение χ^2 представляет собой частный случай так называемого ***гамма-распределения.***

6.3. Показательный (экспоненциальный) закон распределения

В теории массового обслуживания случайные процессы часто распределены по показательному закону, например, время обслуживания требования каналом обслуживания.

Непрерывная случайная величина X имеет ***показательный*** (***экспоненциальный***) *закон распределения с параметром λ, если ее плотность вероятности имеет вид*:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \tag{6.20}$$

Здесь λ – постоянная положительная величина. Таким образом, показательное распределение определяется одним положительным параметром λ. Найдем интегральную функцию показательного распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}. \tag{6.21}$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \tag{6.22}$$

На рис. 6.5 и 6.6 представлена плотность распределения и интегральная функция распределения СВ, распределенной по показательному закону.

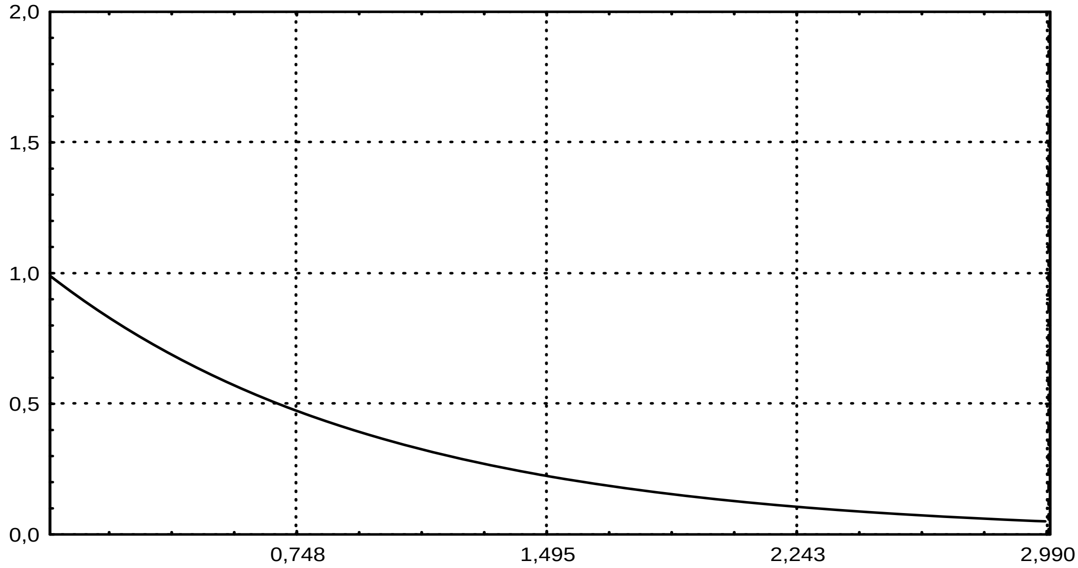


Рис. 6.5. Дифференциальная функция показательного распределения ($\lambda = 1$)

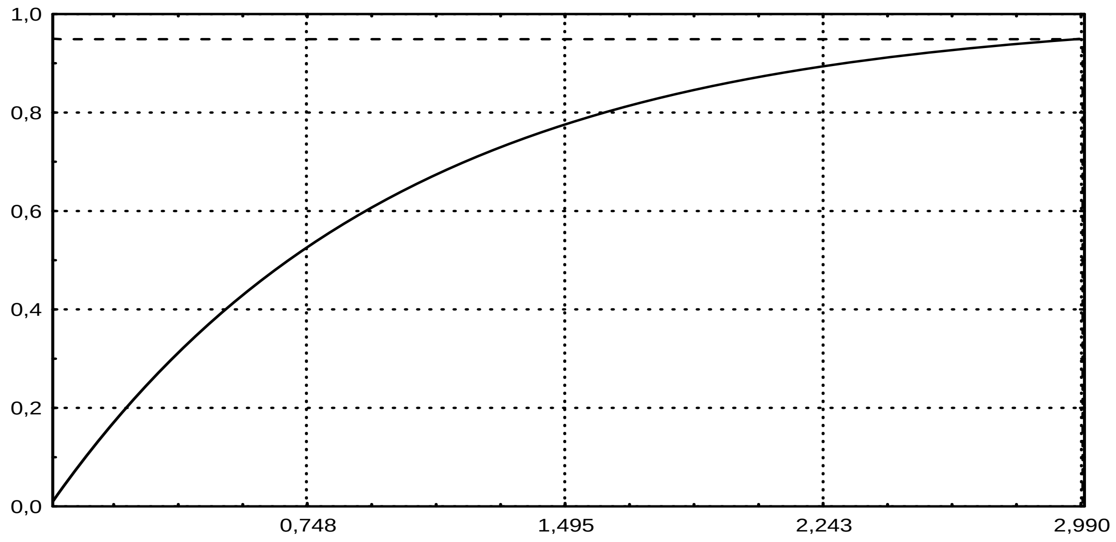


Рис. 6.6. Интегральная функция показательного распределения ($\lambda = 1$)

6.3.1. Числовые характеристики показательного распределения

Вычислим математическое ожидание и дисперсию показательного распределения:

$$M[x] = \lambda \int_0^{\infty} \underbrace{x}_{U} \cdot \underbrace{e^{-\lambda x} dx}_{dV} = \underbrace{-x \cdot e^{-\lambda x} |_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} |_{\infty}^{0} = \frac{1}{\lambda}. \quad (6.23)$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся одним из ее свойств:

$$D[x] = \alpha_2(x) - \alpha_1^2(x). \quad (6.24)$$

Так как $\alpha_1(x) = m_x = 1/\lambda,$ то остается вычислить $\alpha_2(x)$:

$$\alpha_2(x) = \lambda \int_0^{\infty} \underbrace{x^2}_{U} \cdot \underbrace{e^{-\lambda x} dx}_{dV} = \underbrace{x^2 \cdot e^{-\lambda x} |_{\infty}^{0}}_{=0} + 2\int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}. \quad (6.25)$$

Подставив (6.25) в (6.24), окончательно получим:

$$D[x] = \sigma^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}. \quad (6.26)$$

Для случайной величины, распределенной по показательному закону, математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению.

ПРИМЕР 3. Написать дифференциальную и интегральную функции показательного распределения, если параметр $\lambda = 8$.

РЕШЕНИЕ:

a) Плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 8\cdot e^{-8x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

b) Соответствующая интегральная функция равна:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-8x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

ПРИМЕР 4. Найти вероятность попадания в заданный интервал (a,b) для СВ *X*, распределенной по экспоненциальному закону.

РЕШЕНИЕ. Найдем решение, вспомнив, что $P(a<X<b)=$ $=F(b)-F(b).$ Теперь, с учетом (6.22), получим:

$$P(a<X<b)=\begin{cases}0, & a<b<0,\\ 1-e^{-\lambda b}, & a<0, b>0,\\ e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}, & 0<a<b.\end{cases}$$

6.3.2. Функция надежности

Будем называть элементом некоторое устройство, независимо от того, простое оно или сложное. Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0=0,$ а по истечении времени длительностью t происходит отказ. Обозначим через T непрерывную СВ – длительность времени безотказной работы элемента. Если элемент проработает безотказно (до наступления отказа) время, меньшее, чем t, то, следовательно, за время длительностью t наступит отказ. Таким образом, *вероятность отказа* за время длительностью t определяется интегральной функцией:

$$P(T<t)=F(t). \tag{6.27}$$

Тогда вероятность безотказной работы за то же время длительностью t равна вероятности противоположного события:

$$P(T>t)=1-F(t)=R(t). \tag{6.28}$$

Функцией надежности $R(t)$ *называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью* t.

Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, интегральная функция которого равна:

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}. \tag{6.29}$$

Тогда, в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента и с учетом (6.28), функция надежности будет равна:

$$R(t)=1-F(t)=e^{-\lambda t}. \tag{6.30}$$

ПРИМЕР 5. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону $f(t)=0{,}02\cdot e^{-0{,}02t}$ при $t\ge 0$ (t – время в часах). Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 часов.

РЕШЕНИЕ. В нашем примере $\lambda = 0{,}02$, тогда воспользуемся выражением (6.30): $R(100) = e^{-0{,}02\cdot 100} = e^{-2} = 0{,}13534.$

Показательный закон надежности весьма прост и удобен для решения практических задач. Этот закон обладает следующим важным свойством:

Вероятность безотказной работы элемента на интервале времени длительностью t *не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени* t (*при заданной интенсивности отказов*).

Докажем это свойство, введя следующие обозначения:

A – безотказная работа элемента на интервале $(0, t_0)$ длительностью t_0.

B – безотказная работа элемента на интервале $(t_0, t_0 + t)$ длительностью t.

Тогда событие AB состоит в том, что элемент безотказно работает на интервале $(0,\ t_0 + t)$ длительностью $t_0 + t$. Найдем вероятности этих событий по формуле (6.30), полагая, что время безотказной работы элемента подчинено показательному закону:

$$\begin{gathered} P(A) = e^{-\lambda t_0}, \quad P(B) = e^{-\lambda t}, \\ P(AB) = e^{-\lambda(t_0 + t)} = e^{-\lambda t_0} \cdot e^{-\lambda t}. \end{gathered} \tag{6.31}$$

Найдем условную вероятность того, что элемент будет работать безотказно на интервале времени $(t_0, t_0 + t)$ при условии, что он уже проработал безотказно на предшествующем интервале времени:

$$P(B / A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda t_0} \cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t_0}} = e^{-\lambda t}. \tag{6.32}$$

Мы видим, что полученная формула не зависит от t_0, а только от t. Сравнивая выражения (6.31) и (6.32), можно сделать вывод, что условная вероятность безотказной работы элемента на интервале длительностью t, вычисленная в предположении, что элемент проработал безотказно на предшествующем интервале, равна безусловной вероятности.

Итак, в случае показательного закона надежности безотказная работа элемента «в прошлом» не сказывается на величине вероятности его безотказной работы «в ближайшем будущем».

6.4. Распределение Парето

В практических задачах встречаются так называемые усеченные распределения, у которых из общего множества значений СВ устранены значения, большие или меньшие некоторого порогового уровня C_0.

В частности, такое распределение будет иметь заработная плата работника при условии, что ее значение не может быть меньше некоторой заданной величины.

Распределением Парето называется такое распределение, для которого функция и плотность распределения вероятностей имеют вид:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{C_0}{x}\right)^{\alpha}, \tag{6.33}$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{C_0}\left(\frac{C_0}{x}\right)^{\alpha+1}, \quad \alpha > 0,\ x > C_0. \tag{6.34}$$

Очевидно, плотность распределения вероятности монотонно убывает, выходя из точки $(C_0,\ \alpha / C_0)$.

Вычислим математическое ожидание такой случайной величины

$$M[x] = \int_{C_0}^{\infty} x \frac{\alpha}{C_0}\left(\frac{C_0}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \alpha C_0^{\alpha} \int_{C_0}^{\infty} x^{-\alpha} dx =$$
$$= \alpha C_0^{\alpha} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{C_0}^{\infty} = -\alpha C_0^{\alpha} \left.\frac{1}{x^{\alpha-1}(\alpha-1)}\right|_{C_0}^{\infty} = \frac{\alpha}{\alpha-1} C_0,\ \alpha > 1. \tag{6.35}$$

Соответственно для дисперсии получим выражение

$$D[x] = \int_{C_0}^{\infty} x^2 \frac{\alpha}{C_0}\left(\frac{C_0}{x}\right)^{\alpha+1} dx - \alpha_1^2(x) =$$
$$= \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} C_0^2, \quad \alpha > 2. \tag{6.36}$$

ПРИМЕР 6. Заработная плата работника фирмы ограничена нижним пределом в размере 10000 руб. и подчиняется закону Парето (x – заработная плата в тысячах руб., $\alpha = 3$). Необходимо записать плотность распределения СВ X, найти математическое ожидание уровня заработной платы и ее среднее квадратическое отклонение.

РЕШЕНИЕ. Учитывая (6.34), получим

$$f(x) = \frac{3}{10}\left(\frac{10}{x}\right)^4,\ x > 10,\ \alpha = 3.$$

Используя выражения (6.35) и (6.36), вычислим:

$$M[x] = 3 \cdot 10 / 2 = 15,\ \ D[x] = 3 \cdot 10^2 / 2^2 \cdot 1 = 75,\ \ \sigma \approx 8{,}66.$$

Глава 7
ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Свойство устойчивости массовых случайных явлений известно человечеству еще с глубоких времен. В какой бы области оно не проявлялось, суть его сводится к следующему: конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате массы таких явлений. Именно эта *устойчивость средних* и представляет собой физическое содержание *закона больших чисел*, понимаемого в широком смысле слова: *при очень большом числе случайных явлений средний их результат практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности*.

Под законом больших чисел в *узком* смысле понимается ряд математических теорем, в каждой из которых при соблюдении определенных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа испытаний к некоторым определенным постоянным.

Различные формы закона больших чисел вместе с различными формами центральной предельной теоремы образуют совокупность так называемых ***предельных теорем*** теории вероятностей.

Предельные теоремы дают возможность не только осуществить научные прогнозы в области случайных явлений, но и оценивать точность этих прогнозов.

7.1. Неравенство Чебышева

Имеется случайная величина (СВ) $X \Rightarrow m_x, D_x$. Неравенство Чебышева утверждает, что каково бы ни было положительное число ε, вероятность того, что СВ X отклонится от своего математического ожидания не меньше, чем на ε, ограничена сверху величиной D_x / ε^2:

$$P(|X - m_x| > \varepsilon) \le \frac{D_x}{\varepsilon^2}. \tag{7.1}$$

Доказательство. Рассмотрим доказательство для непрерывной СВ X. По определению известно, что

$$P(|X - m_x| > \varepsilon) = \int\limits_{|X-m_x|>\varepsilon} \rho(x)dx. \tag{7.2}$$

Вспомним определение дисперсии СВ X:

$$D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \rho(x)dx \ge \int\limits_{|X-m_x|>\varepsilon} (x - m_x)^2 \rho(x)dx. \tag{7.3}$$

Проиллюстрируем выражение (7.3) рисунком:

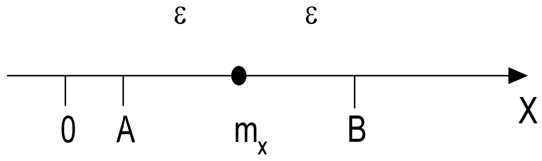


Рис. 7.1. Отрезок интегрирования

В выражении (7.3) $\left|x - m_x\right| > \varepsilon$ означает, что интегрирование ведется на внешней части отрезка *AB*. Если в (7.3) принять, что $x - m_x = \varepsilon$ (отметим, что неравенство при этом только усиливается), получим:

$$D_x \ge \varepsilon^2 \int\limits_{|X - m_x| > \varepsilon} \rho(x)dx = \varepsilon^2 P(|\, X - m_x \,| > \varepsilon). \tag{7.4}$$

Итак, неравенство Чебышева доказано. Неравенство Чебышева дает грубую оценку сверху и утверждает, что для любой случайной величины X вероятность того, что она отклонится на ε от m_x, меньше, чем дисперсия, деленная на ε^2.

ПРИМЕР 1. Дана СВ $X \Rightarrow m_x$, $D_x = \sigma_x^2$. Оценим сверху вероятность того, что X отклонится от m_x не меньше, чем на 3σ.

РЕШЕНИЕ. Согласно неравенству Чебышева запишем

$$P(|\, X - m_x \,| > 3\sigma_x) \le \frac{D_x}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}.$$

Известно, что для случайной величины, распределенной по нормальному закону, $P(|\, X - m_x \,| > 3\sigma_x) \approx 0{,}003$.

7.2. Теорема Чебышева

Пусть имеется СВ $X \Rightarrow m_x, D_x$. Над этой величиной производится n независимых опытов и вычисляется среднее арифметическое всех наблюденных значений случайной величины X. Необходимо найти характеристики среднего арифметического – *математическое ожидание и дисперсию*. В результате первого опыта СВ X приняла значение x_1, во втором опыте – x_2, ..., в n-м опыте – x_n.

Рассмотрим среднее арифметическое этих значений:

$$Y = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{7.5}$$

СВ Y – линейная функция независимых случайных величин $x_1, \ldots, x_n$. Определим:

$$m_Y = M[Y] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[x_i] = \frac{1}{n} n \cdot m_x = m_x, \qquad (7.6)$$

$$D_Y = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[x_i] = \frac{D_x}{n} = \frac{\sigma^2}{n}. \qquad (7.7)$$

Таким образом, m_Y не зависит от числа опытов (n), а дисперсия при больших n может стать сколь угодно малой, то есть СВ Y ведет себя почти не как случайная. Это свойство и устанавливает теорема Чебышева.

При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюденных значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию.

Говорят, что СВ X_n сходится по вероятности к величине a, если при увеличении n вероятность того, что X_n и a будут сколь угодно близки, неограниченно приближается к единице, а это значит, что при достаточно большом n

$$P(|X_n - a| < \varepsilon) > 1 - \delta, \qquad (7.8)$$

где ε и δ – произвольно малые положительные числа. Запишем аналогично теорему Чебышева:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - m_x\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta. \qquad (7.9)$$

Доказательство. Ранее было показано, что для $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $m_Y = m_x$, $D_Y = \frac{D_x}{n}$. Применим к СВ Y неравенство Чебышева:

$$P(|Y - m_Y| \ge \varepsilon) \le \frac{D_Y}{\varepsilon^2} = \frac{D_x}{n \cdot \varepsilon^2}. \qquad (7.10)$$

Как бы ни было мало ε, всегда можно взять такое большое n, чтобы выполнялось неравенство: $\frac{D_x}{n \cdot \varepsilon^2} < \delta$, где $\delta -$ сколь угодно малое число. Тогда получим:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - m_x\right| \ge \varepsilon\right) < \delta. \qquad (7.11)$$

Запишем вероятность события противоположного (7.11)

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - m_x\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta. \qquad (7.12)$$

Что и требовалось доказать.

7.3. Обобщенная теорема Чебышева

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины с соответствующими математическими ожиданиями и дисперсиями: $X_1 \Rightarrow m_{x_1}, D_{x_1}$; $X_2 \Rightarrow m_{x_2}, D_{x_2}$; …; $X_n \Rightarrow m_{x_n}, D_{x_n}$. Если все дисперсии ограничены сверху одним и тем же числом L, таким, что $D_{xi} < L$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), то при возрастании n среднее арифметическое наблюденных значений величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий:

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta. \tag{7.13}$$

Доказательство. Рассмотрим СВ $Y = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ с соответствующими характеристиками: $m_Y = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} m_{x_i}$, $D_Y = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} D_{x_i}$. Применим к СВ Y неравенство Чебышева

$$P(|Y - m_Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_Y}{\varepsilon^2}, \text{ или}$$

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}\right| \geq \varepsilon\right) < \frac{L}{n \cdot \varepsilon^2}. \tag{7.14}$$

Как бы ни было мало ε, можно так выбрать n, что будет выполняться неравенство $\frac{L}{n \cdot \varepsilon^2} < \delta$. Тогда получим:

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}\right| \geq \varepsilon\right) < \delta. \tag{7.15}$$

Перейдем к противоположному событию:

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta. \tag{7.16}$$

Что и требовалось доказать.

7.4. Теорема Маркова

Если имеются зависимые СВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и если при $n \to \infty$ справедливо соотношение $\frac{D[\sum_{i=1}^{n} X_i]}{n^2} \to 0,$ то среднее арифметическое наблюденных значений СВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Доказательство. Рассмотрим величину $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow D_Y = = \frac{1}{n^2} D[\sum_{i=1}^{n} X_i].$ Применим к величине Y неравенство Чебышева:

$$P(|Y - m_Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_Y}{\varepsilon^2}.$$

Так как по условию теоремы при $n \to \infty$ $D_Y \to 0,$ то при достаточно большом n справедливо $P(|Y - m_Y| \geq \varepsilon) < \delta,$ или переходя к противоположному событию:

$$P(|Y - m_Y| < \varepsilon) = P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta. \tag{7.17}$$

Что и требовалось доказать.

7.5. Теорема Бернулли

Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых может произойти или не произойти событие A, вероятность которого в каждом опыте равна p. Теорема Бернулли утверждает, что *при неограниченном увеличении числа опытов n частота события A сходится по вероятности к его вероятности p.*

Обозначим частоту события A в n опытах через p^* и запишем теорему Бернулли в виде формулы:

$$P(|p^* - p| < \varepsilon) > 1 - \delta, \tag{7.18}$$

где ε и δ – сколько угодные малые положительные числа. Требуется доказать неравенство (7.18) при достаточно большом n.

Доказательство. Рассмотрим независимые случайные величины:

X_1 – число появления события A в первом опыте;

X_2 – число появления события A во втором опыте;

....

Все эти величины дискретные и имеют один и тот же закон распределения, *выраженный рядом распределения:*

x_i	0	1
p_i	q	p

Здесь $q = 1 - p$. Нетрудно показать, что $m_x = p, \quad D_x = pq$. Частота p^* не что иное, как среднее арифметическое величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то есть $p^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Тогда, согласно закону больших чисел, p^* сходится по вероятности к общему математическому ожиданию m_x этих величин.

7.6. Центральная предельная теорема

Закон больших чисел устанавливает факт приближения средних большого числа случайных величин к *определенным постоянным*. Но этим не ограничиваются закономерности, возникающие в результате суммарного действия случайных величин. Оказывается, что при некоторых условиях совокупное действие случайных величин приводит к *определенному*, а именно – к *нормальному закону распределения*.

Центральная предельная теорема представляет собой группу теорем, посвященных установлению условий, при которых возникает нормальный закон распределения. Среди этих теорем важнейшее место принадлежит теореме Ляпунова.

Теорема Ляпунова. *Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, у каждой из которых существует математическое ожидание $M[X_i] = a_i$, дисперсия $D[X_i] = \sigma_i^2$, абсолютный центральный момент третьего порядка $M\left[|X_i - a_i|^3\right] = m_i$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{3/2}} = 0, \qquad (7.19)$$

то закон распределения суммы $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ при $n \to \infty$ неограниченно приближается к нормальному закону с математическим ожиданием $\sum_{i=1}^{n} a_i$ и дисперсией $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$.

Теорему примем без доказательства.

Смысл условия (7.19) состоит в том, чтобы в сумме $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ не было слагаемых, влияние которых на рассеяние Y_n подавляюще велико по сравнению с влиянием всех остальных, а также не должно быть большого числа случайных слагаемых, влияние которых очень мало по сравнению с суммарным влиянием остальных. Таким образом, *удельный вес каждого отдельного слагаемого должен стремиться к нулю при увеличении числа слагаемых.*

Следствие. *Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, у которых существуют равные математические ожидания $M[X_i] = a$, дисперсии $D[X_i] = \sigma^2$ и абсолютные центральные моменты третьего порядка $M\left[|X_i - a_i|^3\right] = m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то закон распределения суммы $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ при $n \to \infty$ неограниченно приближается к нормальному закону.*

Замечание. Опираясь на центральную предельную теорему, можно утверждать, что рассмотренные нами ранее случайные величины, имеющие законы распределения (биномиальный, Пуассона, равномерный, χ^2 («хи-квадрат»), t (Стьюдента)), при $n \to \infty$ распределены асимптотически нормально.

ПРИМЕР 2. Определить вероятность того, что средняя продолжительность 100 производственных операций окажется в пределах от 46 до 49 с, если математическое ожидание одной операции равно 47,4 с, а среднее квадратичное отклонение – 4,9 с.

РЕШЕНИЕ. В этой задаче X – продолжительность наугад взятой производственной операции, $a = M[X] = 47{,}4$ с, $\sigma = \sqrt{D[X]} = 4{,}9$ с, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $n = 100$. Здесь $\bar{X}$ – средняя продолжительность 100 наугад взятых производственных операций, причем $M[\bar{X}] = 47{,}4$ с, $D[\bar{X}] = \sigma^2 / n = 4{,}9^2 / 100$ с^2. Теперь вычислим соответствующую вероятность

$$P\left(46 \le \bar{X} \le 49\right) = P\left(-\frac{1{,}4}{0{,}49} \le \frac{\bar{X} - 47{,}4}{0{,}49} \le \frac{1{,}6}{0{,}49}\right) = P\left(-2{,}857 \le Z \le 3{,}265\right) =$$
$$= \Phi^*\left(3{,}265\right) + \Phi^*\left(2{,}857\right) - 1 = 0{,}9973.$$

При решении задачи на основании следствия из теоремы Ляпунова распределение центрированного и нормированного среднего $(\bar{X} - 47{,}4)/0{,}49$ приближенно заменено на распределение стандартной нормальной случайной величины $Z \sim N(0, 1)$.

Раздел 2
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Глава 8
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика – это наука, изучающая методы сбора, систематизации и интерпретации числовых (случайных) данных.

В этом определении интерпретация и систематизация данных рассматривается как существенный аспект.

Главная цель статистики – получение осмысленных заключений из несогласованных (подверженных разбросу) данных.

Действительно, исключая тривиальные ситуации, реальные данные всегда являются несогласованными, что требует применения статистических методов. Рассогласованность (разброс) между индивидуальными наблюдениями может быть, например, обусловлена ошибкой при считывании позиции стрелки прибора, когда она расположена между двумя делениями шкалы стрелочного прибора. Изменчивость может быть также следствием нестабильности работы электронного оборудования при передаче сообщений по радио или телеграфу. (В последнем случае для характеристики ситуации используется термин «шум»).

Чем же конкретно занимается математическая статистика? Какие задачи решает?

1. Выборочные распределения

Статистика должна получить свои выводы, используя наличную выборку. Каждое наблюдение является реализацией некоторой случайной величины. Известно множество значений, которые может принимать случайная величина; некоторые из них имеют большую возможность появления, чем другие.

Значение, которое наблюдалось, представляет собой **реализацию**. Вероятности возможных реализаций характеризуются **распределением вероятностей случайных величин** (СВ). Обычно функции распределения вероятностей бывают заданы с точностью до одного, двух параметров значений некоторых неизвестных. Это приводит к проблеме поиска таких комбинаций выборочных значений, которые бы давали наилучшее приближение для неизвестных параметров. Каждая такая комбинация и есть *статистика*. Выборочное распределение статистики позволяет судить, может ли предложенная статистика служить оценкой интересующего нас параметра.

2. Оценки, тесты (критерии значимости), решения

Проблема оценивания была схематично рассмотрена выше. Ясно, что разумная процедура оценивания не должна ограничиваться лишь выбором приближенного численного значения для неизвестного параметра; она должна что-то говорить и о надежности этого приближения. Обычно говорят о *точечном оценивании* и *об интервальном оценивании.*

Существуют различные методы конструирования *точечных* оценок и определения их надежности. Наиболее полезным из них является **метод максимального правдоподобия (ММП)**. Другой известный метод, который можно рассматривать либо как специальный случай ММП, либо как независимую процедуру подгонки, – **метод наименьших квадратов**.

Интервальное оценивание связано с определением «доверительных интервалов», правдоподобных интервалов, байесовских интервалов.

Поскольку статистика в целом основана на случайной изменчивости, каждая оценка подвержена ошибке. Так, если получены две различные оценки параметра – одна при одном наборе условий, а другая – при другом, непосредственно неясно, соответствует ли имеющееся между ними различие различию между параметрами. Вопрос об их различии решается с помощью статистического критерия (теста) или критерия значимости.

Один из подходов к статистическим критериям (проверки гипотез) связан с именем Р.А. Фишера, который рассматривает проверку гипотезы как пробный шаг в проведении научного исследования, позволяющий получить ученому объективный критерий, с помощью которого можно судить об истинности гипотезы.

Другой подход связан в основном с именами Дж. Неймана и Э. Пирсона, которые рассматривают процедуру проверки гипотезы как правило, с помощью которого должен быть сделан выбор либо принято решение об истинности одной гипотезы в противоречие другой.

Одна из частных проблем теории проверки статистических гипотез – оценка пригодности модели, предложенной для объяснения (интерпретации) данных. При этом необходимо решить: насколько предложенная модель соответствует выборке? И являются ли выборочные значения действительно близкими к тем, которые можно ожидать, используя подогнанную модель? Наиболее широко для решения подобных вопросов применяется процедура, предложенная Карлом Пирсоном и использующая критерий, основанный на ее выборочном распределении. Это пирсоновский критерий согласия ***хи-квадрат***.

8.1. Выборочные распределения

Статистическая устойчивость случайных явлений проявляется лишь при большом (в пределе – бесконечно большом) числе наблюдений. Однако на практике реальное число наблюдений ограничено. Поэтому характеристики случайных величин (СВ), определенные по малому числу наблюдений, в принципе не должны совпадать с величинами тех же характеристик, определенными по большому числу наблюдений (условия опыта остаются неизменными). Чтобы провести различие между характеристиками СВ, найденными по достаточно большому и малому числу наблюдений, в математической статистике введены понятия абстрактной *генеральной совокупности* и *выборки*.

Генеральной совокупностью случайной величины ξ называется множество всех значений, которые может принимать случайная величина ξ.

Выборка представляет собой совокупность ограниченного числа наблюдений.

В соответствии с этим различают выборочные характеристики СВ, найденные по ограниченному числу наблюдений (выборке) и зависящие от числа наблюдений, и соответствующие им характеристики в генеральной совокупности, не зависящие от числа наблюдений. При этом выборочные характеристики рассматриваются как оценки соответствующих характеристик в генеральной совокупности.

На практике во многих случаях функция распределения рассматриваемой случайной величины ξ неизвестна; ее определяют по результатам наблюдений или, как говорят, по *выборке*.

Выборкой объемом n для данной случайной величины ξ называется последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимых наблюдений этой величины.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем

X_1 наблюдалось ν_1 раз;

X_2 наблюдалось ν_2 раз;

……………………………..

X_k наблюдалось ν_k раз.

Объем выборки: $n = \sum_{i=1}^{k} \nu_i$. Наблюдаемые значения X_i называют **вариантами**, а последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке, – **вариационным рядом.**

Число наблюдений называют **частотами**, а их отношение к объему выборки: $\frac{v_i}{n} = w_i -$ **относительными частотами (частостями).**

В статистике различают *малые* и *большие выборки*.

Малой выборкой считают такую выборку, при обработке которой методами, основанными на группировании наблюдений, нельзя достичь заданных точности и достоверности.

Большой считают такую выборку, при обработке которой можно перейти к группированию наблюдений без ощутимой потери информации и достижению заданных значений точности и достоверности.

Если выборка достаточно велика, то построенный на ее основе вариационный ряд неудобен для дальнейшего статистического анализа. В этом случае строится так называемый ***группированный статистический ряд***.

8.1.1. Группирование данных, гистограмма, полигон

При группировании данных необходимо соблюдать определенные правила. Рассмотрим наиболее важные из них:

1. Объем выборки должен быть достаточно велик ($n \geq 50$).

2. Число интервалов группирования m (число групп) должно находиться в интервале $5 \leq m \leq 20$. При выборе m в каждом конкретном случае следует помнить, что при малом числе групп определение вида теоретической кривой распределения по эмпирическим данным может быть затруднено из-за маскировки (утраты) резких изменений кривой распределения, если они фактически имели место. При большом числе групп и незначительном объеме выборки будет наблюдаться большое количество пропусков (ноль попаданий в группу), что будет обусловлено не столько видом распределения, сколько недостатком статистики, кроме того, в этом случае даже небольшие случайные колебания приводят к искажению кривой распределения.

3. Необходимо, по возможности, охватывать всю область данных, так как при неизвестных предельных значениях невозможно вычислить некоторые числовые характеристики выборки.

4. Интервалы не должны перекрываться. Не должно возникать никаких сомнений относительно того, в какой интервал попадает любое значение.

5. Если заведомо известно, что теоретическая кривая может быть двумодальной, число групп может быть увеличено в 1,5–2 раза по сравнению с оптимальным числом m.

Оптимальное число групп m выборки объемом n рассчитывается по формулам:

- при известном значении $\varepsilon = \mu_4 / \sigma^4$;

$$m = \varepsilon^{0,8} \cdot n^{0,4} / 3; \qquad (8.1)$$

- при неизвестном значении ε, но известно, что $1,8 \le \varepsilon \le 6$:

$$0,55n^{0,4} \le m \le 1,25n^{0,4}; \qquad (8.2)$$

- согласно формуле Стерджесса:

$$m = 1 + \log_2 n. \qquad (8.3)$$

Из (8.3) видно, что для увеличения оптимального количества интервалов на единицу необходимо увеличить объем выборки вдвое. Шаг группирования (ширина интервала) h определяется по формуле:

$$h = (X_{\max} - X_{\min}) / m. \qquad (8.4)$$

Для графического изображения вариационных рядов наиболее часто используются *полигон, гистограмма и кумулятивная кривая*.

Гистограммой распределения, или просто ***гистограммой*** называется чертеж в прямоугольной системе координат, горизонтальная ось которого разбивается на m равных интервалов (групп) шириной h. На каждом отрезке, как на основании, строится прямоугольник с высотой, равной частоте (частости) ν_i (ω_i) соответствующего интервала.

Полигоном распределения, или просто ***полигоном*** называется ломаная линия, соединяющая середины верхних оснований каждого столбца гистограммы. За пределами гистограммы как слева, так и справа размещают пустые интервалы, в которых точки, соответствующие их серединам, лежат на оси абсцисс.

Кумулятивная кривая (***кумулята***) – кривая накопления частот (частостей). Для дискретного ряда кумулята представляет ломаную, соединяющую точки $(x_i, \sum_{k=1}^{i} \nu_k)$ или $(x_i, \sum_{k=1}^{i} \omega_k)$. Для интервального вариационного ряда ломаная начинается с точки, абсцисса которой равна началу первого интервала, а ордината – накопленной частоте (частости), равной нулю. Остальные точки этой ломаной соответствуют концам интервалов.

ПРИМЕР 1. Построить полигон, гистограмму и кумуляту по выборке объема $n = 100$. Сгруппированные данные приведены в таблице.

Интервалы	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, 4]	[4, 5]	[5, 6]	[6, 7]	[7, 8]
Частоты	2	7	14	28	22	20	6	1

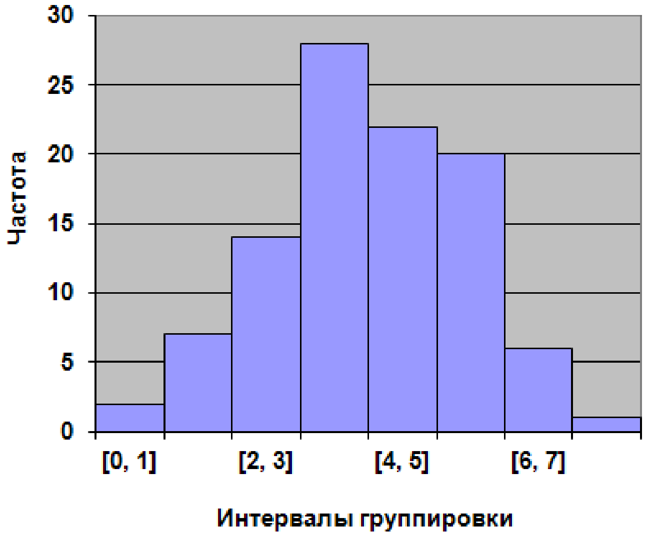


Рис. 8.1. Гистограмма частот

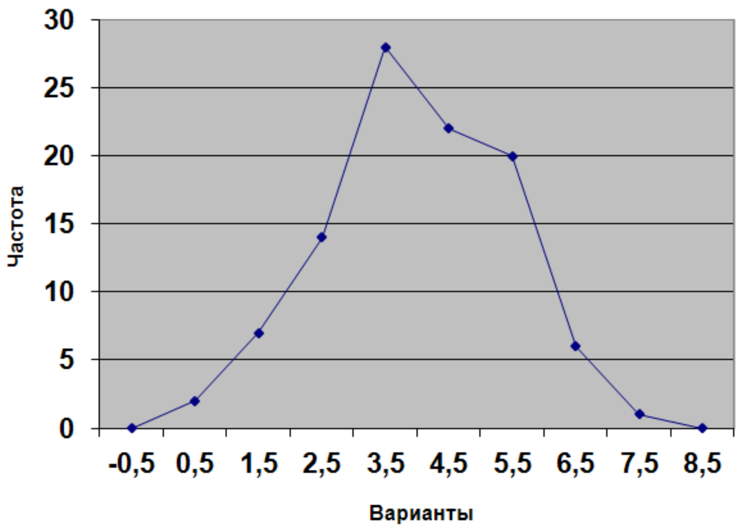


Рис. 8.2. Полигон

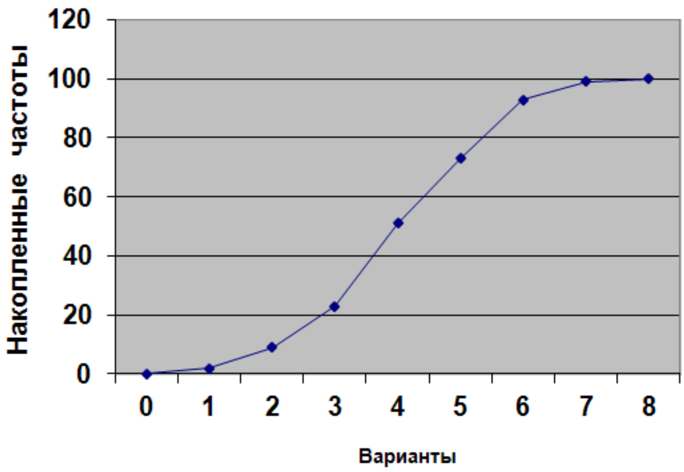


Рис. 8.3. Кумулята

8.2. Статистическая (эмпирическая) функция распределения

Статистическим распределением выборки называют перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот (*частостей*).

В теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми значениями и их частотами или относительными частотами.

ПРИМЕР 2. Задана выборка объемом $n = 20$ с соответствующими частотами. Необходимо найти частости (относительные частоты).

x_i	2	6	12
ν_i	3	10	7
ω_i	3/20	10/20	7/20

Контроль: $\sum_{i=1}^{3} \omega_i = \frac{3}{20} + \frac{10}{20} + \frac{7}{20} = 1.$

Пусть исследуется статистическое распределение частот количественного признака (случайной величины) X. Введем обозначение:

ν_x – число наблюдений, при которых отслеживалось значение признака меньшее x;

n – общее число наблюдений (объем выборки).

Очевидно, что относительная частота (частость) события $X < x$ равна $\omega_x = \nu_x / n$.

Статистической функцией распределения случайной величины X называется функция, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$P(X < x) = F^*(x) = \frac{\nu_x}{n} = \omega_x. \tag{8.5}$$

Сравним статистическую и интегральную функции распределения. Вспомним (*теорема Бернулли*)*, что относительная частота события* $X < x$*, то есть* $F^*(x)$ *стремится по вероятности к вероятности* $F(x)$ *этого события.*

Функция $F^*(x)$ обладает теми же свойствами, что и $F(x)$:

1. Значения $F^*(x) \in [0; 1]$.
2. Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ – неубывающая.
3. Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$.
4. Если x_k – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

ПРИМЕР 3. Построить эмпирическую функцию по данной выборке:

x_i	2	6	10
ν_i	12	18	30

РЕШЕНИЕ. Найдем объем выборки $n = 12 + 18 + 30 = 60$. Теперь найдем статистическую функцию распределения:

x_i	2	6	10	> 10
$F^*(x_i)$	0	12 / 60	30 / 60	1

Представим $F^*(x)$ в аналитическом и графическом виде:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2; \\ 0,2 & \text{при} \quad 2 < x \le 6; \\ 0,5 & \text{при} \quad 6 < x \le 10; \\ 1 & \text{при} \quad x > 10. \end{cases}$$

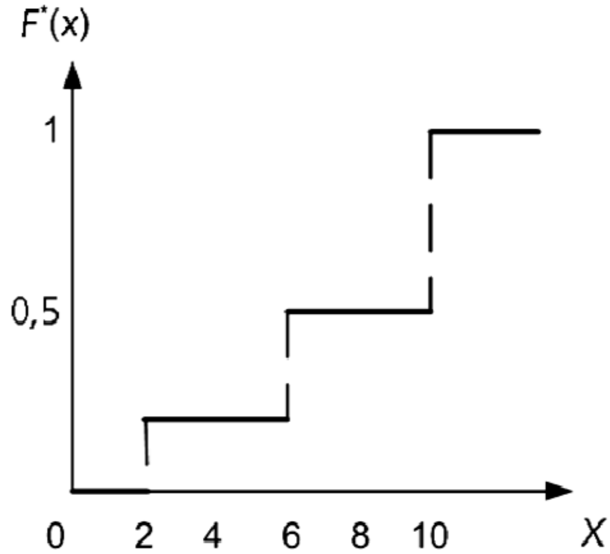


Рис. 8.4. Статистическая функция распределения (гистограмма)

8.3. Выборочные значения и оценка параметров

Рассмотрим один из возможных методов оценивания среднего значения и дисперсии случайной величины x по n независимым наблюдениям:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \tag{8.6}$$

$$S_b^2 = \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}. \tag{8.7}$$

Здесь $\bar{x}$ и S_b^2 – выборочное среднее и выборочная дисперсия соответственно. Индекс в формуле S_b^2 (см. 8.7) указывает на *смещенность* оценки дисперсии. Наряду с вышеприведенными характеристиками, при обработке результатов наблюдений обычно находят следующие оценки:

- выборочная дисперсия (несмещенная)

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n-1}; \qquad (8.8)$$

- среднее квадратическое отклонение

$$S = \sqrt{S^2}; \qquad (8.9)$$

- выборочный коэффициент асимметрии

$$Sk = \frac{\mu_3}{S^3}; \quad \mu_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^3; \qquad (8.10)$$

- выборочный коэффициент эксцесса

$$Ex = \frac{\mu_4}{S^4} - 3; \quad \mu_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^4. \qquad (8.11)$$

Для установления качества или «правильности» любой оценки используются *свойства* (*требования*) «*хороших оценок*».

8.3.1. Требования «хороших оценок»

1. Несмещенность.

Во-первых, желательно, чтобы математическое ожидание оценки равнялось оцениваемому параметру:

$$M[\tilde{\varphi}] = \varphi, \qquad (8.12)$$

где $\tilde{\varphi}$ – оценка параметра φ. Если свойство (8.12) имеет место, то оценка называется *несмещенной*.

2. Эффективность.

Во-вторых, желательно, чтобы среднеквадратическая ошибка данной оценки была наименьшей среди всех возможных оценок, то есть:

$$M[(\tilde{\varphi}_1 - \varphi)^2] \le M[(\tilde{\varphi}_i - \varphi)^2], \qquad (8.13)$$

где $\tilde{\varphi}_1$ – исследуемая оценка, а $\tilde{\varphi}_i$ – любая другая оценка. Если это свойство имеет место, то оценка $\tilde{\varphi}_1$ называется *эффективной*.

3. Состоятельность.

В-третьих, желательно, чтобы оценка сходилась к оцениваемому параметру с вероятностью, стремящейся к единице по мере увеличения размера выборки, то есть для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P[|\tilde{\varphi} - \varphi| \geq \varepsilon] = 0. \tag{8.14}$$

Если выполнено условие (8.14), то оценка называется *состоятельной*. Из неравенства Чебышева следует, что достаточным для выполнения (8.14) является условие:

$$\lim_{n \to \infty} M[(\tilde{\varphi} - \varphi)^2] = 0. \tag{8.15}$$

В качестве примера «хорошей оценки» рассмотрим оценку среднего значения (8.6). Математическое ожидание выборочного среднего $\overline{x}$ равно:

$$M\left[\overline{x}\right] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}(n \cdot m_x) = m_x. \tag{8.16}$$

Следовательно, согласно (8.12), оценка $m_x = \overline{x}$ – ***несмещенная***.

Среднеквадратическая ошибка выборочного среднего $\overline{x}$ равна:

$$\begin{aligned} M\left[\left(\overline{x} - m_x\right)^2\right] &= M\left[\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - m_x\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{n^2} M\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Поскольку наблюдения x_i независимы, то математическое ожидание членов, содержащих смешанные произведения, равны нулю. Поэтому из (8.17) получим:

$$M\left[\left(\overline{x} - m_x\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} M\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\left(n\sigma_x^2\right) = \frac{\sigma_x^2}{n}. \tag{8.18}$$

Таким образом, согласно (8.15) оценка $m_x = \overline{x}$ – ***состоятельная***. Можно показать, что эта оценка эффективна.

Рассмотрим оценку дисперсии по формуле (8.7).

$$M\left[S_b^2\right] = M\left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right]. \tag{8.19}$$

Однако

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-m_x)+(m_x-\overline{x})\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m_x\right)^2-$$

$$-2(\overline{x}-m_x)\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)+\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-m_x)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m_x\right)^2- \qquad (8.20)$$

$$-2n\cdot(\overline{x}-m_x)^2+n\cdot(\overline{x}-m_x)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m_x\right)^2-n\cdot(\overline{x}-m_x)^2.$$

Поскольку $M\left[\left(x_i-m_x\right)^2\right]=\sigma^2$ и $M\left[\left(\overline{x}-m_x\right)^2\right]=\sigma_x^2\ /\ n,$ то, подставив в (8.20), получим:

$$M\left[S_b^2\right]=\frac{1}{n}\left[n\cdot\sigma_x^2-\sigma_x^2\right]=\frac{\left(n-1\right)\cdot\sigma_x^2}{n}. \qquad (8.21)$$

Следовательно, оценка $\sigma_x^2=S_b^2$ – ***смещенная***.

Хотя оценка (выборочная дисперсия) S_b^2 и является смещенной, она *состоятельна* и *эффективна*. Из (8.21) понятно, что для получения несмещенной оценки σ_x^2 следует взять несколько видоизмененную выборочную дисперсию (8.8).

Глава 9
ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

Ранее мы обсудили использование выборочных значений в качестве оценок параметров случайных величин. Однако такие процедуры дают только точечные оценки интересующих нас параметров и не позволяют судить о степени близости выборочных значений к оцениваемому параметру. Более предпочтительная процедура – построения интервала, который накрывает оцениваемый параметр с известной степенью достоверности. Такой подход называется «***интервальным оцениванием***». Сразу отметим следующее: чем больше уверенность в том, что оцениваемый параметр лежит в интервале, тем шире интервал. Так что искать интервал, накрывающий параметр с вероятностью, равной единице, бессмысленно. Это вся область $\Theta \subseteq R$, то есть $I = (-\infty, +\infty)$.

Пусть для параметра a получена *несмещенная* оценка $\tilde{a}$. Мы хотим оценить возможную при этом ошибку. Назначим некоторую достаточно большую вероятность β (например: $\beta = 0{,}9;\ 0{,}95;\ \ldots$), такую, что событие с вероятностью β можно считать практически достоверным, и найдем такое значение ε, для которого выполняется соотношение

$$P(|\tilde{a} - a| < \varepsilon) = \beta. \tag{9.1}$$

Тогда диапазон практически возможных значений ошибки, возникающей при замене a на $\tilde{a}$, будет равен $\pm\varepsilon$. Ошибки, бóльшие по абсолютной величине ε, будут появляться с малой вероятностью $\alpha = 1 - \beta$. Запишем (9.1) в другом виде:

$$P(\tilde{a} - \varepsilon < a < \tilde{a} + \varepsilon) = \beta. \tag{9.2}$$

То есть неизвестное значение параметра a с вероятностью β попадает в интервал

$$I_\beta = (\tilde{a} - \varepsilon; \tilde{a} + \varepsilon). \tag{9.3}$$

Ранее (в теории вероятностей) мы рассматривали вероятность попадания случайной величины на некоторый интервал. У нас же a не случайная величина, а интервал случаен, здесь корректно говорить о вероятности I_β накрыть точку a.

Вероятность β принято называть ***доверительной вероятностью,*** а интервал I_β – ***доверительным интервалом.***

Рассмотрим задачу нахождения доверительных границ a_1 и a_2 параметра a, имеющего несмещенную оценку $\tilde{a}$. Если бы нам был известен закон распределения величины $\tilde{a}$, то из выражения (9.1) нахождение ε при заданной β не представляло бы затруднений. Однако, как правило, мы не знаем закон распределения случайной величины X.

Пусть теперь распределение случайной величины X отлично от нормального. Применяя центральную предельную теорему, получаем следующий результат.

С увеличением объема выборки n выборочное распределение выборочного среднего $\overline{x}$ стремится к нормальному распределению независимо от вида распределения исходной случайной величины.

Практически во многих случаях выборочное $\overline{x}$ можно считать нормальным уже при $n > 4$, а при $n > 10$ приближение будет хорошим.

В качестве примера рассмотрим задачу нахождения доверительного интервала математического ожидания. Пусть произведено n независимых опытов над случайной величиной X с неизвестными m_x, D_x. Для этих параметров выберем оценки:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2. \tag{9.4}$$

Необходимо построить доверительный интервал I_β, соответствующий доверительной вероятности β:

$$P(| \overline{x} - m_x | < \varepsilon_\beta) = \beta. \tag{9.5}$$

9.1. Интервальная оценка математического ожидания при известной дисперсии

Пусть СВ X имеет гауссово распределение с параметрами $N(m_x, \sigma_x)$, причем m_x неизвестно, а значение σ_x^2 известно. Тогда *эффективной оценкой* параметра m_x будет $\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$.

При этом $\overline{x}$ имеет нормальное распределение $N\left(m_x, \sigma_x / \sqrt{n}\right)$.

Статистика (оценка) СВ $z = \dfrac{\overline{x} - m_x}{\sigma_x / \sqrt{n}}$ имеет распределение $N(0, 1)$, независимо от параметра m_x, и как функция $\alpha -$ непрерывна и монотонна. Вспомним, что $\alpha = 1 - \beta$. Тогда, с учетом (9.2), запишем:

$$P\left(U_{\alpha/2} < z < U_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha = \beta, \tag{9.6}$$

где $U_{\alpha/2}$ и $U_{1-\alpha/2}$ – квантили стандартного нормального распределения $N(0, 1)$, причем $U_{\alpha/2} = -U_{1-\alpha/2}$. Подставим z в явном виде в (9.6):

$$U_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - m_x}{\sigma_x} \cdot \sqrt{n} < U_{1-\alpha/2}. \qquad (9.7)$$

Запишем это неравенство относительно m_x:

$$\bar{x} - U_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x} + U_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \qquad (9.8)$$

Квантили стандартного нормального распределения определяются по таблицам, тогда окончательно получим:

$$\varepsilon = U_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \qquad (9.9)$$

Искомый *доверительный интервал* математического ожидания нормально распределенной СВ с известной дисперсией равен:

$$I_\beta = (\bar{x} - U_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \bar{x} + U_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}). \qquad (9.10)$$

На рис. 9.1 представлена плотность распределения стандартного нормального распределения с отмеченными квантилями $\alpha = 0,05$.

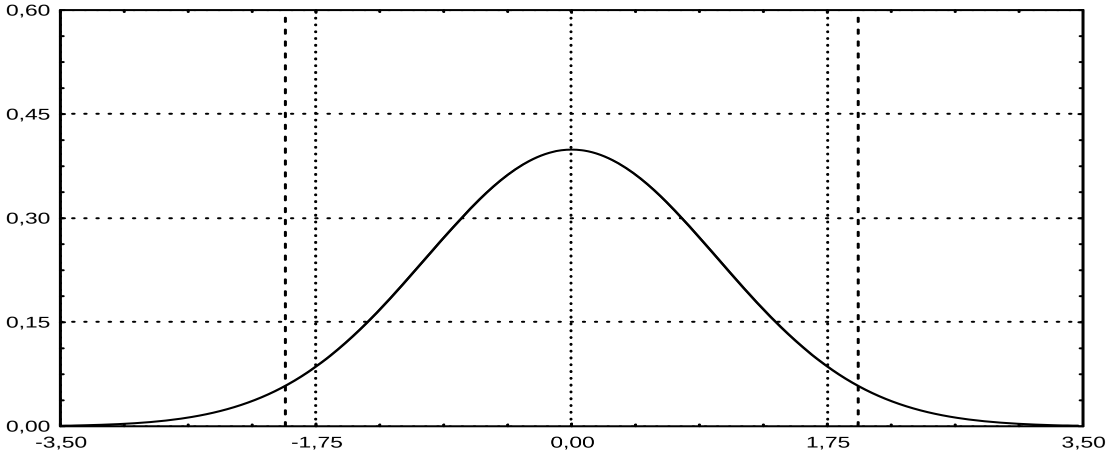


Рис. 9.1. Гауссово распределение ($N(0,\ 1),\ \beta = 0,95, U_{\alpha/2} = \pm 1,96$*)*

9.2. Интервальная оценка математического ожидания при неизвестной дисперсии

На практике почти всегда генеральная дисперсия σ_x^2 (как и оцениваемое математическое ожидание m_x) неизвестна. Итак, имеется нормально распределенная СВ $X \Rightarrow N(m_x, \sigma_x)$, с неизвестными параметрами m_x и σ_x^2. По случайной выборке найдем *несмещенные*, *эффектив-*

ные оценки: $\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$. Построение интервальной оценки основано на статистике:

$$t_{n-1} = \frac{\overline{x} - m_x}{S/\sqrt{n}}. \tag{9.11}$$

Вспомним, что $S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot S_b$, и подставим в (9.11):

$$t_{n-1} = \frac{\overline{x} - m_x}{S_b}\sqrt{n-1} = \frac{(\overline{x} - m_x) / \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \frac{n \cdot S_b^2}{\sigma_x^2}}}. \tag{9.12}$$

Числитель выражения (9.12), как было показано выше, имеет стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$. Показано, что величина $n \cdot S_b^2 / \sigma_x^2$ имеет χ^2 распределение с $k = n-1$ степенями свободы. А статистика t_{n-1} имеет распределение Стьюдента с $k = n-1$ степенями свободы. Распределение Стьюдента не зависит от неизвестных параметров распределения случайной величины *X*, а зависит лишь от числа *k*.

Следует отметить, что распределение Стьюдента напоминает нормальное распределение и при $k \to \infty$ *сколь угодно близко приближается к нему.*

Число степеней свободы k *определяется как общее число* n *наблюдений* (*вариантов*) *случайной величины* X *минус число уравнений l, связывающих эти наблюдения, то есть* $k = n - l$.

Так, например, для распределения t статистики число степеней свободы $k = n-1$, поскольку одна степень свободы «теряется» при определении выборочного среднего $\overline{x}$ (n наблюдений связаны одним уравнением).

Таким образом, по аналогии с (9.6) запишем:

$$P\left(t_{\alpha/2} < t_{n-1} < t_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha = \beta. \tag{9.13}$$

$$t_{\alpha/2} < \frac{\overline{x} - m_x}{S} \cdot \sqrt{n} < t_{1-\alpha/2}. \tag{9.14}$$

$$\overline{x} - t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < m_x < \overline{x} + t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}. \tag{9.15}$$

На рис. 9.2 представлена плотность распределения Стьюдента с пятнадцатью степенями свободы.

Доверительный интервал математического ожидания нормально распределенной СВ с неизвестной дисперсией равен:

$$I_\beta = (\overline{x} - t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}). \tag{9.16}$$

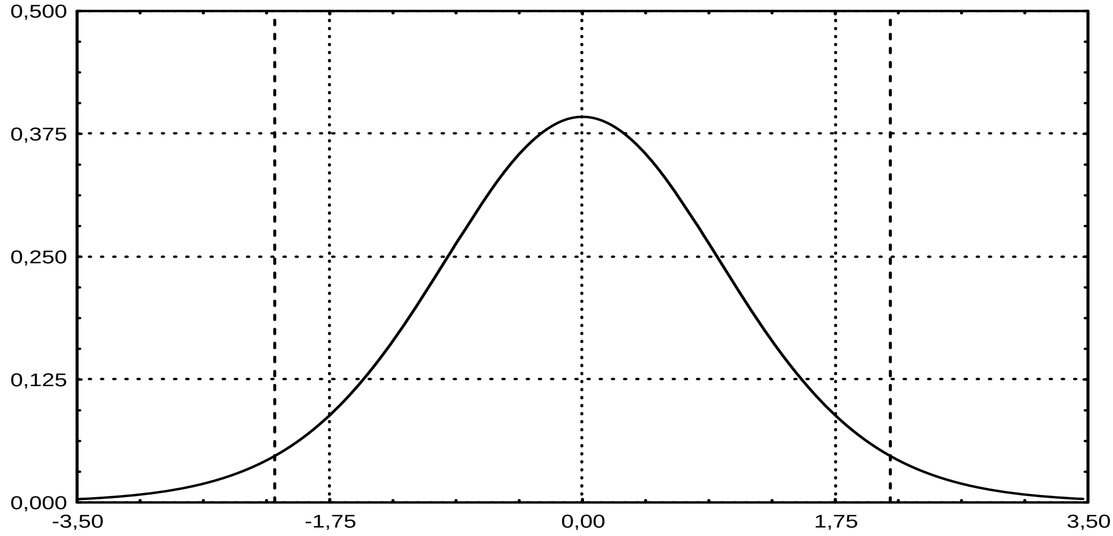


Рис. 9.2. Распределение Стьюдента ($k = 15,\ \beta = 0,95,\ t_{15,\alpha/2} = \pm 2,131$*)*

9.3. Интервальная оценка выборочной дисперсии

Доверительный интервал для оценки дисперсии по выборочной дисперсии S^2 для СВ $X \Rightarrow N(m_x, \sigma_x)$ строится аналогичным образом. Естественно, что в качестве математического ожидания и дисперсии гауссовой СВ мы возьмем их *несмещенные* и *эффективные* оценки: $\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$. Исходя из вышесказанного, запишем:

$$P\left(\sigma_1^2 < \sigma^2 < \sigma_2^2\right) = \beta, \tag{9.17}$$

$$I_\beta = \left(\sigma_1^2, \sigma_2^2\right). \tag{9.18}$$

Это интервал, который с вероятностью β накрывает неизвестную дисперсию. Из статистики известно, что если СВ X имеет гауссово распределение $N(m_x, \sigma_x)$, а СВ $\overline{x} \Rightarrow N(m_x, \sigma_x / \sqrt{n})$, то справедливо соотношение:

$$\left(n-1\right)S^2 = \sigma^2 \chi_{n-1}^2. \tag{9.19}$$

Здесь χ^2_{n-1} – хи-квадрат распределения с $n-1$ степенями свободы. Теперь, задавая β, или что равносильно α, можно найти квантили (соответствующие) $\chi^2_{n-1}(\beta)$. При этом следует учесть, что распределение χ^2_{n-1} не симметрично (рис. 9.3).

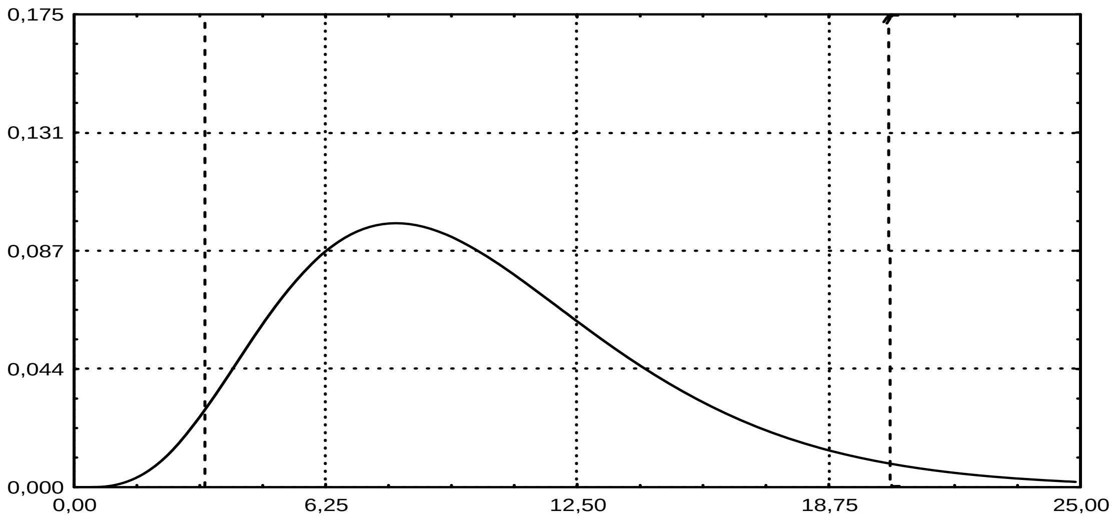


Рис. 9.3. Распределение χ^2 $(k=10, \beta=0{,}95,\ \chi^2_{10;0,025}=3{,}247,\ \chi^2_{10;0,975}=20{,}486)$

Как же решить эту задачу однозначно? Ведь сдвигая интервал влево или вправо соответствующим образом, можно для заданной доверительной вероятности найти бесконечное множество решений (интервалов). Для обеспечения единообразия условились выбирать такие квантили (интервал), чтобы площадь под кривой, лежащая левее левой квантили, равнялась площади под кривой, расположенной правее правой квантили:

$$P(\chi^2 < \chi_1^2) = P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{1-\beta}{2} = \frac{\alpha}{2}. \tag{9.20}$$

Тогда из (9.19), учитывая (9.20), получим соответствующие границы интервала:

$$\sigma_1^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}; \qquad \sigma_2^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}. \tag{9.21}$$

ПРИМЕР 1. Дана выборка СВ Y объемом $n=10$. Предполагается, что СВ Y распределена нормально с неизвестными параметрами (m_y, σ_y).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1,2	2,4	1,3	1,3	0,0	1,0	1,8	0,8	4,6	1,4

Необходимо найти доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии при доверительной вероятности, равной 0,97.

РЕШЕНИЕ. В качестве несмещенных и эффективных оценок вычислим:

$$n = 10; \quad \overline{y} = \sum y_i / 10 = 1{,}58; \quad S^2 = \sum (y_i - \overline{y})^2 / (n-1);$$

$$9 \cdot S^2 = 13{,}616; \quad S^2 = 1{,}513; \quad S = 1{,}23.$$

а) Вычислим доверительный интервал для математического ожидания, если дисперсия известна (полагаем, что $\sigma^2 \equiv S^2$). Тогда из таблицы нормального распределения получим $U_{0,985} = -U_{0,015} = 2{,}17$. Подставим значения квантилий в (9.9) и (9.10): $\varepsilon = U_{1-\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma_y}{\sqrt{n}} = 2{,}17 \cdot \dfrac{1{,}23}{\sqrt{10}} = 0{,}844;$ $I_{0,97} = (0{,}736;\ 2{,}424).$

b) Вычислим доверительный интервал для математического ожидания, при неизвестной дисперсии. Воспользуемся таблицей распределения Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 1 = 9$. Соответствующие квантили равны $t_{9;\,0,985} = -t_{9;\,0,015} = 2{,}527$. Подставим полученные значения в (9.15) и (9.16):

$$\varepsilon = t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S_y}{\sqrt{n}} = 2{,}527 \cdot \frac{1{,}23}{\sqrt{10}} = 0{,}983; \quad I_{0,97} = (0{,}597;\ 2{,}563).$$

c) Вычислим доверительный интервал для дисперсии. Воспользуемся таблицей распределения χ^2. Симметричный 97 % вероятностный интервал с $k = n - 1 = 9$ числом степеней свободы: (2,33; 20,5). Подставив полученные значения в (9.21), получим:

$$\sigma_1^2 = \frac{13{,}616}{20{,}5} = 0{,}664; \quad \sigma_2^2 = \frac{13{,}616}{2{,}33} = 5{,}844; \quad I_{0,97} = (0{,}664;\ 5{,}844).$$

Глава 10
СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ

Прежде чем перейти к рассмотрению понятия *статистической гипотезы*, сформулируем так называемый принцип ***практической уверенности***, лежащий в основе применения выводов и рекомендаций, полученных с помощью теории вероятностей и математической статистики.

Если вероятность события A в данном испытании очень мала, то при однократном испытании можно быть уверенным в том, что событие A не произойдет, и в практической деятельности вести себя так, как будто событие A вообще невозможно.

Вопрос о том, насколько малой должна быть вероятность α события A, чтобы его можно было считать практически невозможным, выходит за рамки математической теории и решается в каждом отдельном случае с учетом важности последствий, вытекающих из наступления события A. В ряде случаев можно пренебречь событиями, вероятность которых меньше 0,05, а в других, когда речь идет, например, о разрушении сооружений, гибели судна и т. п., нельзя пренебрегать событиями, которые могут появиться с вероятностью, равной 0,001.

Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину K, которая служит для проверки гипотезы.

Критерии значимости (критерии проверки гипотез, иногда просто *тесты*) – это простейшие, но наиболее широко используемые статистические средства.

Критерий значимости дает возможность статистику найти разумный ответ на вопрос, подобный следующим:

- Сталь, произведенная разными методами, имеет неодинаковые пределы прочности. «Указывает ли это на то, что производимая разными методами сталь имеет различную прочность или же выявленное различие можно объяснить выборочными флуктуациями?»
- «Превосходит ли по эффективности одно противогриппозное средство другое?»
- «Способствует ли отказ от курения снижению вероятности раковых заболеваний?»
- «Превосходит ли по воздействию одно удобрение другое при выращивании овощей?»

10.1. Проверка гипотез

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Рассмотрим простейший вид статистической процедуры, называемой проверкой гипотез. Пусть дана некоторая оценка $\tilde{\varphi}$, построенная по выборке из n независимых наблюдений СВ X. Предположим, что есть основания считать истинное значение оцениваемого параметра равным φ_0. Однако, даже если истинное значение параметра φ равно φ_0, выборочное значение $\tilde{\varphi}$, вероятно, не будет в точности равняться φ_0, из-за выборочной изменчивости, присущей $\tilde{\varphi}$. Поэтому сформулируем следующий вопрос. Если предположить, что $\varphi = \varphi_0$, то при каком отклонении $\tilde{\varphi}$ от φ_0 эта гипотеза должна быть отвергнута как несостоятельная? На этот вопрос ответ можно дать в статистических терминах, вычислив вероятность любого значимого отклонения $\tilde{\varphi}$ от φ_0 по выборочному распределению $\tilde{\varphi}$. Если вероятность такого отличия мала, то отличие следует считать значимым и гипотеза $\varphi = \varphi_0$ должна быть отвергнута. Если же вероятность такого отличия велика, то отклонение следует приписать естественной статистической изменчивости и гипотеза $\varphi = \varphi_0$ может быть принята.

Проиллюстрируем общий подход, предположив, что выборочное значение $\tilde{\varphi}$, являющееся оценкой параметра φ, имеет плотность вероятности нормального распределения $\rho(\tilde{\varphi})$. Теперь, если гипотеза $\varphi = \varphi_0$ верна, то $\rho(\tilde{\varphi})$ должна иметь среднее значение φ_0 (рис. 10.1).

Вероятность α, использованная при испытании гипотез, называется *уровнем значимости критерия.*

Вероятность того, что $\tilde{\varphi}$ окажется меньше нижней границы $\varphi_{\alpha/2}$, равна вероятности того, что $\tilde{\varphi}$ превзойдет верхнюю границу $\varphi_{1-\alpha/2}$ и каждая из них равна $\alpha/2$. Следовательно, вероятность того, что $\tilde{\varphi}$ окажется вне интервала, заключенного между этими границами, равна α. Область значений $\tilde{\varphi}$, при которых гипотеза принимается, называется *областью принятия* гипотезы.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0. В данном примере H_0: $\varphi = \varphi_0$.

Область значений $\tilde{\varphi}$, при которых гипотеза должна быть отвергнута, называется *областью отклонения* гипотезы, или *критической областью*.

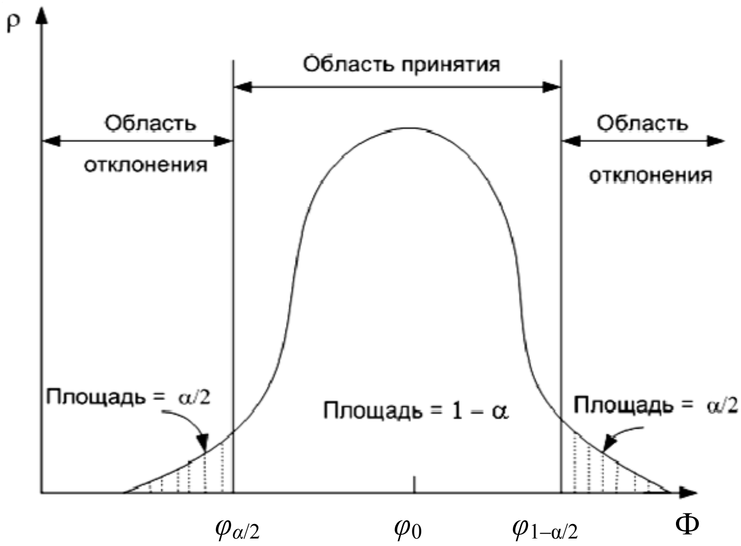


Рис. 10.1. Область принятия и отклонения гипотезы (двусторонний критерий)

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу, которая противоречит нулевой. В данном примере H_1: $\varphi \neq \varphi_0$.

Рассмотренный нами простой критерий испытания гипотез называется *двусторонним критерием*, так как, когда гипотеза неверна, значение φ может быть либо больше, либо меньше φ_0.

В ряде случаев достаточно бывает *односторонних* критериев (рис. 10.2). Например, пусть основная гипотеза H_0: $\varphi \geq \varphi_0$. Тогда альтернативная гипотеза: H_1: $\varphi < \varphi_0$. Следовательно, в критерии должна использоваться только нижняя (левая) граница φ_α, определяемая по плотности вероятности $\rho(\tilde{\varphi})$.

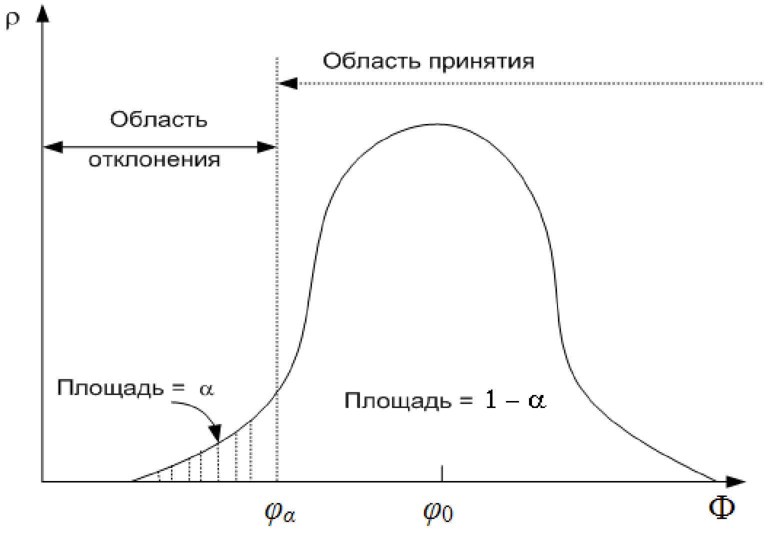


Рис. 10.2. Область принятия и отклонения гипотезы (односторонний критерий)

10.2. Ошибки проверки гипотез

При проверке гипотезы возможны два типа ошибок.

- Во-первых, гипотеза может быть отклонена, хотя фактически она верна. Такая ошибка называется ***ошибкой первого рода***.
- Во-вторых, гипотеза может быть принята, хотя фактически она неверна. Такая ошибка называется ***ошибкой второго рода***.

Проиллюстрируем эти понятия графически (рис. 10.3).

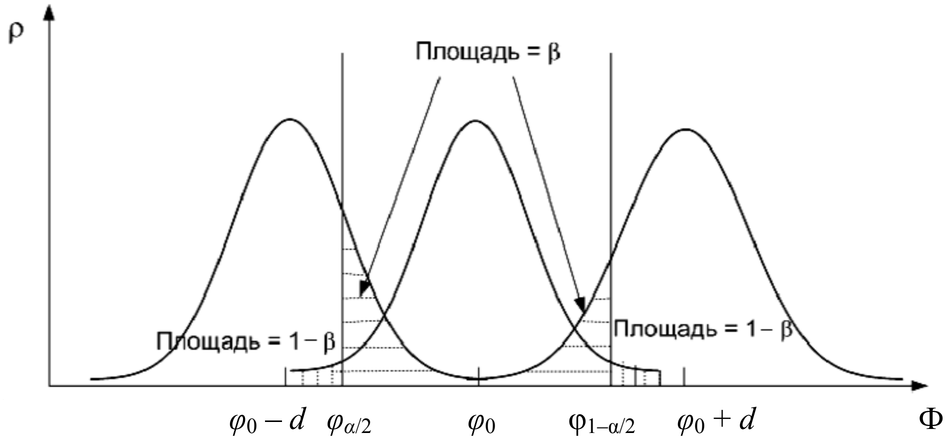


Рис. 10.3. Определение ошибки первого и второго рода при проверке гипотез

Из рисунка видно, что ошибка первого рода происходит в том случае, когда при справедливости гипотезы H_0 значение $\tilde{\varphi}$ попадает в область ее отклонения (критическую область). Следовательно, вероятность ошибки первого рода равна α – уровню значимости критерия.

Для определения вероятности ошибки второго рода предположим, к примеру, что истинный параметр равен либо $\varphi_0 + d$, либо $\varphi_0 - d$ (см. рис. 10.3). Если гипотеза состоит в том, что H_0: $\varphi = \varphi_0$, тогда как на самом деле $\varphi = \varphi_0 \pm d$, то вероятность того, что $\tilde{\varphi}$ попадает в область принятия гипотезы, заключенную между $\varphi_{\alpha/2}$ и $\varphi_{1-\alpha/2}$, равна β. Следовательно, вероятность ошибки второго рода равна β при выявлении отклонения величиной $\pm d$ от гипотетического значения φ_0.

Вероятность $1-\beta$ называется ***мощностью критерия***.

Следует отметить, что вероятности ошибок первого и второго рода вычисляются при ***разных*** предположениях о распределении (если верна гипотеза H_0 и если верна гипотеза H_1), так что никаких раз и навсегда фиксированных соотношений (например $\alpha = 1-\beta$, независимо от вида гипотезы и вида критерия) между ними нет. Таким образом, при фиксированном объеме выборки n мы можем сколь угодно уменьшать ошибку первого рода, уменьшая уровень значимости α. При этом, естественно, возрастает вероятность β – ошибки второго рода (уменьшается мощность критерия). Единственный способ одновременно уменьшить ошибки первого и второго рода (α и β) – увеличить размер выборки n. Именно такие соображения лежат в основе выбора нужного размера выборки в статистических экспериментах.

ПРИМЕР 1. Построение критерия проверки гипотез.

Предположим, что среднее значение СВ X равно $m_x = 10$, также предположим, что дисперсия известна и равна $\sigma_x^2 = 4$. Необходимо найти объем выборки n, позволяющий построить критерий проверки гипотезы H_0: $m_x = 10$ с 5%-м уровнем значимости и 5%-й ошибкой второго рода для выявления 10%-х отклонений от гипотетического значения. Построим также область принятия гипотезы H_0.

РЕШЕНИЕ. Выборочное среднее $\overline{x}$, определяемое формулой (8.6), является несмещенной оценкой m_x. Соответствующее выборочное распределение $\overline{x}$ определяется из соотношения (9.7):

$$\overline{x} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} z + m_x, \tag{10.1}$$

где z имеет распределение $N(0,1)$. Верхняя и нижняя границы области принятия гипотезы соответственно равны:

$$m_x + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \quad m_x + z_{\alpha/2} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \tag{10.2}$$

Если теперь истинное среднее значение равно $m'_x = m_x \pm d$, то с вероятностью β произойдет ошибка второго рода, если выборочное среднее $\overline{x}$ окажется меньше (левее) верхней границы и больше (правее) нижней. В терминах выборочного распределения $\overline{x}$ со средним $m'_x = m_x + d$ или $m'_x = m_x - d$ для верхней и нижней границ (рис. 10.3):

$$m_x + d + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} z_\beta, \quad m_x - d + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} z_{1-\beta}. \tag{10.3}$$

Итак, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} m_x + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} &= m_x + d + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} z_\beta, \quad z_{1-\alpha/2} = z_\beta + \frac{\sqrt{n}}{\sigma_x} d; \\ m_x + z_{\alpha/2} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} &= m_x - d + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} z_{1-\beta}, \quad z_{\alpha/2} = z_{1-\beta} - \frac{\sqrt{n}}{\sigma_x} d. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Вспомним, что благодаря симметричности распределения $N(0,1)$ справедливы равенства:

$$z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}; \quad z_{\beta} = -z_{1-\beta}. \tag{10.5}$$

Теперь из (10.4) с учетом (10.5) найдем требуемый объем выборки:

$$n = \left(\frac{\sigma_x (z_{1-\alpha/2} + z_{1-\beta})}{d} \right)^2. \tag{10.6}$$

Для конкретных значений данного примера: $\sigma_x = 2$, $d = 0{,}1 \cdot 10 = 1$, $z_{1-\alpha/2} = z_{0,975} = 1{,}96$; $z_{1-\beta} = z_{0,95} = 1{,}645$. Подставим эти значения в (10.6) и получим значение необходимого объема выборки $n = 51{,}9841$. Таким образом, объем выборки должен быть равен или больше пятидесяти двух. Область принятия гипотезы H_0 определяется соответствующими границами (верхней и нижней (10.2)):

$$m_x + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = 10{,}54; \quad m_x + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = 9{,}46.$$

Раздел 3
СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Глава 11
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Теория *случайных процессов* имеет многочисленные применения в задачах прогнозирования, теории (процессах) массового обслуживания, финансовой математике, прикладной статистике и социальных науках.

Случайным процессом $\xi = \xi(t)$ будем называть функцию от действительного параметра $t \in T$, значения $\xi(t)$ которой при каждом t являются случайными величинами. Другими словами, случайной функцией $\xi(t)$ называют случайную величину (СВ), зависящую от неслучайного аргумента t.

Закономерности случайного процесса $\xi(t)$, $t \in T$ определяются совместными распределениями вероятностей его значений $\xi(t_1)$, …, $\xi(t_n)$ при различных t_1, …, t_n (они называются *конечномерными распределениями* данного случайного процесса). Каждое значение $\xi(t)$ случайного процесса, являясь случайной величиной, формально зависит от элементарного исхода $\omega : \xi(t) = \xi(\omega, t)$.

При фиксированном значении t, то есть при $t = t_0 \in T$, случайный процесс $\xi(\omega, t)$ обращается в СВ $\xi(\omega, t_0)$, называемую *сечением случайного процесса* (рис. 11.1).

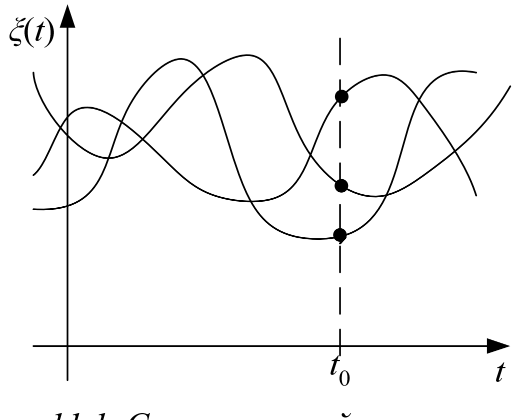


Рис. 11.1. Сечение случайного процесса

Реализацией, или *траекторией* случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется неслучайная функция времени $\xi(t) = \xi(\omega_0, t)$ при фиксированном $\omega = \omega_0$, то есть конкретный вид, принимаемый случайным процессом (СП) в результате испытания. Реализации СП обозначают $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., где индекс соответствует номеру опыта.

11.1. Классификация случайных процессов

Случайный процесс, протекающий в любой физической системе S, представляет собой случайные переходы системы из одного состояния в другое.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется *процессом с дискретным временем*, если система, в которой он протекает, меняет свои состояния только в моменты времени t_1, ..., t_n, число которых конечно или счетно.

Случайный процесс называется *процессом с непрерывным временем*, если переход системы из состояния в состояние может происходить в любой момент времени.

Случайный процесс называется *процессом с непрерывными состояниями*, если значением случайного процесса является непрерывная случайная величина.

Случайный процесс называется *процессом с дискретными состояниями*, если значением случайного процесса является дискретная случайная величина.

В зависимости от множества этих состояний W, от множества T значений аргумента t все случайные процессы делят на классы:

1. Дискретный процесс (дискретное состояние) с дискретным временем.
2. Дискретный процесс с непрерывным временем.
3. Непрерывный процесс (непрерывное состояние) с дискретным временем.
4. Непрерывный процесс с непрерывным временем.

Рассмотрим несколько примеров СП, относящихся к различным классам:

- Почтовая программа на персональном компьютере в дискретные моменты времени (t_1, ..., t_n) загружает с почтового сервера новые письма. Количество полученных писем – СП первого класса.
- Счет забитых мячей в теннисном матче – СП второго класса.

- Автоматическая метеостанция в фиксированные моменты времени передает данные о температуре – СП третьего класса.
- Самописец, фиксирующий высоту, на борту самолета – пример СП четвертого класса.

11.2. Основные характеристики случайного процесса

Для случайного процесса вводятся простейшие характеристики, аналогичные основным характеристикам случайных величин. Известно, что полная характеристика случайного процесса дается его многомерным (конечномерным) законом распределения. Однако знание основных характеристик может оказаться достаточным для решения многих задач. Следует при этом учесть, что в отличие от числовых характеристик СВ, представляющих собой определенные числа, характеристики СП являются, как правило, не числами, а функциями.

Математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $m_X(t)$, которая для любого t будет определяться как математическое ожидание соответствующего сечения:

$$m_X(t) = M[X(t)] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t) p_i(t), \text{сечение} - \text{дискр. СВ;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p(t,x) dx, \text{сечение} - \text{непрер. СВ.} \end{cases} \qquad (11.1)$$

Свойства математического ожидания СП

1. Математическое ожидание неслучайной функции равно самой функции:

$$M[f(t)] = f(t). \qquad (11.2)$$

2. Неслучайный множитель можно выносить за знак математического ожидания СП:

$$M[f(t) \cdot X(t)] = f(t) \cdot m_X(t). \qquad (11.3)$$

3. Математическое ожидание суммы (разности) двух СП равно сумме (разности) математических ожиданий этих процессов:

$$M[X(t) \pm Y(t)] = m_X(t) \pm m_Y(t). \qquad (11.4)$$

ПРИМЕР 1. Случайный процесс определяется формулой $Y(t) = X \cdot e^{-t}$, $t > 0$, $X \Rightarrow N(3, 1)$, где X – СВ, распределенная по нормальному закону с $m_x = 3$, $\sigma_x = 1$. Необходимо найти математическое ожидание СП $Y(t)$.

РЕШЕНИЕ. Так как плотность гауссова распределения нам известна, то задача сводится к взятию соответствующего интеграла. Однако значительно проще решить задачу, используя свойство математического ожидания СП (11.3): $M[Y(t)] = M[X \cdot e^{-t}] = e^{-t} \cdot m_x = 3 \cdot e^{-t}$.

Центрированным случайным процессом $\dot{X}(t)$ называется процесс, который равен разности СП $X(t)$ и его математического ожидания $m_X(t)$.

Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $D_X(t)$, которая при любом значении аргумента t определяется как дисперсия соответствующего сечения случайного процесса $X(t)$:

$$D[X(t)] = M[\dot{X}^2(t)] = M[(X(t) - m_X(t))^2]. \qquad (11.5)$$

Дисперсия $D_X(t)$ характеризует разброс (рассеяние) возможных значений СП относительно его математического ожидания.

Наряду с дисперсией рассматривается также среднее квадратическое отклонение $\sigma_X(t)$, определяемое равенством:

$$\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)}. \qquad (11.6)$$

Размерность среднего квадратического отклонения СП равна размерности СП $X(t)$.

Свойства дисперсии СП

1. Дисперсия неслучайной функции равна нулю:

$$D[f(t)] = 0. \qquad (11.7)$$

2. Дисперсия СП неотрицательна:

$$D_X(t) = \sigma_X^2(t). \qquad (11.8)$$

3. Дисперсия произведения неслучайной функции на случайную функцию равна произведению квадрата неслучайной функции на дисперсию случайной функции:

$$D[f(t) \cdot X(t)] = f^2(t) \cdot D_X(t). \qquad (11.9)$$

4. Дисперсия суммы (разности) СП и неслучайной функции равна дисперсии СП:

$$D[(X(t) \pm f(t))] = D_X(t). \qquad (11.10)$$

ПРИМЕР 2. Используя условие *ПРИМЕРА 1*, найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение СП.

РЕШЕНИЕ. Используя свойство (11.9) и учитывая, что $\sigma_x = 1$, вычислим: $D[Y(t)] = D[X \cdot e^{-t}] = (e^{-t})^2 \cdot D_x = e^{-2t} \cdot 1 = e^{-2t}$, $\sigma_Y(t) = \sqrt{e^{-2t}} = e^{-t}$.

Для оценки связи между различными сечениями СП используется корреляционная функция – аналог ковариации.

Корреляционной (*ковариационной, автоковариационной, автокорреляционной*) *функцией* СП $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_X(t_1, t_2)$, которая при каждой паре значений t_1 и t_2 равна корреляционному моменту (ковариации) соответствующих сечений $X(t_1)$ *и* $X(t_2)$:

$$K_X(t_1,t_2) = M[\dot{X}(t_1)\cdot\dot{X}(t_2)] =$$
$$= M[(X(t_1)-m(t_1))\cdot(X(t_2)-m(t_2))]. \qquad (11.11)$$

Свойства корреляционной (автоковариационной) функции СП

1. Корреляционная функция при одинаковых значениях аргументов равна дисперсии СП:

$$K_X(t,t) = \mathrm{cov}(X(t),X(t)) = M[(X(t)-m(t))\cdot(X(t)-m(t)) =$$
$$= M[(X(t)-m(t))^2] = D_X(t). \qquad (11.12)$$

2. Корреляционная функция не меняется при перестановке аргументов местами:

$$K_X(t_1,t_2) = K_X(t_2,t_1). \qquad (11.13)$$

3. Если к СП прибавить неслучайную функцию, то корреляционная функция не изменится, то есть если $Y(t) = X(t) + f(t)$, то:

$$K_Y(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2). \qquad (11.14)$$

4. При умножении СП $X(t)$ на неслучайный множитель $f(t)$ его корреляционная функция умножается на произведение $f(t_1)\cdot f(t_2)$, то есть если $Y(t) = X(t)\cdot f(t)$, то:

$$K_Y(t_1,t_2) = f(t_1)\cdot f(t_2)\cdot K_X(t_1,t_2). \qquad (11.15)$$

Наряду с корреляционной функцией СП вводится также *нормированная корреляционная* (*автоковариационная*) *функция* $r_X(t_1,t_2)$, определяемая равенством

$$r_X(t_1,t_2) = \frac{K_X(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\cdot\sigma_X(t_2)} = \frac{K_X(t_1,t_2)}{\sqrt{K_X(t_1,t_1)}\cdot\sqrt{K_X(t_2,t_2)}}. \qquad (11.16)$$

По смыслу $r_X(t_1,t_2)$ аналогична коэффициенту корреляции СВ, но не является константой и зависит от аргументов t_1 и t_2.

Свойства нормированной корреляционной функции СП

Свойства нормированной корреляционной функции аналогичны свойствам коэффициента корреляции:

1. $\left| r_X(t_1, t_2) \right| \le 1;$
2. $r_X(t, t) = 1;$
3. $r_X(t_1, t_2) = r_X(t_2, t_1).$

ПРИМЕР 3. Используя условие ПРИМЕРА 1, найдем корреляционную и нормированную корреляционную функции СП $Y(t)$.

РЕШЕНИЕ. Согласно (11.11) вычислим:

$$K_Y(t_1, t_2) = M[(X \cdot e^{-t_1} - 3 \cdot e^{-t_1}) \cdot (X \cdot e^{-t_2} - 3 \cdot e^{-t_2}) =$$
$$= M[(X^2 \cdot e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} - 6X \cdot e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} + 9 \cdot e^{-t_1} \cdot e^{-t_2})] =$$
$$= M[e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} \cdot (X-3)^2] = e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} \cdot D[X] = e^{-(t_1+t_2)} \cdot 1 =$$
$$= e^{-(t_1+t_2)}.$$

Теперь, согласно (11.16), получим:

$$r_Y(t_1, t_2) = \frac{e^{-t_1} \cdot e^{-t_2}}{e^{-t_1} \cdot e^{-t_2}} = 1.$$

11.3. Стационарные случайные процессы

Важным классом СП являются *стационарные случайные процессы*, которые не изменяют свои характеристики с течением времени. Такие процессы имеют вид непрерывных случайных колебаний вокруг неслучайного значения, например: флуктуация напряжения в электрической сети, давление газа в трубопроводе, температура в тепловом (ядерном) реакторе.

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание $m_X(t)$ постоянно, а корреляционная функция $K_X(t_1, t_2)$ зависит только от разности аргументов,

$$m_X(t) = m = \text{const}, \quad K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2 - t_1). \qquad (11.17)$$

Из этого определения следует, что корреляционная функция стационарного процесса есть функция одного аргумента: $K_X(t_1, t_2) = K_X(\tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$.

Случайный процесс называется *стационарным в узком смысле*, если все его характеристики зависят не от значений аргументов, а лишь от их взаимного расположения. Так для функций распределения сечений процесса должно выполняться равенство:

$$F_{t_1+h,\dots,t_n+h}(x_1,\dots,x_n)=F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n), \qquad (11.18)$$

при любых $h>0, \quad n\ge 1, \quad t_1,t_2,\dots,t_n\in T$.

Большинство стационарных СП обладают важным для практики *эргодическим свойством*.

Эргодическое свойство стационарной случайной функции заключается в том, что любая ее реализация обладает одними и теми же свойствами и на достаточно большом интервале T аргумента t ведет себя в среднем так же, как и все другие реализации. Рис. 11.2 иллюстрирует связь между классами СП.

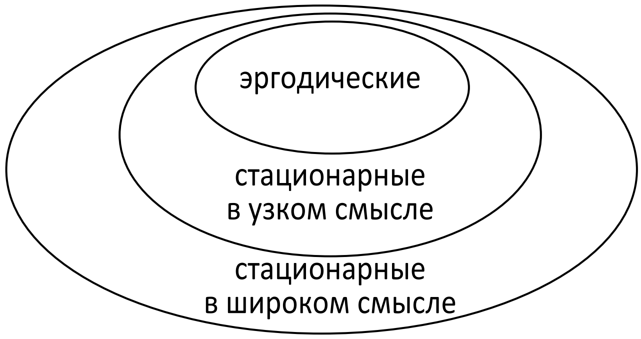


Рис. 11.2. Соотношение классов случайных процессов

11.4. Марковские случайные процессы

Случайный процесс, протекающий в системе, называется ***марковским*** (*или процессом без последействия*), *если для любого момента времени* t_0 *вероятность любого состояния системы в будущем* $t>t_0$ *зависит только от ее состояния в настоящем* $(t=t_0)$ *и не зависит от того, как и каким образом система пришла в это состояние.*

Пусть имеется некоторая физическая система S, в которой протекают СП. Под влиянием случайных факторов с течением времени система может переходить из одного состояния в другое.

Случайный процесс называется *процессом с дискретными состояниями*, если множество его возможных состояний $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots$ конечно или счетно, а переход из одного состояния в другое осуществляется скачком, причем переходы возможны только в определенные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots$.

Рассмотрим марковский случайный процесс, описывающий систему с дискретными состояниями и дискретным временем функционирования. Процесс, происходящий в такой системе, можно представить в виде цепочки случайных событий $S_1(0) \to S_1(1) \to \cdots \to S_i(\nu) \to \cdots \to S_n(k)$. Такая случайная последовательность называется *дискретной марковской цепью*, если для каждого шага ν $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ вероятность перехода из любого состояния S_i в любое состояние S_j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ не зависит от того, как система пришла в состояние S_i.

Марковский процесс служит моделью для многих процессов в биологии (распространение эпидемии, рост популяции), в физике (радиоактивный распад), в теории массового обслуживания.

Рассмотрим свойства марковских случайных процессов на примере известной игры «Тише едешь – дальше будешь».

Вспомним правила игры:

1. В этой игре фишка играющего должна пройти некоторое конечное число пунктов $1, 2, \ldots, m$.

2. Переход из одного пункта в другой каждый раз определяется исходом бросания игральной кости.

Таким образом, если на данном шаге фишка находится в пункте i, то правилами игры устанавливается пункт перехода ее на следующем шаге, в зависимости от числа очков, выпавших на игральной кости. Отметим очевидное свойство марковских случайных процессов.

Из любого пункта i фишка с некоторой вероятностью p_{ij} переходит в один из пунктов j, независимо от характера ее движения до попадания в пункт i. Это свойство цепей Маркова часто называют *системами без последствия*, или *системами с отсутствием памяти*.

Пусть имеется система, которая может находиться в одном из фазовых состояний $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Состояние системы меняется в зависимости от некоторого параметра t, причем переход из состояния в состояние зависит от случайного фактора. Будем условно называть параметр t временем и считать, что t пробегает либо целые, либо действительные числа.

Пусть $\xi(t)$ – состояние системы в момент времени t, и пусть соблюдается закономерность: если в данный момент времени s система находится в фазовом состоянии i, то в последующий момент времени t будет находиться в состоянии j с некоторой вероятностью $p_{ij}(s,t)$ независимо от поведения системы до указанного момента s.

Вероятности

$$p_{ij}(s,t) = P\{\xi(t) = j / \xi(s) = i\} \quad (i, j = 1, 2, \ldots) \qquad (11.19)$$

называются *переходными вероятностями* марковской цепи $\xi(t)$.

Марковская цепь $\xi(t)$ называется *однородной*, если переходные вероятности $p_{ij}(s,t)$ зависят лишь от разности $t - s$:

$$p_{ij}(s,t) = p_{ij}(s-t) \ \ (i, j = 1, 2, \ldots).$$

Полным описанием однородной марковской цепи может служить квадратная матрица переходных вероятностей

$$\left[p_{ij}\right]_n = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}. \tag{11.20}$$

Очевидно, что для каждого состояния (номера шага) возможные переходы образуют полную группу событий, то есть $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Переходные вероятности, соответствующие невозможным переходам, равны нулю. Вероятности, расположенные по главной диагонали матрицы, соответствуют тому факту, что состояние системы не изменилось.

Дискретная марковская цепь называется *неоднородной*, если переходные вероятности меняются с изменением номера шага.

Отметим, что переход системы из одного состояния в другое в последовательных опытах может происходить непосредственно либо пошагово:

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij},\, p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}, \dots\, p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}^{(n-1)}. \tag{11.21}$$

В этом выражении верхний индекс указывает число шагов, за которые система из состояния i переходит в состояние j.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих свойства цепей маркова и матрицы переходных вероятностей.

ПРИМЕР 4. Имеется конечная марковская цепь с соответствующей матрицей вероятностей переходов

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 3/8 & 1/8 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Анализ данной матрицы переходных вероятностей свидетельствует о том, что не для каждого состояния существует отличная от нуля вероятность перехода в другое состояние. Более того, для данной системы существует тупиковое состояние, из которого ни в какое другое состояние перейти невозможно.

Класс эквивалентности (множество состояний) – это класс, в котором для каждой пары состояний существует отличная от нуля вероятность перехода из одного состояния в другое.

У нас три класса эквивалентности:

1) $\mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{III}, \quad \to \quad p_{13} = 1/6, \quad p_{31} = 1/4;$

2) $\mathrm{II} \Leftrightarrow \mathrm{V}, \quad \to \quad p_{25} = 3/4, \quad p_{52} = 1/3;$

3) $\mathrm{IV}; \qquad \to \quad p_{44} = 1.$

Рассмотрим переходы из первого класса эквивалентности во второй и третий. Обратный переход невозможен. Поэтому первый класс называется *устойчивым*.

Второй и третий классы находятся в равновесии и являются *замкнутыми*, то есть если система перешла в один из этих классов, то переход в другой класс невозможен. Эти два класса называются *эргодическими классами* эквивалентностей. Третий класс имеет единственное эргодическое состояние, называемое *поглощающим*. Марковская цепь, в которой каждое эргодическое состояние является поглощающим, называется *поглощающей цепью*.

ПРИМЕР 5. «Случайное блуждание».

Рассмотрим случайное блуждание частицы по целочисленным значениям действительной оси (прямой). Частица на каждом шаге с вероятностью p смещается на +1 и с вероятностью $q = 1 - p$ смещается на –1.

РЕШЕНИЕ. Пусть $\xi(n)$ – положение частицы через n шагов, тогда последовательность $\xi(0)$, $\xi(1)$, $\xi(2)$, … образует марковскую цепь. Если частица находится в какой-то точке i, то ее дальнейшее поведение не зависит от обстоятельств, предшествующих попаданию в точку i. За последующие n шагов частица с вероятностью $P_{ij}(n)$ переходит в соответствующее состояние j. Отметим очевидные свойства:

- При $|i - j| > n$ переход из состояния i в состояние j невозможен, тогда $P_{ij}(n) = 0$.

- За n шагов частица может перейти лишь в те состояния j, для которых выражение $|i - j|$ имеет ту же четность, что и n. Переход возможен только в те состояния, для которых число m является целым:

$$m = \left(n + |i - j|\right) / 2.$$

- Если $j \geq i$, то попасть в состояние j можно тогда и только тогда, когда из всех n шагов ровно m шагов совершается в положительном направлении. Вероятность этого события вычислим по формуле Бернулли:

$$P_{ij}(n) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

- Аналогично вычислим вероятность перехода из i в j, если $j \leq i$:

$$P_{ij}(n) = C_n^m p^{n-m} q^m.$$

11.5. Потоки событий (Пуассоновские потоки)

Под *потоком событий* понимается последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени (например, поток запросов к серверу базы данных, поток покупателей в магазине, поток клиентов в парикмахерской и т. п.).

Поток называется *ординарным*, если события происходят поодиночке. Интервалы $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ординарного потока могут быть одинаковыми или различными, дискретными или непрерывными, случайными или неслучайными (рис. 11.3).

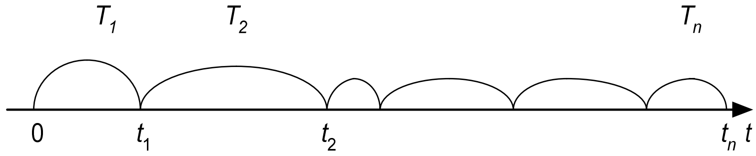


Рис. 11.3. Ординарный поток событий

Поток характеризуется интенсивностью λ – частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в систему массового обслуживания (СМО) в единицу времени.

Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени. Примером такого потока может служить поток входящих (выходящих) почтовых сообщений на персональном компьютере (почтовая программа соединяется с сервером через каждые 10, 20, … минут).

Поток случайных событий называется *пуассоновским*, если число m событий потока, попадаемых на любой участок τ оси времени, распределено по закону Пуассона

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \tag{11.22}$$

где a – среднее число событий, приходящихся на участок времени τ.

Пуассоновский поток является *стационарным*, если плотность потока событий $\lambda = \text{const}$, тогда среднее число событий $a = \lambda\tau$, и *нестационарным*, если $\lambda = \lambda(t)$, тогда

$$a = \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt. \tag{11.23}$$

Рассмотрим случайную величину T – интервал времени между соседними событиями в стационарном пуассоновском потоке – и определим ее функцию распределения: $F(\tau) = P(T < \tau)$. Выражение $T < \tau$ означает, что в интервале времени τ наблюдается хотя бы одно событие потока. Выразим $F(\tau)$ через $F_0(\tau)$ – вероятность того, что в интервале времени τ не наблюдается ни одного события потока:

$$F(\tau) = 1 - F_0(\tau) = 1 - \frac{a^0}{0!} \cdot e^{-a}. \qquad (11.24)$$

Таким образом, для стационарного пуассоновского потока функция распределения времени между соседними событиями и плотность распределения соответственно равны:

$$F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}; \qquad f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}. \qquad (11.25)$$

Из (11.25) следует, что интервал времени подчинен экспоненциальному (показательному) закону распределения, параметры которого равны: $m_\tau = \sigma_\tau = 1/\lambda$.

Если величины T_i являются зависимыми случайными величинами, то поток называется *потоком с последействием*, так как для любого момента времени последующее течение потока находится в вероятностной зависимости от предыдущего. Если СВ T_i независимы, то случайный поток называется *потоком с ограниченным последействием* и плотность вероятности системы можно представить в виде:

$$f(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n) = f(\tau_1) f(\tau_2) ... f(\tau_n). \qquad (11.26)$$

Таким образом, в случае стационарного пуассоновского потока все интервалы $T_1, T_2, ..., T_n$ имеют одинаковые законы распределения $f_i(\tau_i) = f(\tau_i)$, где $i = 1, 2, ..., n$, что является проявлением отсутствия последействия.

Случайный поток событий, который обладает свойством стационарности, ординарности и не имеет последействия, называется ***простейшим*** *и является стационарным пуассоновским потоком.*

ПРИМЕР 6. На кафедральный сервер поступает простейший поток запросов с интенсивностью λ = 0,3 запроса в минуту. Какова вероятность того, что за 5 минут: **a)** не придет ни одного запроса; **b)** придет ровно 5 запросов; **c)** придет хотя бы один запрос?

РЕШЕНИЕ. Случайная величина X – число запросов к кафедральному серверу за пять минут – распределена по закону Пуассона, параметр которого равен: $a = \lambda\tau = 0{,}3 \cdot 5 = 1{,}5$.

a) Вероятность того, что за 5 минут не придет ни одного запроса $(m = 0)$ вычислим по формуле (11.22): $P_0(5) = e^{-1{,}5} = 0{,}2231$.

b) Вероятность пяти запросов $(m = 5)$: $P_5(5) = \frac{1{,}5^5}{5!} \cdot e^{-1{,}5} = 0{,}01412$.

c) Вероятность хотя бы одного запроса:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}2231 = 0{,}7769.$$

Для простейшего потока с интенсивностью λ вероятность попадания на элементарный (малый) отрезок времени Δt хотя бы одного события потока равна согласно (11.25):

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t. \qquad (11.27)$$

Данная формула получается при разложении экспоненты в ряд Тейлора по степеням Δt, причем ограничились только двумя первыми членами ряда. Понятно, что формула будет тем точнее, чем меньше Δt.

11.6. Непрерывный марковский процесс. Уравнения Колмогорова

Рассмотрим систему S, в которой происходит марковский СП с дискретными состояниями $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Если переходы системы из состояния в состояние происходит не в фиксированные моменты t_0, t_1, t_2, …, а в случайные моменты времени (что чаще встречается в реальных задачах), то такой процесс называется *марковским процессом с дискретными состояниями и непрерывным временем*.

Марковские СП данного типа применяются при исследовании (моделировании) реальных СМО. Состояние системы будем характеризовать числом требований (заявок) на обслуживание, находящихся в системе. Предположим, что переходы системы из состояния S_i в состояние S_j осуществляются под воздействием пуассоновского потока с интенсивностью $\lambda_{ij} = \text{const}$.

Граф состояний системы с проставленными у стрелок интенсивностями называется *размеченным* (рис. 11.4).

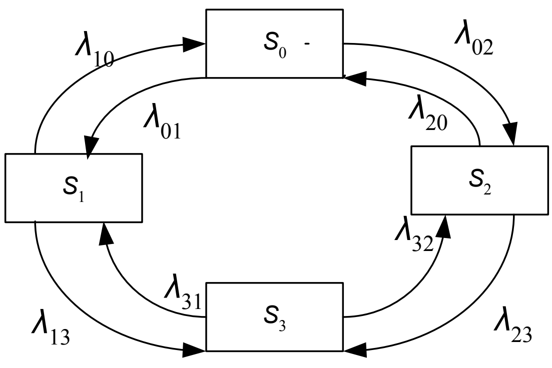


Рис. 11.4. Размеченный граф СМО с четырьмя состояниями

Вероятностью i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента t сумма вероятностей всех состояний системы равна единице:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(t) = 1. \qquad (11.28)$$

Для нахождения этих вероятностей $p_i(t)$ (вероятностей состояния системы $S_0, S_1, S_2, ..., S_n$) нужно решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений – *уравнений Колмогорова*:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = p_i' = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{ji} \cdot p_j(t) - p_i(t) \cdot \sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij}, \quad (i = \overline{0, n}) \qquad (11.29)$$

с начальными условиями $p_0(0), \ldots, p_n(0)$; $p_i(0) \geq 0$ и условием нормировки (11.28).

***Правила составления уравнений Колмогорова*:**

- В левой части каждого уравнения стоит производная вероятности i-го состояния.
- В правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых направлены стрелки в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков событий минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния (стрелки потоков выходят из i-го состояния), умноженная на вероятность данного состояния.

Учитывая (11.29), или, что эквивалентно, вышесформулированные правила, запишем систему уравнений для СМО S (рис. 11.4):

$$\begin{cases} p_0' = \lambda_{10} p_1 + \lambda_{20} p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) p_0, \\ p_1' = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{31} p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13}) p_1, \\ p_2' = \lambda_{02} p_0 + \lambda_{32} p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23}) p_2, \\ p_3' = \lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) p_3. \end{cases} \qquad (11.30)$$

В системе (11.30) независимых уравнений на единицу меньше общего числа уравнений. Поэтому для решения системы необходимо добавить уравнение (11.28). Естественно предположить, что в начальный момент времени СМО находится в состоянии S_0, то есть начальные условия равны: $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0$.

Уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности как *функции времени*. Однако особый интерес представляют вероятности системы $p_i(t)$ в *предельном стационарном режиме*, то есть при

$t \to \infty$, которые называются *предельными* (*финальными*) вероятностями состояний.

Показано, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (*за конечное число шагов*) *перейти в любое другое состояние, то предельные состояния существуют.*

Предельная вероятность состояния S_i имеет четкий смысл: она равна *среднему относительному времени пребывания системы в этом состоянии*. Например, если предельная вероятность состояния S_0 равна 0,5 (p_0 = 0,5), то это значит, что в среднем 50 % времени система находится в состоянии S_0.

Так как предельные вероятности постоянны, то, заменяя в уравнениях Колмогорова (11.29) их производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), описывающих стационарный режим. Для СМО, граф состояний которой представлен на рис. 11.4, СЛАУ примет вид:

$$\begin{cases} (\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0 = \lambda_{10}p_1+\lambda_{20}p_2, \\ (\lambda_{10}+\lambda_{13})p_1 = \lambda_{01}p_0+\lambda_{31}p_3, \\ (\lambda_{20}+\lambda_{23})p_2 = \lambda_{02}p_0+\lambda_{32}p_3, \\ (\lambda_{31}+\lambda_{32})p_3 = \lambda_{13}p_1+\lambda_{23}p_2. \end{cases} \tag{11.31}$$

ПРИМЕР 7. Найти предельные вероятности для системы *S*, граф состояний которой представлен на рис. 11.4 при следующих интенсивностях потоков: $\lambda_{01}=1, \lambda_{02}=2, \lambda_{10}=2, \lambda_{13}=2, \lambda_{20}=3, \lambda_{23}=1, \lambda_{31}=3, \lambda_{32}=2.$

РЕШЕНИЕ. СЛАУ, описывающих стационарный режим для данной системы (11.31) с учетом значений интенсивностей потоков, можно представить:

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1+3p_2, \\ 4p_1 = p_0+3p_3, \\ 4p_2 = 2p_0+2p_3, \\ p_0+p_1+p_2+p_3=1. \end{cases} \tag{11.32}$$

Здесь вместо одного «лишнего» уравнения системы (11.31) *учли условие нормировки* (11.28).

Решив систему (11.32), получим:

$p_0 = 6/15, p_1 = 3/15, \; p_2 = 4/15, p_3 = 2/15.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подготовка современных, грамотных специалистов по компьютерным технологиям, в частности по направлению «Информационные системы и технологии» (профиль подготовки «Геоинформационные системы, информационные системы в технологии и бизнесе»), требует глубоких базовых знаний сетевых технологий, методов разработки и эксплуатации баз данных и знаний, технологии проектирования вычислительных информационных систем и программ и многого другого. Однако для успешного усвоения всех этих дисциплин необходимы знания основ теории вероятностей. При автоматизации измерений (разработке и программировании микроконтроллеров) не обойтись без навыков статистической обработки экспериментальных данных. Компьютерное моделирование, проектирование и разработка компьютерных систем и сетей (СМО) немыслимо без знания теории случайных процессов (СП). Исходя из всего вышесказанного, данная дисциплина (учебник) может рассматриваться как первый шаг к дальнейшему усвоению и углублению профессиональных знаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / под ред. В.А. Колемаева. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 303 с. – (Серия «Высшее образование»).
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2003. – 480 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2004. – 404 с.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2002. – 543 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 288 с. – (Высшее образование).

Дополнительная

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.
2. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы). – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973. – 496 с.
3. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
4. Розанов Ю.А. Случайные процессы (краткий курс). – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971. – 288 с.

Учебное издание

КАЦМАН Юлий Янович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Учебник

Научный редактор *доктор технических наук,*
профессор В.Г. Спицын

Выпускающий редактор *Д.В. Заремба*
Редактор *В.Ю. Пановица*
Компьютерная верстка *В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 28.02.2013. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 7,62. Уч.-изд. л. 6,89.
Заказ 193-13. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru