СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Л. И. ВЕРЕИНА, М. М. КРАСНОВ

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УЧЕБНИК

*Рекомендовано
Федеральным государственным учреждением
«Федеральный институт развития образования»
в качестве учебника для использования
в учебном процессе образовательных учреждений,
реализующих программы среднего профессионального
образования по техническим специальностям*

*Регистрационный номер рецензии 036
от 12 марта 2010 г. ФГУ «ФИРО»*

7-е издание, стереотипное

ACADEMA

Москва
Издательский центр «Академия»
2013

УДК 624.04(075.32)
ББК 30.12я723
В313

Рецензенты:
зам. генерального директора ОАО «ЭНИМС»,
д-р техн. наук, проф. *Б.И.Черпаков*;
ст. преподаватель МГТУ им. К.Э.Циолковского
Б.И.Архангельский;
преподаватель высшей квалификационной категории,
Почетный работник СПО, зам. директора по учебно-воспитательной работе
ГОУ СПО «Московский политехнический колледж»
Е.Ю.Нетужилкина

Вереина Л.И.
В313 Техническая механика : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Л.И.Вереина, М.М.Краснов. — 7-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2013. — 352 с.
ISBN 978-5-4468-0036-0

Учебник предназначен для изучения предмета «Техническая механика» и является частью учебно-методического комплекта по дисциплинам общепрофессионального цикла для технических специальностей.

Изложены основы теоретической механики, сопротивления материалов, деталей и механизмов машин; даны примеры расчетов. Приведены сведения об основных способах изменения механических свойств материалов и тенденции развития конструкций машин и механизмов.

Учебник может быть использован при изучении общепрофессиональной дисциплины ОП.02 «Техническая механика» в соответствии с ФГОС СПО по специальностям технического профиля.

Для студентов учреждений среднего профессионального образования.

УДК 624.04(075.32)
ББК 30.12я723

ISBN 978-5-4468-0036-0

Уважаемый читатель!

Данный учебник является частью учебно-методического комплекта по специальностям технического профиля.

Учебник предназначен для изучения общепрофессиональной дисциплины «Техническая механика».

Учебно-методические комплекты нового поколения включают в себя традиционные и инновационные учебные материалы, позволяющие обеспечить изучение общеобразовательных и общепрофессиональных дисциплин и профессиональных модулей. Каждый комплект содержит учебники и учебные пособия, средства обучения и контроля, необходимые для освоения общих и профессиональных компетенций, в том числе и с учетом требований работодателя.

Учебные издания дополняются электронными образовательными ресурсами. Электронные ресурсы содержат теоретические и практические модули с интерактивными упражнениями и тренажерами, мультимедийные объекты, ссылки на дополнительные материалы и ресурсы в Интернете. В них включен терминологический словарь и электронный журнал, в котором фиксируются основные параметры учебного процесса: время работы, результат выполнения контрольных и практических заданий. Электронные ресурсы легко встраиваются в учебный процесс и могут быть адаптированы к различным учебным программам.

Учебно-методический комплект разработан на основании Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования с учетом его профиля.

Основные используемые обозначения

F — сила
M — момент
f — коэффициент трения скольжения
k — коэффициент трения качения
m — масса
v — линейная скорость
a — линейное ускорение
ω — угловая скорость
ε — угловое ускорение
U — перемещение
A — работа
N — мощность
η — коэффициент полезного действия
J — момент инерции
$\bar{S}$ — импульс силы
L — момент количества движения
T — кинетическая энергия
σ — нормальное напряжение
τ — касательное напряжение
S — площадь поперечного сечения
E — модуль упругости первого рода
μ — коэффициент Пуассона
G — модуль упругости второго рода (модуль упругости при сдвиге)
W_p — полярный момент сопротивления
s_x — статический момент относительно оси x
n — коэффициент запаса
R — коэффициент асимметрии цикла
λ — гибкость стержня
HRC — обозначение твердости по Роквеллу (шкала С)
HB — обозначение твердости по Бринеллю
HV — обозначение твердости по Виккерсу
t — шаг цепи
P — шаг резьбы
i — передаточное отношение
u — передаточное число
z — число зубьев
δ % — относительное удлинение при разрыве образца

Введение

Механика — одна из древнейших наук. Она развивалась по мере накопления человечеством знаний об окружающем мире, своевременно отвечая на многочисленные запросы практики. В Древнем Египте при строительстве пирамид уже пользовались рычагами, наклонными плоскостями, блоками. Эмпирические знания помогли открыть законы механики. В древности не существовало деления науки по отраслям, поэтому механика, как и философия, естествознание, являлась составной частью учения о природе и обществе. И только в IV в. до н. э. начинается отделение частных наук от общего естествознания.

Основоположником механики как науки считают Архимеда (ок. 287—212 гг. до н. э.); он получил точное решение задач о равновесии сил, приложенных к рычагу, об определении центра тяжести тел.

В эпоху Возрождения (XIV—XVI вв.) большой вклад в развитие механики сделал знаменитый итальянский художник, ученый и инженер Леонардо да Винчи (1452—1519). Он изучал трение скольжения, движение падающего тела, впервые ввел понятие момента силы.

Благодаря великому открытию Николая Коперника (1473—1543) был совершен переворот в естествознании: на смену геоцентрической системе Птолемея пришла гелиоцентрическая система мира. На основании учения Коперника И. Кеплер (1571—1630) сформулировал три закона движения планет, которые впоследствии привели к открытию Ньютоном закона всемирного тяготения. Начало изучению основ динамики положили работы итальянца Галилео Галилея (1564—1642) и англичанина Исаака Ньютона (1643—1727).

В XVIII в. были сформулированы общие принципы классической механики. К этому же времени относятся исследования в области механики твердого тела, гидродинамики и небесной механики.

В России в 1725 г. по инициативе Петра I была образована Российская академия наук. Большое влияние на развитие механики оказали труды академика М. В. Ломоносова (1711—1765), а также знаменитого математика, астронома и физика, швейцарца по происхождению, Леонарда Эйлера (1707—1783), проработавшего в Российской академии наук более 30 лет. Среди его многочисленных работ в области математики, гидромеханики и небесной механики следует отметить исследования по механике твердого и упругого тела. Эйлер заложил основы только зарождающихся дисциплин — сопротивления материалов и теории упругости.

Наиболее крупными зарубежными учеными XVIII и XIX вв. в области механики являются Иоганн Бернулли, Даниил Бернулли, Д'Аламбер, Ж. Лагранж. В работах французских ученых Вариньона и Пуансо наряду с динамикой получила дальнейшее развитие и статика.

Огромное значение для дальнейшего развития механики имели работы отечественных ученых XIX и XX вв.: М. В. Остроградского, П. Л. Чебышева, С. В. Ковалевской, А. М. Ляпунова, И. В. Мещерского, К. Э. Циолковского, А. Н. Крылова, Н. Е. Жуковского и др.

Современное развитие машиностроения требует решения специальных задач. Бурно развивается наука о прочности и деформируемости элементов сооружений и деталей машин — сопротивление материалов. В отличие от теоретической механики, предметом изучения которой является движение абсолютно твердого тела под воздействием приложенных к нему сил, в сопротивлении материалов рассматривают задачи, в которых наиболее существенными являются свойства деформируемых тел. В то же время вследствие общности основных положений сопротивление материалов может рассматриваться как раздел механики, который можно назвать механикой деформируемых тел.

В курсе «Детали машин» на базе теоретической механики и сопротивления материалов изучают особенности расчета и принципы конструирования отдельных элементов и простейших соединений машин.

В соответствии со стандартом «Техническая механика» включает в себя главы «Теоретическая механика», «Сопротивление материалов», «Детали и механизмы машин».

В главе 1 «Теоретическая механика» изложены основы статики, кинематики, динамики и приведены примеры решения задач.

В главе 2 «Основы сопротивления материалов» даются общие принципы расчета элементов конструкций; приводятся примеры расчетов бруса на растяжение (сжатие), срез и смятие, поперечный изгиб. В этой главе рассматриваются виды напряженных состояний, гипотезы прочности, совместное действие кручения и изгиба. Даются понятия об усталостной прочности, динамических нагрузках и пределе выносливости; рассматривается устойчивость при осевом сжатии стержня. Приводятся примеры раскрытия статической неопределимости стержневых систем.

В главе 3 «Детали и механизмы машин» рассматриваются основные соединения деталей машин, передачи и механизмы; даются рекомендации по использованию тех или иных передач; приводятся примеры расчетов.

В главе 4 «Изменение механических свойств материалов» изложен материал, способствующий углублению и расширению знаний, полученных студентами в курсе «Материаловедение».

В конце каждой главы приведены контрольные вопросы. Они помогут студентам проанализировать изложенный материал и проверить свои знания.

В данном учебнике изложен минимум общетехнических сведений, усвоив которые, молодой техник будет уверенней чувствовать себя на производстве и сможет принимать самостоятельные решения в процессе творческого труда или дальнейшей учебы.

Глава 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

Теоретическая механика — это наука, которая изучает механическое движение тел и устанавливает общие законы этого движения. Теоретическая механика подразделяется на статику, кинематику и динамику.

Статика — это раздел теоретической механики, в котором изучаются законы приведения и условия равновесия сил, действующих на материальные точки. Встречающиеся в природе материальные тела обладают способностью под действием приложенных сил в той или иной мере деформироваться, т. е. менять форму вследствие изменения взаимного расположения образующих их частиц. Однако у большинства твердых тел (изготовленных из металлов, дерева) в нормальных условиях эти деформации пренебрежимо малы. Учет их приобретает практическое значение только при рассмотрении вопроса прочности соответствующих конструкций, что является предметом изучения дисциплины «Сопротивление материалов». При рассмотрении же общих условий равновесия деформациями большинства твердых тел в первом приближении можно пренебречь. В связи с этим в механике вводится понятие «абсолютно твердое тело».

Абсолютно твердым телом называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается неизменным. На рис. 1.1 показано тело, у которого расстояние $AB = \text{const}$.

В статике мы будем рассматривать все тела как абсолютно твердые, в дальнейшем для краткости называя их твердыми телами или просто телами.

Другим основным понятием в статике является понятие силы. ***Силой*** называется векторная величина, представляющая собой меру механического воздействия одних тел на другие. Что же такое механическое воздействие?

Механическим воздействием называется такое взаимодействие материальных тел, в результате которого с течением времени происходит изменение взаимного положения этих тел в пространстве (механическое движение) или изменение взаимного положения частиц этих тел (деформация). Например, при штамповке деталей верхний штамп, падая, останавливается в результате взаимодействия с нижним штампом. Если же между ними положить заготовку, то в результате такого взаимодействия происходит деформация заготовки.

Итак, сила $\overline{F}$ как векторная величина имеет модуль F, точку приложения A и направление (линию действия силы) (рис. 1.2). Проекции вектора силы $\overline{F}$ на оси координат определяются следующим образом:

на ось Ox

$$F_x = F\cos\alpha;$$

на ось Oy

$$F_y = F\cos\beta.$$

Модуль вектора $\overline{F}$, т.е. значение силы, определяется по теореме Пифагора:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

Введем следующие определения.

Материальной точкой называется абсолютно твердое тело, размерами которого можно пренебречь, мысленно сосредоточив всю массу этого тела в точке. Например, движение спутника вокруг планеты можно рассматривать как движение материальной точки, так как размеры спутника ничтожно малы по сравнению с размерами планеты.

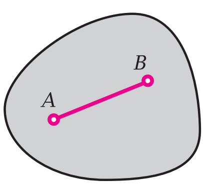


Рис. 1.1

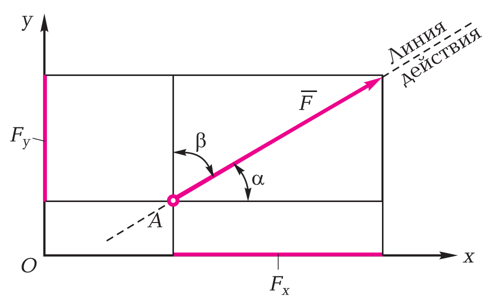


Рис. 1.2

Системой сил называется совокупность нескольких сил, действующих на данное тело.

Две системы называются ***эквивалентными***, если, действуя на одно и то же твердое тело, они производят одинаковое механическое воздействие.

Силы, действующие на тело со стороны других материальных тел, называются ***внешними силами***. Силы, действующие на части данного тела со стороны других частей этого же тела, называются ***внутренними силами***.

Если под действием данной системы сил свободное тело находится в покое, то такая система сил называется ***уравновешенной***, или ***системой***, ***эквивалентной нулю***.

Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется ***равнодействующей*** данной системы сил.

Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной точке, называется ***сосредоточенной*** силой. Силу, действующую на определенную часть поверхности тела, называют ***распределенной***.

Все теоремы и уравнения статики базируются на нескольких исходных положениях, принимаемых без математических доказательств и называемых аксиомами. Аксиомы статики представляют собой результат знаний, накопленных человечеством, и отражают объективные процессы. Справедливость этих аксиом подтверждается многочисленными опытами и наблюдениями.

Аксиома 1. Две силы ($\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$), действующие на свободное абсолютно твердое тело, находятся в равновесии тогда и только тогда, когда они равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.3).

Аксиома 2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

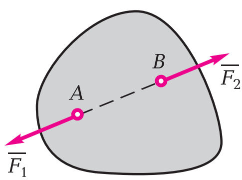


Рис. 1.3

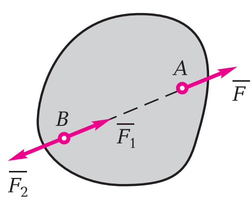


Рис. 1.4

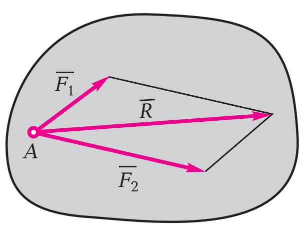


Рис. 1.5

Следствие из аксиом 1 и 2: точку приложения силы, действующей на абсолютно твердое тело, можно переносить вдоль ее линии действия в любую другую точку тела. Предположим, что в точке A к твердому телу приложена сила $\overline{F}$ (рис. 1.4). Приложим в точке B две силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, равные по модулю силе $\overline{F}$ и направленные по ее линии действия в противоположные стороны. По аксиоме 2 можно отбросить уравновешенную систему сил $\overline{F}$ и $\overline{F}_2$. В результате на тело теперь действует сила $\overline{F}_1$, равная силе $\overline{F}$, но приложенная в точке B.

Аксиома 3. Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, являющуюся диагональю параллелограмма построенного на этих силах как на сторонах. Вектор $\overline{R}$ (рис. 1.5) представляет собой геометрическую сумму векторов $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2.$$

Из аксиомы 3 следует, что равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, равна их геометрической сумме и приложена в той же точке.

Аксиома 4. Два материальных тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположно направленными. Такая система сил не является уравновешенной, так как силы приложены к разным телам.

Аксиома 5. Если деформируемое тело находится в равновесии под действием данной системы сил, то равновесие не нарушится, если тело станет абсолютно твердым.

Эта аксиома называется аксиомой затвердевания. Из аксиомы 5 следует, что это условие, являясь необходимым и для абсолютно твердого тела, и для деформируемого, не является для последнего достаточным. В главе 2 данного учебника будет рассматриваться достаточность равновесия деформируемых тел.

1.2. СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Тело, которое может совершать любые перемещения в пространстве, называется ***свободным***. Примерами свободного тела могут служить самолет или снаряд, летящие в воздухе. В различного рода сооружениях и конструкциях мы обычно встречаемся с телами, на перемещения которых наложены ограничения. Такие тела называются ***несвободными***. Тело, ограничивающее свободу движения твердого тела, является по отношению к нему ***связью***. Если приложенные к телу силы будут стремиться сдвинуть его в том или ином направлении, а связь препятствует такому перемещению, то тело будет воздействовать на связь с ***силой давления на связь***. По аксиоме 4 связь будет действовать на тело с такой же силой, но противоположно направленной. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тому или иному перемещению, называется ***силой реакции*** связи.

Из изложенного следует **принцип освобождаемости** твердого тела от связи, или **аксиома связи**: всякое несвободное тело (рис. 1.6, *а*) можно рассматривать как свободное, если мысленно отбросить наложенные на тело связи и приложить вместо них силы реакции этих связей (рис. 1.6, *б*).

Силы, действующие на тела, будем разделять на заданные, или активные силы, и реакции связей, или пассивные силы.

Активные силы характеризуются тем, что модуль и направление каждой силы наперед известны и не зависят от действия других приложенных к данному телу сил. Примерами активных сил могут служить мускульная сила человека, сила тяжести, сила сжатой пружины.

Реакции связи на покоящееся тело возникают лишь в тех случаях, когда это тело под действием активных сил оказывает давление на связь, поэтому они и называются ***пассивными силами***. По аксиоме связи реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Следовательно, если известно, в каком направлении связь препятствует перемещению твердого тела, то известно и направление реакции связи.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы связей.

1. ***Гладкая поверхность или плоскость.*** Гладкой будем называть такую поверхность, на которой в первом приближении можно пренебречь трением. Связь в виде гладкой поверхности не дает телу перемещаться только в одном направлении — перпендикулярном к этой поверхности. Поэтому реакция гладкой поверхности $\overline{N}$ направлена по нормали к этой поверхности и приложена к телу в точке касания (см. рис. 1.6, *б*). На рис. 1.6, *б* тело изображено освобожденным от связи. В дальнейшем при рассмотрении равновесия несвободного тела реакцию связи будем изобра-

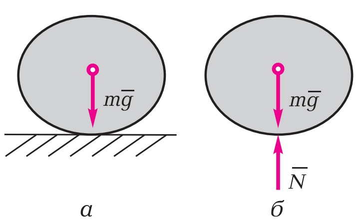


Рис. 1.6

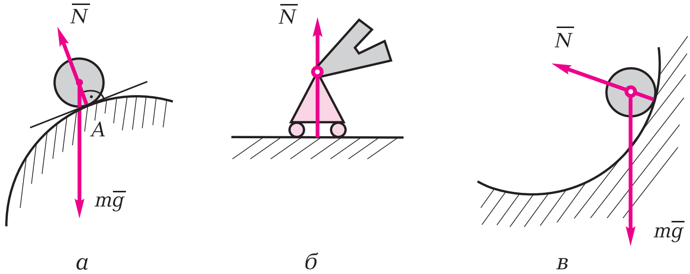


Рис. 1.7

жать так, как показано на рис. 1.7, не перерисовывая его. На этом рисунке показаны связи в виде гладких выпуклой (рис. 1.7, *а*) и вогнутой (рис. 1.7, *в*) поверхностей, а на рис. 1.7, *б* и 1.8, *б*, *в* — в виде плоской гладкой поверхности.

2. ***Гладкая опора.*** Связь, осуществленная в виде гладкой опоры, не дает телу перемещаться в направлении, перпендикулярном к поверхности тела в точке опоры (рис. 1.8). Видно, что реакция гладкой опоры направлена по нормали к опирающейся поверхности и приложена к телу в точках касания A, B, C и D.

3. ***Нить.*** Связь, осуществляемая в виде гибкой нити (рис. 1.9), не позволяет телу удаляться от точки привеса A, поэтому реакция связи T всегда направлена вдоль нити к точке ее закрепления.

4. ***Цилиндрический шарнир.*** На рис. 1.10 изображена шарнирно неподвижная опора вала, ось которого проходит через шарнир A перпендикулярно к плоскости чертежа. Цилиндрический шарнир A допускает вращение вала, но препятствует его перемещению в плоскости xOy, поэтому реакция цилиндрического шарнира $\overline{R}$ расположена в плоскости, перпендикулярной оси возможного враще-

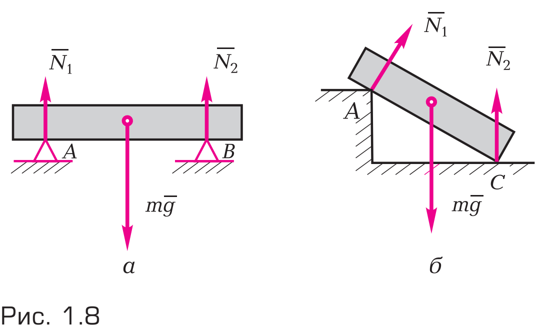


Рис. 1.8

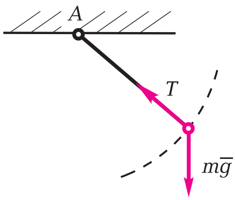


Рис. 1.9

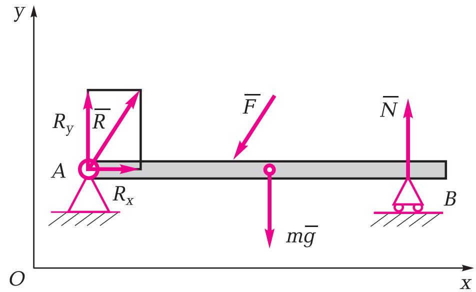


Рис. 1.10

ния, и ее направление определяют две взаимно-перпендикулярные проекции на оси Ox и Oy.

5. ***Невесомый стержень.*** Жесткий невесомый (массой его пренебрегают) стержень, шарнирно прикрепленный к телу (рис. 1.11, *а*), испытывает действие только двух сил, приложенных в шарнирах A и B (рис. 1.11, *б*). Как и вся конструкция, стержень AB находится в равновесии. Если стержень находится в равновесии под действием двух сил, то в соответствии с аксиомой 1 статики эти силы должны быть равны по модулю, но противоположно направлены по одной линии действия, т. е. $\overline{R}_1 = -\overline{R}_2$, а их модули $R_1 = R_2 = R$. В отличие от нити стержень может действовать на тело в двух направлениях, испытывая либо сжатие (см. рис. 1.11, *б*), либо растяжение.

6. ***Жесткая заделка.*** Заделка (рис. 1.12) исключает возможность любых перемещений вдоль осей Ox и Oy, а также поворот в плоскости xOy, поэтому такую связь заменяют реакцией $\overline{R}$ (или ее проекциями R_x и R_y) и моментом в заделке M_A.

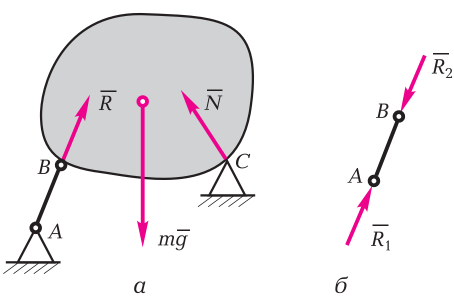


Рис. 1.11

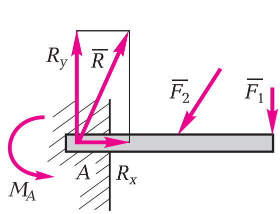


Рис. 1.12

1.3. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости, называется ***плоской***.

Плоскую систему могут образовывать произвольно расположенные силы, пары сил и силы, сходящиеся в одной точке. Рассмотрим равновесие системы сходящихся сил.

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис. 1.13, *а*). Существуют два способа сложения сходящихся сил: геометрический (рис. 1.13, *б*) и аналитический (рис. 1.13, *в*).

Геометрический способ сложения сходящихся сил. От произвольной точки O откладываем вектор, равный силе $\overline{F}_1$; от конца $\overline{F}_1$ откладываем вектор, равный силе $\overline{F}_2$, и т. д. (см. рис. 1.13, *а*, *б*). Затем, соединяя начало вектора $\overline{F}_1$ с концом последнего $\overline{F}_4$, получаем равнодействующую всех сил. Построенная фигура называется ***силовым многоугольником***.

Аналитический способ сложения сходящихся сил. Проецируя векторное равенство $\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3=\overline{R}$ на оси координат (см. рис. 1.13, *в*), получим два алгебраических равенства:

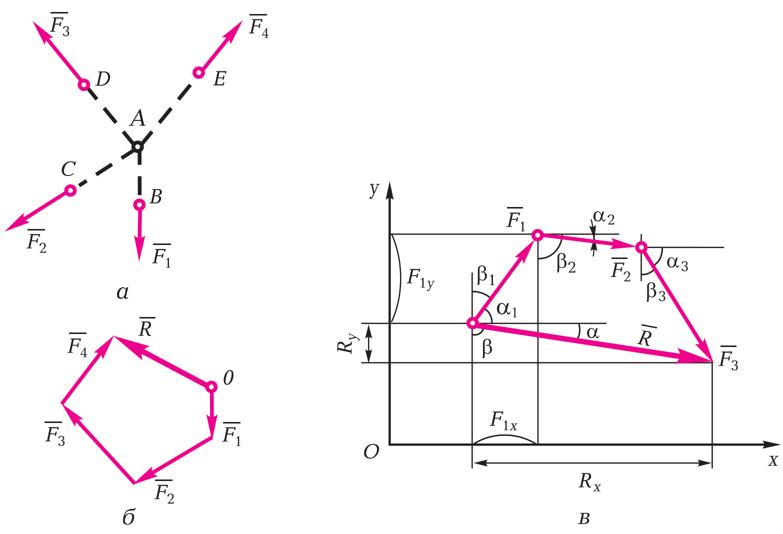


Рис. 1.13

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = R_x;$$
$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = R_y,$$

или

$$F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 = R\cos\alpha;$$
$$F_1 \cos\beta_1 - F_2 \cos\beta_2 - F_3 \cos\beta_3 = -R\cos\beta.$$

Отсюда определим значение равнодействующей всех сходящихся сил

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

и направление вектора $\overline{R}$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}.$$

Условием равновесия системы сходящихся сил является равенство нулю модуля равнодействующей $\overline{R}$, т. е. силовой многоугольник должен быть замкнут (при геометрическом способе сложения) или проекции равнодействующей силы на оси координат должны быть равны нулю ($R_x = R_y = 0$) (при аналитическом способе). Отсюда для плоской системы сходящихся сил получим два уравнения равновесия

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0.$$

Следовательно,

для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из осей координат была равна нулю.

Пример 1.1

Определить натяжение нитей, удерживающих тело весом 5 Н в равновесии (рис. 1.14, *а*).

Решение.

При решении задач статики следует придерживаться определенной последовательности. В данном примере подробно изложен порядок решения задач такого типа.

1. Сделать схематический чертеж конструкции. Выбрать объект (узел, стержень или твердое тело), равновесие которого следует рассмотреть, причем искомые и заданные величины должны быть с ним связаны. В данной задаче исходные данные (вес, углы α и β) и искомые величины (натя-

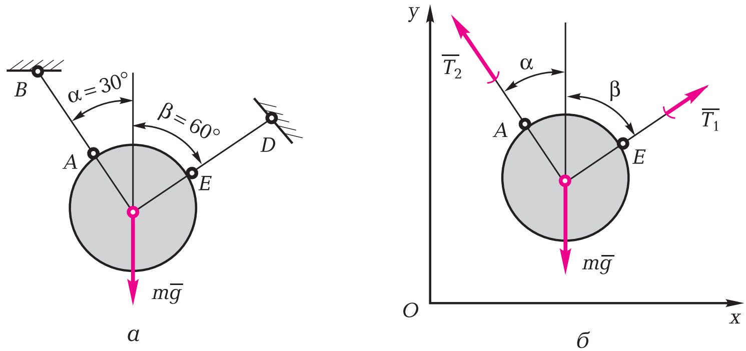


Рис. 1.14

жение нитей) связаны с телом весом 5 Н, т. е. оно является объектом равновесия.

2. Освободиться от связей и приложить к рассматриваемому объекту равновесия все активные и пассивные силы. К этому этапу решения задачи следует отнестись особенно внимательно. Уравнения равновесия, изучаемые в статике, приводятся только для свободных тел, поэтому следует хорошо обдумать, какие реакции связей при освобождении от последних нужно проставить на чертеже.

В данном случае связями являются нити *AB* и *ED*. При освобождении от связей заменяем их соответственно натяжениями нитей T_2 и T_1 (рис. 1.14, *б*).

3. Проанализировать полученную систему сил. Тело находится в равновесии под действием плоской системы сходящихся сил (линии их действия пересекаются в центре шара). Для такой системы сил можно записать два уравнения равновесия. Число неизвестных в этих уравнениях также равно двум, следовательно, задача статически определима.

4. Записать условия равновесия в векторной (графической) или аналитической форме. Найти неизвестные величины.

В данной задаче используем аналитический метод решения. Записываем уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\sum_{i=1}^{3} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{3} F_{iy} = 0;$$
$$-T_2 \cos 60° + T_1 \cos 30° = 0;$$
$$T_2 \cos 30° + T_1 \cos 60° - mg = 0.$$

Решив полученную систему уравнений, вычислим натяжение нитей:

$$T_1 = 2{,}5 \text{ Н}; \quad T_2 = 4{,}34 \text{ Н}.$$

Момент силы относительно точки

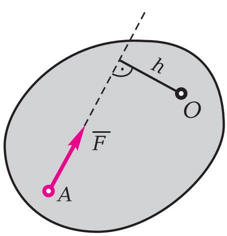
Сила, действующая на тело, может не только поступательно смещать его, но и поворачивать вокруг какой-нибудь точки. Пусть сила $\overline{F}$, приложенная в точке A, стремится повернуть тело вокруг точки O (рис. 1.15). Поскольку силу можно переносить по линии ее действия, то вращательный эффект этой силы не зависит от того, в какой точке эта сила приложена, а определяется расстоянием h от точки O до линии действия силы.

Моментом силы F относительно некоторого центра O называется величина, равная произведению силы на кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы и взятая с соответствующим знаком. Знак «+» соответствует моменту силы, которая стремится повернуть тело вокруг точки O против хода часовой стрелки, а знак «–» — если сила стремится повернуть тело по направлению движения часовой стрелки. Если линия действия силы проходит через точку, то момент силы относительно этой точки равен нулю.

Перпендикуляр, опущенный из точки O на линию действия силы $\overline{F}$, называется ее ***плечом относительно центра O***.

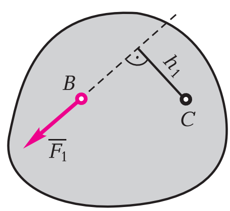
Система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил, приложенных к телу (рис. 1.16, *а*), называется ***парой сил***.

Плечом пары h (см. рис. 1.16, *а*) называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару. ***Моментом пары сил*** называется взятое со знаком «+» или «–» произведение модуля одной из сил на плечо пары.



$\mathrm{mom}_O(\overline{F}) = -hF$

а



$\mathrm{mom}_C(\overline{F}_1) = +h_1F_1$

б

Рис. 1.15

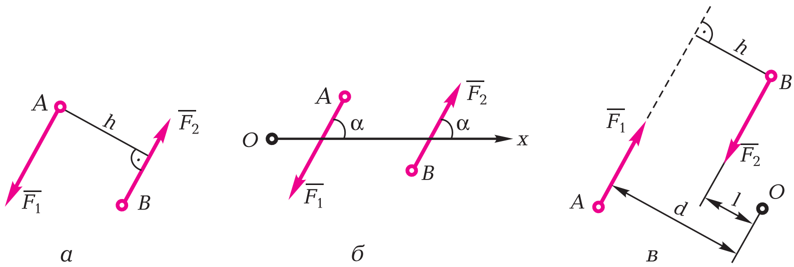


Рис. 1.16

Свойства пары сил. 1. Сумма проекций на любую ось сил, образующих пару, равняется нулю (рис. 1.16, *б*):

$$F_2\cos\alpha - F_1\cos\alpha = 0.$$

Следовательно, пару сил нельзя заменить равнодействующей.

Пример 1.2

Вычислить моменты пар сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ (см. рис. 1.16, *а* и *в*), учитывая, что $F_1 = F_2 = F$.

Решение.

Момент пары сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, представленных на рис. 1.16, *а*:

$$\mathrm{mom}(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = +F_1h = +Fh.$$

Момент пары сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, представленных на рис. 1.16, *в*:

$$\mathrm{mom}(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = -F_1h = -Fh.$$

2. Сумма моментов сил, образующих пару, относительно любой точки плоскости, в которой расположена пара, равняется моменту пары (см. рис. 1.16, *в*):

$$\mathrm{mom}_O(\overline{F}_1) = -F_1d = -Fd;$$

$$\mathrm{mom}_O(\overline{F}_2) = +F_2l = +Fl;$$

$$\mathrm{mom}_O(\overline{F}_1) + \mathrm{mom}_O(\overline{F}_2) = -Fd + Fl = -(d - l)F = -Fh.$$

Приведение плоской системы сил к заданному центру

Пусть на твердое тело действует система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ (рис. 1.17, *а*).

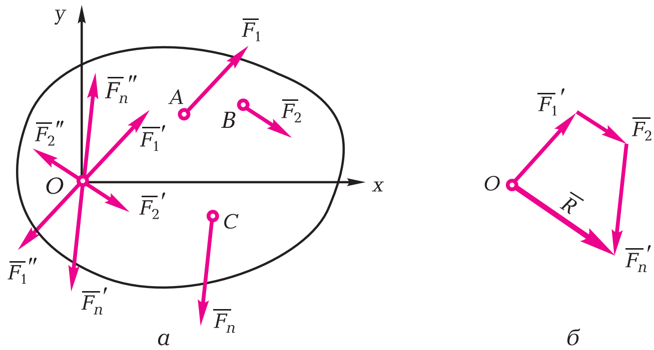


Рис. 1.17

Приложим в точке O по две уравновешенные силы, одна из которых будет равна и параллельна заданной: $\overline{F}_1' = \overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n' = \overline{F}_n$, а другая — равна, но направлена в противоположную сторону: $\overline{F}_1'' = -\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n'' = -\overline{F}_n$.

Теперь на тело действуют система сходящихся сил $\overline{F}_1', \overline{F}_2', \ldots, \overline{F}_n'$ и система пар сил с моментами $m_1 = \mathrm{mom}(\overline{F}_1\overline{F}_1'')$, $m_2 = \mathrm{mom}(\overline{F}_2\overline{F}_2'')$, ..., $m_n = \mathrm{mom}(\overline{F}_n\overline{F}_n'')$. Систему сходящихся сил заменяем равнодействующей (рис. 1.17, *б*): $\overline{R} = \overline{F}_1' + \overline{F}_2' + \ldots + \overline{F}_n'$, или (что вытекает из равенства $\overline{F}_1 = \overline{F}_1'$ и т. д.) $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n$. В соответствии со вторым свойством пары сил найдем алгебраическую сумму моментов всех пар:

$$M_O = m_1 + m_2 + \ldots + m_n.$$

Результат этих преобразований сформулирован в лемме Пуансо:

> Произвольную плоскую систему сил можно заменить одной силой, равной геометрической сумме всех сил, приложенных в произвольно выбранном центре, и моментом, равным алгебраической сумме моментов присоединенных пар.

Полученная в результате приведения сила $\overline{R}$ называется ***результирующей силой*** (она не является равнодействующей для заданной системы сил, так как не заменяет их действия), а M_O — ***результирующим моментом***.

Приняты следующие определения.

1. Точка O называется ***центром приведения***.

2. Вектор $\overline{R}$, равный геометрической сумме всех сил, является ***главным вектором***. Его значение не зависит от выбора центра приведения, т. е. $\overline{R}$ — инвариантная величина.

3. Момент M_O, равный алгебраической сумме моментов присоединенных пар, называется ***главным моментом***; его значение зависит от выбора центра приведения.

Частные случаи приведения

1. $\overline{R} = 0$, $M_O \neq 0$ — система сил приводится к паре с моментом, равным алгебраической сумме моментов всех сил относительно центра приведения. В этом случае главный момент не зависит от центра приведения.

2. $R = 0$, $M_O \neq 0$ — система приводится к одной равнодействующей силе, приложенной в точке O; главный вектор в этом случае является равнодействующей, так как он один заменяет совокупность действующих сил.

3. $\overline{R} = 0$, $M_O \neq 0$ — такая система сил может быть заменена одной равнодействующей силой, приложенной в новом центре приведения, расположенном от прежнего на расстоянии $d = M_O/R$.

4. $\overline{R} = 0$, $M_O \neq 0$ — плоская система сил находится в равновесии.

Аналитические условия равновесия плоской системы сил. Необходимыми и достаточными условиями равновесия являются $\overline{R} = 0$ и $M_O = 0$. Спроецировав вектор $\overline{R}$ на оси координат, получим

$$R_x = 0 \text{ и } R_y = 0, \text{ так как } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Зная, что $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$ и $R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$, получим аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_o(\overline{F}_i) = 0.$$

Часто эти уравнения называют ***основными уравнениями равновесия***. В зависимости от расположения сил иногда целесообразно составлять условия равновесия в виде двух уравнений моментов и одного уравнения проекций:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_A(\overline{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_B(\overline{F}_i) = 0.$$

В этом случае ось Ox не должна быть перпендикулярна AB.

Можно записать уравнения равновесия в виде трех уравнений моментов относительно трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой:

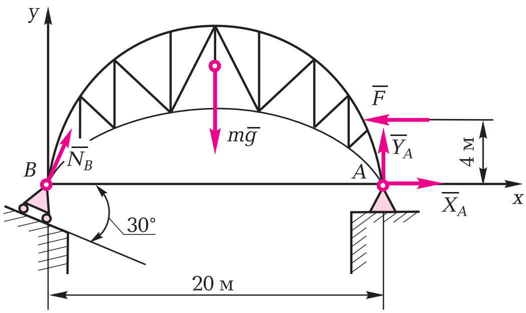


Рис. 1.18

$$\sum_{i=1}^{n} \text{mom}_A(\overline{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \text{mom}_B(\overline{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \text{mom}_C(\overline{F}_i) = 0.$$

Пример 1.3

На ферму весом 100 кН действует ветер с силой $F = 20$ кН. Определить реакции опор.

Решение.

1. За объект равновесия выбираем ферму.

2. Освобождаемся от связей и заменяем их действие реакциями (рис. 1.18).

3. В результате анализа полученной системы сил устанавливаем, что ферма находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил. Следовательно, существуют три уравнения равновесия. Сопоставив число неизвестных искомых величин N_B, X_A и Y_A с числом уравнений, делаем заключение, что система статически определимая.

4. Записываем уравнения равновесия для конкретной задачи:

$$\sum_{i=1}^{5} F_{ix} = 0; \; N_B \cos 60° + X_A - 20 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{5} F_{iy} = 0; \; N_B \cos 30° + Y_A - 100 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{5} \text{mom}_B(F_i) = 0; \; -100 \cdot 10 + Y_A \cdot 20 + 20 \cdot 4 = 0.$$

5. Решая полученную систему уравнений, определяем:

$$Y_A = 46 \text{ кН}, \; N_B = 62{,}4 \text{ кН}; \; X_A = -11{,}2 \text{ кН}.$$

Отрицательное значение реакции X_A означает, что ее направление противоположно принятому на рисунке.

1.4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТРЕНИЯ

Давно известно, что при движении одного тела по поверхности другого в плоскости соприкосновения возникает сила сопротивления относительному скольжению этих тел. Первым явления трения исследовал Леонардо да Винчи. Точное определение силы трения с учетом всех факторов, от которых она зависит, представляет столь сложную задачу, что до сих пор не удается найти ее полного теоретического решения. Поэтому при изучении законов трения приходится основываться на результатах экспериментов.

Итак, законы трения были найдены опытным путем и в 1771 г. сформулированы французским ученым Кулоном.

Законы трения

1. Сила трения $F_{тр}$ направлена в сторону, противоположную относительной скорости скольжения (рис. 1.19).

2. Сила трения не зависит от площади трущихся поверхностей.

3. Модуль силы трения пропорционален нормальному давлению.

Различают силу трения при покое и при движении:

$$F_{тр} \le f_0 N \text{ — сила трения покоя;}$$

$$F_{тр} \le fN \text{ — сила трения при движении,}$$

где N — сила нормального давления; f_0 — коэффициент трения покоя; f — коэффициент трения скольжения. Максимальное значение силы трения $F_{тр\,max} = f_0 N$.

Из экспериментов известно, что коэффициент трения скольжения зависит от скорости движения тел. Коэффициенты f_0 и f зависят от материала и физического состояния трущихся поверхностей (табл. 1.1).

Пример 1.4

На стальной вал диаметром d = 0,4 м (рис. 1.20, *а*) действует крутящий момент $M_{кр}$ = = 500 кН · м. Определить, с какой силой нужно сжать тормозные колодки, обтянутые кожей, чтобы остановить вал.

Решение.

1. За объект равновесия выбираем вал.

2. Освобождаемся от связей и заменяем их реакциями: нормальной силой $\bar{N}$ и силой трения

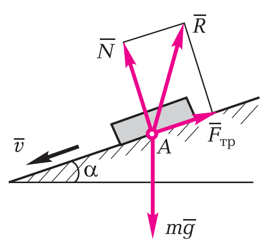


Рис. 1.19

Таблица 1.1. Значения коэффициентов трения покоя и скольжения для различных материалов

Материал	Коэффициент трения	
	покоя f_0	скольжения f
Камень по камню	0,6...0,7	—
Бетон по галечнику	0,5...0,6	—
Веревка по дереву	0,5...0,8	0,5
Дерево по дереву	0,4...0,7	0,3
Металл по дереву	0,4...0,6	0,3...0,5
Бетон по песку	0,3...0,4	—
Камень по дереву	0,4	—
Кожа по металлу	0,3...0,4	0,3
Асбестовая обкладка по стали (чугуну)	0,25...0,35	—
Бронза по чугуну	0,16	—
Бронза по чугуну с обильной смазкой	0,12	—
Сталь по льду	0,03	0,015
Сталь по чугуну, сталь по стали, чугун по чугуну	0,12...0,2	0,1

$\bar{F}_{тр}$, которые будут действовать на вал со стороны каждой колодки (рис. 1.20, *б*).

3. Поскольку число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия плоской системы сил, то считаем, что задача статически определима.

4. Запишем одно из уравнений равновесия, а именно:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_O(F_i) = 0; \; M_{кр} - F_{тр}d = 0.$$

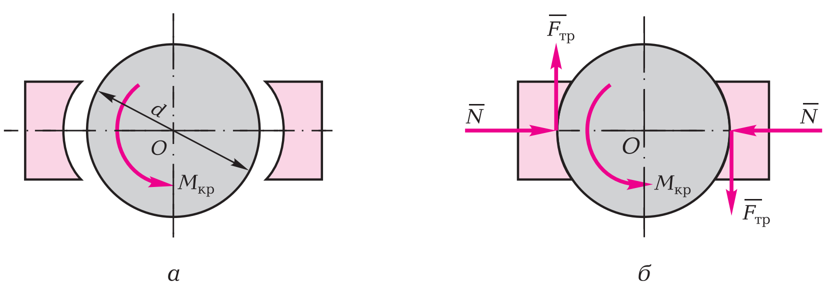


Рис. 1.20

Отсюда $F_{тр} = M_{кр}/d = 500/0{,}4 = 1\,250$ кН.

5. Искомую силу $\bar{N}$ определяем из зависимости $F_{тр} = f_0 N$.

В табл. 1.1 для пары кожа—металл коэффициент трения покоя рекомендуется принимать $f_0 = 0{,}3 \ldots 0{,}4$. Таким образом,

$$N = F_{тр}/0{,}3 = 1\,250/0{,}3 = 4\,166{,}6 \text{ кН}.$$

В зависимости от шероховатости поверхности значение силы трения может колебаться от нуля до максимального значения, т. е. $0 \le F_{тр} \le F_{тр\,max}$. В этом случае реакция связи R будет изменяться в интервале $N \le R \le R_{max}$.

Наибольший угол φ, на который полная реакция R может отклоняться от нормали, называется ***углом трения***:

$$\operatorname{tg}\varphi = F_{тр\,max}/N = f_0 N/N = f_0.$$

В зависимости от направления приложенной к телу силы максимальная реакция связи R_{max} может иметь различные направления, образуя при этом геометрическое место в пространстве в виде конической поверхности с вершиной в точке касания тела, называемой ***конусом трения***. Если приложенная к телу сила проходит внутри конуса трения, то тело находится в равновесии.

Трением качения, или трением второго рода, называют сопротивление, возникающее при качении одного тела по другому. Рассмотрим цилиндрический каток радиусом r и весом $m\bar{g}$, лежащий на шероховатой поверхности. Приложим в центре катка силу $\bar{Q}$ (рис. 1.21, *а*), которая будет меньше, чем $\bar{F}_{тр\,max}$: $\bar{Q} < \bar{F}_{тр\,max}$. Возникающая при этом сила трения $F_{тр}$ препятствует скольжению точки A по плоскости. В этом случае силы $m\bar{g}$ и $\bar{N}$ уравновешиваются, а $\bar{F}_{тр}$ и $\bar{Q}$ образуют пару сил, под действием которой каток должен катиться по плоскости.

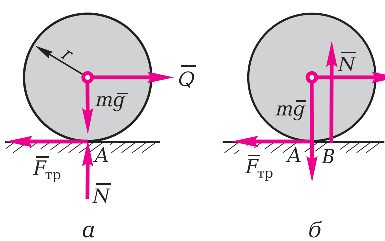


Рис. 1.21

Таблица 1.2. Значения коэффициента трения качения для различных материалов

Материал	Коэффициент трения качения k, см
Дерево по дереву	0,05...0,08
Дерево по стали	0,03...0,04
Чугун по чугуну	0,005
Мягкая сталь по мягкой стали	0,005
Закаленная сталь по закаленной стали	0,001

В действительности, если $Q < Q_{\text{пред}}$, каток остается в состоянии покоя. Для объяснения этого явления в рассуждения необходимо внести следующие коррективы (рис. 1.21, *б*):

$$Q_{\text{пред}} r = N \cdot AB = Nk.$$

Входящий в это выражение коэффициент k называется ***коэффициентом трения качения***; он измеряется в сантиметрах (см). Следовательно, возникает момент силы трения качения

$$M_{\text{тр}} = kN.$$

Значения коэффициента трения качения приведены в табл. 1.2.

1.5. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

Пространственной будем называть систему сил, линии действия которых имеют любые направления в пространстве.

Вектором момента силы относительно некоторого центра называется векторное произведение радиуса-вектора точки приложения силы, проведенного из этого центра, на вектор силы (рис. 1.22). В соответствии с определением

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{F} = \overline{\mathrm{mom}}_O(\overline{F}).$$

Из рис. 1.22 видно, что модуль вектора момента силы относительно центра O будет равен моменту силы относительно точки O, находящейся с этой силой в одной плоскости:

$$M_O = hF = rF\sin(\overline{r}, \overline{F}) = 2 \text{ площади } \Delta OAB.$$

Известно, что всякий вектор можно разложить по осям координат:

$$\overline{M}_O = M_x\overline{i} + M_y\overline{j} + M_z\overline{k};$$

так же можно разложить по осям координат радиус-вектор $\overline{r}$ точки приложения силы и силу $\overline{F}$:

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}; \quad \overline{F} = F_x\overline{i} + F_y\overline{j} + F_z\overline{k}.$$

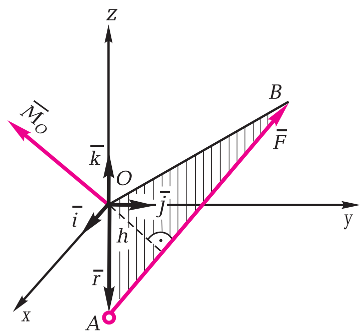


Рис. 1.22

Выполнив действие $\overline{r}\times\overline{F}$, получим

$$\overline{M}_O = (yF_z - zF_y)\overline{i} + (zF_x - xF_z)\overline{j} + (xF_y - yF_z)\overline{k}.$$

Таким образом, проекции вектора момента силы на оси координат будут следующие:

$$M_x = yF_z - zF_y; \quad M_y = zF_x - xF_z; \quad M_z = xF_y - yF_x.$$

Направляющие косинусы вектора момента силы определяют его направление в пространстве:

$$\cos(\overline{M}_O, \overline{i}) = \frac{M_x}{M_O}; \quad \cos(\overline{M}_O, \overline{j}) = \frac{M_y}{M_O}; \quad \cos(\overline{M}_O, \overline{k}) = \frac{M_z}{M_O}.$$

Проекции вектора момента силы на ось численно равны ***моменту силы относительно оси***:

$$\mathrm{mom}_x(\overline{F}) = M_x = yF_z - zF_y;$$

$$\mathrm{mom}_y(\overline{F}) = M_y = zF_x - xF_z;$$

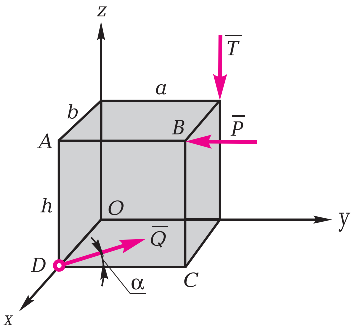
$$\mathrm{mom}_z(\overline{F}) = M_z = xF_y - yF_x;$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Первые три уравнения являются аналитическим выражением для определения моментов силы относительно осей координат.

Пример 1.5

Определить моменты сил $\overline{Q}$, $\overline{T}$ и $\overline{P}$ относительно осей координат, если известны точки приложения этих сил (рис. 1.23).



Сила $\overline{Q}$ — в плоскости $ABCD$

Рис. 1.23

Р е ш е н и е.

1. Определяем моменты силы $\overline{T}$ относительно осей координат:

$\mathrm{mom}_x(\overline{T}) = -Ta$;

$\mathrm{mom}_y(\overline{T}) = 0$ (так как сила $\overline{T}$ пересекает ось Oy);

$\mathrm{mom}_z(\overline{T}) = 0$ (так как сила $\overline{T}$ параллельна оси Oz).

2. Определяем моменты силы $\overline{P}$ относительно осей координат:

$\mathrm{mom}_x(\overline{P}) = +Ph$;

$\mathrm{mom}_y(\overline{P}) = 0$ (так как сила $\overline{P}$ параллельна оси Oy);

$\mathrm{mom}_z(\overline{P}) = -Pb$.

3. Вычисляем моменты силы $\overline{Q}$ относительно осей координат:

$\mathrm{mom}_x(\overline{Q}) = 0$ (так как сила пересекает ось Ox);

$\mathrm{mom}_y(\overline{Q}) = -(Q\sin\alpha)b$;

$\mathrm{mom}_z(\overline{Q}) = +(Q\cos\alpha)b$.

Теорема о приведении пространственной системы сил к заданному центру. Всякая пространственная система сил, действующих на абсолютно твердое тело, может быть заменена одной силой, геометрически равной сумме всех действующих сил, приложенных в произвольно выбранном центре, и вектором-моментом, равным геометрической сумме моментов всех сил относительно центра приведения (рис. 1.24).

Доказательство. Пусть на твердое тело действует система сил, произвольно расположенных в пространстве. За центр приведения выбираем произвольную точку O. Приложим в этой точке уравновешенную систему сил $\overline{F}_1' = -\overline{F}_1''$; $\overline{F}_2' = -\overline{F}_2''$ и т. д., причем $\overline{F}_1' = \overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n' = \overline{F}_n$. Заменим сходящуюся систему сил $\overline{F}_i'$ равнодействующей $\overline{R} = \overline{F}_1' + \overline{F}_2' + \ldots + \overline{F}_n'$. Затем вычислим моменты всех оставшихся сил относительно центра приведения O. Моменты сил $\overline{F}_1'', \overline{F}_2'', \ldots, \overline{F}_n''$ относительно центра O равны нулю, так как их плечо равно нулю. Векторы-моменты заданных сил относительно центра приведения будут равны:

$$\overline{\mathrm{mom}}_O(\overline{F}_1) = \overline{m}_1;$$

$$\overline{\mathrm{mom}}_O(\overline{F}_2) = \overline{m}_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{\mathrm{mom}}_O(\overline{F}_n) = \overline{m}_n.$$

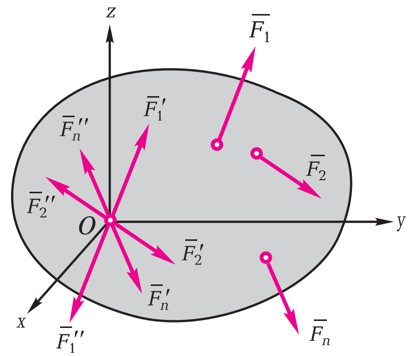


Рис. 1.24

Найдем геометрическую сумму этих векторов и получим главный вектор-момент:

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{mom}}_O(\overline{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i.$$

Таким образом, на твердое тело теперь действует одна сила $\overline{R}$ и один момент $\overline{M}_O$, т. е. система пространственных, произвольно расположенных сил сведена к одной результирующей силе $\overline{R}$ и одному результирующему моменту $\overline{M}_O$. Теорема доказана.

Аналитическое выражение для определения главного вектора и главного момента. Главный вектор $\overline{R}$ и главный момент $\overline{M}_O$ были найдены геометрическим путем (построением векторных многоугольников). Для пространственной системы сил их проще определять аналитически. Принимаем центр приведения за начало координат. Тогда, проецируя на оси координат векторные равенства, получаем

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}; \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz};$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_{ix}; \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_{iy}; \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} m_{iz}.$$

Частные случаи приведения

Любая произвольная пространственная система сил может быть заменена главным вектором и главным моментом. Рассмотрим возможные частные случаи.

1. $\bar{R} = 0$; $\bar{M}_O = 0$ — случай равновесия.

2. $\bar{R} = 0$; $\bar{M}_O \neq 0$ — система сил приводится к паре (твердое тело вращается).

3. $\bar{R} \neq 0$; $\bar{M}_O = 0$ — система сил приводится к равнодействующей, которая проходит через центр приведения (точку O).

4. $\bar{R} \neq 0$; $\bar{M}_O \neq 0$ — результирующая сила и результирующая пара сил лежат в одной плоскости, т.е. $\bar{R} \perp \bar{M}_O$. Это частный случай плоской системы сил. Ранее было показано, что такой случай может иметь равнодействующую, приложенную не в центре приведения, а в другой точке, отстоящей от него на расстоянии, равном M_O/R. Таким образом, пространственная система сил заменена одной равнодействующей, не проходящей через центр приведения.

5. $\bar{R} \neq 0$; $\bar{M}_O \neq 0$ и $\bar{R} \not\perp \bar{M}_O$ — система сводится к динамическому винту.

Аналитические условия равновесия пространственной системы сил. Необходимыми и достаточными условиями равновесия произвольной пространственной системы сил является равенство нулю главного вектора и главного момента:

$$\bar{R} = 0;\ \bar{M}_O = 0.$$

Поскольку $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0$, то R_x, R_y и R_z должны быть равны нулю. Аналогичное рассуждение справедливо и для вектора главного момента. Следовательно, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_x(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_y(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_z(\bar{F}_i) = 0.$$

Пример 1.6

Определить, какой груз сможет поднять человек, прикладывая усилие к веревке $P = 60$ Н (рис. 1.25); определить также реакции опор.

Решение.

1. За объект равновесия выбираем вал AB.

2. Освобождаем вал от связей и заменяем их действие реакциями. Опоры O и B представляют собой цилиндрические шарниры, которые препятствуют перемещению только в радиальном направлении, поэтому в точках A и B прикладываем в радиальных направлениях реакции X_O, Z_O, X_B и Z_B. Веревку «обрываем» чуть выше ролика C и заменяем натяжением нити T.

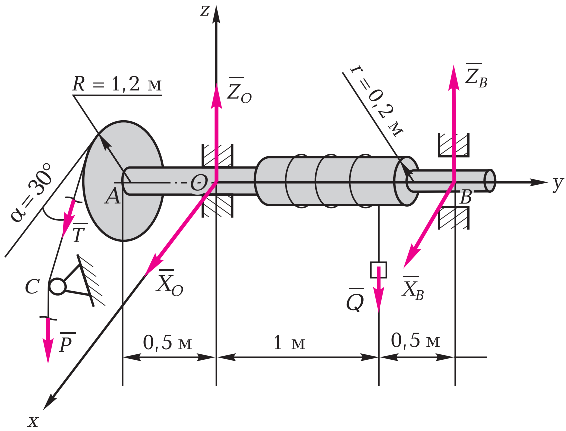


Рис. 1.25

3. Теперь можно рассматривать равновесие свободного тела под действием активных и пассивных сил. Из шести уравнений равновесия произвольной системы пространственных сил остается только пять, так как сумма проекций сил на ось Oy тождественно равна нулю. Задача представляется статически определимой, так как неизвестных величин тоже пять: X_O, X_B, Q, Z_O и Z_B.

4. Составляем уравнения равновесия пространственной системы сил:

$$F_x = X_O + X_B + T\cos 30° = 0;$$
$$F_y = 0;$$
$$F_z = -Q + Z_O + Z_B + T\cos 30° = 0;$$
$$M_x = +Z_B \cdot 1{,}5 - Q \cdot 1 + T\cos 60° \cdot 5 = 0;$$
$$M_y = -Qr + TR = 0;$$
$$M_z = -X_B \cdot 1{,}5 + T\cos 30° \cdot 0{,}5 = 0.$$

5. Подставив в предпоследнее уравнение $r = 0{,}2$ м, $R = 1{,}2$ м и $T = 60$ Н, получим, что вес груза $Q = 360$ Н.

Из последнего уравнения определим реакцию X_B:

$$X_B = \frac{60\cos 30° \cdot 0{,}5}{1{,}5} = 17 \text{ Н}.$$

Подставляя полученные значения $Q = 360$ Н, $X_B = 17$ Н в оставшиеся уравнения, найдем Z_B, Z_O и X_O:

$$Z_B = \frac{360 \cdot 1 - 60 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{1{,}5} = 230 \text{ Н};$$
$$Z_O = 360 - 230 + 60 \cdot 0{,}5 = 160 \text{ Н};$$
$$X_O = -(17 + 60 \cdot 0{,}85) = -68 \text{ Н}.$$

Отрицательный знак реакции X_O означает, что она направлена в противоположную указанной на рисунке сторону.

1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

Центр тяжести твердого тела

Силы притяжения отдельных частиц тела направлены к центру Земли. Так как размеры рассматриваемых тел малы по сравнению с радиусом Земли, то эти силы можно считать параллельными. Равнодействующая этих параллельных сил, равная их сумме, есть вес тела, а центр этой системы параллельных сил, в котором приложен вес тела, называется ***центром тяжести тела***. Чтобы найти положение центра тяжести тела, необходимо изучить, как складываются параллельные силы и определяются координаты точки приложения их равнодействующей.

Сложение параллельных сил

Допустим, что на тело действует система параллельных сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ и $\overline{F}_4$ (рис. 1.26), причем $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ действуют в одну сторону, а $\overline{F}_3$ и $\overline{F}_4$ — в противоположную. Для сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ найдем такой центр приведения, относительно которого результирующий момент будет равен нулю:

$$\sum_{i=0}^{2} \mathrm{mom}_{B_1}\left(\overline{F}_i\right) = F_2 \cdot A_2B_1 - F_1 \cdot A_1B_1 = 0.$$

Отсюда $A_2B_1/A_1B_1 = F_1/F_2$. Модуль результирующей силы, приложенной в точке B_1, будет равен $R_1 = F_1 + F_2$.

Аналогично найдем R_2 и ее точку приложения B_2.

Приведем силы $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$ к центру приведения C, положение которого определится из соотношения $B_2C/B_1C = R_1/R_2$.

Результирующая сил $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$ будет равна их геометрической сумме, т. е. $\overline{R} = \overline{R}_1 + \overline{R}_2$.

Поскольку векторы сил $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$ параллельны и противоположно направлены, то модуль $\overline{R}$ будет равен $R = R_2 - R_1$.

Если $\overline{R} \neq 0$ то всегда можно найти такую точку, в которой будет приложена равнодействующая $\overline{R}$ всех параллельных сил. Эта точка называется ***центром параллельных сил***.

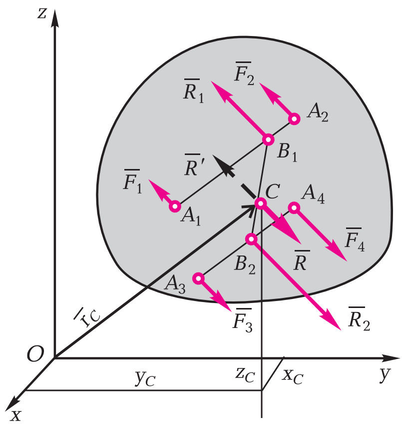


Рис. 1.26

Координаты центра параллельных сил. Положение центра параллельных сил относительно начала координат определяется радиусом-вектором $\overline{r}$ или его проекциями на оси координат, что равнозначно координатам центра параллельных сил x_C, y_C и z_C.

Теорема о моменте равнодействующей (*теорема Вариньона*). Приложим в точке C силу $\overline{R}' = -\overline{R}$ (см. рис. 1.26). Тогда система будет находиться в равновесии. Теперь определим момент всех сил относительно точки O. Очевидно, он равен нулю, так как система сил находится в равновесии:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \overline{\mathrm{mom}_O}\left(\overline{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{mom}_O}\left(\overline{F}_i\right) + \overline{\mathrm{mom}_O}\left(\overline{R}'\right) = 0.$$

Но так как $\overline{R}' = -\overline{R}$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i - \overline{r}_C \times \overline{R} = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i - \overline{r}_C \times \overline{R}.$$

Правая часть равенства представляет собой выражение для момента равнодействующей, а левая часть — это геометрическая сумма моментов всех сил относительно той же точки. Отсюда следует, что

момент равнодействующей относительно любого центра равен геометрической сумме векторов-моментов слагаемых сил относительно того же центра.

Эта теорема о моменте равнодействующей называется теоремой Вариньона.

Спроецировав векторное равенство $\overline{r}_C \times \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i$ на оси координат, получим формулы для определения моментов равнодействующей относительно осей координат:

$$\mathrm{mom}_x\left(\overline{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_x\left(\overline{F}_i\right);$$

$$\mathrm{mom}_y\left(\overline{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_y\left(\overline{F}_i\right);$$

$$\mathrm{mom}_z\left(\overline{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mom}_z\left(\overline{F}_i\right).$$

Величина равнодействующей параллельных сил не изменится, если все силы повернуть параллельно оси Oz. В этом случае момент равнодействующей относительно оси Oy

$$Rx_C = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i, \text{ откуда } x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}.$$

Аналогичным образом вычислим и другие координаты центра параллельных сил:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

Координаты центра тяжести твердого тела. Если в формулах для определения координат центра параллельных сил вместо F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} и R подставить $m_i g_x$, $m_i g_y$, $m_i g_z$ и mg, то получим зависимости для определения координат центра тяжести тела:

$$x_C = \frac{\sum m_i g_x x_i}{mg} = \frac{\sum V_i x_i}{V}; \quad y_C = \frac{\sum m_i g_x y_i}{mg} = \frac{\sum V_i y_i}{V};$$

$$z_C = \frac{\sum m_i g_x z_i}{mg} = \frac{\sum V_i z_i}{V},$$

где m_i, V_i — соответственно масса и объем каждой частицы твердого тела; m, V — соответственно полная масса и объем однородного тела.

Для плоской фигуры площадью S, имеющей постоянную толщину h, элементарные объемы V_i можно выразить через элементарные площади S_i:

$$V_i = hS_i.$$

Тогда координаты центра тяжести этой фигуры определятся следующим образом:

$$x_C = \frac{\sum S_i x_i}{S}; \quad y_C = \frac{\sum S_i y_i}{S}; \quad z_C = \frac{\sum S_i z_i}{S}.$$

Существует также понятие «центр масс», справедливое для любого силового поля; координаты центра масс вычисляют по формулам

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}.$$

Таким образом, центр тяжести (или центр масс) — это геометрическая точка C, которая в частных случаях может лежать вне пределов самого тела; например, центр тяжести кольца лежит на пересечении его осей симметрии, т. е. вне тела.

Пример 1.7

Найти координаты центра тяжести однородной пластины, изображенной на рис. 1.27, *а*. Толщина пластины постоянная.

Решение.

1. Поскольку однородная пластина имеет постоянную толщину, то можно воспользоваться формулами для определения положения центра тяжести плоской фигуры.

2. Разбиваем пластину на три простейшие геометрические фигуры (рис. 1.27, *б*), координаты центров тяжести которых известны.

3. Выбираем систему координат, как указано на чертеже.

4. Заносим в табл. 1.3 результаты вычислений; каждому прямоугольнику соответствует строка таблицы.

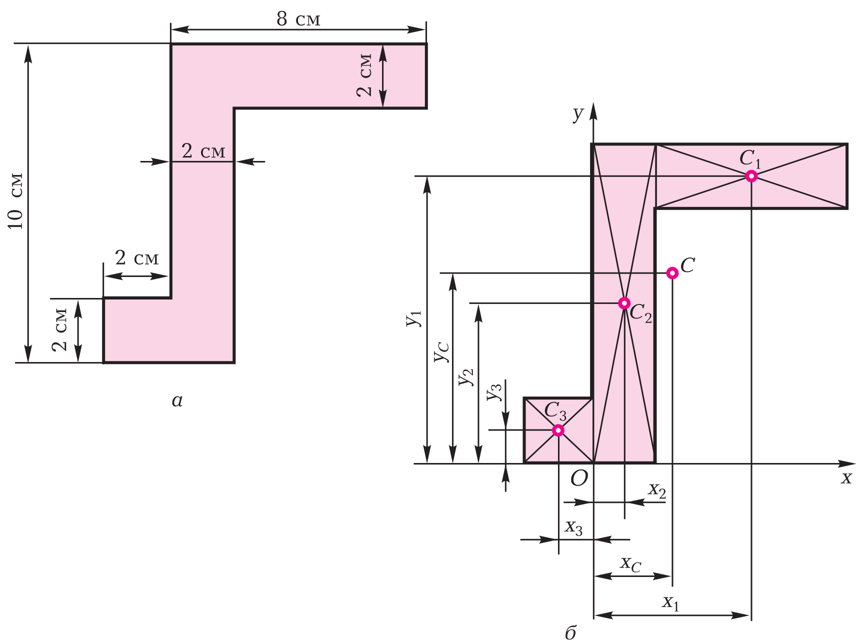


Рис. 1.27

5. Суммируем значения S_i, $S_i x_i$, $S_i y_i$ и записываем результаты в нижней строке.

6. Вычисляем координаты центра тяжести пластины:

$$x_C = \frac{\sum S_i x_i}{S} = \frac{76}{36} = 2\frac{1}{9}\text{ см};\quad y_C = \frac{\sum S_i y_i}{S} = \frac{112}{36} = 5\frac{8}{9}\text{ см}.$$

7. По вычисленным координатам строим центр тяжести C пластины.

Таблица 1.3

Номер элемента	S_i, см	x_i, см	y_i, см	$S_i x_i$, см^3	$S_i y_i$, см^3
1	12	5	9	60	108
2	20	1	5	20	100
3	4	–1	1	–4	4
Σ	36	—	—	76	212

Способы определения положения центров тяжести

Способ разбиения на фигуры, положение центров тяжести которых известно, применяется в случаях, когда тело можно разбить на конечное число простых элементов.

Способ дополнения является частным случаем способа разбиения. Применяется, когда тело можно разбить на простейшие фигуры, положения центров тяжести которых известны, но некоторые из геометрических фигур представляют собой пустоты.

Пример 1.8

Найти положение центра тяжести поперечного сечения вала диаметром 12 см, в котором высверлено отверстие диаметром 2 см (рис. 1.28).

Решение.

1. Поскольку нужно найти центр тяжести поперечного сечения, то воспользуемся формулами для определения центра тяжести плоской фигуры.

2. Дополняем площадь поперечного сечения площадью высверленного отверстия (так как в действительности этот элемент отсутствует, в формуле площадь отверстия берется с отрицательным знаком):

$$S_2 = -\pi r^2 = -\pi \cdot 1^2 = -\pi \text{ см}^2.$$

3. Начало системы координат расположим в центре окружности радиуса R, т. е. в точке C_1.

4. Заполняем табл. 1.4.

5. Суммируем S_i и $S_i x_i$, после чего записываем результаты в нижней строке.

6. Вычисляем координаты центра тяжести поперечного сечения:

$$x_C = \frac{\sum S_i x_i}{S} = \frac{-3\pi}{35\pi} = -\frac{3}{35} \text{ см},$$

а $y_C = 0$, так как ось C_1x является осью симметрии этого сечения.

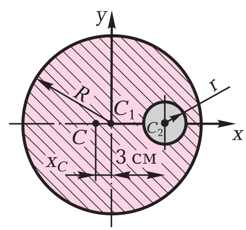


Рис. 1.28

Таблица 1.4

Номер элемента	S_i, см	x_i, см	y_i, см	$S_i x_i$, см^3	$S_i y_i$, см^3
1	36π	0	0	0	0
2	$-\pi$	3	0	-3π	0
Σ	35π	—	—	-3π	0

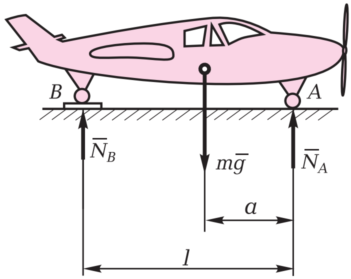


Рис. 1.29

7. По вычисленным координатам поперечного сечения строим его центр тяжести C.

Способ интегрирования применяется в случаях, когда для определения положения центра тяжести не могут быть применены первые два способа.

Экспериментальный способ осуществляется двумя методами — подвешивания и взвешивания.

Метод подвешивания заключается в том, что плоское тело, которое нельзя разбить на простейшие фигуры с известным положением центров тяжести, подвешивают на нити. Вдоль этой нити на плоскости тела прочерчивают линию. Затем эту плоскую фигуру подвешивают за другую точку, после чего вновь проводят вертикальную линию (вдоль линии подвеса). В точке пересечения этих двух линий и находится центр тяжести.

Метод взвешивания обычно применяется для крупных изделий: самолетов, вертолетов и других машин. Если известна масса, например, самолета, то на весы ставят задние колеса (рис. 1.29) и по показанию весов определяют реакцию N_B. Затем записывают одно из уравнений равновесия; удобнее пользоваться уравнением суммы моментов относительно точки A:

$$\sum_{i=1}^{3} \mathrm{mom}_A\left(\overline{F}_i\right) = 0;\ mga - N_B l = 0.$$

Отсюда находят искомую величину a, т. е. положение центра тяжести самолета:

$$a = \frac{N_B l}{mg}.$$

1.7. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения вне связи с силами, вызывающими это движение.

В теоретической механике изучается простейшая форма движения — ***механическое движение***. Механическое движение всегда рассматривается относительно выбранной системы отсчета, которая может быть подвижной или условно неподвижной. Например, при рассмотрении механического движения тел, находящихся на Земле, за ***неподвижную систему осей координат*** выбирают систему осей, неизменно связанных с Землей.

Способы задания движения материальной точки

Точка движется в пространстве по некоторой линии, или траектории.

Движение точки задано ***естественным способом*** (рис. 1.30, *а*), если известны: 1) траектория точки; 2) зависимость изменения длины дуги от времени: $\overset{\frown}{OM} = S = f(t)$ (эта зависимость называется ***уравнением движения материальной точки***); 3) начало движения; 4) начало отсчета; 5) направление отсчета.

Положение точки в пространстве однозначно определяется радиусом-вектором $\bar{r}$, проведенным из некоторого неподвижного центра в данную точку M (рис. 1.30, *б*). Такой способ задания движения называется ***векторным***:

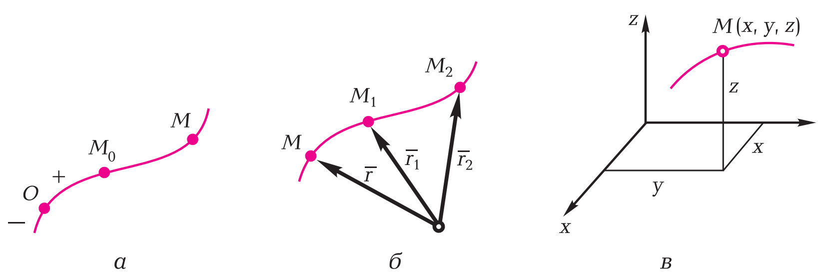


Рис. 1.30

$$\overline{r} = \overline{r}(t).$$

Положение точки в пространстве в этом случае будет определяться геометрическим местом концов векторов $\overline{r}$, т. е. годографом ее радиуса-вектора.

При ***координатном способе*** задания движения (рис. 1.30, *в*) должны быть известны зависимости, по которым можно определить, как со временем изменяются координаты точки в пространстве:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t).$$

Эти уравнения называются ***уравнениями движения точки в декартовых координатах***, с их помощью для каждого момента времени можно определить положение точки в пространстве. Если точка ***движется на плоскости***, то ее положение описывается двумя уравнениями:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);$$

если точка ***движется по прямой***, то достаточно только одного уравнения:

$$x = f(t).$$

Пример 1.9

Движение точки в плоскости задано уравнениями

$$x = 2 + 4t;\ y = -3 + 8t,$$

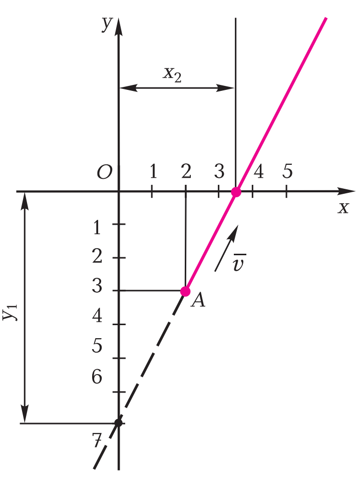


Рис. 1.31

где x и y измеряются в сантиметрах (см), а t — в секундах (с). Определить траекторию движущейся точки.

Р е ш е н и е.

Получим уравнение траектории, исключив время t из заданных уравнений движения. Из первого уравнения $t = (x - 2)/4$, из второго $t = (y + 3)/8$. Приравняв правые части этих равенств, получим

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{8}, \text{ или } 2x - y = 7.$$

Траектория движения — прямая линия, построим ее. Полагая $x = 0$, найдем точку пересечения линии траектории с осью Oy: $y_1 = -7$.

Полагая $y = 0$, найдем точку пересечения траектории с осью Ox: $x_2 = 3{,}5$ см. Проведя через эти точки прямую, получим линейную траекторию движения материальной точки (рис. 1.31). На этой линии необходимо найти начало движения точки.

В момент начала движения, т. е. когда $t = 0$, точка имела координаты $x_A = 2 + 4 \cdot 0 = 2$ см и $y_A = -3 + 8 \cdot 0 = -3$ см. Остается определить, в каком направлении от точки A движется материальная точка. С течением времени координаты x и y будут возрастать. Следовательно, материальная точка начнет движение из точки A и далее будет двигаться вверх по стрелке до бесконечности.

Итак, траектория движения материальной точки найдена; она задана естественным способом: ее начало — в точке A, направление движения — по стрелке.

Скорость точки характеризует быстроту и направление движения точки. При векторном способе задания движения положение точки в каждый момент времени определяется радиусом-вектором $\bar{r} = \bar{r}(t)$.

Пусть в момент времени t точка занимает положение M, определяемое радиусом-вектором $\bar{r} = \bar{r}(t)$ (рис. 1.32, *а*). В момент времени $t + \Delta t$ точка займет положение M_1, определяемое радиусом-вектором $\bar{r}_1 = \bar{r} + \Delta\bar{r}$. Отношение $\Delta\bar{r}/\Delta t$ является вектором средней скорости, а производная вектора $\bar{r}$ по времени t и будет вектором скорости в данный момент времени:

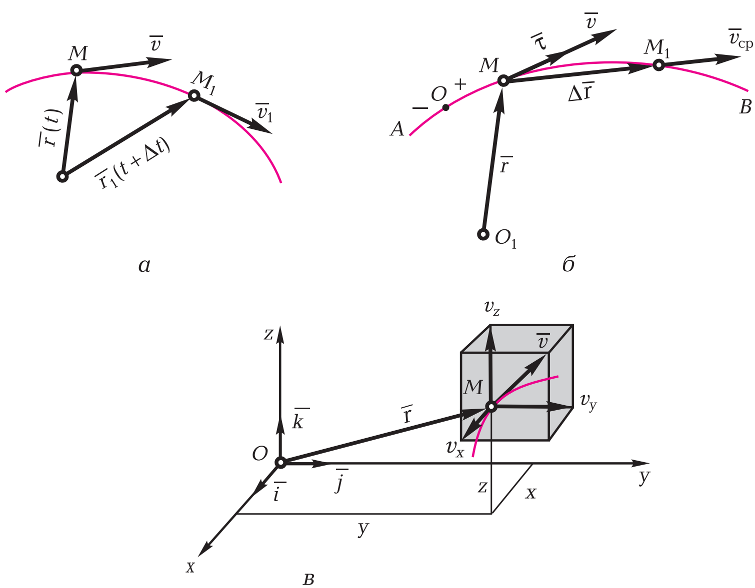


Рис. 1.32

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Поскольку $\bar{v}$ — это производная функции $\bar{r} = \bar{r}(t)$, то вектор скорости $\bar{v}$ всегда направлен по касательной к траектории движения материальной точки.

Если движение точки задано естественным способом, то известны ее траектория AB, начало движения, направление и уравнение движения $S = S(t)$. В полученное выражение $\bar{v} = d\bar{r}/dt$ введем промежуточную переменную — дуговую координату S:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dS}\frac{dS}{dt}.$$

Поскольку dS — величина скалярная, то вектор $d\bar{r}/dS$ будет направлен по касательной к траектории в точке M; этот вектор обозначается $\bar{\tau}$ (рис. 1.32, *б*) и является ортом направления, модуль его равен единице. Орт $\bar{\tau}$ всегда направлен в сторону возрастания S.

Таким образом, при естественном способе задания траектории вектор скорости

$$\bar{v} = \frac{dS}{dt}\bar{\tau}.$$

Производная dS/dt представляет собой алгебраическое значение скорости. Если $dS/dt > 0$, то в рассматриваемый момент времени точка движется в сторону увеличения дуговой координаты S, и, следовательно, направление ее скорости совпадает с направлением орта $\bar{\tau}$. Если же $dS/dt < 0$, то функция S убывает, и, следовательно, вектор скорости направлен в сторону, противоположную вектору $\bar{\tau}$.

Определим скорость точки при координатном способе задания движения. Пусть заданы уравнения движения точки M (рис. 1.32, *в*):

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t).$$

Ее положение в пространстве определяется радиусом-вектором

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z.$$

На основании предыдущих выводов вектор скорости можно записать следующим образом:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) = \bar{i}\,\frac{dx}{dt} + \bar{j}\,\frac{dy}{dt} + \bar{k}\,\frac{dz}{dt}.$$

Следовательно, $\overline{v} = \overline{i}v_x + \overline{j}v_y + \overline{k}v_z$.

Построим параллелепипед на проекциях v_x, v_y и v_z (см. рис. 1.32, *в*) и определим модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Ускорение точки — векторная величина, характеризующая быстроту изменения с течением времени вектора скорости: $\overline{a} = d\overline{v}/dt = d^2\overline{r}/dt^2$. Запишем выражения для проекций вектора ускорения на оси координат $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$, $a_z = dv_z/dt$. Если известны проекции a_x, a_y и a_z, то можно определить модуль ускорения

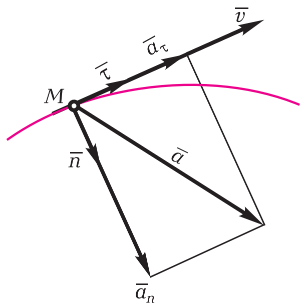


Рис. 1.33

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

При естественном способе задания траектории движения материальной точки ее вектор ускорения можно разложить по естественным осям координат $\overline{\tau}$ и $\overline{n}$ (рис. 1.33):

$$\overline{a} = a_\tau\overline{\tau} + a_n\overline{n}.$$

Проекция ускорения на орт $\overline{\tau}$ называется ***касательным ускорением***, которое характеризует быстроту изменения модуля скорости: $a_\tau = dv/dt$. Касательное ускорение существует только при неравномерном криволинейном движении.

Нормальное ускорение $a_n = v^2/\rho$ показывает изменение направления вектора скорости $\overline{v}$, когда материальная точка движется по криволинейной траектории (ρ — радиус кривизны траектории в точке).

Частные случаи движения материальной точки

1. $a_n = 0$; $a_\tau = 0$. Следовательно, полное ускорение $a = 0$. Точка движется равномерно прямолинейно. Закон движения в этом случае $S = S_0 + v_0t$, где S_0 — дуговая координата в начальный момент времени; v_0 — скорость движения точки в начальный момент движения (скорость не изменится и в любой другой момент времени t, так как движение неускоренное).

2. $a_n \neq 0$; $a_\tau = 0$ — равномерное криволинейное движение. Вектор скорости материальной точки изменяется лишь по направлению. Закон движения по криволинейной траектории запишется аналогично первому случаю:

$$S = S_0 + v_0 t.$$

3. $a_n = 0$; $a_\tau \neq 0$ — прямолинейное неравномерное движение.

4. $a_n \neq 0$; $a_\tau \neq 0$ — криволинейное неравномерное движение.

Если в третьем случае $a_\tau = a = \text{const}$ и в четвертом $a_\tau = \text{const}$, то материальная точка будет совершать соответственно равноускоренное (равнозамедленное) прямолинейное

$$S = S_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

и равноускоренное (равнозамедленное) криволинейное движение

$$S = S_0 + v_0 t \pm a_\tau \frac{t^2}{2}.$$

Пример 1.10

Поезд движется равнозамедленно по закруглению радиусом $R = 1$ км. В начале участка поезд имел скорость 36 км/ч и полное ускорение $a_0 = 0{,}125$ м/с^2. Определить скорость и ускорение поезда в конце криволинейного участка, если длина участка 560 м.

Решение.

1. Будем рассматривать движение одной из точек поезда, например его центра тяжести. Совместим начало отсчета дуговой координаты 0 с начальным положением точки M_0, направление движения принимаем за положительное (рис. 1.34). В этом случае величина S_0 будет равна нулю.

2. Запишем закон равнозамедленного движения материальной точки

$$S = v_0 t - \frac{a_\tau t^2}{2}$$

и формулу для определения скорости этого движения

$$v = v_0 - a_\tau t.$$

3. Определим нормальное ускорение точки в начале участка

$$a_{n0} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{100}{1\,000} = 0{,}1 \text{ м/с}^2$$

($v_0 = 36$ км/ч $= 10$ м/с; $R = 1$ км $= 1\,000$ м).

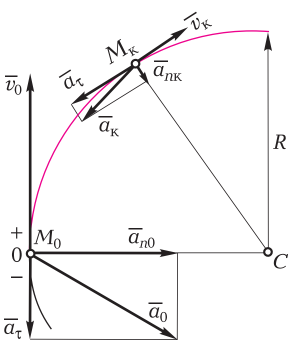


Рис. 1.34

4. Зная модуль полного ускорения точки в начале пути, определим его касательную составляющую:

$$a_0^2 = a_{n0}^2 + a_\tau^2;\ a_\tau = \sqrt{a_0^2 - a_{n0}^2} = \sqrt{0{,}125^2 - 0{,}1^2} = 0{,}075 \text{ м/с}^2.$$

5. Подставляя в формулу движения выражение для касательной составляющей ускорения a_τ, определим время t, в течение которого поезд прошел участок длиной 560 м:

$$560 = 10t - \frac{0{,}75t^2}{2}.$$

Отсюда $t = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 1\,120 \cdot 0{,}075}}{0{,}075} = \dfrac{10 \pm 4}{0{,}075}$ с.

Следовательно, $t_1 = \dfrac{14}{0{,}075}$ с; $t_2 = \dfrac{6}{0{,}075}$ с.

Значение t_1 отбрасываем как нереальное, так как это время превышает время $t_2 = \dfrac{6}{0{,}075}$ с, через которое поезд окажется в конце пути. Поэтому принимаем во внимание только второй корень уравнения $t_2 = \dfrac{6}{0{,}075}$ с.

6. Определим скорость в конце пути:

$$v_к = 10 - 0{,}075t_к = 10 - 0{,}075 \cdot 80 = 4 \text{ м/с}.$$

7. Вычислим нормальное ускорение в конце пути:

$$a_{nк} = \frac{v_к^2}{R} = \frac{4^2}{1\,000} = 0{,}016 \text{ м/с}^2.$$

8. Определим полное ускорение в конце пути:

$$a_к = \sqrt{a_{nк}^2 + a_\tau^2} = \sqrt{0{,}016^2 + 0{,}075^2} = 0{,}0767 \text{ м/с}^2.$$

Из расчетов видно, что полное ускорение уменьшилось за счет уменьшения нормального ускорения, в то время как касательное ускорение осталось неизменным.

1.8. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательное движение

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельной своему начальному положению.

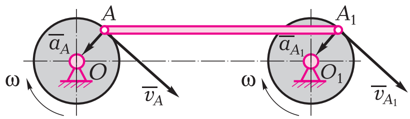


Рис. 1.35

При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые (по значению и направлению) скорости и ускорения. Это основное свойство поступательного движения дает возможность изучать движение тела по одной из его точек. Примером поступательного движения является движение поршня паровой машины, ползуна с резцом в поперечно-строгальном станке. В этих случаях траектории точек тела прямолинейные. В спарнике двух колес (рис. 1.35) траектории точек представляют собой окружность; сам спарник AA_1 движется поступательно, а колеса вращаются. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть еще более сложными, например, при выпуске шасси у истребителя МиГ-21 колеса совершают поступательное движение, причем точки колеса движутся по пространственной кривой.

Вращательное движение относительно неподвижной оси

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных неподвижной прямой, называемой осью вращения тела, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

Для осуществления этого движения следует неподвижно закрепить две точки твердого тела A и B (рис. 1.36, *а*). Тогда прямая, проходящая через эти точки, является осью вращения. При вращении угол поворота тела меняется в зависимости от времени: $\varphi = f(t)$.

Эта зависимость называется ***уравнением вращательного движения тела.*** Угол поворота (в радианах) часто выражают через число оборотов N: $\varphi = 2\pi N$.

Величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота φ с течением времени, называется ***угловой скоростью тела*** и имеет размерность 1/с. Ее значение определяется по формуле

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Учитывая, что дуга $S = r\varphi$ и, следовательно, $\varphi = S/r$, получим

$$\omega = \frac{dS}{rdt} = \frac{v_M}{r}.$$

Отсюда найдем линейную скорость точки вращающегося тела $v_M = \omega r$.

Угловая скорость вращения ω связана с частотой вращения n, мин$^{-1}$, следующей зависимостью:

$$\omega = (2\pi/60)n = \pi n/30,\ 1/\text{с}.$$

В этом случае линейная скорость точки тела может быть выражена также через частоту вращения:

$$v = (\pi n/30)(d/2).$$

Размерность скорости будет зависеть от размерности диаметра d. Если d измеряется в миллиметрах (мм), то v будет выражена в метрах в секунду (м/с):

$$v = (\pi dn)/(60 \cdot 1\,000).$$

В технике чаще всего скорость выражается в метрах в минуту (м/мин), тогда

$$v = (\pi dn)/1\,000.$$

Величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени, называется ***угловым ускорением*** и имеет размерность 1/с^2:

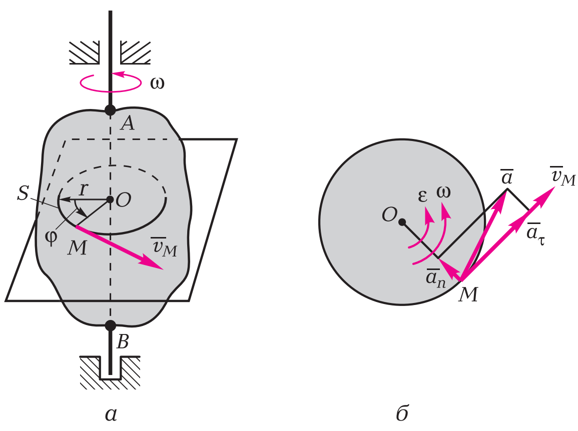


Рис. 1.36

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Если $d\omega/dt > 0$ и $d\varphi/dt > 0$, то движение ускоренное; если $d\omega/dt < 0$, $d\varphi/dt > 0$, то движение замедленное.

Точка M тела участвует во вращательном движении, перемещаясь по окружности радиусом $OM = r$ (рис. 1.36, *б*). Поскольку ее траектория криволинейна, то ускорение

$$\overline{a} = a_\tau \overline{\tau} + a_n \overline{n}.$$

Касательная составляющая ускорения

$$a_\tau = |dv/dt| = |d\omega r/dt| = r\,|d\omega/dt| = r\varepsilon;$$

направление a_τ определяет направление ускорения ε (см. рис. 1.36, *б*).

Нормальная составляющая ускорения $a_n = v^2/\rho = (\omega r)^2/r = \omega^2 r$. Это ускорение направлено всегда к центру, поэтому называется ***центростремительным***.

Полное ускорение точки вращающегося вокруг неподвижной оси тела

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Введем понятия «вектор угловой скорости $\overline{\omega}$» и «вектор углового ускорения $\overline{\varepsilon}$». Условимся откладывать вектор угловой скорости тела $\overline{\omega}$ по оси его вращения в ту сторону, откуда поворот тела виден происходящим против движения часовой стрелки (рис. 1.37). Модуль этого вектора равен абсолютному значению угловой скорости, $\omega = |d\varphi/dt|$.

Вектор углового ускорения $\overline{\varepsilon}$ при ускоренном вращении тела вокруг неподвижной оси будет направлен в ту же сторону, что и вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ (рис. 1.37, *а*), а при замедленном вращении — в противоположную (рис. 1.37, *б*). Модуль вектора $\overline{\varepsilon}$ равен абсолютному значению углового ускорения $\varepsilon = |d\omega/dt|$.

Векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ могут быть приложены в любой точке оси вращения тела, поэтому эти векторы называются ***скользящими***.

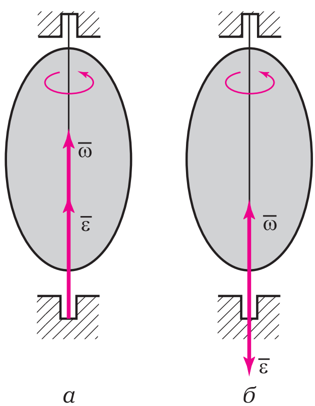


Рис. 1.37

Частные случаи вращательного движения тела

1. $\omega = \text{const}$. Зная, что $\omega = |d\varphi/dt| = \text{const}$, перепишем эту зависимость и проинтегрируем уравнение в пределах, соответствующих начальному моменту времени t_0 (соответственно φ_0) и произвольному моменту времени t:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_{t_0}^{t} dt,$$

откуда $\varphi = \varphi_0 + \omega t$.

Этот результат соответствует закону равномерного вращательного движения тела.

2. $\varepsilon = \text{const}$ — равнопеременное вращательное движение (равноускоренное или равнозамедленное) тела. Вывод его закона движения аналогичен:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Плоское движение твердого тела

Плоским, или плоско-параллельным, движением твердого тела называется такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

Примерами плоского движения являются движение шайбы по льду, колеса поезда по прямолинейному участку пути.

Плоское движение тела можно разложить на поступательное и вращательное относительно выбранного центра. На рис. 1.38 показано, что тело из положения I можно переместить в положение II двумя способами:

а) перемещаем тело поступательно так, чтобы прямая AB, перемещаясь параллельно первоначальному положению, заняла в пространстве положение A_2B_1. После этого повернем тело вокруг точки B_1 на угол φ_1;

б) переместим тело поступательно из положения I так, чтобы прямая AB совместилась с прямой A_1B_2, параллельной ей. После этого будем вращать тело вокруг точки A_1 до тех пор, пока точка B_2 не попадет в точку B_1. Поскольку $A_1B_2 \| A_2B_1$, то углы $\varphi_1 = \varphi_2$. Следо-

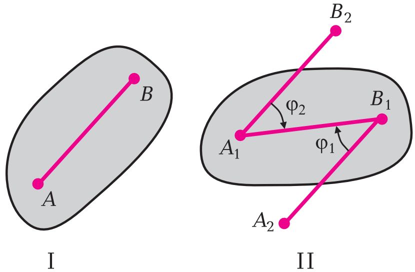


Рис. 1.38

вательно, чтобы занять положение II, тело может совершить различные поступательные движения (в зависимости от выбранного полюса), а вращение, как в первом, так и во втором случае, будет одинаковым.

Следовательно,

любое плоское движение тела можно разложить на поступательное движение тела вместе с выбранным полюсом и вращательное движение относительно полюса.

Чаще всего за такой полюс выбирают центр масс тела.

Теорема о скоростях точек плоской фигуры и ее следствия. Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и линейной скорости этой точки при вращении ее относительно полюса.

Примем за полюс точку O, скорость которой известна и равна $\bar{v}_O$. Определим скорость любой точки, например точки A, принадлежащей этой плоской фигуре (рис. 1.39, *а*). Проведем из произвольной неподвижной точки плоскости O_1 в точки O и A радиусы-векторы $\bar{\rho}_O$ и $\bar{\rho}_A$, а из полюса O — радиус-вектор $\bar{r}_{OA}$ в точку A. Так как радиус-вектор $\bar{r}_{OA}$ соединяет две точки плоской фигуры, то при ее движении он вращается вокруг полюса O с угловой скоростью плоской фигуры $\bar{\omega}$, причем модуль этого вектора остается постоянным, так как не меняется расстояние между точкой A и полюсом. Кроме того, как видно из рис. 1.39, *а*, $\bar{\rho}_A = \bar{\rho}_O + \bar{r}_{OA}$.

Определим отсюда скорость точки A

$$\bar{v}_A = d\bar{\rho}_A/dt = d\bar{\rho}_O/dt + d\bar{r}_{OA}/dt.$$

Производная по времени от радиуса-вектора $\bar{\rho}_O$ является скоростью полюса, а производная по времени от радиуса-вектора $\bar{r}_{OA}$ —

не что иное, как линейная скорость точки A при вращении вокруг полюса O, которую обозначим $\overline{v}_{AO}$. Таким образом, теорема доказана:

$$\overline{v}_A = \overline{v}_O + \overline{v}_{AO}.$$

Скорость $\overline{v}_{AO}$ можно представить в виде векторного произведения вектора угловой скорости плоской фигуры на радиус-вектор $\overline{r}_{OA}$:

$$\overline{v}_{AO} = \overline{\omega} \times \overline{r}_{OA}.$$

Вектор скорости $\overline{v}_{AO}$ направлен перпендикулярно отрезку OA в сторону вращения тела (рис. 1.39, *б*); его модуль $v_{AO} = \omega OA$.

Следствие 1. Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны.

Предположим, что в данный момент времени известна угловая скорость ω плоской фигуры (ее модуль и направление) и скорость v_M точки M этой фигуры (см. рис. 1.39, *б*). Принимаем точку M за полюс и определяем на основе доказанной теоремы скорости точек B и C этой плоской фигуры, лежащих на одной прямой с полюсом M:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_M + \overline{v}_{BM} \text{ и } \overline{v}_C = \overline{v}_M + \overline{v}_{CM}.$$

Векторы скоростей $\overline{v}_{BM}$ и $\overline{v}_{CM}$ перпендикулярны отрезку MB и направлены в сторону вращения плоской фигуры. Проведем ось x через точки M, C и B и спроецируем на нее скорости

$$v_{xB} = v_{xM} + v_{xBM} \text{ и } v_{xC} = v_{xM} + v_{xCM}.$$

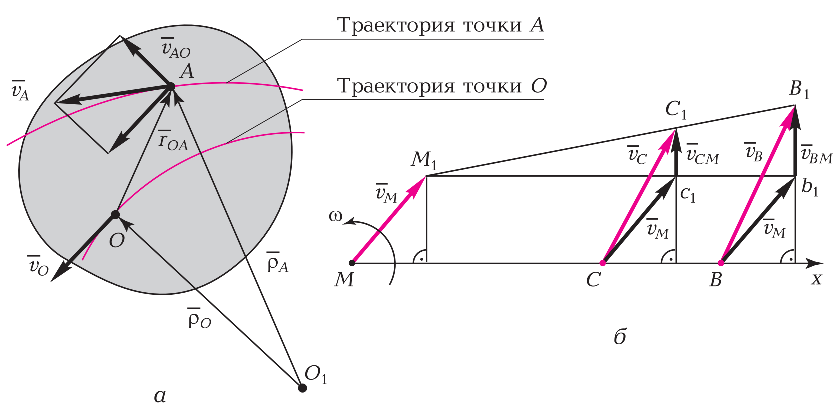


Рис. 1.39

Проекции v_{xBM} и v_{xCM} на ось x равны нулю, так как векторы $\overline{v}_{BM}$ и $\overline{v}_{CM}$ перпендикулярны этой оси. Следовательно, $v_{xB} = v_{xM} = v_{xC}$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. Концы векторов скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят ее на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками этого отрезка.

Из рис. 1.39, *б* очевидно, что

$$b_1B_1 = v_{BM} = MB \cdot \omega; \quad c_1C_1 = v_{CM} = MC \cdot \omega,$$

откуда $\dfrac{c_1C_1}{b_1B_1} = \dfrac{MC}{MB}$.

$MC = M_1c_1$ и $MB = M_1b_1$ как противоположные стороны параллелограммов.

Таким образом,

$$\frac{c_1C_1}{b_1B_1} = \frac{M_1c_1}{M_1b_1}.$$

Отсюда следует, что $M_1C_1B_1$ — отрезок прямой. Из подобия треугольников $M_1c_1C_1$ и $M_1b_1B_1$ имеем:

$$\frac{M_1C_1}{M_1B_1} = \frac{M_1c_1}{M_1b_1} \text{ или } \frac{M_1C_1}{M_1B_1} = \frac{MC}{MB} \text{ и } \frac{M_1C_1}{C_1B_1} = \frac{MC}{CB},$$

что и требовалось доказать.

Мгновенный центр скоростей. Неизменно связанная с телом точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется ***мгновенным центром скоростей***. Мгновенный центр скоростей (МЦС) лежит на перпендикулярах к скоростям точек тела, опущенных из этих точек (рис. 1.40, *а*). Различные случаи определения МЦС (обозначен буквой P) показаны на рис. 1.40, *б*—*г*.

Преобразование движений. В машинах очень часто происходит преобразование одного движения в другое. Например, в кривошипно-шатунном механизме (рис. 1.41) кривошип OA совершает вращательное движение, которое преобразуется в поступательное перемещение ползуна B. При решении практических задач бывает необходимо найти законы этого движения или скорости.

Пример 1.11

В кривошипно-шатунном механизме (см. рис. 1.41) за один оборот кривошипа ползун проходит путь, равный 400 мм. Какой путь пройдет за это время точка A? Где будет находиться МЦС звена AB, когда кривошип OA займет вертикальное положение?

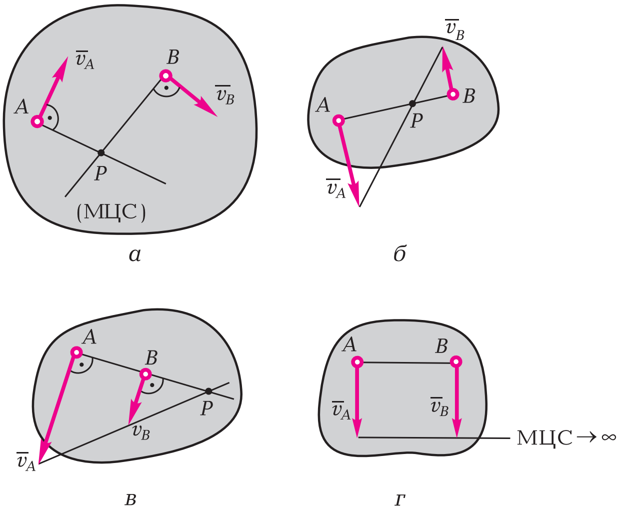


Рис. 1.40

Решение.

1. Рассмотрим, по каким траекториям движутся точки A, B и какие движения совершают тела, которым они принадлежат. Точка A принадлежит двум телам, движения которых различны. С одной стороны, точка A участвует во вращательном движении кривошипа OA, а с другой стороны, она принадлежит шатуну AB, который совершает плоское движение. Точка B также сочленяет две детали: шатун AB и ползун B. Поскольку точка B принадлежит ползуну, совершающему поступательное движение, при котором все его точки движутся прямолинейно, то для нее всегда известна траектория движения — это горизонтальная прямая. Таким образом, зная направления скоростей точек A и B, можно найти положение мгно-

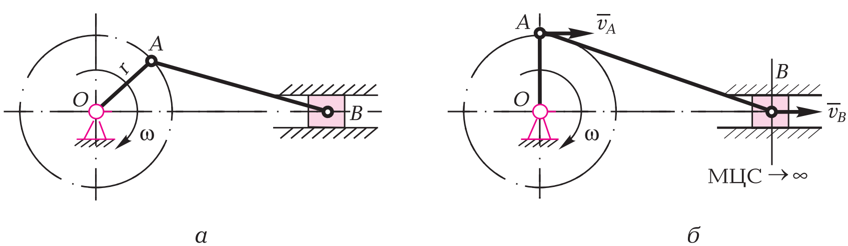


Рис. 1.41

венного центра скоростей для кривошипно-шатунного механизма, когда кривошип OA занимает вертикальное положение. Из рис. 1.41, *б* видно, что МЦС лежит в бесконечности. Следовательно, все точки звена AB имеют одинаковые скорости.

2. За один оборот кривошипа точка A проходит путь $S = 2\pi r$. Ползун B за один оборот пройдет путь, равный $4r$. Следовательно, можно найти радиус кривошипа, если известен пройденный путь точки B:

$$4r = 400\ \text{мм};\ r = 100\ \text{мм}.$$

3. Зная радиус r кривошипа, можно определить пройденный точкой A путь за один оборот кривошипа:

$$S = 2\pi r = 2\pi \cdot 100 = 628\ \text{мм}.$$

1.9. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Относительное, переносное и абсолютное движение точки

Сложное движение точки — это такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или нескольких движениях. Например, пассажир перемещается по палубе движущегося теплохода, который плывет по течению реки. Какова же будет траектория движения пассажира и его скорость по отношению к поверхности Земли, если русло реки проходит под углом к меридиану Земли? На этот вопрос можно ответить только после изучения понятий об относительном, переносном и абсолютном движении точки.

Рассмотрим движущееся в пространстве тело (рис. 1.42) и точку M, не принадлежащую этому телу, а совершающую по отношению к нему некоторое перемещение. Через произвольную точку O движущегося тела проведем оси Ox, Oy, Oz, связанные с этим телом. Эта система координат называется ***подвижной системой отсчета***.

Неподвижной системой отсчета будет система осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1, связанная с некоторым условно неподвижным телом, обычно с Землей.

Движение точки M относительно неподвижной системы отсчета называется ***абсолютным*** движением точки. Скорость и ускорение точки в абсолютном движении называются абсолютной скоростью и абсолютным ускорением и обозначаются $\overline{v}$ и $\overline{a}$.

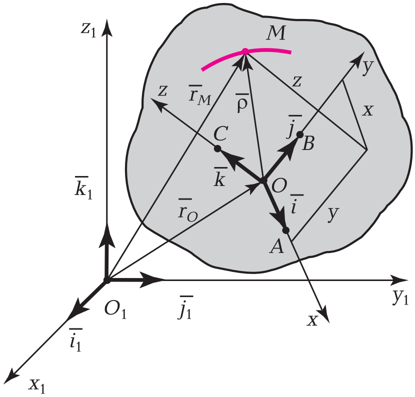


Рис. 1.42

Движение точки M по отношению к подвижной системе отсчета называют ***относительным*** движением точки, скорость и ускорение в относительном движении называют относительной скоростью и относительным ускорением, обозначают $\overline{v}_r$ и $\overline{a}_r$.

Движение подвижной системы отсчета $Oxyz$ и неизменно связанного с ней тела по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ является ***переносным*** движением. Скорость и ускорение точки тела, совпадающей в данный момент с движущейся по нему точкой M, называется переносной скоростью и ускорением и обозначается $\overline{v}_e$ и $\overline{a}_e$.

Теорема о сложении скоростей. Известно, что вектор скорости материальной точки

$$\overline{v} = d\overline{r}/dt.$$

Радиус-вектор $\overline{r}_M$ точки M связан с радиусом-вектором начала отсчета подвижной системы координат следующей зависимостью:

$$\overline{r}_M = \overline{r}_O + \overline{\rho},$$

где $\overline{\rho}$ — радиус-вектор точки M в подвижной системе отсчета; он определяет положение точки в ее относительном движении.

Вычислим вектор скорости точки M:

$$\overline{v}_M = \frac{d}{dt}(\overline{r}_M) = \frac{d}{dt}(\overline{r}_O + \overline{\rho}), \quad \text{или} \quad \overline{v}_M = \frac{d}{dt}(\overline{r}_O) + \frac{d}{dt}(\overline{\rho}).$$

В полученном выражении первое слагаемое представляет собой скорость ($\overline{v}_O$) точки O тела относительно неподвижной системы координат. Поскольку орты $\overline{i}$, $\overline{j}$ и $\overline{k}$ меняют положение в пространстве вместе с телом, то, следовательно, производная от них по времени не будет равна нулю. Следует заметить также, что точка O, в которой эти орты пересекаются, для них всегда неподвижна. Следовательно, эти орты совершают мгновенное вращение вокруг оси, проходящей через точку O.

Вычислим производную $\dfrac{d}{dt}(\overline{\rho})$:

$$\frac{d}{dt}(\overline{\rho}) = \frac{d}{dt}\left(x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}\right) = \overline{i}\frac{dx}{dt} + \overline{j}\frac{dy}{dt} + \overline{k}\frac{dz}{dt} + x\frac{d\overline{i}}{dt} + y\frac{d\overline{j}}{dt} + z\frac{d\overline{k}}{dt}.$$

Первые три слагаемых представляют собой относительную скорость точки M

$$\overline{v}_r = \frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k} = v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k}.$$

Здесь $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ и $v_z = \dfrac{dz}{dt}$ — проекции вектора относительной скорости $\overline{v}_r$ на соответствующие оси координат.

Итак,

$$\overline{v}_M = \overline{v}_O + x\frac{d\overline{i}}{dt} + y\frac{d\overline{j}}{dt} + z\frac{d\overline{k}}{dt} + \overline{v}_r.$$

Рассмотрим, что представляет собой производная, например, $\dfrac{d\overline{k}}{dt}$. Если, как было отмечено ранее, орт $\overline{k}$ может совершать только мгновенное вращение вокруг точки O, то существует мгновенная ось вращения $O\Omega$ (рис. 1.43).

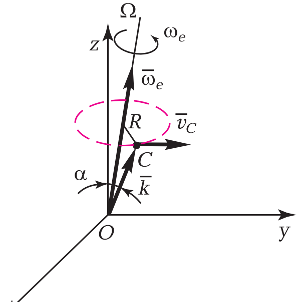


Рис. 1.43

Как известно, производная от радиуса-вектора есть линейная скорость конца этого вектора. Поскольку орт $\overline{k}$ — вектор, то $d\overline{k}/dt = \overline{v}_C$. Следовательно,

$$x\frac{d\overline{i}}{dt} + y\frac{d\overline{j}}{dt} + z\frac{d\overline{k}}{dt} = x\overline{v}_A + y\overline{v}_B + z\overline{v}_C.$$

Вычислим линейную скорость конца вектора, направленную по касательной к окружности, $v_C = R\omega = |\bar{k}|\omega\sin\alpha = \omega\sin\alpha$. Зная, что модуль векторного произведения $\bar{\omega}\times\bar{k}$ будет тоже равняться $\omega\sin\alpha$ и векторы $\bar{\omega}$, $\bar{k}$ и $\bar{v}_C$ взаимно-перпендикулярны, можно записать $\bar{v}_C = \bar{\omega}\times\bar{k}$. Аналогично запишем: $\bar{v}_B = \bar{\omega}\times\bar{j}$ и $\bar{v}_A = \bar{\omega}\times\bar{i}$. Таким образом,

$$x\frac{d\bar{i}}{dt} = x\bar{v}_A = x\bar{\omega}\times\bar{i} = \bar{\omega}\times x\bar{i};$$

$$y\frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}\times y\bar{j};\quad z\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}\times z\bar{k},$$

или

$$x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}\times\left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) = \bar{\omega}\times\bar{\rho}.$$

В результате мы получаем следующую зависимость:

$$\bar{v}_M = (\bar{v}_O + \bar{\omega}\times\bar{\rho}) + \bar{v}_r.$$

Выражение в скобках представляет собой скорость точки тела, которая совпадает в данный момент с точкой M, движущейся относительно этого тела (так как она равна сумме скорости полюса $\bar{v}_O$ и линейной скорости $\bar{\omega}\times\bar{\rho}$ при вращении относительно этого полюса). В результате получено равенство

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e.$$

которое выражает теорему о сложении скоростей:

абсолютная скорость точки равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей.

Эту теорему иногда называют ***правилом параллелограмма скоростей.***

В общем случае модуль абсолютной скорости можно вычислить по формуле

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e\cos\left(\bar{v}_r, \bar{v}_e\right)}.$$

Пример 1.12

Пассажир идет вдоль вагона со скоростью 0,5 км/ч в сторону, противоположную направлению движения поезда. Поезд движется по прямолинейному участку пути со скоростью 60 км/ч. С какой скоростью пассажир перемещается относительно строений?

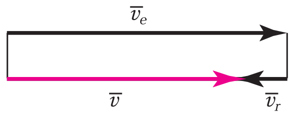


Рис. 1.44

Р е ш е н и е.

1. Определим переносную скорость. Поскольку вагон едет по прямолинейному пути, то он совершает поступательное движение. Следовательно, все точки имеют одинаковую скорость, т. е. $v_e = 60$ км/ч.

2. Определим абсолютную скорость пассажира. На основании теоремы о сложении скоростей при сложном движении точки $\overline{v} = \overline{v}_r + \overline{v}_e$ (рис. 1.44). Поскольку все векторы параллельны, то $v = 60 - 0,5 = 59,5$ км/ч.

О т в е т. Пассажир перемещается относительно строений в направлении движения поезда с абсолютной скоростью 59,5 км/ч.

1.10. СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей

Рассмотрим сложное движение твердого тела, представляющее собой совокупность двух вращательных движений тела вокруг осей, пересекающихся в одной точке. Примером такого движения является движение диска, показанного на рис. 1.45, *а*. Вращение этого диска относительно оси ON является его относительным движением, поэтому угловую скорость этого вращательного движения обозначим ω_r. Вращение самой оси ON вокруг оси Oz — это переносное движение, поэтому эту угловую скорость обозначим ω_e. Определим, каким будет абсолютное движение тела в этом случае.

Построим на векторах $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\omega}_r$ параллелограмм (рис. 1.45, *б*). Покажем, что диагональ OC этого параллелограмма представляет собой вектор угловой скорости результирующего вращения тела, которое происходит вокруг оси $O\Omega$. Скорость точки O равна нулю, так как она находится одновременно на двух мгновенных осях вращения ON и Oz. Определим скорость точки C. Так как эта точка принадлежит телу, участвующему в сложном движении, то ее скорость определяется по теореме о сложении скоростей:

$$\overline{v}_C = \overline{v}_r + \overline{v}_e.$$

Вычислим линейную скорость точки C в ее относительном вращении вокруг оси ON:

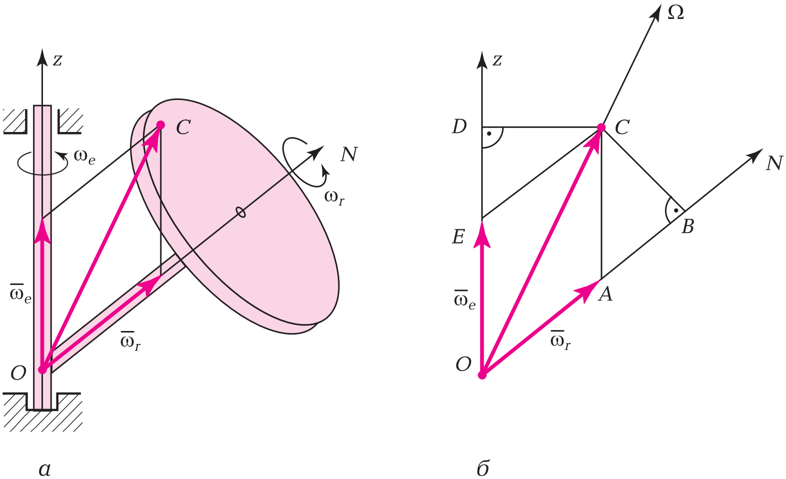


Рис. 1.45

$$v_r = BC\omega_r = 2 \text{ площади } \Delta OAC.$$

Вектор скорости $\overline{v}_r$ перпендикулярен плоскости OAC и направлен «на себя». Модуль линейной скорости точки C в ее переносном движении будет равен

$$v_e = DC\,\omega_e = 2 \text{ площади } \Delta OEC.$$

Вектор этой скорости направлен перпендикулярно плоскости OEC в сторону «от себя». Поскольку площади треугольников OAC и OEC равны по построению, то в точке C приложены два вектора, равные по величине и противоположно направленные, а следовательно, их сумма равна нулю.

Таким образом, прямая $O\Omega$, проходящая через две неподвижные точки O и C, является мгновенной осью вращения тела. Тогда можно считать, что диск (как и любое другое тело произвольной формы) мгновенно вращается вокруг оси $O\Omega$. В этом случае скорость любой точки M (рис. 1.46) может быть определена так:

$$\overline{v}_M = \overline{\omega} \times \overline{R}.$$

С другой стороны, эта точка участвует в сложном движении, поэтому ее скорость можно записать иначе

$$\overline{v}_M = \overline{v}_r + \overline{v}_e,$$

где $\overline{v}_r = \overline{\omega}_r \times \overline{R}$, а $\overline{v}_e = \overline{\omega}_e \times \overline{R}$.

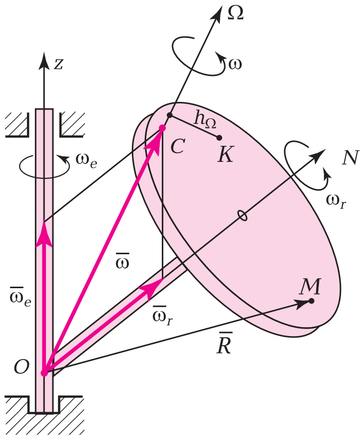


Рис. 1.46

Таким образом,

$$\overline{\omega} \times \overline{R} = \overline{\omega}_r \times \overline{R} + \overline{\omega}_e \times \overline{R},$$

откуда $\overline{\omega} \times \overline{R} = (\overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e) \times \overline{R}$.

Следовательно,

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e.$$

Таким образом,

геометрическая сумма векторов угловых скоростей относительного и переносного вращений равна вектору угловой скорости абсолютного вращения.

Установленное соотношение называют правилом параллелограмма угловых скоростей.

Построив параллелограмм угловых скоростей, скорость любой точки тела (например, для точки K) при сложении двух вращательных движений относительно пересекающихся осей можно определить относительно мгновенной оси вращения (см. рис. 1.46):

$$v_K = \omega h_\Omega.$$

Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей

В этом случае векторы относительной и переносной угловых скоростей параллельны. Здесь возможно несколько вариантов.

1. ***Относительное и переносное вращения направлены в одну сторону.*** Допустим, что плоская фигура I (рис. 1.47, *а*) вращается относительно плоскости II. В свою очередь, плоскость II совершает вращение относительно неподвижной плоскости III, тогда абсолютное движение плоской фигуры I будет составным по отношению к плоскости III; движение плоскости II в этом случае является переносным. Плоские фигуры I и II могут совершать аналогичные движения в плоскости III (рис. 1.47, *б*). Поскольку оба движения являются вращательными, то в точках пересечения осей вращения Ω_e и Ω_r с плоскостью III скорости будут равны нулю: в точке P_e — переносная, а в точке P_r — относительная. Как известно,

абсолютная скорость любой точки в сложном движении равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей. Так как переносная скорость точки P_e равна нулю, то ее абсолютная скорость будет равна относительной скорости:

$$\overline{v}_{Pe} = \overline{v}_r + \overline{v}_e = \overline{v}_r + 0 = \overline{v}_r.$$

Модуль этой скорости определяют по формуле $v_{Pe} = P_e P_r \omega_r$. Направлена она будет перпендикулярно ее радиусу вращения (отрезку $P_e P_r$) — «на себя».

Аналогичные рассуждения справедливы и для точки P_r, т. е. абсолютная скорость $\overline{v}_{Pr} = \overline{v}_r + \overline{v}_e = 0 + \overline{v}_e = \overline{v}_e$. Модуль этой скорости $v_{Pr} = P_e P_r\, \omega_e$, а вектор перпендикулярен отрезку $P_e P_r$ и направлен в сторону переносного вращения, т. е. «от себя».

Отложим на чертеже векторы абсолютных скоростей точек P_e и P_r, после чего найдем мгновенный центр скоростей P (рис. 1.47, *в*). Из рисунка видно, что движение плоской фигуры I складывается

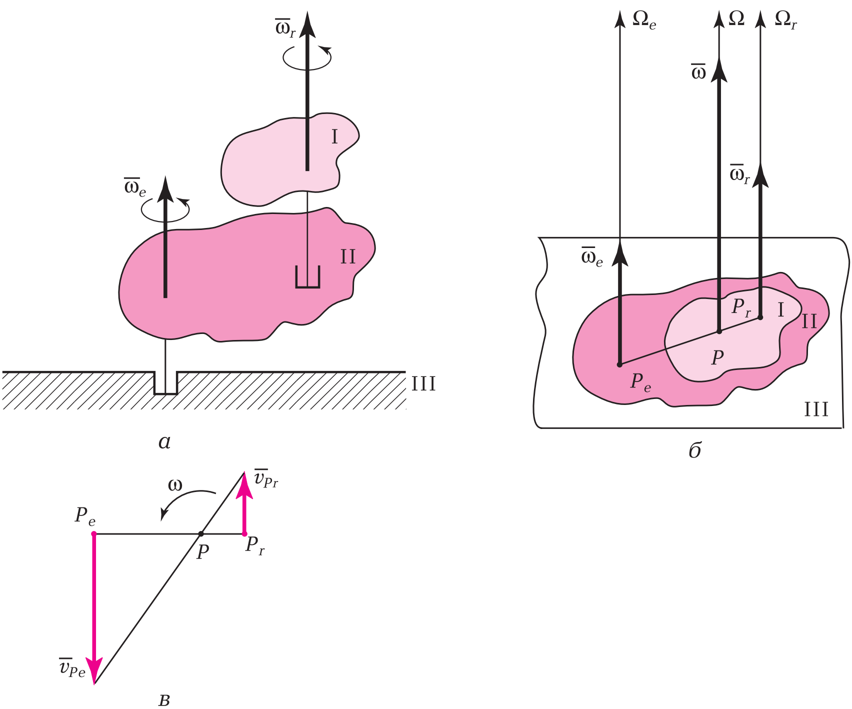


Рис. 1.47

из двух параллельных однонаправленных вращательных движений с угловой скоростью

$$\omega = v_{Pr}/PP_r = v_{Pe}/PP_e.$$

Из подобия треугольников следует, что $v_{Pe}/v_{Pr} = PP_e/PP_r$. Подставив значения скоростей v_{Pr} и v_{Pe}, выраженные через угловые скорости относительного и переносного движений, получим

$$\frac{PP_e}{PP_r} = \frac{\omega_r}{\omega_e}.$$

Следовательно,

мгновенная ось вращения Ω (см. рис. 1.47, *б*) проходит через мгновенный центр скоростей, точку P, параллельно осям Ω_e и Ω_r, деля при этом расстояние между этими осями на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям.

Определим модуль абсолютной угловой скорости. Для этого вместо $v_{Pr} = P_eP_r\omega_e$ подставим его значение $v_{Pr} = \omega PP_r$; в результате имеем $\omega PP_r = P_eP_r\omega_e$.

Учитывая, что $PP_e + PP_r = P_eP_r$, перепишем это равенство: $\omega PP_r = \omega_e(PP_e + PP_r)$, или $\omega PP_r = \omega_e PP_e + \omega_e PP_r$. Зная, что $\omega_e PP_e = \omega_r PP_r$, получим $\omega PP_r = \omega_r PP_r + \omega_e PP_r$, откуда после сокращения на общий множитель PP_r определим

$$\omega = \omega_e + \omega_r.$$

Модуль абсолютной угловой скорости равен сумме модулей угловых скоростей составляющих однонаправленных вращательных движений.

Из рис. 1.47,*в* видно, что абсолютное вращение плоской фигуры направлено так же против часовой стрелки, как и его составные движения. Направим вектор абсолютной угловой скорости ω по оси Ω в ту же сторону, что и векторы ω_e и ω_r (см. рис. 1.47,*б*).

2. ***Относительное и переносное вращения направлены в разные стороны, а модули их угловых скоростей не равны***. Определим абсолютную скорость мгновенного центра скоростей P_e (рис. 1.48, *а*): $\overline{v}_{Pe} = \overline{v}_r + \overline{v}_e = \overline{v}_r + 0 = \overline{v}_r$. Этот вектор равен по модулю $v_{Pe} = \omega_r\, P_eP_r$ и направлен «на себя». Аналогично определим абсолютную скорость мгновенного центра скоростей P_r: $\overline{v}_{Pr} = \overline{v}_r + \overline{v}_e = 0 + \overline{v}_e = \overline{v}_e$. Точка P_r в переносном движении вращается вокруг оси Ω_e

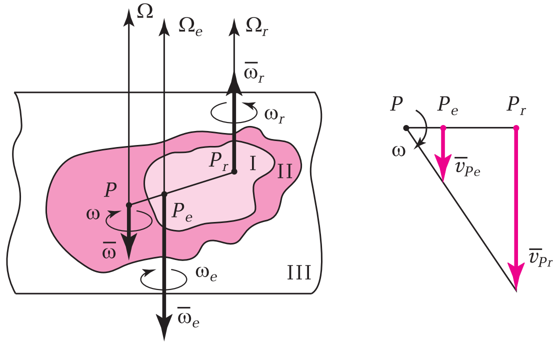


Рис. 1.48

против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\bar{\omega}_e$. Следовательно, вектор $\bar{v}_{Pr}$ направлен «на себя». Модуль вектора $\bar{v}_{Pr}$ будет равен $v_{Pr} = \omega_e P_e P_r$. На рис. 1.48,*а* показано, что $\bar{\omega}_e > \bar{\omega}_r$, поэтому $v_{Pr} > v_{Pe}$.

Отложим из точек P_e и P_r векторы скоростей $\bar{v}_{Pe}$ и $\bar{v}_{Pr}$ (рис. 1.48, *б*) и графически найдем мгновенный центр скоростей, т. е. точку P. Из рисунка видно, что абсолютное вращение будет происходить по часовой стрелке, если смотреть с конца мгновенной оси вращения Ω.

Из подобия треугольников (см. рис. 1.48, *б*) следует, что $v_{Pe}/v_{Pr} = PP_e/PP_r$. Подставив значения скоростей v_{Pr} и v_{Pe}, выраженные через угловые скорости относительного и переносного движений, получим

$$\frac{PP_e}{PP_r} = \frac{\omega_r}{\omega_e}.$$

Таким образом,

мгновенная ось абсолютного вращения плоской фигуры параллельна осям переносного и относительного вращений; она лежит в плоскости, проходящей через эти оси, и делит расстояние между этими осями внешним образом обратно пропорционально угловым скоростям.

Для определения модуля угловой скорости абсолютного вращения воспользуемся зависимостью $v_{Pr} = \omega PP_r$ (см. рис. 1.48, *б*). В то же время, как было установлено ранее, $v_{Pr} = P_e P_r \omega_e$. Приравняв правые части и учитывая, что $P_e P_r = PP_r - PP_e$, получим

$$\omega PP_r = \omega_e (PP_r - PP_e), \text{ или } \omega PP_r = \omega_e PP_r - \omega_e PP_e.$$

Ранее было доказано, что $\omega_e PP_e = \omega_r PP_r$. С учетом этого равенства получаем $\omega PP_r = \omega_e PP_r - \omega_r PP_r$, после сокращения на множитель PP_r имеем

$$\omega = \omega_e - \omega_r,$$

т. е.

модуль абсолютной угловой скорости равен разности угловых скоростей составляющих разнонаправленных вращений. Вектор абсолютной угловой скорости направлен в сторону большей угловой скорости и расположен со стороны той оси, угловая скорость вращения вокруг которой больше (см. рис. 1.48, *а*).

3. ***Относительное и переносное вращения направлены в разные стороны, модули их угловых скоростей равны*** (рис. 1.49, *а*). Определим для данного случая абсолютное движение плоской фигуры I. Поскольку модули угловых скоростей равны, то

$$\bar{\omega}_e = -\bar{\omega}_r.$$

Относительное вращение вокруг оси Ω_r совершает фигура I, а переносное вращение вокруг оси Ω_e — фигура II. Поскольку для любой точки фигуры I имеет место равенство

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r,$$

то для точки M это равенство также будет справедливо. Определим ее относительную скорость. Вектор $\bar{v}_r$ будет направлен по перпендикуляру к отрезку MP_r в направлении угловой скорости ω_r (рис. 1.49, *б*). Вычислим его модуль

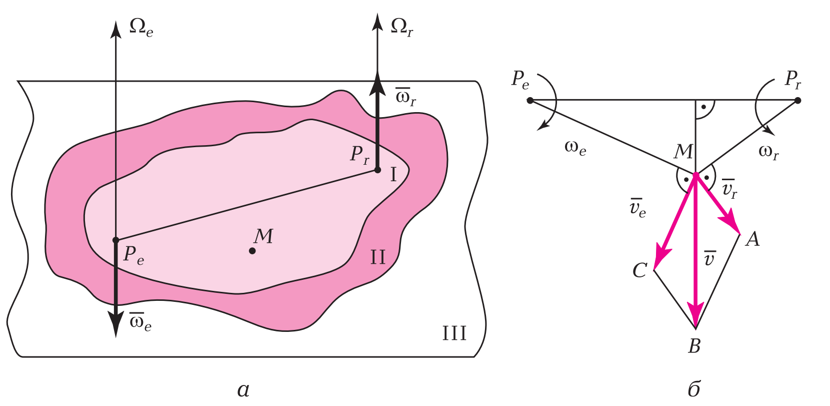


Рис. 1.49

$$v_r = \omega_r MP_r, \text{ или } v_r = \omega_e MP_r, \text{ так как } \omega_r = \omega_e.$$

Переносная скорость точки M будет направлена перпендикулярно отрезку MP_e в сторону переносной угловой скорости ω_e. Вычислим модуль переносной скорости $\bar{v}_e$

$$v_e = \omega_e MP_e.$$

Построим параллелограмм на векторах скоростей $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$ (см. рис. 1.49, *б*). Треугольники MBC и P_eMP_r подобны, так как стороны их пропорциональны и взаимно-перпендикулярны. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{v}{P_eP_r} = \frac{v_e}{MP_e} = \frac{v_r}{MP_r} = \omega_e = \omega_r = \omega.$$

Так как стороны MC и CB перпендикулярны соответственно сторонам MP_e и MP_r, то третьи стороны этих треугольников будут также перпендикулярны, т.е. вектор $\bar{v}$ перпендикулярен стороне P_eP_r. Значит, вектор скорости любой точки, выбранной произвольно, должен быть перпендикулярен отрезку P_eP_r, а ее модуль равен

$$v = \omega P_eP_r.$$

Если скорости всех точек тела одинаковы по модулю и направлению, то мгновенный центр скоростей такого тела лежит в бесконечности — тело совершает поступательное движение.

Таким образом,

при сложении двух вращений с равными по модулю, но противоположно направленными угловыми скоростями результирующим движением является поступательное.

Совокупность двух вращений, направленных в противоположные стороны и имеющих равные по модулю угловые скорости, называется ***парой вращений***.

Пример 1.13

Механизм приводится в движение кривошипом OB, который вращается с угловой скоростью ω_O (рис. 1.50, *а*). Определить, с какой скоростью звено AC вращается относительно кривошипа OB и его мгновенную абсолютную угловую скорость, используя теорему о сложении вращений относительно параллельных осей.

Р е ш е н и е.

1. Определяем относительную угловую скорость звена AC.

Звено AC совершает сложное движение. Его точка B принадлежит одновременно звену OB и AC, поэтому скорость ее в относительном вращательном движении равна нулю. Значит, это мгновенный центр скоростей

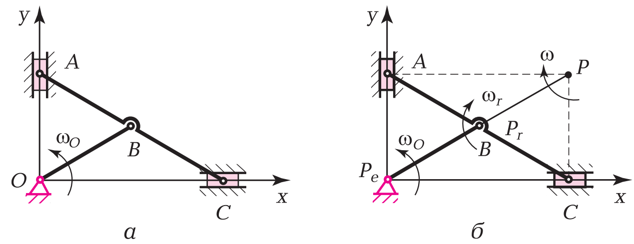


Рис. 1.50

звена AC в его относительном вращательном движении; обозначим его P_r (рис. 1.50, *б*). Переносным вращением является вращение кривошипа OB относительно неподвижной точки O; обозначим эту точку P_e. Оси переносного и относительного вращений перпендикулярны плоскости чертежа, т. е. параллельны между собой. Следовательно, можно применить теорему о сложении вращательных движений относительно параллельных осей.

Поскольку известны направления скоростей точек A и C звена AC (соответственно вдоль осей Ox и Oy), то можно найти МЦС этого звена, т. е. точку P (см. рис. 1.50, *б*).

Вычислим отношение ω_r/ω_e (см. подразд. 1.10):

$$\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{PP_e}{PP_r} = \frac{2OB}{OB} = 2.$$

Отсюда относительная угловая скорость вращения $\omega_r = 2\omega_e = 2\omega_O$.

2. Определяем мгновенную абсолютную угловую скорость звена AC.

Точка P (МЦС абсолютного вращательного движения) лежит на отрезке P_eP_r и делит его внешним образом, следовательно, направления переносной и относительной угловых скоростей противоположные. А так как точка P находится ближе к P_r, чем к P_e, то $\omega_r > \omega_e$, и тогда абсолютная угловая скорость звена AB будет равна

$$\omega = \omega_r - \omega_e = 2\omega_O - \omega_O = \omega_O.$$

О т в е т. Относительная угловая скорость звена AC в данный момент в два раза больше, чем угловая скорость кривошипа OB, и направлена в противоположную сторону.

Абсолютная угловая скорость звена AC в данный момент равна угловой скорости кривошипа OB, но направлена в другую сторону.

1.11. ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ, УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под действием приложенных к ним сил. В основе динамики лежат законы, сформулированные Ньютоном.

Первый закон — закон инерции, установленный Галилеем, гласит:

материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие других тел не изменит это состояние.

Второй закон — основной закон динамики — устанавливает связь между ускорением $\overline{a}$, массой m материальной точки M и силой $\overline{F}$ (рис. 1.51, *а*):

ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление.

Запишем этот закон в форме, которую придал ему Эйлер:

$$m\overline{a} = \overline{F}.$$

В классической механике масса m принята за постоянную величину. ***Масса*** является мерой инертности материальных тел в их поступательном движении. Запишем основной закон динамики в скалярном виде, проецируя векторные величины, входящие в равенство, на оси координат:

$$ma_x = F_x; \quad ma_y = F_y; \quad ma_z = F_z.$$

Третий закон формулируется следующим образом:

всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Этот закон устанавливает, что при взаимодействии двух тел, в каком бы кинематическом состоянии они не находились, силы, приложенные к каждому из них, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

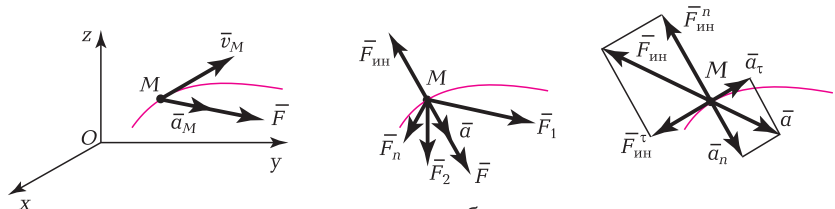


Рис. 1.51

Четвертый закон не был сформулирован Ньютоном как отдельный закон механики, но таковым можно считать сделанное им обобщение правила параллелограмма сил:

> несколько одновременно действующих сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщала бы одна сила, равная их геометрической сумме.

Основной закон динамики можно записать в скалярном виде, спроецировав векторы либо на декартовы, либо на естественные оси координат. В первом случае получим ***уравнения движения материальной точки в прямоугольной декартовой системе координат***:

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y; \quad m\ddot{z} = F_z,$$

где $\ddot{x} = a_x$; $\ddot{y} = a_y$; $\ddot{z} = a_z$.

Во втором случае получим ***естественные уравнения движения***:

$$ma_n = F_n; \quad ma_\tau = F_\tau; \quad ma_b = F_b,$$

где $a_n = v^2/\rho$; $a_\tau = d^2S/dt^2$.

Проекция ускорения на бинормаль всегда равна нулю ($a_b = 0$), поэтому $F_b = 0$.

Пример 1.14

Уравнения движения материальной точки M массой m имеют вид

$$x = r\cos kt; \quad y = r\sin kt.$$

Определить равнодействующую приложенных к материальной точке сил и траекторию ее движения.

Решение.

1. Определяем проекции ускорения на оси координат. Для этого сначала определим проекции скорости на те же оси:

$$v_x = \dot{x} = -kr\sin kt; \quad v_y = \dot{y} = kr\cos kt.$$

С учетом этого получаем $a_x = \dot{v}_x = -k^2 r\cos kt$; $a_y = \dot{v}_y = -k^2 r\sin kt$.

2. Определяем проекции равнодействующей силы. Поскольку $F_x = m\ddot{x} = ma_x$ и $F_y = m\ddot{y} = ma_y$, то

$$F_x = -mk^2\cos kt; \quad F_y = -mk^2\sin kt.$$

3. Определяем модуль равнодействующей:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2 r\sqrt{\cos^2 kt + \sin^2 kt} = mk^2 r.$$

4. Определяем направление равнодействующей:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = -\cos kt = -\frac{x}{r}; \;\; \cos\beta = \frac{F_y}{F} = -\sin kt = -\frac{y}{r}.$$

Очевидно, что угол наклона равнодействующей силы по отношению к осям координат меняется.

5. Определяем траекторию движения материальной точки. Для исключения переменной t возведем в квадрат и сложим уравнения движения. В результате получим уравнение окружности с радиусом r: $x^2 + y^2 = r^2$.

Из полученного решения можно сделать следующий вывод: материальная точка движется по окружности радиусом r под воздействием приложенной к ней силы, которая все время направлена к центру этой окружности.

Принцип Д'Аламбера

Принципом Д'Аламбера называют общий метод, с помощью которого уравнениям динамики придается вид уравнений статики. Для этого вводится понятие «сила инерции материальной точки» — сила, равная произведению массы точки на ее ускорение и направленная противоположно ускорению:

$$\bar{F}_{\text{ин}} = -m\bar{a}.$$

Положим, что материальная точка M под действием системы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$ движется с ускорением $\bar{a}$ (рис. 1.51, *б*), в этом случае основное уравнение динамики будет иметь вид

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n.$$

Перенесем член $m\bar{a}$ из левой части уравнения в правую. Тогда

$$0 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n - m\bar{a}.$$

Так как $-m\bar{a} = \bar{F}_{\text{ин}}$, то

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n + \bar{F}_{\text{ин}} = 0.$$

Полученное соотношение выражает ***принцип Д'Аламбера*** и формулируется следующим образом:

> геометрическая сумма всех приложенных к точке сил и силы инерции этой точки равна нулю.

Принцип Д'Аламбера применим как для свободной, так и для несвободной материальной точки, так как, освобождая материальную точку от связей и заменяя их действие пассивными силами, мы рассматриваем движение точки под действием активных и пассивных сил, которые сообщают ей ускорение.

Следует помнить, что к материальной точке инерционная сила приложена лишь условно. Фактически сила инерции приложена не к материальной точке, а к телу, сообщающему ей ускорение. Этот метод получил широкое применение при расчетах на прочность при динамических нагрузках (см. пример 2.18 в главе 2).

Силу инерции можно разложить на касательную $F^{\tau}_{\text{ин}}$ (тангенциальную) и нормальную $F^{n}_{\text{ин}}$ (центробежную) составляющие (рис. 1.51, *в*):

$$F^{\tau}_{\text{ин}} = ma^{\tau};\ F^{n}_{\text{ин}} = mv^2/\rho,$$

где ρ — радиус кривизны траектории.

В случае круговой траектории точки (радиус окружности r), принадлежащей телу, вращающемуся с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε, тангенциальная и центробежная составляющие силы инерции имеют вид

$$F^{\tau}_{\text{ин}} = m\varepsilon r;\ F^{n}_{\text{ин}} = m\omega^2 r.$$

1.12. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ТОЧКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Механической системой называют мысленно выделенную совокупность материальных точек, взаимодействующих между собой. Механическую систему иногда называют ***материальной системой*** или ***системой материальных точек***. Существуют системы ***свободных*** (например, Солнечная система) и ***несвободных*** материальных точек (их движения ограничены связями). Примером системы несвободных точек может служить любой механизм или машина. Все силы, действующие на систему несвободных точек, подразделяют на ***задаваемые* (*активные*) *силы*** и ***реакции связей* (*пассивные силы*)**.

По другому признаку силы, действующие на точки любой механической системы, делят на ***внешние*** и ***внутренние***. Условимся обозначать внешние силы $\bar{F}^E$, а внутренние силы $\bar{F}^J$.

Внешними называют силы, действующие на точки системы со стороны материальных точек, не входящих в состав данной системы.

Внутренними силами называются силы взаимодействия между материальными точками данной механической системы. Примером внутренних сил могут служить силы упругости, действующие между частицами упругого тела, принятого за механическую систему.

Одна и та же сила может быть как внешней, так и внутренней в зависимости от того, какая механическая система рассматривается. Например, реакции подшипников вала являются внешними силами по отношению к валу. Эти же реакции можно отнести к внутренним силам, если рассматривать всю установку вместе с машиной.

Таким образом, любая сила может быть внешней или внутренней, в то же время она может быть задаваемой или реакцией связи. Движение точек системы зависит как от внешних, так и от внутренних сил.

По закону равенства действия и противодействия каждой внутренней силе соответствует другая внутренняя сила, равная ей по модулю и противоположная по направлению. На основании этого можно сделать следующие выводы.

1. Главный вектор всех внутренних сил системы равен нулю:

$$\bar{R}^J = \sum_{i=1}^{k} \bar{F}_i^J = 0.$$

Следовательно, и суммы их проекций на координатные оси также равны нулю:

$$\sum_{i=1}^{k} \bar{F}_{ix}^J = 0; \quad \sum_{i=1}^{k} \bar{F}_{iy}^J = 0; \quad \sum_{i=1}^{k} \bar{F}_{iz}^J = 0.$$

2. Главный вектор-момент всех внутренних сил системы относительно любого центра и координатных осей равен нулю:

$$\bar{M}_O^J = \sum_{i=1}^{k} \bar{M}_{iO}^J = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{mom}_x(\bar{F}_i^J) = 0; \quad \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mom}_y(\bar{F}_i^J) = 0; \quad \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mom}_z(\bar{F}_i^J) = 0.$$

Эти уравнения имеют вид уравнений равновесия сил, произвольно приложенных в пространстве, однако в них входят внутренние силы, которые не уравновешиваются, так как они приложены к разным точкам системы и могут вызвать перемещение этих точек относительно друг друга.

1.13 ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Представим, что механическая система массой m состоит из k материальных точек (рис. 1.52). Известно (см. подразд. 1.6), что можно найти положение центра масс такой системы, если заданы массы m_i точек и их координаты:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i x_i}{m}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i y_i}{m}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i z_i}{m},$$

или $mx_C = \sum_{i=1}^{k} m_i x_i; \quad my_C = \sum_{i=1}^{k} m_i y_i; \quad mz_C = \sum_{i=1}^{k} m_i z_i.$

Дважды продифференцировав эти равенства, получим

$$m\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^{k} m_i \ddot{x}_i; \quad m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^{k} m_i \ddot{y}_i; \quad m\ddot{z}_C = \sum_{i=1}^{k} m_i \ddot{z}_i.$$

Правые части полученных уравнений в соответствии с основным законом динамики представляют собой сумму внешних $\bar{F}_i^E$ и внутренних $\bar{F}_i^J$ сил, действующих на эти материальные точки, в проекциях на соответствующие оси координат. Следовательно, последние уравнения можно переписать так:

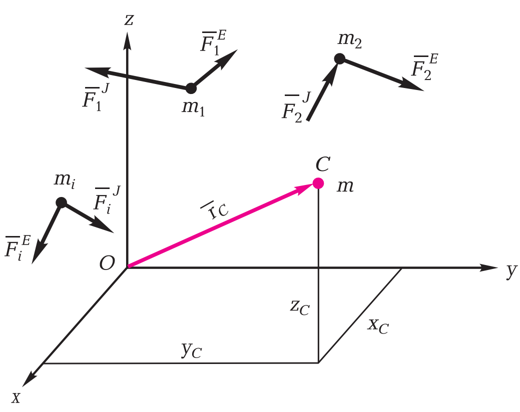


Рис. 1.52

$$m\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^{k} F_{ix}^E + \sum_{i=1}^{k} F_{ix}^J;\ m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^{k} F_{iy}^E + \sum_{i=1}^{k} F_{iy}^J;\ \ m\ddot{z}_C = \sum_{i=1}^{k} F_{iz}^E + \sum_{i=1}^{k} F_{iz}^J.$$

Учитывая, что главный вектор внутренних сил равен нулю ($\overline{R}^J = 0$), получим

$$m\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^{k} F_{ix}^E;\ \ m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^{k} F_{iy}^E;\ \ m\ddot{z}_C = \sum_{i=1}^{k} F_{iz}^E.$$

Эти уравнения выражают теорему о движении центра масс системы, которая формулируется следующим образом.

Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на эту систему.

Отсюда следует, что внутренние силы не оказывают влияния на движение центра масс механической системы.

Пример 1.15

Определить перемещение плавучего крана, поднимающего груз массой 2 000 кг, при повороте стрелы крана до вертикального положения (рис. 1.53). Масса крана 20 т. Длина стрелы *AB* равна 8 м. Сопротивлением воды пренебречь.

Р е ш е н и е.

1. Выбираем систему отсчета (рис. 1.53, *а*).

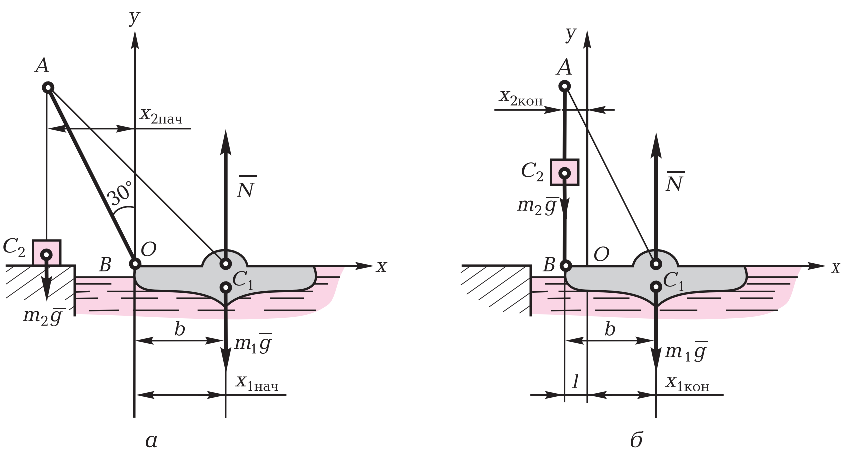


Рис. 1.53

2. Проставляем все внешние силы, действующие на материальные тела данной механической системы. На плавучий кран действуют сила тяжести $m_1\bar{g}$ (заданная сила) и сила $\bar{N}$ (реакция, т. е. пассивная сила); к грузу приложена только одна внешняя сила — его вес $m_2\bar{g}$.

3. Запишем уравнения движения центра масс механической системы

$$m\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^{2} F_{ix}^E; \quad m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^{2} F_{iy}^E,$$

или

$$m\ddot{x}_C = 0; \quad m\ddot{y}_C = -m_1 g - m_2 g + N.$$

4. Будем исследовать первое уравнение, так как нас интересует движение центра масс по горизонтали. Поскольку $m\ddot{x}_C = 0$, то скорость центра масс вдоль оси Ox $v_{xC} = \text{const}$. Это означает, что скорость центра масс в этом направлении в любой момент времени неизменна, т. е. справедливо равенство $v_{xC\,\text{нач}} = v_{xC\,\text{кон}}$.

В начальный момент система находилась в покое, следовательно, $v_{xC\,\text{нач}} = v_{xC\,\text{кон}} = 0$. А так как $v_{xC} = dx_C/dt$, то $x_C = \text{const}$.

Таким образом, анализ уравнения движения центра масс вдоль оси Ox показал, что начальная и конечная координаты центра масс совпадают: $x_{C\,\text{нач}} = x_{C\,\text{кон}}$.

5. Запишем формулы для определения начального и конечного положений центра масс механической системы:

$$x_{C\,\text{нач}} = \frac{m_1 x_{1\,\text{нач}} + m_2 x_{2\,\text{нач}}}{m_1 + m_2};$$
$$x_{C\,\text{кон}} = \frac{m_1 x_{1\,\text{кон}} + m_2 x_{2\,\text{кон}}}{m_1 + m_2}.$$

6. Выразим начальные и конечные координаты материальных тел системы в соответствии с выбранной системой отсчета (см. рис. 1.53, *а* и *б*):

$$x_{1\,\text{нач}} = b; \quad x_{2\,\text{нач}} = -AB\sin 30° = -8 \cdot \frac{1}{2} = -4 \text{ м};$$
$$x_{1\,\text{кон}} = b - l; \quad x_{2\,\text{кон}} = -l.$$

7. Определяем перемещение l плавучего крана. Приравнивая $x_{C\,\text{нач}} = x_{C\,\text{кон}}$, получим

$$m_1 x_{1\,\text{нач}} + m_2 x_{2\,\text{нач}} = m_1 x_{1\,\text{кон}} + m_2 x_{2\,\text{кон}},$$

или $m_1 b + m_2(-4) = m_1(b - l) + m_2(-l)$; $m_1 b - m_2 \cdot 4 = m_1 b - m_1 l - m_2 l$;

$$-2\,000 \cdot 4 = -20\,000 l - 2\,000 l; \quad l = (4 \cdot 2\,000)/(20\,000 + 2\,000) = 0{,}36 \text{ м}.$$

О т в е т. $l = 0{,}36$ м.

1.14. РАБОТА СИЛЫ

Работа постоянной силы

Вычислим работу силы, постоянной по модулю и направлению (рис. 1.54, *а*). Предположим, что точка M перемещается в точку M_1. Вектор силы $\overline{F}$ с вектором перемещения составляет угол α. В этом случае работу выполняет только та составляющая силы, которая совпадает с направлением вектора перемещения $\overline{U}$:

$$A = FU\cos\alpha = FU\cos(\overline{F}, \overline{U}).$$

Из векторной алгебры известно, что скалярное произведение двух векторов

$$\overline{F} \cdot \overline{U} = FU\cos(\overline{F}, \overline{U}).$$

Следовательно, работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении определяется скалярным произведением вектора силы на вектор перемещения ее точки приложения:

$$A = \overline{F} \cdot \overline{U}.$$

Рассмотрим частные случаи определения работы постоянной силы.

1. Сила $\overline{F}$ действует на тело в направлении вектора перемещения $\overline{U}$:

$$A = FU.$$

2. Сила $\overline{F}$ направлена перпендикулярно вектору перемещения $\overline{U}$:

$$A = 0.$$

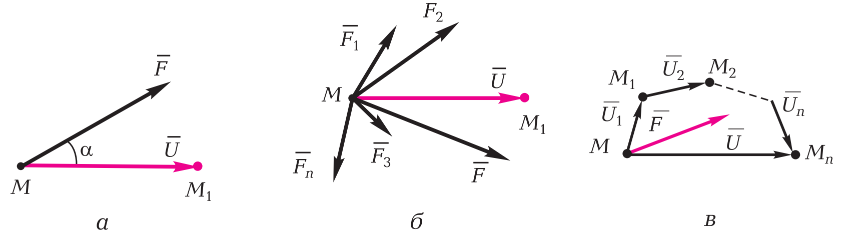


Рис. 1.54

3. Сила $\bar{F}$ направлена в сторону, противоположную вектору перемещения $\bar{U}$:

$$A = -FU.$$

Теорема 1. Работа равнодействующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих силы на том же перемещении.

Положим, что на точку M действуют постоянные по модулю и направлению силы $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$ (рис. 1.54, *б*). Равнодействующая этих сил $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + ... + \bar{F}_n$. Если точка получает перемещение $\bar{U}$, то работа силы $\bar{F}$ на этом перемещении будет равна

$$A = \bar{F} \cdot \bar{U} = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + ... + \bar{F}_n) \cdot \bar{U} = \bar{F}_1 \cdot \bar{U} + \bar{F}_2 \cdot \bar{U} + ... + \bar{F}_n \cdot \bar{U}.$$

Полученная сумма представляет собой сумму работ отдельных сил на перемещении $\bar{U}$. Таким образом, имеем

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_n.$$

Теорема 2. Работа силы на результирующем перемещении равна алгебраической сумме работ этой силы на составляющих перемещениях.

Положим, что точка приложения постоянной силы $\bar{F}$ получает совокупность последовательных перемещений $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$, ..., $\bar{U}_n$ (рис. 1.54, *в*). Результирующее перемещение точки M

$$\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + ... + \bar{U}_n.$$

Определим работу силы $\bar{F}$ на этом перемещении

$$A = \bar{F} \cdot \bar{U} = \bar{F} \cdot (\bar{U}_1 + \bar{U}_2 + ... + \bar{U}_n) = \bar{F} \cdot \bar{U}_1 + \bar{F} \cdot \bar{U}_2 + ... + \bar{F} \cdot \bar{U}_n.$$

Полученная сумма представляет собой сумму работ силы $\bar{F}$ на составляющих перемещениях. Таким образом, имеем

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_n.$$

Напомним, что единицей измерения работы в системе СИ является джоуль (1 Дж = 1 Н · м).

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории, а определяется только расстоянием по вертикали между начальной и конечной точками перемещения (перепадом высот H): если точка перемещается сверху вниз, то работа силы тяжести положительная:

$$A = mgH,$$

если точка перемещается снизу вверх, то работа силы тяжести отрицательная:

$$A = -mgH.$$

Из этого следует важный вывод:

работа силы тяжести на замкнутом пути равна нулю.

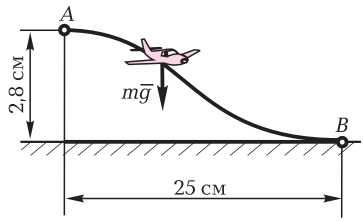


Рис. 1.55

Пример 1.16

Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить работу силы тяжести при снижении планера массой 1 200 кг из точки A в точку B (рис. 1.55).

Решение.

На планер, который мы принимаем за материальную точку, действует только сила тяжести. Работа силы тяжести при перемещении ее точки приложения сверху вниз определяется так:

$$A = mgH = 1\,200 \cdot 9{,}8 \cdot 2\,800 = 32\,828\,000 \text{ Н} \cdot \text{м} = 32{,}82 \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

Элементарная работа

Пусть точка, к которой приложена переменная по направлению и модулю сила $\overline{F}$, перемещается по криволинейной траектории из M_1 в M_2. Разобьем траекторию на элементарные участки ΔS_i, в пределах которых можно считать, что сила $\overline{F}_i$ остается постоянной. Вычислим элементарную работу на i-м участке:

$$\delta A = F_i \Delta S_i \cos \alpha_i,$$

где α_i — угол между касательной к траектории в данной точке и силой $\overline{F}_i$.

Фактически это зависимость для определения работы постоянной силы на элементарном перемещении. Работа силы при перемещении точки ее приложения из M_1 в M_2 определяется суммой элементарных работ:

$$A = \sum \delta A.$$

Следует заметить, что $\delta A \neq dA$, так как в общем случае элементарная работа не является дифференциалом функции.

Переходя к пределу при условии, что число участков n неограниченно возрастает, а ΔS_i неограниченно убывает, получим

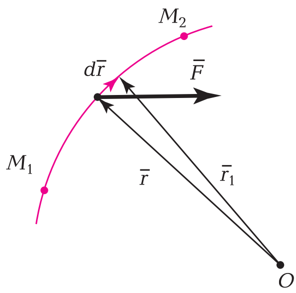


Рис. 1.56

выражение для определения работы при перемещении точки из M_1 в M_2:

$$A_{1,2} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta S\to 0}} \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta S_i \cos\alpha_i .$$

Такой предел называется криволинейным интегралом первого рода по дуге M_1M_2 и обозначается

$$A_{1,2} = \int_{M_1M_2} F\cos\alpha\, ds.$$

В то же время элементарную работу на элементарном перемещении можно выразить как скалярное произведение двух векторов (вектора силы $\bar{F}$ и вектора перемещения $d\bar{r}$) (рис. 1.56):

$$\delta A = \bar{F}\cdot d\bar{r},$$

что позволит вычислить элементарную работу через проекции этих векторов:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Работа силы на конечном пути

Пусть на материальную точку действуют силы, которые заменим равнодействующей силой $\bar{F}$, переменной по направлению и модулю. Поскольку элементарная работа может быть выражена через их проекции на оси координат $\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, то работа на конечном перемещении точки из положения M_1 в M_2 определится криволинейным интегралом, взятым вдоль дуги M_1M_2:

$$A_{1,2} = \int_{M_1M_2} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right),$$

или

$$A_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \left(F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}\right) dt.$$

Итак, из полученной зависимости для работы силы на конечном пути видно, что $F_x \dot{x} dt$ — это работа составляющей силы, а следовательно, работа равнодействующей сил, приложенных к материальной точке на некотором перемещении, равна сумме работ составляющих сил на том же перемещении:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Работа сил, приложенных к вращающемуся твердому телу

Твердое тело представляет собой механическую систему, расстояния между точками которой остаются неизменными. Положим, что к твердому телу (рис. 1.57), вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложены внешние силы $\bar{F}_1^E, \bar{F}_2^E, \ldots, \bar{F}_n^E$, в результате действия которых в опорах A и B возникают реакции связей (их проекции показаны на рисунке). Необходимо определить работу сил, в результате действия которых тело вращается. Помимо внешних существуют и внутренние силы и моменты, но для абсолютно твердого тела работа внутренних силовых факторов равна нулю. Вычислим элементарную работу отдельной силы $\bar{F}_i^E$ на элементарном перемещении ее точки приложения dS_i. Траектория точки D_i — окружность с радиусом $r_i = D_iO$. При элементарном перемещении тела угол его поворота получает приращение $d\varphi$, а дуговая координата точки D_i — приращение $dS_i = r_i d\varphi$. Вычислим элементарную работу силы $\bar{F}_i^E$, предварительно разложив ее на три составляющие по естественным осям траектории точки D_i. Работа сил $\bar{F}_{in}^E$ и $\bar{F}_{ib}^E$, перпендикулярных вектору скорости точки D_i, равна нулю, поэтому элементарная работа силы $\bar{F}_i^E$ будет определяться только ее тангенциальной составляющей

$$\delta A_i^E = F_{i\tau}^E dS_i = F_{i\tau}^E r_i d\varphi = M_{iz}^E d\varphi.$$

Элементарная работа всех внешних сил, приложенных к твердому телу:

$$\delta A = \sum \delta A_i^E = \sum M_{iz}^E d\varphi = d\varphi \sum M_{iz}^E,$$

где $\sum M_{iz}^E = M_z^E$ — главный момент внешних сил относительно оси вращения Oz. Здесь следует отметить,

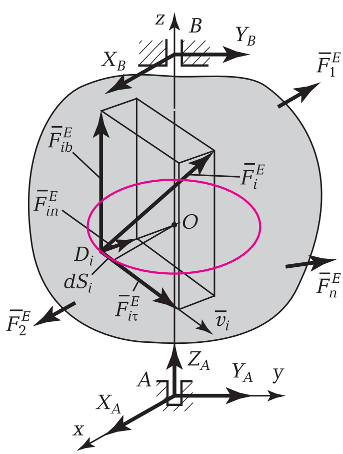


Рис. 1.57

что реакции связей не создают моментов относительно оси Oz, так как пересекают эту ось. Таким образом, имеем

$$\delta A = \sum \delta A_i^E = M_z^E d\varphi,$$

т. е.

> элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на приращение угла поворота.

Если при вращении тела угол поворота изменяется от φ_1 до φ_2, то сумма работ сил на этом конечном перемещении будет

$$\sum A_i = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^E d\varphi.$$

Если главный момент внешних сил относительно оси Oz постоянный, то

$$\sum A_i = M_z^E \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M_z^E (\varphi_2 - \varphi_1).$$

В этом случае

> сумма работ на конечном угловом перемещении равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на конечное изменение угла поворота тела.

1.15. МОЩНОСТЬ

Одна и та же работа может быть выполнена за различные промежутки времени. Поэтому вводят понятие «мощность»; единицей измерения мощности в системе СИ является ватт (1 Вт = 1 Дж/с).

Если сила совершает за равные промежутки времени равную работу, то мощность можно определить как отношение работы ко времени. При ***равномерном прямолинейном движении точки***, когда $U = vt$, мощность можно представить через силу и скорость движения:

$$N = Fv\cos\alpha.$$

Для ***равномерного вращательного движения тела*** с постоянной угловой скоростью ω справедлива следующая формула:

$$N = M_{кр}\omega = M_{кр}\frac{n}{30},$$

где $M_{кр}$ — крутящий момент относительно оси вращения; n — частота вращения, мин$^{-1}$.

Рассмотрим общий случай, когда работа совершается ***неравномерно***. Вычислим работу от некоторой фиксированной точки M_1 до текущего положения M:

$$A = \int_{M_1M}\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right), \quad \text{или} \quad A = \int_{t1}^{t}\left(F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}\right)dt.$$

Мощность N силы $\bar{F}$ определяется как скорость изменения работы:

$$N = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt},$$

где A рассматривается как функция времени t. В этом случае полный дифференциал работы $dA = (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})dt$, выраженный как функция времени t, равен элементарной работе $dA(t) = \delta A$ или, как ранее было сказано, $dA = \bar{F}\cdot d\bar{r}$. Тогда

$$dA(t) = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Таким образом,

$$N = \frac{dA}{dt} = \bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F}\cdot\bar{v} = \bar{F}_x\dot{x} + \bar{F}_y\dot{y} + \bar{F}_z\dot{z},$$

т. е. мощность N равна скалярному произведению силы $\bar{F}$ на скорость точки приложения силы.

1.16. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ

Чтобы произвести полезную работу, необходимо затратить несколько бóльшую работу, чем это требуется исходя из расчетов, так как часть ее расходуется на преодоление сил сопротивления (сил трения в зубчатых передачах и опорах, сопротивления воздуха и другой среды, в которой перемещается материальная точка). Эффективность работы какой-либо установки или машины оценивается коэффициентом полезного действия η.

Коэффициентом полезного действия (КПД) машины называют отношение полезной работы к полной затраченной работе:

$$\eta = \frac{A_{\text{полез}}}{A_{\text{полн}}} < 1.$$

1.17. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

При поступательном движении твердого тела мерой инерции является его масса, при вращательном движении — момент инерции. Момент инерции можно рассматривать относительно плоскости, оси и полюса.

Моментом инерции тела J относительно плоскости, оси или полюса называется сумма произведений элементарных масс тела на квадраты их расстояний до плоскости, оси или полюса соответственно (рис. 1.58):

$$J = \int r^2 dm = \sum r_i^2 m_i.$$

Согласно этому определению выразим момент инерции относительно плоскости

$$J_{yOz} = \sum m_i x_i^2;\ J_{xOy} = \sum m_i z_i^2;\ J_{zOx} = \sum m_i y_i^2;$$

относительно координатных осей

$$J_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2);\quad J_y = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2);\quad J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2);$$

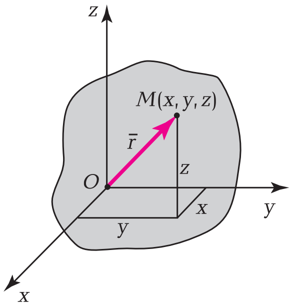


Рис. 1.58

относительно полюса (полярный момент)

$$J_O = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Между моментами инерции существуют следующие соотношения:

$$J_O = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = J_{xOy} + J_{yOz} + J_{zOx};$$

$$J_x + J_y + J_z = 2\sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2J_O.$$

Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей

Момент инерции относительно любой оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной ей и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями.

Для доказательства теоремы проведем через центр масс тела C три взаимно-перпендикулярные оси (рис. 1.59, *а*). Необходимо найти момент инерции тела относительно оси, проходящей параллельно оси C на расстоянии d. Выразим для произвольной точки A_i моменты инерции относительно осей Oz_1 и Cz:

$$J_{iz1} = m_i h_i^2 \text{ и } J_{izC} = m_i r_i^2.$$

Из рис. 1.59, *б* видно, что

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2, \text{ а } h_i^2 = (y_i - d)^2 + x_i^2 = r_i^2 - 2y_i d + d^2.$$

Теперь определим момент инерции тела относительно оси Oz_1:

$$J_{z1} = \sum m_i r_i^2 - 2\sum m_i y_i d + \sum m_i d^2,$$

или

$$J_{z1} = J_{zC} - 2d\sum m_i y_i + d^2 \sum m_i.$$

Так как $\sum m_i = m$ (массе всего тела) и $\sum m_i y_i = m y_C$ и, учитывая, что $y_C = 0$, получим

$$J_{z1} = J_{zC} + md^2,$$

что и требовалось доказать.

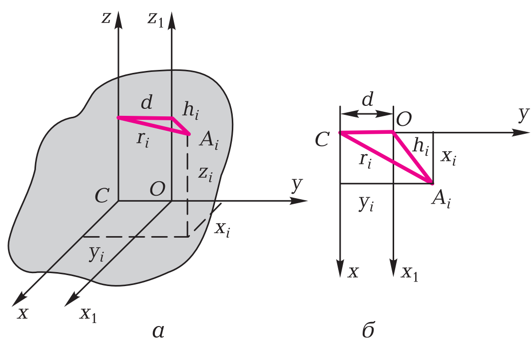


Рис. 1.59

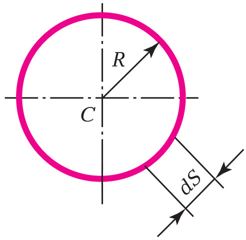


Рис. 1.60

Пример 1.17

Вычислить полярный момент инерции обода относительно центра тяжести, если известны радиус обода R, его толщина h и плотность ρ.

Решение.

Поскольку ободом называется тело вращения малой толщины, у которого масса равномерно распределена по окружности, то можно, выделив на окружности (рис. 1.60) элементарную массу $m_i = \rho h dS$, вычислить момент инерции обода относительно центра тяжести:

$$J_{zC} = \int_0^{2\pi R} \rho h dS\, R^2 = \rho h R^2 2\pi R = mR^2.$$

Ответ. Момент инерции обода относительно его центра тяжести равен произведению массы обода на квадрат его радиуса.

1.18. ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Импульс силы

Если сила в течение промежутка времени $t_2 - t_1$ постоянна по модулю и по направлению, то она сообщает материальной точке импульс

$$\overline{S} = \overline{F}(t_2 - t_1).$$

Направление этого вектора совпадает с направлением действующей силы, а его модуль равен

$$S = F(t_2 - t_1).$$

Импульс силы характеризует передачу механического движения материальной точке со стороны действующих на нее тел за данный промежуток времени.

Импульс переменной силы, которая меняет свое направление и величину, т.е. $\overline{F} = \overline{F}(t)$, определяют таким образом:

$$\overline{S} = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum \Delta \overline{S}_k = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum \overline{F} \Delta t_k \;\text{ или }\; \overline{S} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F} dt.$$

Проекции этого вектора на оси координат будут равны

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt; \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt; \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt.$$

Модуль импульса

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2},$$

а его направление определится направляющими косинусами:

$$\cos(\overline{S}, \overline{i}) = S_x / S; \quad \cos(\overline{S}, \overline{j}) = S_y / S; \quad \cos(\overline{S}, \overline{k}) = S_z / S.$$

Если на точку действует несколько сил, то под $\overline{F}$ следует понимать равнодействующую силу и ее проекции на оси координат F_x, F_y, F_z, а импульс будет представлять собой импульс равнодействующей силы.

Теорема об изменении количества движения материальной точки

Количеством движения материальной точки называется вектор, имеющий направление скорости и модуль, равный произведению массы m на скорость ее движения v. Количество движения точки является мерой ее механического движения.

Понятие «количество движения» было введено в механику Декартом, а положено в основу механики Ньютоном.

Пусть на материальную точку действует сила $\overline{F}$. Запишем основное уравнение динамики

$$m\overline{a} = \overline{F}.$$

Преобразуем это равенство следующим образом, подставив вместо $\overline{a} = d\overline{v}/dt$:

$$\frac{d(m\overline{v})}{dt} = \overline{F}.$$

Полученная зависимость выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме. Формулируется эта теорема следующим образом:

производная по времени от вектора количества движения материальной точки равна геометрической сумме сил, приложенных к этой точке.

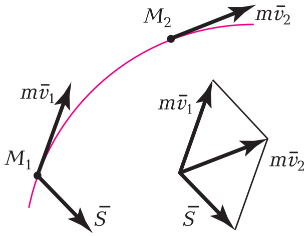


Рис. 1.61

Установим зависимость между изменением количества движения и импульсами сил, действующих на материальную точку. Для этого проинтегрируем обе части равенства $d(m\bar{v}) = \bar{F}dt$:

$$\int_{\bar{v}_1}^{\bar{v}_2} d(m\bar{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt.$$

Так как правая часть этого равенства представляет собой импульс $\bar{S}$ силы $\bar{F}$ за промежуток времени $t_2 - t_1$, то получим

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \bar{S}, \text{ или } m\bar{v}_2 = \bar{S} + m\bar{v}_1,$$

т. е. вектор $m\bar{v}_2$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $m\bar{v}_1$ и $\bar{S}$ (рис. 1.61).

Если на материальную точку действует не одна сила, а несколько, то $\bar{S} = \sum \bar{S}_i$ и в этом случае изменение количества движения материальной точки запишется следующим образом:

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \sum \bar{S}_i.$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в конечной форме:

изменение количества движения за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов, приложенных к точке за тот же промежуток времени.

Теорема об изменении количества движения механической системы

Количеством движения механической системы называется вектор, равный геометрической сумме количеств движения всех материальных точек этой системы. Если количество движения материальной точки $\bar{K}_i = m_i\bar{v}_i$, то вектор количества движения всей механической системы определится так:

$$\bar{K} = \sum m_i\bar{v}_i.$$

Преобразуем полученное равенство

$$\overline{K} = \sum m_i \overline{v}_i = \sum \left(m_i \, d\overline{r}_i / dt\right) = d\left(\sum m_i \overline{r}_i\right) \Big/ dt.$$

Так как $\sum m_i \overline{r}_i = m\overline{r}_C$, то $\overline{K} = md\overline{r}_C / dt$ или

$$\overline{K} = m\overline{v}_C,$$

т. е. вектор количества движения механической системы равен произведению массы системы m на скорость движения ее центра масс и имеет направление этой скорости.

Проецируя вектор $\overline{K} = m\overline{v}_C$ на оси координат, получим

$$K_x = \sum m_i v_{ix} = mv_{Cx}; \; K_y = \sum m_i v_{iy} = mv_{Cy}; \; K_z = \sum m_i v_{iz} = mv_{Cz}.$$

Найдем производные от проекций количества движения:

$$dK_x / dt = mdv_{Cx} / dt = m\ddot{x}_C;$$
$$dK_y / dt = mdv_{Cy} / dt = m\ddot{y}_C;$$
$$dK_z / dt = mdv_{Cz} / dt = m\ddot{z}_C.$$

В соответствии с теоремой о движении центра масс механической системы

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{ix}^E; \; m\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^E; \; m\ddot{z}_C = \sum F_{iz}^E.$$

Следовательно,

$$dK_x / dt = \sum F_{ix}^E; \; dK_y / dt = \sum F_{iy}^E; \; dK_z / dt = \sum F_{iz}^E.$$

Таким образом, мы доказали теорему об изменении количества движения механической системы, выраженную в дифференциальной форме:

> производная по времени от проекции количества движения механической системы на любую ось равна проекции главного вектора (на ту же ось) внешних сил, действующих на эту систему.

Обозначив главный вектор внешних сил $\overline{R}^E = \sum \overline{F}_i^E$, запишем теорему об изменении количества движения механической системы в векторном виде:

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \overline{R}^E,$$

которая будет формулироваться следующим образом:

производная по времени от вектора количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему.

Из этой теоремы следует, что изменение количества движения системы вызывается только внешними силами.

Следствие из теоремы: если главный вектор внешних сил все время равен нулю, то количество движения системы остается постоянным:

$$\overline{R}^E = 0, \; d\overline{K}/dt = 0, \; \overline{K} = \text{const}.$$

Это положение называют ***законом сохранения количества движения механической системы***. Например, на Солнечную систему не действуют внешние силы, поэтому центр масс Солнечной системы совершает равномерное прямолинейное движение.

Найдем зависимость между изменением количества движения системы и импульсами действующих на эту систему сил. Для этого воспользуемся теоремой об изменении количества движения применительно к материальным точкам системы. На каждую точку M_i системы действуют как внешние $\overline{F}_i^E$, так и внутренние $\overline{F}_i^J$ силы; в этом случае изменение количества движения материальной точки системы будет равно

$$\left(m_i\overline{v}_i\right)_2 - \left(m_i\overline{v}_i\right)_1 = \overline{S}_i^E + \overline{S}_i^J,$$

где $\overline{S}_i^E$ и $\overline{S}_i^J$ — соответственно импульсы внешних и внутренних сил, действующих на материальную точку в промежутке времени $t_2 - t_1$. Суммируя правые и левые части k равенств, получим

$$\sum\left(m_i\overline{v}_i\right)_2 - \sum\left(m_i\overline{v}_i\right)_1 = \sum\overline{S}_i^E + \sum\overline{S}_i^J.$$

Так как главный вектор внутренних сил $\overline{R}^J = 0$, то и геометрическая сумма импульсов внутренних сил равна нулю, т. е. $\sum\overline{S}_i^J = 0$. Отсюда

$$\overline{K}_2 - \overline{K}_1 = \sum\overline{S}_i^E.$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении количества движения механической системы в конечной форме:

> изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов внешних сил, приложенных к системе, за тот же промежуток времени.

Пример 1.18

Определить количество движения диска массой m и радиусом R, вращающегося относительно неподвижной оси (рис. 1.62) с угловой скоростью ω.

Р е ш е н и е.

В точке C находится МЦС диска и одновременно его центр масс, поэтому скорость центра масс равна нулю, а следовательно, количество движения диска $\bar{K} = m\bar{v}_c$ также будет равно нулю.

О т в е т. Количество движения диска, вращающегося относительно оси, проходящей через его центр масс, равно нулю.

Пример 1.19

Вокруг неподвижной оси O (рис. 1.63) равномерно вращается стержень (весом G_1 и длиной l) с угловой скоростью ω.

На конце стержня закреплен шарик весом G_2. Вычислить количество движения системы, если $G_1 = 4G_2 = 4G$.

Р е ш е н и е.

Задача имеет два варианта решения: 1) с использованием зависимости $\bar{K} = \sum \bar{K}_i$; 2) с применением формулы $\bar{K} = m\bar{v}_c$.

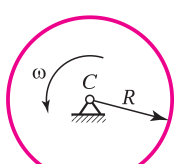


Рис. 1.62

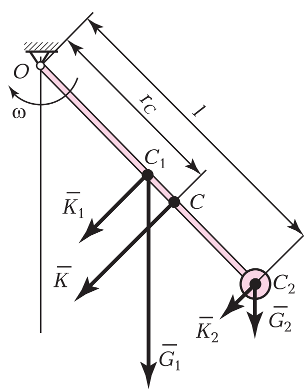


Рис. 1.63

I вариант решения.

1. Определяем количество движения стержня

$$\bar{K}_1 = m_1\bar{v}_{C1};\ K_1 = (4G/g)\omega(l/2) = 2(G/g)\omega l.$$

2. Определяем количество движения шарика.

Принимая шарик за материальную точку, вычисляем его количество движения:

$$\bar{K}_2 = m_2\bar{v};\ K_2 = (G/g)v_2 = (G/g)\omega l.$$

3. Вычисляем количество движения всей системы

$$\bar{K} = \bar{K}_1 + \bar{K}_2,$$

а так как векторы $\bar{K}_1$ и $\bar{K}_2$ параллельны, то

$$K = K_1 + K_2 = 2(G/g)\omega l + (G/g)\omega l = 3(G/g)\omega l.$$

II вариант решения.

1. Определяем положение центра масс системы

$$r_C = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{G_1(l/2) + G_2 l}{G_1 + G_2} = \frac{4G(l/2) + Gl}{4G + G} = 0{,}6l.$$

2. Вычисляем количество движения всей системы

$$\bar{K} = m\bar{v}_C;\ K = \frac{G_1 + G_2}{g}\omega \cdot 0{,}6l = 3(G/g)\omega l.$$

1.19. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Положим, что движение точки A происходит под действием силы $\bar{F}$ (рис. 1.64, *а*). Соединим произвольно выбранный центр O с этой точкой радиусом-вектором $\bar{r}$. Определим момент силы $\bar{F}$ относительно центра O

$$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F}$$

и вычислим ***момент количества движения*** этой точки относительно того же центра

$$\bar{L}_O = \bar{r} \times m\bar{v}.$$

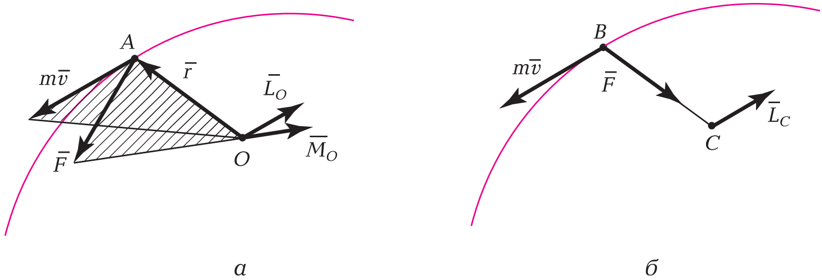


Рис. 1.64

Установим зависимость между векторами $\overline{M}_O$ и $\overline{L}_O$. Для этого найдем производную по времени от момента количества движения

$$\frac{d}{dt}\overline{L}_O = \frac{d}{dt}(\overline{r} \times m\overline{v}) = \frac{d\overline{r}}{dt} \times m\overline{v} + \overline{r} \times \frac{d}{dt}m\overline{v} =$$
$$= \overline{v} \times m\overline{v} + \overline{r} \times m\overline{a} = 0 + \overline{r} \times \overline{F} = \overline{M}_O.$$

Если на материальную точку действует несколько сил, то $\overline{M}_O$ следует рассматривать как момент их равнодействующей.

Таким образом,

$$d\overline{L}_O \big/ dt = \sum \overline{M}_{iO},$$

что выражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра:

производная по времени от вектора момента количества движения материальной точки относительно некоторого центра равна геометрической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно того же центра.

Последнюю зависимость можно записать в проекциях на оси координат:

$$dL_x \big/ dt = \sum M_{ix};\ dL_y \big/ dt = \sum M_{iy};\ dL_z \big/ dt = \sum M_{iz}.$$

Эти равенства представляют собой теорему об изменении момента количества движения точки относительно оси:

производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторой оси равна алгебраической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно этой же оси.

Следствия из теоремы. 1. Если линия действия равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, все время проходит через некоторый центр, то момент количества движения материальной точки относительно этого центра остается постоянным.

В этом случае сила $\overline{F}$ всегда направлена по радиусу-вектору точки B (рис. 1.64, *б*), следовательно, векторное произведение $\overline{r} \times \overline{F}$ равно нулю, т. е. момент силы $\overline{F}$ относительно точки C равен нулю, а следовательно, $\overline{L}_C = \text{const}$.

2. Если момент равнодействующей приложенных к материальной точке сил относительно некоторой оси все время равен нулю, то момент количества движения материальной точки относительно этой оси остается постоянным.

Например, если $\sum M_{iy} = 0$, то, следовательно, $dL_y/dt = 0$ и $L_y = \text{const}$.

1.20. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Кинетическим моментом количества движения механической системы относительно данного центра называют вектор, равный геометрической сумме моментов количества движения всех материальных точек системы относительно этого центра.

Кинетический момент количества движения механической системы называют также ***главным моментом количества движения механической системы.*** Например, относительно некоторого центра B он будет вычисляться так:

$$\overline{L}_B = \sum \overline{L}_{iB} = \sum \left(\overline{r}_i \times m_i \overline{v}_i\right),$$

где $\overline{r}_i$ — радиус-вектор i-й материальной точки относительно центра B; $m_i \overline{v}_i$ — количество движения материальной точки.

Кинетический момент системы относительно оси равен алгебраической сумме моментов количества движения материальных точек, входящих в данную систему, относительно той же оси.

Например, относительно оси Oz

$$L_z = \sum L_{iz}.$$

Рассмотрим механическую систему, состоящую из k материальных точек. Материальные точки находятся в движении под действием внешних $\overline{F}_i^E$ и внутренних $\overline{F}_i^J$ сил. Для каждой материальной точки относительно выбранного неподвижного центра O на основании теоремы об изменении момента количества движения запишем

$$\frac{d}{dt}\overline{L}_{iO} = \overline{M}_{iO}^E + \overline{M}_{iO}^J.$$

Получим k таких уравнений; просуммируем их:

$$\sum \frac{d}{dt}\overline{L}_{iO} = \sum \overline{M}_{iO}^E + \sum \overline{M}_{iO}^J.$$

Как указывалось ранее (см. подразд. 1.12), главный момент всех внутренних сил относительно любого центра равен нулю, т. е. $\sum \overline{M}_{iO}^J = 0.$ Тогда

$$\sum \frac{d}{dt}\overline{L}_{iO} = \sum \overline{M}_{iO}^E \text{ или } \frac{d}{dt}\sum \overline{L}_{iO} = \sum \overline{M}_{iO}^E.$$

В соответствии с определением, подставив вместо $\sum \overline{L}_{iO}$ кинетический момент системы $\overline{L}_O$, получим

$$\frac{d}{dt}\overline{L}_O = \sum \overline{M}_{iO}^E = \overline{M}_O^E.$$

Это равенство представляет собой теорему об изменении кинетического момента механической системы:

> производная по времени от вектора кинетического момента механической системы относительно некоторого центра равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему, относительно того же центра.

Векторному равенству соответствуют три равенства в проекциях на оси координат:

$$dL_x/dt = M_x^E;\; dL_y/dt = M_y^E;\; dL_z/dt = M_z^E,$$

где L_x, L_y, L_z — кинетические моменты механической системы относительно осей координат; M_x^E, M_y^E, M_z^E — главные моменты внешних сил, действующих на систему, относительно тех же осей.

Следствия из теоремы. 1. Если главный момент внешних сил относительно некоторого центра все время равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этого центра остается постоянным:

$$d\bar{L}_O/dt = 0, \text{ следовательно, } \bar{L}_O = \text{const}.$$

Это положение называется ***законом сохранения кинетического момента механической системы относительно центра.***

2. Если главный момент внешних сил относительно некоторой оси все время равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой оси остается постоянным.

Например, $M_z = 0$, тогда $dL_z/dt = 0$ и, следовательно, $L_z = \text{const}$.

1.21. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Из курса физики известно, что кинетическая энергия материальной точки массой m, движущейся со скоростью $\bar{v}$, равна половине произведения массы этой точки на квадрат скорости ее движения:

$$T = mv^2/2.$$

Рассмотрим движение материальной точки M под действием приложенной к ней системы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$ (рис. 1.65). Выберем положительное направление отсчета и запишем основное уравнение динамики

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

Здесь сила $\bar{F}$ является равнодействующей сходящейся системы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$. Спроецируем это векторное равенство на ось τ:

$$ma_\tau = F_\tau$$

(о естественном способе задания траектории движения точки см. подразд. 1.7 и 1.11).

Учитывая, что $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dS}\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{dv}{dS}v$, подставим полу-

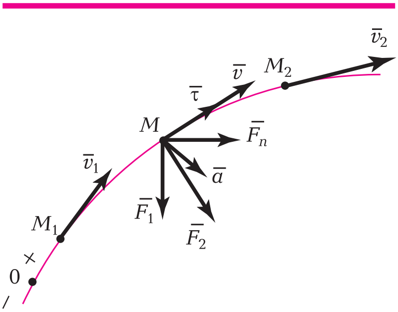


Рис. 1.65

ченное значение касательного ускорения в уравнение движения вдоль орта $\bar{\tau}$:

$$mv\,dv/dS = F_\tau \text{ или } mv\,dv = F_\tau dS,$$
$$\text{или } d\left(mv^2/2\right) = FdS\cos\left(\bar{F}, \bar{\tau}\right).$$

Левая часть полученного равенства представляет собой дифференциал кинетической энергии точки, а правая часть — ***элементарную работу*** равнодействующей на перемещении dS (работу совершает только касательная составляющая равнодействующей):

$$d\left(mv^2/2\right) = \delta A.$$

Поскольку $F_\tau = \sum F_{i\tau}$, а перемещение точки приложения у всех сил одинаковое, то $\delta A = \sum \delta A_i$, следовательно, можно записать дифференциал кинетической энергии по-другому:

$$d\left(mv^2/2\right) = \sum \delta A_i,$$

т. е. дифференциал кинетической энергии точки равен сумме элементарных работ сил, приложенных к точке.

При перемещении точки из положения M_1 в M_2 скорость точки будет меняться от $\bar{v}_1$ до $\bar{v}_2$; в этом случае изменится и кинетическая энергия

$$m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \sum \int_{M_1}^{M_2} F_i dS\cos\left(\bar{F}_i, \bar{\tau}\right),$$

откуда

$$mv_2^2/2 - mv_1^2/2 = \sum \delta A_i.$$

Полученное уравнение представляет собой теорему об изменении кинетической энергии материальной точки:

> изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на эту точку сил на том же перемещении.

Если сумма работ сил положительна, то $v_2 > v_1$, т. е. кинетическая энергия возрастает. Если же сумма работ отрицательна, то кинетическая энергия убывает.

1.22. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

При поступательном движении твердого тела все его точки движутся так же, как и его центр масс, поэтому дифференциальные уравнения движения центра масс описывают поступательное движение твердого тела:

$$m\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^{k} F_{ix}^E; \; m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^{k} F_{iy}^E; \; m\ddot{z}_C = \sum_{i=1}^{k} F_{iz}^E.$$

Здесь m — масса твердого тела; $\ddot{x}_C, \ddot{y}_C, \ddot{z}_C$ — проекции ускорения центра масс тела на оси координат; F_{ix}^E, F_{iy}^E, F_{iz}^E — проекции внешних сил, приложенных к твердому телу, на соответствующие оси координат.

1.23. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

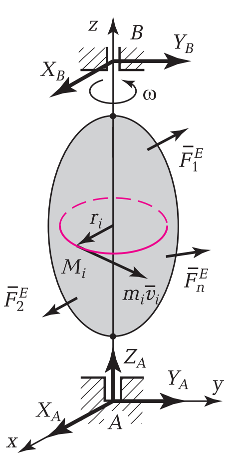


Рис. 1.66

Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси под действием внешних сил $\bar{F}_i^E$ (рис. 1.66) с угловой скоростью ω. Его кинетический момент относительно оси Az равен сумме моментов количеств движения материальных точек относительно этой же оси, т. е.

$$L_z = \sum m_i v_i r_i = \sum m_i \omega v_i r_i = \sum m_i \omega r_i^2 =$$
$$= \omega \sum m_i r_i^2 = \omega J_z.$$

Таким образом, мы получили, что кинетический момент вращающегося твердого тела относительно неподвижной оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость тела:

$$L_z = J_z \omega.$$

В соответствии с теоремой об изменении кинетического момента относительно оси запишем производную по времени от кинетического момента относительно оси Az

$$dL_z/dt = \sum M_{iz}^E \text{ или } d(J_z\omega)/dt = \sum M_{iz}^E,$$

откуда

$$J_z d\omega/dt = \sum M_{iz}^E \text{ или } J_z\varepsilon = \sum M_{iz}^E.$$

Учитывая, что угловое ускорение ε представляет собой вторую производную от угла поворота тела φ, полученную зависимость можно записать в следующем виде:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_{iz}^E.$$

В результате мы получили дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Следует иметь в виду, что его правая часть — это главный момент внешних ***заданных*** сил $\overline{F}_i^E$, а момент реакции связей относительно оси Az равен нулю, так как реакции пересекают ось Az:

$$J_z\ddot{\varphi} = M_z^E.$$

Если главный момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю, ***кинетический момент системы остается постоянным***:

$$J_z\omega = \text{const}.$$

В этом случае, если момент инерции системы будет неизменным, система будет вращаться с постоянной угловой скоростью. Если же изменится момент инерции, то угловая скорость тоже изменится:

$$J_{z1}\omega_1 = J_{z2}\omega_2.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется абсолютно твердым телом?
2. Какие системы сил называются эквивалентными?
3. В чем состоит принцип освобождаемости твердого тела от связей?
4. Чем отличаются активные силы от пассивных?

5. Что называется плоской и пространственной системой сил?
6. Чем отличаются сходящиеся силы от произвольно расположенных в пространстве?
7. Как определяется момент силы относительно точки?
8. Запишите основные уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил.
9. Что такое главный вектор сил и чему он равен? Зависит ли главный вектор сил от выбора центра приведения?
10. Перечислите способы определения положения центра тяжести твердого тела.
11. Имеет ли материальная точка ускорение при равномерном движении по криволинейной траектории?
12. Могут ли точки тела, движущегося поступательно, иметь криволинейные траектории?
13. Что такое мгновенный центр скоростей плоской фигуры?
14. Если пассажир идет в салоне самолета в направлении полета, его скорость по отношению к Земле будет больше или меньше, чем скорость самолета?
15. Какое движение будет совершать тело при сложении двух вращательных движений, у которых угловые скорости одинаковые, а направления разные?
16. Запишите основной закон динамики.
17. Чему равна работа силы тяжести? Зависит ли она от вида траектории точки приложения силы?
18. Дайте определение коэффициента полезного действия. Для чего введено это понятие?
19. Как определить центр тяжести грузовика?
20. Определите количество движения колеса весом G и радиусом R, катящегося по прямолинейному рельсу без скольжения с угловой скоростью ω.
21. При каком расположении вектора количества движения материальной точки его момент относительно оси будет равен нулю?
22. При каких условиях кинетический момент механической системы относительно центра остается постоянным?
23. Почему для того чтобы остановиться, быстро вращающийся на коньках фигурист раскидывает в стороны руки?