Шинтемирова Г.Б.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Министерство образования и науки
Республики Казахстан

Павлодарский государственный университет
имени С. Торайгырова

Кафедра «Высшая Математика»

Шинтемирова Г. Б.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Часть 1

Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Теория функции многих переменных

Павлодар
2004

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Ш62

Шинтемирова Г.Б. Высшая математика, 1 часть: Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Теория функции многих переменных // Учебное пособие, Павлодар: ПГУ имени С. Торайгырова, 2004, 176 с.

Настоящее учебное пособие содержит основную часть курса "Высшая математика", предусмотренной обязательной программой для студентов инженерно-технических специальностей университета.

Пособие является изложением курса лекций по высшей математике для студентов дневной формы обучения. В каждом разделе курса приведено достаточное количество решенных задач и примеров, поясняющих теоретический материал. Поэтому данное пособие также может быть использовано студентами дистанционной формы обучения для самостоятельного изучения.

Учебное пособие разработано в соответствии с типовой программой ГОСО РК 3.0011-2002, утвержденного Приказом № 69 МОиН РК от 30 января 2002 г. по курсу высшей математики для инженерно-технических специальностей университетов.

Рекомендовано ученым советом Павлодарского государственного университета имени С. Торайгырова

Рецензенты

Мухтаров М.М. – кандидат физико-математических наук, доцент Карагандинского экономического университета

Сабыров Т.С. – кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой «Высшая математика» ПГУ имени С. Торайгырова, профессор

ISBN 9965-612-87-1

Ш $\frac{4201020000}{00-(05)-04}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое читателю учебное пособие является изложением основной части курса лекций по высшей математике, который читается автором в течение ряда лет студентам дневной формы обучения инженерно-технических специальностей.

Требования, предъявляемые к математическому образованию современного инженера, выдвигают на первый план следующие задачи в процессе преподавания математики:

- повышение уровня фундаментальной математической подготовки;
- усиление прикладной направленности курса высшей математики; обучение студентов использованию математических методов решения задач;
- умение самостоятельно расширять и углублять математические знания;
- добиваться развития у студентов логического мышления.

Поэтому в целях активизации изучения данной дисциплины и максимальной помощи студентам для усвоения курса математики и овладения ее методами было написано данное пособие.

Учебное пособие «Высшая математика» состоит из трех частей:

1) Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Теория функции многих переменных.
2) Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальные уравнения.
3) Кратные и криволинейные интегралы. Теория поля. Ряды.

Материал каждой части написан в соответствии с государственными стандартами специальностей и содержит темы курса «Высшая математика» распределенные в учебной программе кафедры по трем семестрам (I, II, III). Для тех специальностей, которые изучают курс «Высшая математика» в течении двух семестров, рекомендуется сделать соответствующую выборку.

Данная книга является первой частью учебного пособия «Высшая математика», написанного в соответствии с действующей типовой учебной программой курса высшей математики для технических и энергетических специальностей университетов. Пособие может быть также использовано в учебном процессе студентами других специальностей.

Особенно полезно его использование студентам дистанционной формы обучения, так как в настоящее время в библиотеке ПГУ имени С. Торайгырова ощущается дефицит учебно-методической литературы по данной дисциплине.

В каждом разделе изложение теоретического материала иллюстрируется наглядными примерами и задачами, поясняющих данную тему.

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1 Множества вещественных чисел

Множество действительных чисел (или вещественных) R состоит из рациональных и иррациональных чисел.

Всякое не равное нулю действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби:

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$$

где α_0 – целое неотрицательное число;

α_k, $k = 1, \ 2, \ldots$ – цифры,

знак "=" означает, что правая часть обозначается через a.

Каждому действительному числу $\pm a$ $(a > 0)$ приводится в соответствие точка прямой, отстоящая от нулевой точки на расстояние, равное a, справа для числа $+a$, и слева для $-a$. Наоборот, если А – точка прямой (действительной оси), находящаяся на расстоянии, равном a справа от 0, то она соответствует действительному числу $+a$ (рисунок 1.1).

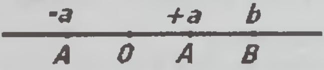


Рисунок 1.1

1.1.1 Основные свойства действительных чисел

Свойства порядка

Для каждой пары действительных чисел a и b имеет место только одно из соотношений:

- $a = b$, $a > b$, $a < b$;
- из $a < b$ и $b < c$ следует, что $a < c$ (транзитивное свойство строго меньше);
- если $a < b$, то существует c, что $a < c < b$.

Свойства действий сложения и вычитания

- $a + b = b + a$ (коммутативное свойство);

– $(a+b)+c=a+(b+c)$ (сочетательное или ассоциативное свойство);
– $a+0=a$;
– $a+(-a)=0$;
– из $a<b$ следует, что $a+c<b+c$ для любого c.

Число $a+(-b)$ называется разностью $a-b$, т.к. если добавить к нему b, то получим a:

$$[a+(-b)]+b=a+[-b+b]=a.$$

Свойства действий умножения и деления

– $ab=ba$ (переместительное или коммутативное свойство);
– $(ab)c=a(bc)$;
– $a\cdot 1=a$;
– $a\cdot\frac{1}{a}=1$ $(a\neq 0)$;
– $(a+b)c=ac+bc$ (распределительное или диструбутивное);
– из $a<b$, $c>0$ следует, что $ac<bc$.

Число $a\frac{1}{b}$ $(b\neq 0)$ называется частным $\frac{a}{b}$, т.к. если умножить на b, то получим a:

$$\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)b=a\left(\frac{1}{b}\cdot b\right)=a\cdot 1=a.$$

Следовательно, частное от деления a на b единственно.

Архимедово свойство

Каково бы ни было число $c>0$, существует натуральное число $n>c$. В самом деле, если $c=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$, то можно $n=\alpha_0+2$. Заметим, что для данного числа $c\geq 0$ в ряду 0, 1, 2, ... целых чисел, больших нуля, имеется $!m$, для которого выполняется условие $m\leq c\leq m+1$.

Если последовательность действительных чисел a_1, a_2, a_3... не убывает и ограничена сверху числом $M(a_n\leq 0)$, то существует число $a\leq M$, к которому эта последовательность стремится как к своему пределу:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a\leq M.$$

Определение 1.1.1 Действительными числами называются некоторые объекты *a*, *b*, *c*, удовлетворяющие свойствам 1÷5. При таком подходе свойства 1÷5 называются аксиомами числа.

Определение 1.1.2 Абсолютной величиной действительного числа a – (модулем), называется само это число, если $a \geq 0$, или число $-a$, если $a < 0$.

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Примеры: $|2| = 2$; $|\pi| = \pi$; $|0| = 0$; $|-3| = -(-3) = 3$.

Геометрический смысл: $|a|$ - длина отрезка a от начала действительной оси.

Свойства абсолютной величины:

- $|a+b| \leq |a| + |b|$ (модуль суммы не больше суммы модулей);
- $|a-b| \geq |a| - |b|$;
- $|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n|$;
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.
- неравенство $|a| < \varepsilon$ соответствует двойному неравенству $-\varepsilon < a < \varepsilon$, тогда неравенство $|a-b| < \varepsilon$ эквивалентно $b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$.

В повседневной жизни постоянно приходится встречаться с различными величинами (объем, плотность), которые, качественно отличаясь друг от друга, могут быть измерены. В результате измерения получаются действительные числа, которые являются *численными значениями*. Численные значения могут изменяться, поэтому величина называется *переменной*. Переменная считается заданной, если известно множество всех численных значений, которые она может принимать.

Определение 1.1.3 Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$, называется *отрезком* или *сегментом*. Обозначается: $[a, b]$.

Определение 1.1.4 Множество чисел x, удовлетворяющих $a < x < b$, называется *интервалом* или *открытым* пишут $x \notin M$, либо $x \,\overline{\in}\, M$.

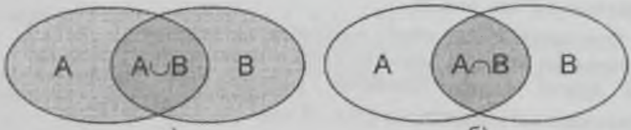
Пусть M и N – два множества. Если все элементы множества M принадлежат множеству N, то говорят, что M содержится во множестве N: $M \subset N$ или $N \supset M$. Тогда множество M называется подмножеством множества N (множество всех чётных чисел есть подмножество всех целых чисел). Следовательно, символы $\subset$, $\supset$ – знаки включения, а символ $\notin$ – знак принадлежности.

1.2.1 Операции над множествами

Пусть имеется конечное число множеств $M_1, M_2, ..., M_n$.

Определение 1.2.3 Объединением (суммой) множеств называется множество M всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ и обозначают как $M = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_n$ или $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ (рис.1.2а).

Определение 1.2.4 Пересечением (произведением) множеств называется множество M, состоящее только из тех элементов, которые принадлежат одновременно каждому из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ и обозначают как $M = M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_n$ или $M = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$ (рисунок 1.2б).



а) б)

Рисунок 1.2

1.2.2 Кванторы всеобщности и существования

При изложении некоторых разделов курса мы будем пользоваться знаками $\forall$ и $\exists$, называемыми соответственно *кванторами всеобщности* и *существования*.

Символ $\forall x$ означает "для всех x", "для каждого x" или "каково бы ни было x". Например, запись $\forall x > 0$ читается так:

"для любого положительного числа x" или "для всех положительных чисел x". Запись $\forall x \in M$ читается так: "для любого элемента x, принадлежащего множеству M", или "для каждого элемента x из множества M". Запись $\forall x_1, x_2 \in M$ означает "каковы бы ни были элементы x_1 и x_2 множества M", "для любых x_1 и x_2 множества M".

Символ $\exists x$ означает "существует такое x, что", или "по крайней мере, для одного x", или "можно найти такое x, что ...". Например, запись $\exists x > 0$ читается так: "существует такое положительное число x, что ..."; запись $\exists x \in M$ – "существует такой элемент x множества M, что ..."; запись $\exists x_1, x_2 \in M$ означает "существуют такие элементы x_1 и x_2 множества M, что ...".

Символ $\Rightarrow$ означает *логическое следствие*. Так, если α и β – какие-то свойства или предложения, то запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает, что из α следует β, или, если имеет место α, то имеет место β.

Знак $\Leftrightarrow$ означает *логическую равносильность*. Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает, что из α следует β и, наоборот, из β следует α.

Рассмотрим, например, *теорему Пифагора*: если треугольник прямоугольный (свойство α), то квадрат одной из его сторон равен сумме квадратов двух других сторон (свойство β), т.е. $\alpha \Rightarrow \beta$.

Очевидно, имеет место и обратное утверждение: если в треугольнике квадрат одной из сторон равен сумме квадратов двух других сторон (свойство β), то этот треугольник прямоугольный (свойство α), т.е. $\beta \Rightarrow \alpha$.

Таким образом, свойства α и β равносильны, т.е. $\alpha \Leftrightarrow \beta$.

Пусть M и N – два множества. Запись $\forall x \in M \Rightarrow x \in N$ означает, что каков бы ни был элемент x, утверждение "x принадлежит множеству M". Иными словами, M содержится в N, т.е. $M \subset N$.

Запись $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall x > N \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon$ читается так: "каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое число N, что для любого $x > N$ имеет место неравенство $| f(x) - b | < \varepsilon$".

1.3 Числовая последовательность. Предел последовательности

1.3.1 Понятие последовательности чисел

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, 3...$ по некоторому закону поставлено в соответствие действительное или комплексное число. Тогда говорят, что определена *последовательность чисел*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ \text{или}\ \{x_n\} = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\}.$$

Отдельные числа x_n последовательности $\{x_n\}$ называются ее *элементами*.

Элементы x_n и x_m при $n \neq m$ считаются *отличными* как элементы последовательности, хотя как числа они могут быть равны между собой, т.е. $x_n = x_m$.

Примеры:

1. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$;
2. $\left\{\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \cdots\right\} = \left\{2^{(-1)^n}\right\}$;
3. $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}$;
4. $\{2,\ 5,\ 10,\ \dots\} = \{n^2 + 1\}$;
5. $\{-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ \dots\} = \{(-1)^n \cdot n\}$.

В примере 2 переменная x_n для четных n принимает одно и то же значение: $2 = x_2 = x_4 = x_6 = \dots$.

В примерах 1, 2, 3 – последовательности ограничены, в примерах 4, 5 – неограниченны, однако в примере 4 ограничена снизу числом 2.

1.3.2 Предел последовательности

Определение 1.3.1 Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется (зависящее от ϵ) натуральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon \ \text{для всех}\ n > n_0.$$

Запись предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

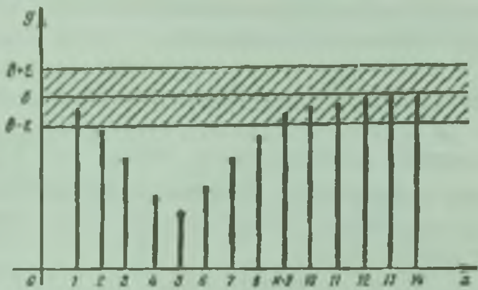


Рисунок 1.3

Геометрический смысл: пусть члены последовательности – точки плоскости Oxy с координатами (n, x_n) (рисунок 1.3).

Тогда $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что все точки, изображающие члены последовательности с номерами $n > n_0$, попадут в полосу, ограниченную прямыми

$$x_n = a - \varepsilon,\ x_n = a + \varepsilon \quad (n_0 = 7),$$

т.е. $x_n \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ – ϵ-окрестность.

Определение 1.3.2 Переменная x_n имеет своим пределом точку a, если вне любой окрестности этой точки имеется конечное или пустое множество точек x_n.

Пример 1. Пусть имеется последовательность

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Действительно зададим $\varepsilon > 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ или $\frac{1}{\varepsilon} < n$,

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдено число $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ такое, что $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, выполняющееся для всех $n > n_0$.

Пример 2. Пусть имеется последовательность

$$\left\{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots\right\}=\left\{\frac{n-1}{n}\right\}.$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$.

Действительно, составим неравенство $\left|1-\frac{n-1}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$, оно выполняется для любого $\varepsilon>0$, если $n>n_0=\frac{1}{\varepsilon}$. Это доказывает равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$.

Теорема 1.3.1 Если переменная x_n имеет предел, то он единственен.

Доказательство: Допустим, что x_n имеет два предела – a и b. Покроем точки a и b соответствующими интервалами (c,d) и (e,f) настолько малой длины, чтобы они не пересекались (рисунок 1.4). Так как $x_n\to a$, то в интервале (c,d) находятся все элементы x_n, за исключением их конечного числа, но тогда интервал (e,f) не может содержать в себе бесконечное число элементов x_n и $x_n\not\to b$. Мы пришли к противоречию.

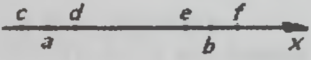


Рисунок 1.4

Теорема 1.3.2 Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.

Доказательство: Пусть $\lim x_n=a$. Зададим $\varepsilon=1$ и подберем $n_0=n_0(1)$ такое, чтобы $1>|x_n-a|$ $(n>n_0)$. Но тогда $1>|x|-|a|$, $\Rightarrow$ $1+|a|>|x|$ для всех $n>n_0$.

Пусть M – наибольшее из чисел $1+|a|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0}|$. Тогда, очевидно, $M\geq|x_n|$ для всех $n\in N$.

Замечание Ограниченность последовательности является необходимым условием сходимости последовательности, но не достаточным.

Теорема 1.3.3 Если переменная x_n имеет предел $a \neq 0$, то найдется такое n_0, что $|x_n| > |a|/2$ для $n > n_0$. Более того, для указанных n, если $a > 0$, то $x_n > a/2$, если $a < 0$, то $x_n < a/2$. Таким образом, начиная с некоторого номера, x_n сохраняет знак a.

Теорема 1.3.4 Если $x_n \to a$, $y_n \to b$ и $x_n \le y_n$ для всех $n = 1,2,\ldots$, то $a \le b$.

Доказательство: Пусть $b < a$. Зададим $0 < \varepsilon < \dfrac{a-b}{2}$ и подберем N_1 и N_2, чтобы $a - \varepsilon < x_n$ $(n > N_1)$, $y_n < b + \varepsilon$ $(n > N_2)$ Если $n_0 = \max\{N_1, N_2\}$, то отсюда следует, что $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n (n > n_0)$, т.е. приходим к противоречию, так как по условию $x_n \le y_n$ для всех n.

Следствие Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\} \in [a,b]$, то ее предел также принадлежит $[a,b]$.

Действительно, $a \le x_n \le b$, и если $\lim x_n = c$, то по теореме 1.3.4 следует, что $a \le c \le b$.

Теорема 1.3.5 Если переменные x_n и y_n стремятся к одному и тому же пределу a и $x_n \le z_n \le y_n$ $(n = 1,2,3,\ldots)$, то переменная z_n также стремится к a.

Доказательство: Задав $\varepsilon > 0$, можно найти N_1 и N_2 такие, что $a - \varepsilon < x_n$ $(n > N_1)$, $y_n < a + \varepsilon$ $(n > N_2)$. Тогда для каждого $n > n_0 = \max\{N_1, N_2\}$ верно $a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon$, отсюда следует $|z_n - a| < \varepsilon$ $(n > n_0)$.

Теорема 1.3.6 Если $x_n \to a$, то $|x_n| \to |a|$.

Доказательство: Оно следует из неравенства $||x_n| - |a|| \le |x_n - a|$.

1.3.3 Арифметические действия над последовательностями

Пусть x_n и y_n – переменные, пробегающие последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. По определению, сумма $x_n + y_n$, разность $x_n - y_n$, произведение $x_n \cdot y_n$ и частное x_n/y_n суть переменные, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$, при $y_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Если $x_n = c$ при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$, то пишут

$$c \pm y_n,\ c \cdot y_n,\ c/y_n.$$

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1.3.7 Если существуют конечные пределы $\lim x_n$, $\lim y_n$, то существуют также пределы их суммы, разности, произведения и частного:

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n;$$

$$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n;$$

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}, \text{ если } \lim y_n \neq 0.$$

Доказательство: Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем n_0 так, чтобы $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$; $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} (n > n_0)$. Тогда $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $(n > n_0)$ – первое равенство доказано.

Для доказательства второго заметим, что

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| =$$

$$= |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b|.$$

Так как y_n имеет предел, то по теореме существует такое M>0, что $|y_n| \leq M$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $|a| \leq M$. Подберем n_0 так, чтобы $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$; $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$ $(n > n_0)$. Тогда из вышеизложенного следует, что $|x_n y_n - ab| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon$ $(n > n_0)$. Доказано.

Пусть теперь к условию $x_n \to a$, $y_n \to b$ добавится $b \neq 0$. Тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \frac{|(x_n - a)b + (b - y_n)a|}{|y_n||b|} \leq \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|b - y_n||a|}{|y_n||b|}.$$

Используем теорему 1.3.3, согласно которой $|y_n| > {|b|}/{2}$, $(n > N_1)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N_2 и N_3 такие, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon\,|b|}{4} \ (n > N_2),\ |a||y_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{4} \ (n > N_3).$$

Теперь, положив $n_0 = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, имеем $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon\,|b|}{4} \cdot \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon}{2}$ $(n > n_0)$, что доказывает третье равенство.

Данные теоремы дают возможность узнать, имеет ли переменная предел и чему он равен.

Пример 1. Пусть $x_n = 1 + q + ... + q^n, |q| < 1$. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{1-q}$.

Имеем $x_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$. Так как $\lim q^{n+1} = 0$ при $|q| < 1$, то по первой и второй формулам теоремы 1.2.7:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n \to \infty} q^{n+1} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \cdot 0 = \frac{1}{1-q}.$$

Под суммой $1 + q + ... + q^n + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ будем понимать $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}$.

1.4 Бесконечно малая и бесконечно большая величины

Определение 1.4.1 Переменная α_n (имеющая $\lim \alpha_n = 0$) называется *бесконечно малой величиной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ для всех $n > n_0$.

Нетрудно видеть, что для того, чтобы переменная x_n имела предел a, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая.

Определение 1.4.2 Переменная β_n называется *бесконечно большой величиной*, если для любого $M > 0$ найдется такое n_0, что $|\beta_n| > M$ $(n > n_0)$. При этом пишут:

$$\lim \beta_n = \infty \text{ или } \beta_n \to \infty \tag{1.4.1}$$

и говорят, что β_n стремится к бесконечности.

Если бесконечно большая β_n, начиная с некоторого номера n_0, принимает только положительные значения (или только отрицательные), то

$$\lim \beta_n = +\infty \text{ или } \beta_n \to +\infty; \tag{1.4.2}$$

$$\lim \beta_n = -\infty \text{ или } \beta_n \to -\infty. \tag{1.4.3}$$

Таким образом, из (1.4.2), так же как и из (1.4.3), вытекает (1.4.1).

Примечание Переменная $\{(-1)^n \cdot n\} \to \infty$, но не имеют место (1.4.2) и (1.4.3).

Свойства:

Если переменная x_n ограничена, а y_n – бесконечно большая, то $\dfrac{x_n}{y_n} \to 0$.

Если x_n ограничена снизу положительным числом, а y_n – не равная нулю бесконечно малая, то $\dfrac{x_n}{y_n} \to \infty$.

Следствия:

$$\lim_{y_n \to \infty} \frac{c}{y_n} = 0; \quad \lim_{y_n \to 0} \frac{c}{y_n} = \infty \quad (c \neq 0).$$

Теорема 1.4.1 Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является *бесконечно малой последовательностью*, т.е. если $\lim x_n = 0$ и $|y_n| \le M$ для всех $n \in N$, то $\lim x_n y_n = 0$.

Доказательство: Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем n_0 так, чтобы $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ для каждого $n > n_0$. Тогда

$$|x_n y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| \le \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \text{ при любом } n > n_0.$$

1.5 Монотонные последовательности. Число e

Определение 1.5.1 Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей (невозрастающей)*, если при всех $n \in N$ справедливо неравенство

$$x_n \le x_{n+1} \ (x_n \ge x_{n+1}).$$

Если с увеличением n ее члены увеличиваются, т.е. $x_n < x_{n+1}$ для всех $n \in N$, то последовательность $\{x_n\}$ называют *строго возрастающей.*

Если же с увеличением n члены $\{x_n\}$ убывают, т.е. $x_n > x_{n+1}$ для всех $n \in N$, то $\{x_n\}$ – *строго убывающая.*

Определение 1.5.2 Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонной*, если ее члены либо только возрастают, либо только убывают.

Элементы монотонной последовательности можно расположить в цепочки:

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots \text{ (ограничена снизу)},$$

$$x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots \text{ (ограничена сверху)}.$$

Примеры: $\{n^2\}$ – возрастающая последовательность.

$\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots\}$ – невозрастающая последовательность.

Рассмотрим возрастающую последовательность (монотонную): $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$.

Если эта последовательность не является ограниченной, то ее члены неограниченно возрастают и, следовательно, $\{x_n\}$ не имеет предела. Если же эта последовательность ограничена, то ее члены, возрастая, приближаются к некоторому числу $a \le M$ (рисунок 1.5).

Теорема 1.5.1 (Достаточный признак существования предела последовательности) Всякая ограниченная возрастающая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел (т.е. если $\{x_n\}$ не убывает и ограничена сверху M, то существует число $a \le M$, к которому стремится последовательность как к своему пределу: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$). Аналогично для убывающей ограниченной последовательности.

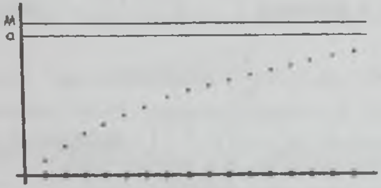


Рисунок 1.5

В качестве примера на применение этого признака рассмотрим последовательность, общий член которой $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, 3\ldots$.

Теорема 1.5.2 Последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ при $n \to \infty$ имеет предел, заключенный между 2 и 3.

Доказательство: Покажем, что эта последовательность возрастает и ограничена. На основании формулы бинома Ньютона $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$, полагая $a = 1$, $b = \frac{1}{n}$, имеем:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Произведя алгебраические преобразования, получим:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Видно, что с увеличением n дроби $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots$ уменьшаются, а разности $\left(1-\frac{1}{n}\right),\left(1-\frac{2}{n}\right),\ldots$ – увеличиваются. Следовательно: $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает при $n\to\infty$. Итак, последовательность $\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. – возрастающая.

Покажем, что она ограничена. Замечая, что

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)<1,\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$$

и т.д., получаем неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}.$$

Но

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2^2};\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3};$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1}{\underbrace{1\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n}}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

Поэтому можно переписать:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ – геометрическая прогрессия со знаменателем

$$q=\frac{1}{2},\ a_1=1\Rightarrow S=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2.$$

Поэтому $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2=3$, но из $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$ следует, что $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$. Т.е. $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Итак, $\{x_n\}$ - ограничена, тогда на основании теоремы 1.5.1 она имеет предел. Этот предел называют числом e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Обозначение этого предела числом e было впервые предложено Л. Эйлером.

Число e – иррационально. Его приближенное значение с точностью до 10^{-8}: $e = 2{,}71828182$.

1.6 Точные верхняя и нижняя грани множества

Рассмотрим произвольное множество E действительных чисел x. Если среди чисел $x \in E$ имеется наибольшее (максимальное) число, которое обозначим M, то пишут:

$$M = \max E = \max_{x\in E} x.$$

Если же среди $x \in E$ имеется наименьшее (минимальное) число m, то

$$m = \min E = \min_{x\in E} x.$$

Если E – конечное множество, т.е. состоит из конечного числа членов $x_1, x_2, \dots, x_p$, то среди них всегда есть наименьшее и наибольшее число. Однако это не всегда так, если E – бесконечное множество.

Примеры:

1) $Z = \{\dots,-3,-2,-1,\ 0\ ,1,\ 2,\dots\}$;

2) $N = \{1,2,3,\dots\}$;

3) $[a,b]$, $[a,b)$, (a,b), $\min[a,b]=a$; $\max[a,b]=b$; $\min[a,b)=a$.

Возникает вопрос о введении для произвольного множества E чисел, которые заменяли бы $\max E$ и $\min E$.

Такими числами являются *точная верхняя грань* $\sup E = \sup\limits_{x \in E} x = M$ и *точная нижняя грань* $\inf E = \inf\limits_{x \in E} x = m$ множества (sup – наивысший, infimum - наинизший).

Определение 1.6.1 Пусть E – ограничено сверху. Число M (конечное) называют *точной верхней гранью* множества E, если для него выполняются следующие условия:

1) $x \le M$ для всех $x \in E$;
2) для любого E существует точка $x_1 \in E$ такая, что верно

$$M - \varepsilon < x_1 \le M.$$

Определение 1.6.2 Пусть E – ограничено снизу. Число m (конечное) называют *точной нижней гранью* множества E, если для него выполняются следующие условия:

1) $m \le x$ для всех $x \in E$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_1 \in E$ такая, что верно

$$m \le x_1 < m + \varepsilon.$$

Очевидно, если в E имеется наибольшее (наименьшее) число, т.е. существует $\max E$ $(\min E)$, то $(\inf E = \min E)$ $\sup E = \max E$.

Пример 1.

Множество $E = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ имеет наименьшее число, равное $\frac{1}{2}$, $\min E = \frac{1}{2}$; однако оно не имеет максимума, т.к. $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \cdots$. Все же оно ограничено сверху числом 1 или любым числом, большим 1. Но 1 есть точная верхняя грань: $\sup E = 1$. Действительно:

$$\frac{n}{n+1} < 1 \text{ для всех } n \in N;$$

для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_1 \in N$ такое, что $1 - \varepsilon < \dfrac{n_1}{n_1 + 1} < 1$.

Если множество не ограничено сверху (снизу), то его точной верхнею гранью естественно назвать символ $+\infty$ $(-\infty)$:

$$\sup E = +\infty \quad (\inf E = -\infty).$$

Пример 2.

1) Для $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ имеет место $\sup Z = +\infty$; $\inf Z = -\infty$

2) Для $N = \{1,2,3,...\}$ $\sup N = \infty; \inf N = \min N = 1$.

$\sup(a,b) = b$; $\inf(a,b) = a$, где a и b – любые числа.

Определение 1.6.3 (общее определение точной грани) Число $M(m)$ - конечное или бесконечное называется верхней (нижней) гранью E, если выполняются:

1) $x \le M$ $(m \le x)$ для всех $x \in E$;
2) для любого (конечного) $M_1 < M$ $(m_1 > m)$ существует $x_1 \in E$ такое, что $M_1 < x_1 \le M$ $(m \le x_1 < m_1)$. Здесь нет $M - \varepsilon$ $(m + \varepsilon)$, т.к. это не имеет смысла при $M = +\infty$ $(m = -\infty)$.

Теорема 1.6.1 Если не пустое множество E действительных чисел ограничено сверху (снизу) конечным числом $K\,(k)$, то существует число $M \le K\,(m \ge k)$, являющееся точной верхней (нижней) гранью E.

Справедливы утверждения:

Всякое множество E имеет точные верхнюю и нижнюю грани. Если E – ограничено сверху, то $\sup E < +\infty$, если E – не ограничено сверху, то $\sup E = +\infty$.

Аналогично, если E – ограничено снизу, то $\inf E > -\infty$, если не ограничено, то $\inf E = -\infty$.

1.7 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Определение 1.7.1 Пусть задана произвольная последовательность действительных чисел $\{x_n\}$. Выберем из нее бесконечное множество элементов с номерами $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Тогда получим новую последовательность $\{x_{n_k}\}$, которая называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$.

Таких подпоследовательностей можно выделить бесконечное множество. Если $\{x_n\}$ сходится (к конечному числу, $+\infty$, $-\infty$), то очевидно, что и любая ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ тоже сходится к тому же числу (к конечному числу, $+\infty$, $-\infty$).

Рассмотрим последовательность $\{1,-1,1,-1,...\}$, которая не является сходящейся последовательностью. Все же видно, что из нее можно извлечь подпоследовательность $\{1,1,1,...\}$, сходящуюся к 1.

Справедливы теоремы:

Теорема 1.7.1 Из всякой последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к конечному числу, или к $+\infty$, или к $-\infty$.

Действительно, в случае, если $\{x_n\}$ не ограничена сверху (снизу), она, очевидно, содержит в себе подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ ($-\infty$), что доказывает теорему. Если же последовательность ограничена, то следует.

Теорема 1.7.2 (Больцано-Вейерштрасса) Из всякой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу.

1.8 Понятие функции. Способы задания функции

При совместном рассмотрении двух переменных величин оказывается, что численные значения одной из них зависят от численных значений другой величины.

Например, площадь квадрата зависит от длины его стороны. Если x – длина стороны, а y – площадь квадрата, следовательно, эта зависимость выражается формулой $y=x^2$. Площадь круга $S = S(r)$: $S = \pi r^2$.

Определение 1.8.1 *Функция* – это правило, по которому каждому элементу x некоторого множества E соответствует единственный элемент y из другого множества L (предложено Лобачевским и Дирихле).

При этом:
x – независимая переменная (аргумент),
y – зависимая переменная, которую часто называют *функцией*.

E – область определения функции (О.О.Ф.),
L – множество значений функции (М.З.Ф.).

Обозначение функции: $y=f(x)$, здесь f – правило, по которому элементу $x \in E$ соответствует единственный элемент $y \in L$.

Замечание 1 Если задана функция $f(x)$ с областью определения E или множеством значений L, то это говорит, что задано *отображение* множества E на множество L, а множество L называется *образом* множества E: $L = f(E)$.

Замечание 2 Иногда функция обозначается записью вида $x \to f(x)$. Например, вместо записи $y=x^2$ пишут: $x \to x^2$. Кроме буквы f для обозначения функции употребляются и другие буквы: $y = y(x)$, $y = f(x)$.

Определение 1.8.2 *Графиком* функции $y=f(x)$ называется совокупность точек $(x, f(x))$ плоскости OXY, для каждой из которых абсцисса **x** является значением аргумента, а ордината $y=f(x)$ – соответствующим значением данной функции. Функции могут быть заданы самыми различными способами. Наиболее часто встречаются 4 способа задания: аналитический, табличный, графический и программный.

При *аналитическом* способе задания функция определяется с помощью аналитического выражения, т.е. с помощью формулы, связывающей зависимую переменную – функцию с независимой переменной – аргументом. При этом *областью определения функции* называется совокупность всех тех значений x, для которых это выражение имеет смысл и приводит к действительным значениям функции.

Пример 1. Найти область определения функции $y = \dfrac{1}{x-2}$.

Решение: Область определения состоит из объединения двух бесконечных интервалов $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, так как $\dfrac{1}{x-2}$ не имеет смысла при $x = 2$.

С помощью одной и той же формулы могут задаваться различные функции в зависимости от области определения функции.

Пример 2. Дана формула $y = x^2$. Определить функции в зависимости от области определения.

$$1)\ ]0,\ +\infty[; \qquad 2)\ [-2,\ 2].$$

Решение: Если О.О.Ф. = $(0, +\infty)$, то графиком функции является правая ветка параболы, заданная на положительной полуоси Ox; если О.О.Ф. $[-2, 2]$, то графиком функции $y = x^2$ является парабола, заданная на отрезке $[-2, 2]$.

Возможен обратный случай, когда одна функция на различных частях ее области определения задается различными формулами. Например:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \le x \le 1 \\ x^2, \text{ если } x > 1 \end{cases}.$$

При *табличном* способе задания функции составляется таблица, в которой указывается ряд значений аргумента и соответствующих значений функции. К примеру, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов, таблицы, выражающие зависимость между измеряемыми величинами

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

При *графическом* способе задания функции даётся график функции и ее значения, соответствующие тем или иным значениям аргумента, находящиеся из этого графика. Такие графики, в основном, чертятся с помощью самопишущих приборов (электрокардиограммы).

1.9 Основные элементарные функции и их графики

Среди функций, заданных аналитически, основную роль в нашем курсе будут играть следующие функции, называемые *основными элементарными функциями*:

Постоянная (константа): $y=c$, где c – действительное число.

Степенная функция: $y=x^n$, $n \neq 0$ – действительное число.

Показательная функция: $y=a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмическая функция: $y=\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

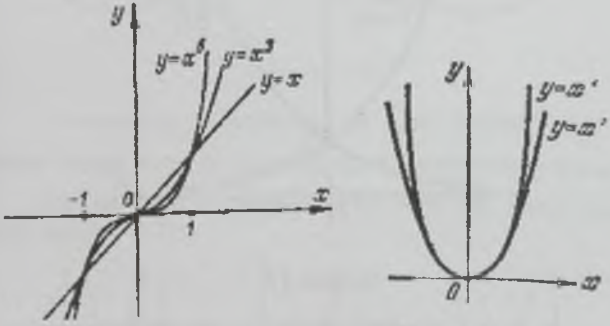
Тригонометрические функции: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tg\, x$, $y=ctg\, x$.

Обратные тригонометрические функции: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctg\, x$, $y=arcctg\, x$.

Рассмотрим области определения основных элементарных функций и их графики:

Постоянная: для множества значений x, $y=Const$, график $y=c$ – прямая, параллельная оси абсцисс. О.О.Ф. является вся числовая ось.

Вид области определения *степенной функции* зависит от показателя n. Если n принимает различные натуральные значения, то получится ряд $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$ ... , для которых область определения – вся числовая ось. Приведем примеры степенных функций (рисунок 1.6).



а) для нечётных n б) для чётных n

Рисунок 1.6

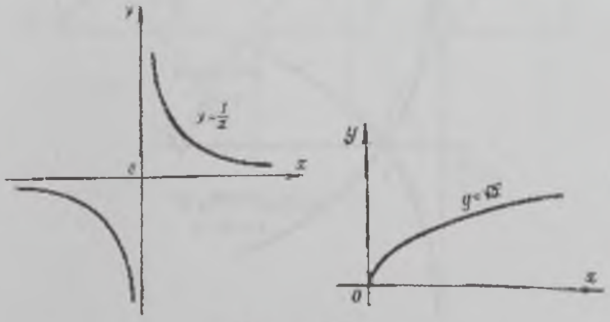


Рисунок 1.7

Графики степенных функций для $n = -1$ и $n = \frac{1}{2}$ показаны на рисунке 1.7. Функция $y = \frac{1}{x}$ определена на всей числовой оси, кроме $x = 0$, а функция $y = \sqrt{x}$ – определена для $x \geq 0$.

Показательная функция $y=a^x$ определена для всех значений x ($a > 0$, $a \neq 1$) (рисунок 1.8).

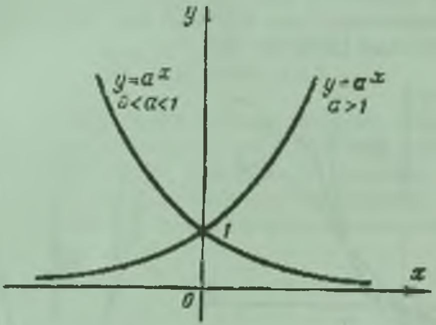


Рисунок 1.8

Логарифмическая функция $y=log_a\, x$: область определения – бесконечный интервал]0, + ∞[., $a > 0$, $a \neq 1$ (рисунок 1.9)

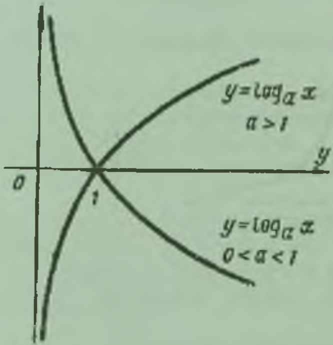


Рисунок 1.9

Тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ определены на всей числовой оси (рисунок 1.10).

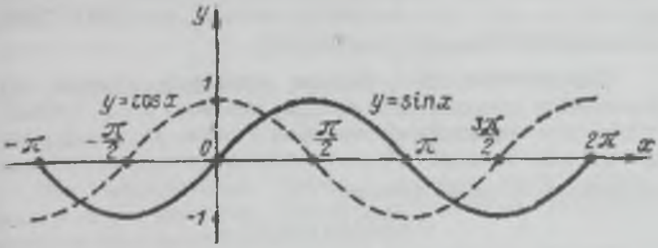


Рисунок 1.10

Функция $y=tg\,x$ определена на всей числовой оси, за исключением точек $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k – любое целое число.

Функция $y=ctg\ x$ определена на всей оси, кроме точек $x=k\pi$ (рисунок 1.11).

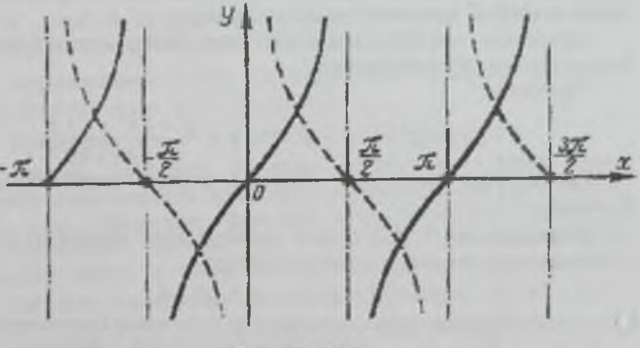


Рисунок 1.11

1.10 Сложные функции. Элементарные функции

Пусть на множестве E значений аргумента x задана функция $u=\varphi(x)$ и G – множество значений функции u. Пусть на множестве G задана функция $y=f(u)$.

Определение 1.10.1 Функция называется *сложной* или функцией от функции, если каждому значению $x \in E$ соответствует одно определённое значение y такое, что $y = f(x)$, где $u=\varphi(x) \in G$. Функция $u=\varphi(x)$ называется *промежуточным аргументом* сложной функции:

$$y=F(x)=f\left[\varphi(x)\right].$$

Пример 1. Пусть $y=\ln u$, а $u=\cos x$, значит, $y=\ln\cos x$ – сложная функция, которая определена лишь для тех значений x, при которых $\cos x>0$, так как логарифмическая функция определена для положительных значений аргумента.

Определение 1.10.2 *Элементарной* называется функция, которая составлена из основных элементарных функций при помощи конечного числа арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления) и конечного числа операций взятия функций от функции.

Основные элементарные функции также принадлежат классу элементарных функций.

Примеры:

$$y=\lg\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right);\ y=5^{\cos\lg x};\ y=\frac{x^3+2x^2-x+5}{x^2-3x+20}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи элементарных функций:

Определение 1.10.3: *Целой рациональной* функцией (или многочленом) называется функция вида:

$$y=a_0x^n+a_0x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

где n – натуральное число, называемое *степенью* многочлена,

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – действительные числа, называемые *коэффициентами* многочлена (определены на всей числовой оси).

Примеры: $y=3x^2+1;\ \ y=x^4-5x^2+6x+1;\ \ y=2x+7.$

Многочлен первой степени $y=a_0x+a_1$ – называется *линейной* функцией. В частности постоянная функция $y=C$

есть многочлен нулевой степени: $y=Cx_0$.

Определение 1.10.4 *Дробно-рациональной* функцией (рациональной дробью) называется отношение двух многочленов $y=\frac{P(x)}{a(x)}$. Функция $y=\frac{P(x)}{a(x)}$ определена для всех x, за исключением тех, при которых $Q(x)=0$.

Примеры: $y=\frac{x^3-3x+1}{x^3+2x^2-5}$; $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; $y=\frac{1}{x}$

При исследовании функции важную роль играют некоторые их свойства. Рассмотрим *свойства чётности, нечётности и периодичности функций*.

Пусть *y=f(x)* – некоторая элементарная функция с областью определения *E*.

Определение 1.10.5 Функция *y=f(x)* называется *четной*, если для любого $x \in E$ $f(-x)=f(x)$.

Примеры:

$y=x^2$; $y=\cos x$ – четные, т.к. $(-x)^2=x^2$; $\cos(-x)=\cos x$.

Степенная функция с четным показателем, т.е. $y=x^{2k}$, где k – любое натуральное число, – четная. График четной функции симметричен относительно оси *OУ*.

Определение 1.10.6 Функция *y=f(x)* называется *нечетной*, если для всех $x \in E$ $f(-x)=-f(x)$.

Примеры: $y=x^3$; $y=\sin x$.

График нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат. Произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной на нечетную есть нечетная. Следует иметь в виду, что не всякая функция является четной или нечетной, например, функции $y=x^2-x+1$; $y=x+\cos x$; $y=2^x$ не являются ни четными, ни нечетными.

Определение 1.10.7 Функция *y=f(x)* называется *периодической* с периодом *T*, если существует такое число $T>0$, что *f(x+T)=f(x)* для всех $x \in E$. При этом наименьшее из положительных чисел *T*, удовлетворяющих условию *f(x+T)=f(x)* называется *периодом* функции *y=f(x)* (тригонометрические функции).

Для $\sin x, \cos x \Rightarrow T = 2\pi$; $tgx, ctgx \Rightarrow T = \pi$.

Пользуясь свойством периодичности, зная значения $y = \sin x$ на $[0, 2\pi]$, легко найти значения этой функции для любых x.

1.11 Предел функции

Важнейшим средством изучения функции является понятие предела функции – основного понятия математического анализа.

1.11.1 Предел функции при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Рассмотрим функцию *f(x)* аргумента *x* и введем понятие предела функции.

Пусть независимая переменная *x* неограниченно возрастает, т.е. $x \to +\infty$. Пусть функция *f(x)* определена на всей числовой оси, или для всех *x*, больших некоторого числа.

Определение 1.11.1 Число *b* называется *пределом* функции *y=f(x)* при $x \to \pm\infty$, если каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такое число *N*, что для всех *x*, больших *N*, выполняется неравенство:

$$|f(x) - b| < \varepsilon . \qquad (1.11.1)$$

Символическая запись имеет следующий вид:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N,\ \forall x > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Иными словами, если *b* есть предел функции *f(x)* при $x \to +\infty$, то при неограниченном возрастании аргумента значения этой функции сколь угодно мало отличаются от числа *b*, то есть разность между значением *f(x)* и *b* становится близкой к нулю.

Предел функции записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b .$$

Пример 1. Пусть дана функция $y = f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$.

Докажем, что $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(2 - \dfrac{1}{x}\right) = 2$.

Составим таблицу значений и график:

X	1	2	10	100
У	1	1,5	1,9	1,99

Эта функция неограниченно стремится к числу 2, или имеет пределом число 2 (рисунок 1.12).

Пусть *M(x,y)* – точка графика функции $y = 2 - \frac{1}{x}$. Найдем α – расстояние от точки *M* до прямой *y*=2:

$$\alpha = |y-2| = |f(x)-2| = \left|\left(2-\frac{1}{x}\right)-2\right| = \left|-\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}.$$

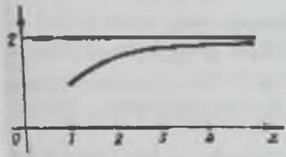


Рисунок 1.12

Условие, что при $x \to +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, означает, что расстояние *d* может быть сделано меньше любого наперед заданного положительного числа для достаточно больших значений *x*.

Так, например,

$|f(x)-2| = \frac{1}{x} < \frac{1}{10}$, если x>10,

$|f(x)-2| = \frac{1}{|x|} = 1 < 100$, и вообще, если задать любое положительное ε>0, то $|f(x)-2| = \frac{1}{x} < \varepsilon$, если $x > \frac{1}{\varepsilon}$. В данном случае указанное в определении предела число $N = \frac{1}{\varepsilon}$.

Итак, для любого ε>0 существует $N = \frac{1}{\varepsilon}$ такое, что для всех $x > N = \frac{1}{\varepsilon}$ верно $\left|\left(2-\frac{1}{x}\right)-2\right| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Из определения предела следует, что постоянная функция *f(x)*$\equiv$*A* имеет при $x \to +\infty$ предел $\lim\limits_{x\to+\infty} A = A$, т.к. неравенство $|f(x)-A| = |A-A| < \varepsilon$ при любых *x* и $\varepsilon > 0$.

Установим геометрический смысл предела при $x \to +\infty$.

Как мы уже знаем, если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, то значит, что для любого $\varepsilon>0$ существует N такое, что для всех $x>N$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$, которое равносильно следующим неравенствам на основании свойств абсолютных величин:

$$-\varepsilon < f(x)-b < \varepsilon \Rightarrow$$
$$b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon.$$

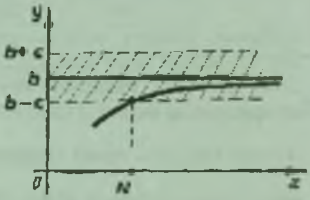


Рисунок 1.13

Эти неравенства показывают, что ординаты функции $y=f(x)$, для которых $x>N$, заключены между числами $b-\varepsilon$ и $b+\varepsilon$. Это значит, что график функции $y=f(x)$ для любых $x>N$ содержится в полосе, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$.

Число N, вообще говоря, зависит от ε: чем меньше ε, тем больше будет N (рисунок 1.13).

1.11.2 Предел функции при $x \to -\infty$.

Пусть аргумент x неограниченно убывает, т.е. $x \to -\infty$.

Определение 1.11.2 Число b называется *пределом* функции $y=f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число M, что для любого $x<M$ выполняется неравенство:

$$|f(x)-b| < \varepsilon.$$

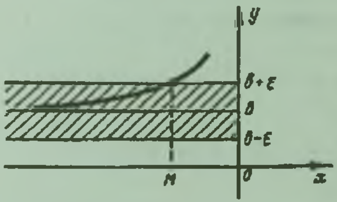


Рисунок 1.14

Геометрический смысл предела при $x \to -\infty$ аналогичен геометрическому смыслу при $x \to +\infty$. Если $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое число M, что при всех $x<M$ график $y=f(x)$ находится в полосе, ограниченной прямыми

$y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$

(рисунок 1.14).

1.11.3 Предел функции при $x \to x_0$

Рассмотрим случай, когда независимая переменная x приближается к x_0 слева.

Определение 1.11.3 Число b называется *пределом* функции $y=f(x)$ при $x \to x_0$ слева, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N ($N < x_0$), что для любых x, $N < x < x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Символьная запись:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N < x_0,\ \forall\, x,\ N < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Понятие предела функции при $x \to x_0$ слева сходно с понятием предела при $x \to +\infty$ и отличается лишь тем, что неравенство (1.11.1) выполняется только для тех x, которые $N < x < x_0$. Предел обозначают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$ ($x \to x_0 - 0$ означает, что x стремится к x_0 слева).

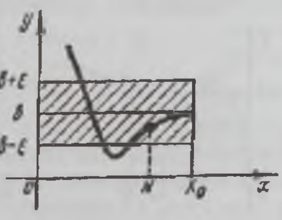


Рисунок 1.15

Геометрический смысл: каково бы не было $\varepsilon > 0$, найдется такое число N, $N < x_0$, что для всех x, $N < x < x_0$, график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$ (рисунок 1.15).

Аналогично вводится понятие предела при $x \to x_0 + 0$ (справа).

Определение 1.11.4 Число b называется *пределом* функции $y=f(x)$ при $x \to x_0$ справа, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число M, $M > x_0$, что для любых x, $x_0 < x < M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В символьной записи:

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, M>x_0,\ \forall\, x,\ x_0 < x < M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Предел обозначается: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$, то геометрически это означает, что график $f(x)$ лежит в полосе, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$

для всех x, $x_0 < x < M$ (рисунок 1.16).

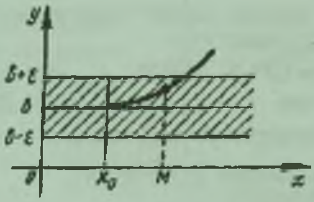


Рисунок 1.16

Пределы функции при $x \to x_0 - 0$ и при $x \to x_0 + 0$ называются *односторонними пределами*.

Если оба односторонних предела существуют и равны между собой, то говорят, что *f(x)* имеет *двусторонний* предел или просто предел. Обобщив, получим:

Определение 1.11.5 Число *b* называется *пределом* функции *y=f(x)* при $x \to x_0$, если для любого ε>0 найдутся числа *M* и *N*, $N < x < M$, что для всех *x*, $x \in]N, M[$ за исключением быть может точки x_0 выполняется неравенство: $|f(x) - b| < \varepsilon$ (рисунок 1.17).

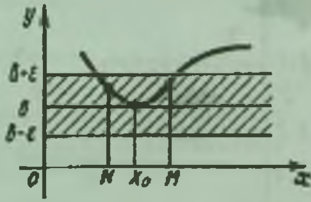


Рисунок 1.17

В символьной записи определение записывается как

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \boldsymbol{M}, N,\ N < x < M\ \ \forall\ x \in]N, M[,\ (x \neq x_0) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Запись предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

Определение 1.11.6 Назовем *окрестностью* точки x_0 – любой интервал, $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ содержащий в себе эту точку, (в частности *]N, M[*). Тогда $b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *если* $\forall \varepsilon > 0$. Можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство (1.11.1). Таким образом, неравенство (1.11.1) выполняется для всех точек некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, точки x_0.

Замечание 1 В определение предела при $x \to x_0$ рассматривались значения $x \neq x_0$. В самой точке x_0 функция может быть и не определена.

Замечание 2 Числа N и M, фигурирующие в определениях пределов при $x \to x_0$ (слева и справа) зависят от ε и x_0.

Пример 2. $f(x) = y = 2x + 1$.

Покажем, что $\lim\limits_{x \to 4}(2x+1) = 9$.

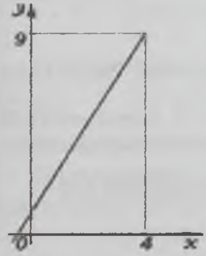


Рисунок 1.18

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Убедимся, что для значений x, близких к x_0=4 (справа и слева), разность $|y - 9|$ может быть сделана менее ε, т.е. $|(2x + 1)| < \varepsilon$.

Очевидно, что неравенство $\{|(2x+1)-9| < \varepsilon\}$ равносильно $\{-\varepsilon < (2x+1)-9 < \varepsilon\} \Rightarrow \{8-\varepsilon < 2x < 8+\varepsilon\} \Rightarrow \{4-\varepsilon/2 < x < 4+\varepsilon/2\}$. Итак, разность $|f(x) - 9| < \varepsilon$ для всех x, лежащих между $N=4-\varepsilon/2$, $M=4+\varepsilon/2$ (рисунок 1.18).

Поэтому $\lim\limits_{x \to 4}(2x+1) = 9$.

Замечание 3 Всякая функция либо совсем не имеет предела, либо имеет только один предел.

Доказательство (от противного): Допустим, что $f(x)$ имеет два предела b1 и b2 при $x \to +\infty$. Рассмотрим две полосы $b_1 - \varepsilon < b_1 < b_1 + \varepsilon$, $b_2 - \varepsilon < b_2 < b_2 + \varepsilon$, при этом ε такое малое, что полосы не имеют общих точек. Тогда при достаточно больших x график $y=f(x)$ не может находиться одновременно в двух полосах. Таким образом, если функция имеет предел, то он единственный.

1.12 Бесконечно малые функции. Ограниченные функции

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* (Б.М.) при $x \to +\infty$ (или $x \to x_0$), если ее предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Аналогично определяются бесконечно малые функции при

$x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0$. Так как для бесконечно малой функции предел $b = 0$, а $|f(x) - b| = |f(x) - 0| = |f(x)|$, то можно дать следующее определение.

Определение 1.12.1 Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой*_при ($x \to +\infty$), если каково бы то ни было $\varepsilon > 0$, можно найти N такое, что для всех $x > N$ выполняется неравенство: $|f(x)| < \varepsilon$.

Пример 1. Покажем, что $y = \dfrac{1}{x^2}$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$, т.е. что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти N такое, что для любых $x > N$ выполняется неравенство: $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{x^2}\right| = \dfrac{1}{x^2} < \varepsilon$. Но это неравенство справедливо при

$$x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = N \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Пример 2. Функция $y = (x-1)^2$ является бесконечно малой при $x \to 1$, т.к. $\lim\limits_{x \to 1} y = \lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$.

Пример 3. Функция $y = 2 - \dfrac{1}{x}$ не является бесконечно малой при $x \to +\infty$, т.к. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right) = 2 \neq 0$.

Докажем несколько теорем о свойствах бесконечно малых функций при $x \to +\infty$. Для остальных случаев формулировки и доказательства аналогичны ($x \to -\infty$, $x \to x_0$). Обозначим бесконечно малую функцию через $\alpha = \alpha(x)$.

Теорема 1.12.1 Алгебраическая сумма нескольких бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

Доказательство: Пусть $\alpha(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to +\infty$. Докажем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$. Пусть ϵ – любое положительное число. Т.к. $\varphi(x)$ по условию бесконечно малая функция, то для числа $\varepsilon/2 > 0$

найдется N_1, что для всех $x > N_1$ верно $|\varphi(x)| < \varepsilon$.

Аналогично, для того же числа $\varepsilon/2 > 0$ найдется N_2 такое, что для всех $x > N_2$ верно $|\psi(x)| < \varepsilon$.

Пусть N – наибольшее из N_1 и N_2. Тогда для $x > N$ выполняются одновременно оба неравенства. Но тогда по свойству 1 абсолютной величины для всех

$$x > N \Rightarrow \left\{|\alpha(x)| = |\varphi(x) + \psi(x)| \le |\varphi(x)| + |\psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\right\}.$$

Следовательно, для всех $x > N$ верно $|\alpha(x)| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$, что и требовалось доказать.

Введем понятие ограниченной функции.

Определение 1.12.2 Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на некотором множестве E значений аргумента x, если существует такое число C, что для всех $x \in E$, выполняется неравенство $|f(x)| \le C$. Таким множеством может быть интервал, отрезок или вся числовая ось.

Пример 4. Функции $y = \sin x, y = \cos x$ ограничены на всей числовой оси, т.к. для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ имеем $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$.

Пример 5. Функция $x^3 + 4$ ограничена на $[0, 3]$, т.к. для всех $x \in [0, 3]$ имеет место равенство $|f(x)| \le f(3) = 31$, т.е. $|f(x)| \le 31$.

Пример 6. $y = \dfrac{1}{x}$ не является ограниченной на $]0, 1[$, т.к. нельзя указать такое число C, что для всех $x \in]0, 1[$ выполнялось неравенство $|f(x)| \le C$.

Следующие теоремы устанавливают связь между понятиями ограниченной функции и функции, имеющей предел. Рассмотрим случай $x \to +\infty$.

Теорема 1.12.2 Если функция $y = f(x)$ имеет конечный предел при $x \to +\infty$, то она ограничена на некотором бесконечном интервале $]N, +\infty[$.

Доказательство: Пусть $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$. Тогда, по определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 1$) существует N такое, что для всех $x > N \Rightarrow \{|f(x) - b| < 1\}$. Т.к. по свойству модуля $|f(x) - b| \geq |f(x)| - |b|$, то $|f(x)| - |b| < 1$ или $|f(x)| < 1 + |b| = C$. Следовательно, функция $y = f(x)$ ограничена на $]N, +\infty[$, что и требовалось доказать.

Замечание Функцию, ограниченную на бесконечном интервале $]N, +\infty[$, будет называть *ограниченной при* $x \to +\infty$.

Следствие Бесконечно малая функция $\alpha = \alpha(x)$ при $x \to +\infty$ ограничена.

Теорема 1.12.3 Если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \neq 0$, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ ограничена на некотором бесконечном интервале.

Доказательство: Пусть $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, $b \neq 0$, и пусть задано положительное $\varepsilon < |b|$. Тогда по определению предела существует N, что для всех $x > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Т.к. $|f(x) - b| = |b - f(x)| \geq |b| - |f(x)|$, то $|b| - |f(x)| < \varepsilon$, или $|f(x)| > |b| - \varepsilon > 0$. Следовательно, $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| = \dfrac{1}{|f(x)|} < \dfrac{1}{|b| - \varepsilon} = C$, что и требовалось доказать.

Теорема 1.12.4 Произведение бесконечно малой функции $\alpha = \alpha(x)$ на функцию $\varphi(x)$, ограниченную при $x \to +\infty$ ($x \to x_0$), является функцией бесконечно малой.

Доказательство: Пусть $\varphi(x)$ – ограниченная функция на интервале $N_0 < x < +\infty$. Тогда существует $C > 0$, что для всех $x > N_0$ верно $|\varphi(x)| \leq C$. Покажем, что $\alpha(x) \cdot \varphi(x) = f(x)$ – есть бесконечно малая при $x \to +\infty$. Т.к. $\alpha = \alpha(x)$ – бесконечно малая функция, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется N_1, что для всех $x > N_1$ верно $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{C}$. Пусть N – наибольшее из N_1 и N_2. Тогда для $x > N$ выполняются одновременно оба неравенства. Следовательно, при $x > N$

$$|f(x)| = |\varphi(x)\cdot\alpha(x)| = |\varphi(x)|\cdot|\alpha(x)| < C\cdot\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

т.е. $f(x)$ – бесконечно малая функция.

Пример 7. Функция $y=\frac{\sin x}{x^2}$ – бесконечно малая при $x\to+\infty$, т.к. является произведением ограниченной $y=\sin x$ на $\alpha(x)=\frac{1}{x^2}$ ($x\to+\infty$).

Пример 8. Функция $y=x^2(1+\sin x)$ – бесконечно малая при $x\to 0$, т.к. является произведением ограниченной $y=1+\sin x$ на $\alpha(x)=x^2$ ($x\to 0$).

Следствие 1. Произведение двух (и более) бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция, т.к. $\lim\alpha(x)=0, \lim\beta(x)=0 \Rightarrow \lim\alpha\beta=0$.

Следствие 2. Произведение бесконечно малой функции на число есть функция бесконечно малая, т.к.

$$\lim\alpha(x)=0, C=const \Rightarrow \lim C\alpha=0.$$

Теорема 1.12.5 Частное $\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$ от деления бесконечно малой функции при $x\to+\infty$ на функцию $\varphi(x)$, предел которой отличен от нуля, является функцией бесконечно малой.

Доказательство: Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0, \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=b\neq 0$.

Тогда из теоремы 3 следует, что $y=\frac{1}{\varphi(x)}$ – ограниченная функция. Но тогда функция $\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}=\alpha(x)\cdot\frac{1}{\varphi(x)}$ - бесконечно малая по теореме 4, как произведение $\alpha(x)$ на ограниченную, что и требовалось доказать.

1.13 Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми

Определение 1.13.1 Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) если для любого $L > 0$ найдется число N такое, что для всех $x > N \Rightarrow |f(x)| > L$.

Всякая бесконечно большая функция при $x \to \infty$ не является ограниченной, т.к. стремится к плюс бесконечности, поэтому она не имеет предела (по теореме 1.12.2) и говорят, что она имеет бесконечный предел:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty .$$

Если бесконечно большая функция $f(x) > 0$ для всех $x > N$, то говорят, что функция стремится к плюс бесконечности $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty .$$

Если бесконечно большая функция отрицательна для всех больших значений x, то говорят, что функция стремится к минус бесконечности, записывается $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Примеры: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$.

Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями устанавливается в следующих теоремах.

Теорема 1.13.1 Если $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to +\infty$, то функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая при $x \to +\infty$.

Доказательство: Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Покажем, что для достаточно больших $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Так как по условию функция бесконечно большая, то существует такое число N, что $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ при $x > N$. Но тогда $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$, для тех же $x > N$, значит $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина, что требовалось доказать.

Пример 1. $y=x^2$ – бесконечно большая при $x \to +\infty \Rightarrow 1/x^2$ – бесконечно малая при $x \to +\infty$.

Теорема 1.13.2 Если функция $f(x)$, не обращающаяся в нуль, есть бесконечно малая при $x \to +\infty$, то $1/f(x)$ – бесконечно большая $x \to +\infty$.

(Доказательство самостоятельно.)

Аналогично определяется бесконечно большие функции при $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0$.

Условимся произвольную окрестность точки x_o обозначать через $U(x_o)$.

Определение 1.13.2 Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если при любом $L > 0$ существует окрестность $U(x_o)$, что для всех $x \in U(x_o)$, $x \neq x_0$, выполняется $|f(x)| > L$; $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Пример 2. $y = \dfrac{1}{x^3}$ – бесконечно большая при $x \to 0$, т.к. $y = x^3$ – бесконечно малая при $x \to 0$. При этом

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x^3} = -\infty;\ \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x^2} = +\infty .$$

1.14 Основные теоремы о пределах

Приведем теоремы о правилах предельного перехода, которые облегчают нахождение пределов. Приведем их для случая $x \to +\infty$, т.к. для $x \to -\infty$, $x \to x_0$ формулировки и доказательства аналогичны. Прежде всего установим связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой функцией.

Теорема 1.14.1 Если $f(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$, равный b, то ее можно представить как сумму числа b и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, ($x \to +\infty$).

Доказательство: Пусть $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$. Рассмотрим разность

$$f(x) - b = \alpha(x) \qquad (1.14.1)$$

и покажем, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to +\infty$.

Т.к. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует N, что при всех $x > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Но тогда $|\alpha(x)| < \varepsilon$ при всех $x > N$. Значит $\alpha(x)$ – бесконечно малая. Из (1.14.1) находим $f(x) = b + \alpha(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема 1.14.2 (обратная) Если $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая ($x \to +\infty$), то число b является пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

Доказательство: По условию $f(x) = b + \alpha(x)$. Покажем, что
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

Действительно, $f(x) - b = \alpha(x)$. Так как $\alpha(x)$ – бесконечно малая, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при любом $x > N \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$. Но так как $|f(x) - b| = |\alpha(x)|$, то для всех $x > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ значит $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, что и требовалось доказать.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 5$.

Решение: Так как $\frac{6}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ – бесконечно малые ($x \to +\infty$), то сумма $\frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$ – бесконечно малая.

Функция $\left(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 5 +$Б.М., значит согласно теореме 1.14.2 следует, что $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 5$.

Теорема 1.14.3 Пусть $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = c$, где b и c – конечные числа. Тогда $f(x)+\varphi(x)$ и $f(x) - \varphi(x)$ также имеют пределы ($x \to +\infty$), причем:
$$\lim_{x \to +\infty}[f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \to +\infty} f(x) \pm \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = b \pm c,$$
т.е. предел суммы (разности) двух и более функций равен сумме (разности) их пределов.

Доказательство: На основании теоремы 1.14.1 функции
$$f(x) = b + \alpha(x);\ \varphi(x) = c + \beta(x),$$
где $\alpha(x), \beta(x)$ – бесконечно малые функции.

Но тогда
$$f(x) + \varphi(x) = [b + \alpha(x)] + [c + \beta(x)] = (b + c) + [\alpha(x) + \beta(x)].$$

Функция $[\alpha(x) + \beta(x)]$ – бесконечно малая по теореме 1.14.1. Следовательно, по теореме 1.14.2 число

$$b+c=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+\varphi(x)]=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),$$

что и требовалось доказать.

Для разности доказывается аналогично:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=b-c=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to+\infty}\varphi(x).$$

Теорема 1.14.4 Предел произведения двух, трех (конечного числа) функций равен произведению их пределов:

$$\lim[f(x)\cdot\varphi(x)]=\lim f(x)\cdot\lim\varphi(x).$$

Доказательство: Пусть $\lim f(x)=b, \lim\varphi(x)=c$. Тогда

$$f(x)=b+\alpha(x), \varphi(x)=c+\beta(x),$$

где $\alpha(x), \beta(x)$ – бесконечно малые ($x\to\infty$).

Следовательно,

$$f(x)\cdot\varphi(x)=[b+\alpha(x)][c+\beta(x)]=bc+[c\alpha(x)+b\beta(x)+\alpha(x)\beta(x)].$$

Функция $[c\alpha(x)+b\beta(x)+\alpha(x)\beta(x)]$ – бесконечно малая, тогда отсюда видно, что $f(x)\cdot\varphi(x)=bc+б.м.\Rightarrow$ по теореме 1.14.2 число bc: $\lim[f(x)\cdot\varphi(x)]=bc=\lim f(x)\cdot\lim\varphi(x)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1 Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е. $\lim k\cdot\varphi(x)=k\cdot\lim\varphi(x)$, $k=const$.

Доказательство: Действительно,

$$\lim[k\cdot\varphi(x)]=\lim k\cdot\lim\varphi(x)=k\cdot\lim\varphi(x),$$

т.к. $\lim k=k$.

Следствие 2 Предел степени равен степени предела:

$$\lim\{[f(x)]^n\}=\lim[f(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f(x)]=$$

$$=\lim f(x)\cdot\lim f(x)\cdot\ldots\cdot\lim f(x)=[\lim f(x)]^n.$$

Теорема 1.14.5 Предел дроби $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если $\lim\varphi(x)=c\neq0$ $(x\to+\infty)$.

Доказательство: Пусть $\lim f(x)=b$, $\lim\varphi(x)=c$, $c\neq0$. По теореме 1.14.1 имеем $f(x)=b+\alpha(x), \varphi(x)=c+\beta(x)$,

где $\alpha(x), \beta(x)$ – бесконечно малые. Тогда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{b+\alpha(x)}{c+\beta(x)}-\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\Rightarrow\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{b}{c}+\frac{c\alpha(x)-b\beta(x)}{c^2+c\beta(x)}.$$

Дробь $\dfrac{c\alpha(x)-b\beta(x)}{c^2+c\beta(x)}=\gamma(x)-$ бесконечно малая по теореме 1.12.5 (т.к. $\dfrac{\text{Б.М.}}{c^2\neq 0}$), тогда имеет место $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{b}{c}+\gamma(x)$, поэтому по теореме 1.14.2 $\lim\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim\varphi(x)}$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Найти предел функции $y=x^4+3x^2+4$ при $x\to 2$.

Решение:
$$\lim_{x\to 2}(x^4+3x^2+4)=\lim_{x\to 2}x^4+\lim_{x\to 2}3x^2+\lim_{x\to 2}4=$$
$$=[\lim_{x\to 2}x]^4+3[\lim_{x\to 2}x]^2+4=2^4+3\cdot 2^2+4=32.$$

Пример 3. Найти предел функции $y=\dfrac{3x+5}{4x-2}$ при $x\to 1$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+5}{4x-2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x-2)}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to 1}x+5}{4\lim\limits_{x\to 1}x-2}=4$.

Рассмотрим теперь случаи, когда нельзя применить теорему 1.14.5. Если при отыскании предела дроби $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ числитель и знаменатель стремятся одновременно к нулю или бесконечности, то будем говорить, что эта дробь представляет собой неопределенность вида $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ или соответственно $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$.

Нахождение предела такой дроби будем называть *раскрытием неопределенности* $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ и $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$.

Пример 4. Раскрыть неопределенность $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}=\left|\dfrac{0}{0}\right|$.

Решение: Преобразуем дробь для всех $x\neq 4$
$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=\frac{x-1}{x-2}\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1}{x-2}=\frac{3}{2}.$$

Пример 5. Раскрыть неопределенность

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Решение: Преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})}=\frac{5}{6}.$$

Вывод: при $x\to\pm\infty$ предел отношения двух многочленов одинаковых степеней равен отношению коэффициентов при старших степенях x. Если же степени многочленов не равны, то есть степень числителя меньше степени знаменателя, то предел равен нулю, если степень числителя больше степени знаменателя, то предел равен бесконечности.

Пример 6.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+6}{3x^2+4x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2})}{\lim\limits_{x\to-\infty}(3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})}=\frac{0}{3}=0.$$

Теорема 1.14.6 Пусть даны три функции $\varphi(x), f(x), g(x)$, удовлетворяющие неравенствам $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$ при $x\to+\infty$. Если $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$.

Доказательство: Действительно, т.к. $\varphi(x)$ и $g(x)$ имеют при $x\to+\infty$ пределом число b, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что при всех $x>N$ графики $y=\varphi(x)$, окажутся внутри полосы, ограниченной прямыми $y=b+\varepsilon$, $y=b-\varepsilon$. Но тогда и график $y=f(x)$ попадет внутрь полосы, то есть $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ (рисунок 1.19).

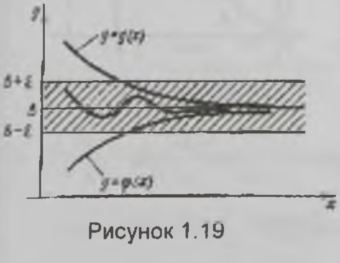


Рисунок 1.19

Теорема 1.14.7 Если функция $y=f(x)\ge 0$ для всех x и $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$, то предел $b\ge 0$.

Доказательство: Предположим противное, т.е. что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b < 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $x > N$ график функции $y = f(x)$ попадет внутрь полосы $y = b + \varepsilon, y = b - \varepsilon$. Возьмем ε такое малое, чтобы эта полоса лежала ниже оси OX, $\Rightarrow$ для всех $x > N$ график окажется ниже оси OX, т.е. значения $f(x)$ будут отрицательными. Но это противоречит тому, что $f(x) \geq 0$ для всех $x > N$. Итак, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \geq 0$.

1.15 Замечательные пределы. Натуральный логарифм

1.15.1 Замечательные пределы

Теорема 1.15.1 (Первый замечательный предел) Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ равен 1.

Доказательство: Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена при $x \to 0$.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окрестность единичного радиуса (рисунок 1.20). Дуга AC численно равна углу x (в радианах), а отрезок AB=sin x (т.к. AB/OA=sin x $\Rightarrow$AB=1·sinx). Т.к. $0 < AB < AC$, то $0 < \sin x < x$. Мы знаем, что при $x \to 0$ и $\sin x \to 0$,

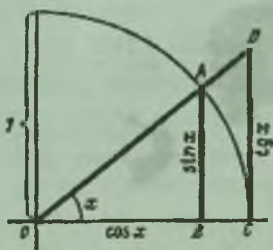


Рисунок 1.20

следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$. Т.к. $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, то

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}) = 1 - 2\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2} = 1 - 0 = 1.$$

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \left|\frac{0}{0}\right|$. Из рисунка видно, что площадь

$\Delta OAB <$ площади сектора $OAC <$ площади ΔODC. (1.15.1)

$$\left.\begin{aligned} S_{\Delta OAB} &= \frac{OB \cdot OA}{2} = \frac{\cos x \sin x}{2} \\ S_{OAC} &= \frac{1}{2}k^2 x = \frac{1}{2}1 \cdot x = \frac{x}{2} \\ S_{\Delta ODC} &= \frac{OC \cdot CD}{2} = \frac{1 \cdot tgx}{2} = \frac{tgx}{2} \end{aligned}\right\}.$$

подставим в (1.15.1):

$$\frac{\cos x \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tgx}{2} \Bigg| \cdot \frac{2}{\sin x} \Rightarrow$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ или } \frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > \cos x.$$

Эти неравенства верны и при $x > 0$, и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, т.к. функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ – четные. Вычислив $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \cos x} = 1$ получим $\underline{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$.

Этот предел называется *первым замечательным пределом*. С его помощью находятся многие другие пределы.

Примеры:

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Теорема 1.15.2 (второй замечательный предел)

Предел функции $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ равен *e* при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$ – *второй замечательный предел.*

С помощью этой формулы также вычисляются многие пределы:

Пример 3. Найти $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Решение: Пусть $\dfrac{1}{\alpha}=x$, тогда $x\to\infty$ при $\alpha\to 0$. Тогда

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пример 4: Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

Решение: Положим $x=2t$ при $x\to\infty$, $t\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right] =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

1.15.2 Натуральный логарифм

Определение 1.15.1 Логарифм числа x по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln x$:

$$\ln x = \log_e x.$$

Найдем связь между $\ln x$ и $\lg x$. Пусть $y=\ln x \Rightarrow x=e^y$, прологарифмируем по основанию 10:

$$\lg x = \lg e^y \Rightarrow \lg x = y\lg e \Rightarrow \lg x = \ln x\cdot\lg e.$$

Число $M=\lg e\approx 0.4343$ называется *модулем перехода* от натурального к десятичному логарифму: $\lg x\approx 0.4343\ln x$. Из этого видно, что $\ln x\approx\dfrac{1}{0.4343}\lg x\approx 2.3026\lg x$. Эти формулы дают связь между $\ln x$ и $\lg x$.

1.16 Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентность

Пусть $\phi(x)$ и $\psi(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to +\infty$. Рассмотрим предел отношения $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $\psi(x) \neq 0$.

Замечание Можно рассматривать $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0; $x \neq x_0$; точка x_0 может быть конечной и бесконечной.

Определение 1.16.1 Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *бесконечно малыми одного и того же порядка малости* при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ существует и не равен нулю, т.е.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = b \neq 0.$$

Определение 1.16.2 Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка малости,* чем функция $\psi(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$ или $\varphi(x)=0$, $(\psi(x))$, $x \to +\infty$, т.е. $\varphi(x)$ есть 0 – малое от $\psi(x)$ при $x \to +\infty$.

Определение 1.16.3 Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой более низкого порядка*, чем функция $\psi(x)$, если

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty.$$

Примеры:

1) Даны функции $\varphi(x)=x^2$; $\psi(x)=5x$.
   Функция $\varphi(x)$ более высокого порядка малости, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{5x} = \frac{1}{5} \lim\limits_{x \to 0} x = 0$, функция x^2 стремится к нулю быстрее чем $5x$; или $x^2=0$ $(5x)$, $x \to 0$.
2) Функции $\varphi(x)=x^2-4$; $\psi(x)=x^2-5x+6$ – бесконечно малые одного порядка малости при $x \to 2$ т.к.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)}{(x-3)} = \frac{4}{-1} = -4 \neq 0.$$

Определение 1.16.4 Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми*, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$. Из определения следует, что эквивалентные бесконечно малые имеют одинаковый порядок малости. Обозначаются $\varphi(x)\underset{x\to+\infty}{\approx}\psi(x)$.

Пример 3. Функции x, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, являются эквивалентными бесконечно малыми функциями при $x\to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{x}=1$.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – эквивалентные бесконечно малые функции при $x\to x_0$: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$ Тогда для значений x, близких к x_0 т.е. в окрестности точки x_0 – $U(x_0)$, имеет место $\varphi(x)\approx\psi(x)$. К числу таких эквивалентных функций относяться следующие:

$$\sin x\sim x,\ x\to 0;$$
$$\operatorname{tg} x\sim x,\quad x\to 0;$$
$$\arcsin x\sim x,\quad x\to 0;$$
$$\operatorname{arctg} x\sim x,\quad x\to 0;$$
$$e^x-1\sim x,\quad x\to 0;$$
$$a^x-1\sim x,\quad x\to 0;$$
$$\ln(1+x)\sim x,\quad x\to 0.$$

Так как $\sin x$ и x – эквивалентные бесконечно малые при $x\to 0$, то для x близких к нулю, $\sin\ x\approx x$. Этим обстоятельством широко пользуются, заменяя при малых x величину $\sin x$ на x.

Рассмотрим свойства эквивалентных функций.

Теорема 1.16.1 Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – бесконечно малые функции, и $\varphi(x)\sim\varphi_1(x)$ и $\psi(x)\sim\psi_1(x)$ при $x\to+\infty$. Если существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}=b$, то существует и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=b$ и оба эти предела равны между собой, т.е. предел отношения бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций.

Доказательство: Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}\cdot\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\cdot\frac{\psi_1(x)}{\psi(x)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi_1(x)}{\psi(x)}=1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\cdot 1=\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{tg\,3x}$.

Решение: Т.к. $\sin 5x \sim 5x$, $tg\,3x \sim 3x$ при $x\to0$, то

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{tg\,3x}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}.$$

Теорема 1.16.2 (Признак эквивалентности двух бесконечно малых величин) Для того, чтобы бесконечно малые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой функцией более высокого порядка малости, чем $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, т.е. чтобы $\varphi(x)-\psi(x)=\beta(x)=0\,\psi(x)$.

Доказательство: *Необходимость.* Пусть $\varphi(x)\sim\psi(x)$, тогда $\beta(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка. Действительно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)-\psi(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=1-1=0,$$

т.е. разность $\beta(x)$ – высшего порядка малости.

Аналогично $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta(x)}{\psi(x)}=0$.

Достаточность. Пусть, обратно, $\beta(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Докажем, что $\varphi(x)\sim\psi(x)$.

Действительно, т.к. $\beta(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, то $\varphi(x)=\beta(x)+\psi(x)\Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)+\psi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{\psi(x)}+1=0+1=1$$

$\Rightarrow\varphi(x)\sim\psi(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема 1.16.3 Сумма конечного числа бесконечно малых функций различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Доказательство: Рассмотрим сумму трех бесконечно малых при $x \to +\infty$:

$$F(x) = f(x) + \varphi(x) + g(x).$$

Пусть *f(x)* – бесконечно малая низшего порядка, т.е.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x) + \varphi(x) + g(x)}{f(x)} \right] = 1 + 0 + 0 = 1,$$

следовательно, сумма $F(x) \sim f(x)$.

1.17 Непрерывные функции. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва

Пусть функция $y=f(x)$ определена при некотором значении x_o и в некоторой окрестности $U(x_o)$ с центром в x_o. Пусть $y_o=f(x_o)$.

Определение 1.17.1 Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_o, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента $x - x_o = \Delta x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $y - y_o = \Delta y$ (рисунок 1.21), т.е. если

$$\lim_{x \to 0} \Delta y = \lim_{x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0.$$

Этому определению равносильно следующее:

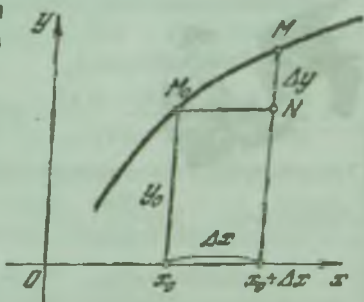


Рисунок 1.21

Определение 1.17.2 Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_o, если:

- функция определена в точке x_o и в некоторой её окрестности, содержащей эту точку – $U(x_o)$;
- функция имеет предел при $x \to x_0$: существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
- предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в точке x_o: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$.

Точка x_0 называется *точкой непрерывности* данной функции.

Часто приходится рассматривать непрерывность функции в точке x_0 справа или слева.

Пусть функция *y=f(x)* определена в точке x_0 в $U(x_0)$. Если $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то говорят, что функция *y=f(x)* непрерывна в точке x_0 справа; если $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной в точке x_0 слева.

Введем понятие точки разрыва.

Определение 1.17.3 Функция *f(x)* называется *разрывной* в точке x_0, если хотя бы одно из трех условий непрерывности не выполняется в данной точке, а сама точка x_0 называется *точкой разрыва* функции *y=f(x)*.

Различают следующие виды разрывов.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, причем $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, но функция *f(x)* в точке x_0 не определена, то точка x_0 называется точкой *устранимого* разрыва.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ в точке x_0 не существует, но существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, не равные друг другу, то точка x_0 – *точка разрыва первого рода.*

Если хотя бы один из односторонних пределов не существует (в частности, равен бесконечности), а следовательно, не существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода.*

Разрывы первого и второго рода неустранимы.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = 5x^3$.

Докажем, что она непрерывна в точке x_0=2; проверим все три условия.

Т.к. $f(x) = 5x^3$ определена на всей числовой оси, то первое условие выполняется: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 5x^3 = 5 \cdot 8 = 40$;

т.е. существует $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 40$.

Следовательно, $y = 5x^3$ непрерывна в точке x_0=2.

Пример 2. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & ,\text{если: } 0 \le x < 3 \\ 3-x & \phantom{,\text{если: }} 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

Эта функция определена во всех точках сегмента [0, 4] и ее значение $f(3)=0$. Однако в точке x=3 функция терпит разрыв, т.к. она не имеет предела при $x \to 3$: т.к. $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = 2$, а $\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = 0$, то

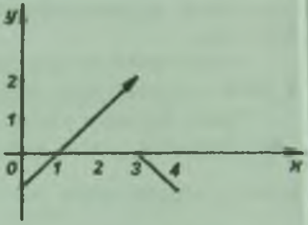


Рисунок 1.22

функция в точке x=3 имеет разрыв первого рода, т.к. односторонние пределы существуют. Следует заметить, что *f(x)* непрерывна во всех точках сегмента [0, 4], за исключением точки x=3 (рис. 1.22).

Пример 3. Функция $y=\dfrac{1}{x}$ и $y=\dfrac{1}{x^2}$ разрывные в граничной точке x=0 области определения функции (рисунок 1.23). Они не определены в этой точке: $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1}{x}$ и $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1}{x^2}$ не существуют ни слева, ни справа, т.к. эти функции при $x \to 0$ являются бесконечно большими. Таким образом, в точке x=0 функции $y=\dfrac{1}{x}$ и $y=\dfrac{1}{x^2}$ имеют разрыв второго рода.

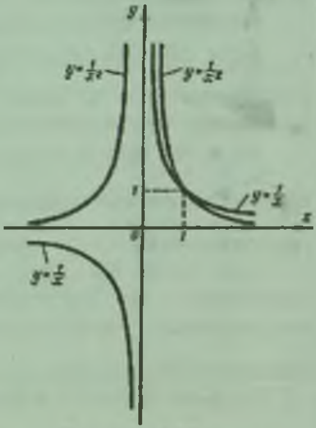


Рисунок 1.23

Пример 4. Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке x=0; точка x=0 является точкой разрыва первого рода, т.к. существуют пределы: $\lim\limits_{x \to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x \to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Если доопределить функцию $\dfrac{\sin x}{x}$ в точке x=0, полагая *f(0)*=1, то получим непрерывную функцию: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ если $x\neq 0$, $f(0)=1$. Таким образом, точка $x_0=0$ является точкой устранимого разрыва.

Определение 1.17.4 Пусть точка x_0 – точка разрыва первого рода. *Скачком* функции в точке x_0 называют разность

$$\left[f(x_0+0)-f(x_0-0)\right];\quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)-\lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Так, функция в примере 2 имеет в точке $x_0=3$ скачок, равный $0-2=-2$.

Отметим теперь одно свойство функции, непрерывной в точке. Если непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в точке x_0 положительное (отрицательное) значение, то она остается положительной (отрицательной) во всех точках некоторой окрестности точки x_0.

1.18 Операции над непрерывными функциями. Непрерывность элементарных функций

Если над непрерывными функциями производить операции сложения, умножения и деления, то полученные в результате этого функции являются непрерывными.

Теорема 1.18.1 Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма, разность и произведение также непрерывны в точке x_0. Если, кроме того, $\psi(x)\neq 0$, то функция $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство: Докажем непрерывность произведения $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$. В точке x_0 функция $f(x)$ определена, так как φ и ψ – непрерывны, причем $f(x_0)=\varphi(x_0)\cdot\psi(x_0)$. Из непрерывности функции в точке x_0 следует, что $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$, $\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\psi(x_0)$, отсюда по теореме о пределе произведения получим:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left[\varphi(x)\psi(x)\right]=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\varphi(x_0)\psi(x_0)=f(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0).$$

Итак, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, что и требовалось доказать.

Аналогичны остальные утверждения. Теорема обобщается на любое конечное число слагаемых или сомножителей.

Следствие 1 Все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x, для которых они определены.

Ясно, что $y = C$ непрерывна на всей числовой оси.

Функция $y = x$ также непрерывна во всей области определения, т.е. на числовой оси.

Поэтому функция $y = Cx^n$,

где n – целое положительное число,
также непрерывна на числовой оси, как произведение непрерывных функций $Cx^n = C \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n}$.

Многочлен $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ – непрерывная функция, как сумма непрерывных функций.

Далее, любая рациональная функция $y = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ непрерывна во всех точках, кроме тех, где $\psi(x) = 0$.

Пример 1. Функция $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$ непрерывна во всех точках, кроме $x = \pm 1$.

Теорема 1.18.2 Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0. То есть, сложная функция, образованная из двух непрерывных функций, есть непрерывная функция.

Доказательство: Достаточно установить, что $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\varphi(x_0)]$. Действительно, в силу непрерывности $u = \varphi(x)$ имеем:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0,$$

т.е. при $x \to x_0$ функция u стремится к u_0. Поэтому, по непрерывности $f(u)$ имеем:

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f[\varphi(x_0)],$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.

Сложная функция $y=\sin(x^3+4x-2)$ непрерывна для всех x, т.к. функции $y=\sin u$ и $y=\sin(x^3+4x-2)$ всюду непрерывны.

Сложная функция $y=\ln(1-x^2)$ непрерывна для всех x, удовлетворяющих неравенству $1-x^2>0$, т.е. в интервале $(-1,+1)$.

Следствие 2 Всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих ее области определения. (Вытекает из теорем 1 и 2.) Этот результат позволяет легко находить предел элементарной функции при $x\to x_0$, если функция определена в точке $x=x_0$. Для этого достаточно вычислить значение функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0).$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} 5^{tgx} = 5^{tg\frac{\pi}{4}} = 5^1 = 5$, т.к. функция 5^{tgx} определена в точке $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Замечание Рассмотрим два предела, которые понадобятся в дальнейшем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \left|\frac{0}{0}\right|.$$

Сделаем преобразование:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x} = l$$

т.к. логарифмическая функция непрерывна, то можно перейти к пределу под знаком функции $l=\log_a\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]=\log_a e$, т.е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

В частности при $a=e$ отсюда следует

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln_a(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left|\frac{0}{0}\right|.$$

Сделаем замену $a^x - 1 = t \Rightarrow x = \log_a(t+1)$; при $x \to 0$, $t \to 0$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(t+1)}{t}} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(t+1)}{t}} = \frac{1}{\log_a e},$$

а т.к. $1 = \log_a a = \log_a e \cdot \ln a$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

В частности, следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$.

1.19 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение 1.19.1 Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках отрезка, а на концах отрезка, т.е. в точках a и b, непрерывна справа (в точке a) и слева (в точке b), соответственно $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)$.

Теорема 1.19.1 (Вейерштрасса) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $a \le x \le b$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

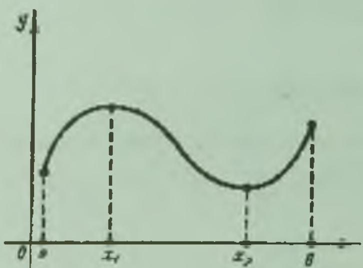


Рисунок 1.24

Теорема утверждает, что на $[a, b]$ найдется такая точка x_1, что значение $f(x)$ в этой точке будет наибольшим: $f(x_1) \ge f(x)$ для любого $x \in [a, b]$.

Аналогично, на $[a, b]$ найдется точка x_2 такая, что значение $f(x)$ в этой точке будет наименьшим: $f(x_2) \le f(x)$ для $\forall x \in [a, b]$.

Иначе говоря, существуют $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)=f(x_2)$ и $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)=f(x_1)$ (рисунок 1.24).

Замечание Утверждение теоремы делается неверным, если заменить отрезок $[a,b]$ на интервал (a,b), например, функция $y=5x$, непрерывная в интервале $(0,1)$, не достигает в этом интервале наибольшего значения, так как точка $x=1\notin(0,1)$. Эта функция не принимает также и наименьшего значения в $(0,1)$.

Таким образом, условие непрерывности на замкнутом отрезке существенно.

Теорема 1.19.2 (II теорема Вейерштрасса) Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует $C=const>0$, что $|f(x)|\le C$ для всех $x\in[a,b]$.

Доказательство: Пусть M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда для любых $x\in[a,b]$ верно $m\le f(x)\le M$. Пусть $C=\max\{|m|,|M|\}$. Тогда $|f(x)|\le C$, т.е. $f(x)$ ограничена на $[a,b]$.

Следствие. Для непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$ существуют конечные точные нижняя и верхняя грани функции на $[a,b]$:

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)\le \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Теорема 1.19.3 (Больцано-Коши) Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает значения $f(a)\ne f(b)$ разных знаков, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка $x=c$, в которой функция равна нулю $f(c)=0$.

Геометрический смысл: график непрерывной функции $y=f(x)$, соединяющий точки $M_1(a,f(a))$, $M_2(b,f(b))$, где $f(a)>0$, $f(b)<0$, пересекает ось абсцисс хотя бы в одной точке сегмента $[a,b]$.

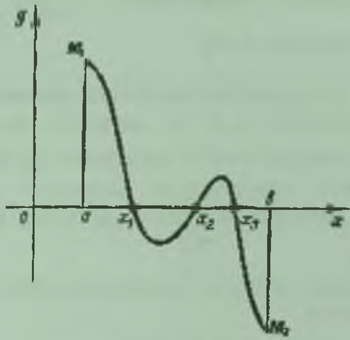


Рисунок 1.25

Здесь три точки x_1, x_2, x_3, где (рисунок 1.25)

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0.$$

Теорема 1.19.4 (Больцмано-Коши обобщенная) Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$ $(A \neq B)$. Тогда для любого числа C, заключенного между A и B, найдется внутри отрезка $[a, b]$ такая точка $x = c$, что $f(c) = C$.

Геометрически теорема очевидна: рассмотрим график $y = f(x)$ на $[a, b]$. Пусть $f(a) = A$, $f(b) = B$ $(A \neq B)$. Тогда прямая $y = C$, где C – любое число $A < C < B$, пересечет график $f(x)$ по крайней мере в одной точке. Таким образом, непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно проходит через все промежуточные значения (рисунок 1.26).

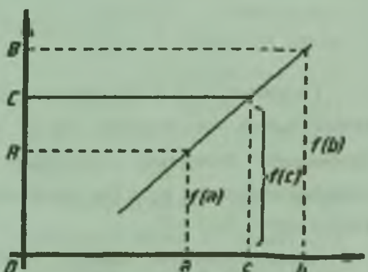


Рисунок 1.26

Замечание: Если функция на сегменте $[a, b]$ имеет хотя бы одну точку разрыва, то утверждения теорем 1.19.2 и 1.19.3 перестают быть верными.

Пример 1. Дана функция $y = \dfrac{1}{x}$ на сегменте $[-1, 1]$.

$f(1) = 1 > 0$; $f(-1) = -1 < 0$, однако нет точки, в которой $\dfrac{1}{x} = 0$, т.к. имеется точка разрыва $x = 0 \in [-1, 1]$ функции $y = \dfrac{1}{x}$.

ГЛАВА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1 Производная

2.1.1 Задачи, приводящие к понятию производной

1. Мгновенная скорость

Пусть материальная точка движется по прямой в одном направлении по закону $S = f(t)$,

где t – время,

S – путь, проходимый точкой за время t.

Отметим некоторый момент времени t_0. К этому моменту точка прошла путь $S_0 = f(t_0)$.

Поставим задачу определить скорость v_0 движения материальной точки в момент t_0. Рассмотрим для этого какой-нибудь другой момент времени $t = t_0 + \Delta t$. (Δt – приращение времени). Ему соответствует пройденный путь $S = f(t_0 + \Delta t)$. Тогда за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ точка прошла путь $MM_1=\Delta S$. $\Delta S = S - S_0 = f(t + \Delta t) - f(t_0)$ (рисунок 2.1).

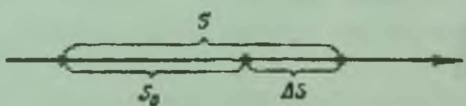


Рисунок 2.1

Величина $v_{ср} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ – есть *средняя скорость* движения за время Δt.

Пусть начальный момент времени t_0 - фиксирован, и промежуток Δt – переменная величина, тогда $v_{ср}$ является переменной величиной, зависящей от Δt.

Скоростью v_0 точки M в данный момент времени t_0 называется предел средней скорости $v_{ср}$ при $\Delta t \to 0$,

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 - \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \qquad (2.1.1)$$

Таким образом, чтобы найти скорость v_0 в данный момент времени t_0, необходимо вычислить $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t_0 - \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

2. Плотность распределения массы

Пусть дан тонкий прямолинейный неоднородный стержень длиной L. Определим плотность в любой его точке. Пусть стержень расположен на оси OX, причём один из его концов совпадает с точкой O, тогда любой точке стержня соответствует определенное значение x. Обозначим m – массу отрезка стержня $m=f(x)$ – между точками O и x: OM_1. Рассмотрим две точки: фиксированную x_0 и переменную точку $x = x_0 + \Delta x$. Отрезок между ними – M_0M_1 имеет длину Δx и массу $\Delta m = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Тогда отношение $\delta_{ср} = \dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ называется средней плотностью стержня на отрезке от точки x_0 до $x_0 + \Delta x$. Плотностью δ_0 стержня в точке x_0 называется предел средней плотности при $\Delta x \to 0$:

$$\delta_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2.1.2)$$

3. Сила тока

Пусть $Q = f(t)$ – количество тока, проходящего через сечение провода за время t.

$\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = J_{ср}$ – средняя сила тока, за $[t, t + \Delta t]$.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = Q' = J$ – сила тока в момент t.

Рассмотренные задачи привели нас к нахождению предела одного и того же вида: пределу отношения приращения функции к приращению аргумента.

2.1.2 Определение производной и ее механический смысл

Определение 2.1.1 *Производной функции* $y = f(x)$ в точке x_0 находится предел отношения приращения функции Δy в этой точке к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю.

Производная функции в точке x_0 обозначается $f'(x)$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2.1.3)$$

Для одной и той же функции $f(x)$ производную можно вычислить в различных точках x. Пусть M – множество всех таких значений x. Правило по которому каждому x принадлежащему M соответствует производная в этой точке $f'(x)$, представляет собой новую функцию, определенную на множестве M. Эта функция называется производной от функции $f(x)$ и обозначается $f'(x)$ $(y', y'(x), [f(x)]')$.

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 является значением функции $f'(x_0)$ в точке x_0.

Пример 1. Найти производную $y = x^2$ в точке x=2.

Решение: Находим $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$.

Считая x – фиксированным по определению, находим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x,$$

т.е. $(x^2)' = 2x$ – определена по всей числовой оси.

$$y'(2) = (x^2)'\Big|_{x=2} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Определение 2.1.2 Процесс нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Легко заметить, что каждый из пределов, которые были получены при решении задач *1* и *2*, есть производная.

В первой задаче $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$, т.е. скорость v прямолинейно движущейся точки M в момент t есть производная от пути S по времени t.

Это и есть механический смысл производной.

Аналог во второй задаче $\delta_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta x} = m'(x)$ – плотность δ в точке x прямолинейного стержня есть производная от массы m по длине x.

2.1.3 Геометрический смысл производной

Для выяснения геометрического смысла производной введем определение касательной к кривой в данной точке.

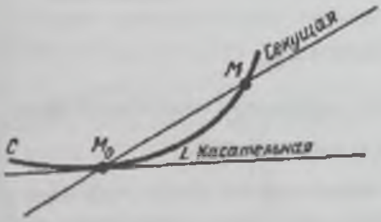


Рисунок 2.2

Пусть имеем кривую $Г$ и на ней фиксируем точку M_o (рисунок 2.2). Рассмотрим другую точку M этой кривой и проведем секущую M_oM. Если точка M начинает перемещаться по кривой $Г$ к точке M_o, то секущая M_oM занимает различные положения M_oM_1 и т.д.

Пусть хотя бы одна прямая L проходит через точку M_o, обладающей следующим свойством:

Если точка M при перемещении её по прямой $Г$ неограниченно приближается к точке M_o (с любой стороны), то угол между L и секущей M_oM стремиться к нулю. Тогда эта прямая L называется касательной к кривой $Г$ в точке M_o, т.е. касательная есть предельное положение секущей.

Рассмотрим непрерывную функцию $y = f(x)$ и соответствующую этой функции кривую в прямоугольной системе координат (рисунок 2.3). Найдем угловой коэффициент касательной $k = tg\,\alpha$, α – угол касательной. Для этого проведем секущую M_oM. Ее угловой коэффициент $k_{сек} = tg\,\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. При $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ так же (по непрерывности), следовательно, точка M неограниченно приближается к точке M_o. При этом секущая неограниченно приближается к касательной L, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \beta = \alpha, \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\beta = tg\,\alpha.$$

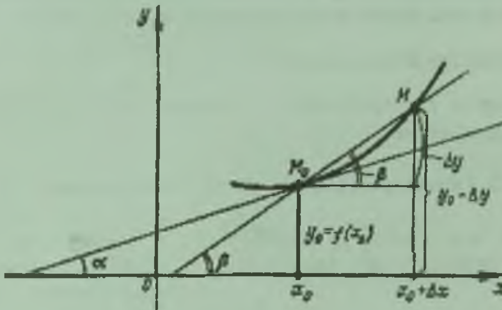


Рисунок 2.3

Следовательно, угловой коэффициент касательной равен:

$$k = tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\beta = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_o).$$

т.е. угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равен значению производной этой функции в точке x_0:

$$k_{кос} = f'(x_0)\,. \qquad (2.1.4)$$

Пример 2. Найти угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2$ в точке $M_0(2;\,4)$

Решение: в примере 1 видели, что

$$\left(x^2\right)'\Big|_{x=2} = 2x\big|_{x=2} = 2\cdot 2 = 4\,;$$

Следовательно, $k = tg\,\alpha = y'\big|_{x=2} = 4 \Rightarrow$ уравнение касательной $y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = 4(x-2) \Rightarrow 4x - y - 4 = 0$.

Замечание 1 Если в формуле (2.1.3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ предполагается, что $\Delta x \to 0$, принимает только положительные значения: $\Delta x > 0$, соответственно предел (если существует) называется *правой производной* от f в точке $x \Rightarrow f'_{пр}(x)$.

Аналогично, предел при $\Delta x \to 0$ $(\Delta x < 0)$ называется *левой производной* от f в точке $x \Rightarrow f'_{лев}(x)$.

Для вычисления $f'_{лев}(x)$, $f'_{пр}(x)$ необходимо, чтобы f была задана в точке x справа и слева, т.е. в окрестности точки x справа и слева.

Типичными являются случаи, когда f задана на участке $[a, b]$ и имеет во всех внутренних точках (a, b) производную, в точке a – $f'_{пр}(a)$, в точке $b \Rightarrow f'_{лев}(b)$. В таких случаях говорят, что f имеет производную на отрезке $[a, b]$.

Замечание 2

Если функция имеет правые и левые производные в точке x и $f'_{лев}(x) = f'_{пр}(x)$, то f имеет имеет производную в точке x: $f'_{лев}(x) = f'_{пр}(x) = f'(x)$, а график функции $Г$ в соответственной точке имеет касательную с угловым коэф-фициентом $k = tg\,\alpha = f'(x)$ $(-\pi/2 < \alpha < \pi/2)$.

Если же $f'_{лев}(x)$ и $f'_{пр}(x)$ существуют, но не равны друг другу: $f'_{лев}(x) \neq f'_{пр}(x)$, то производная в точке x не существует. В этом случае касательная к $Г$ в точке A не существует, но существуют правая и левая касательные с разным угловым коэффициентом.

$$tg\alpha_1 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f_{лев}{}'(x_o); \quad tg\alpha_2 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f_{пр}{}'(x_o).$$

2.2 Дифференцируемость функций

Определение 2.2.1 Функция $y = f(x)$, имеющая конечную производную в точке x_0, называется *дифференцируемой в этой точке*.

Определение 2.2.2 Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в интервале* (a, b), если она дифференцируема в любой точке этого интервала. Например, функция $y = x^2$ – дифференцируема в интервале $(-\infty, +\infty)$, т.е. на всей числовой прямой.

Теорема 2.2.1 Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство: Пусть приращение аргумента функции $\Delta x \neq 0$. Ему соответствует некоторое приращение функции Δy:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0 .$$

Следовательно, (по определению непрерывной функции) функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Следствие 1 В точках разрыва функция не может иметь производной.

Обратная теорема неверна: существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках не являются дифференцируемыми.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y=|x|$ (рисунок 2.4). В точке $x=0$ функция $f(x) = |x|$ – непрерывная, т.к.

1) $f(0) = |0| = 0$;

2) $\lim f(x) = \lim |x| = \lim |3| = 0$;ъ

3) $\lim f(x) = f(0) = 0$;

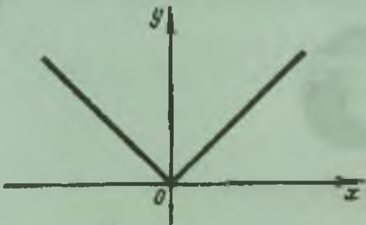


Рисунок 2.4

Найдем теперь производную от $y=|x|$:

т.к. $\Delta x = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, то для $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}$.

1) Если $x > 0 \Rightarrow x + \Delta x > 0$, $\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ ($x > 0$).

2) Если $x < 0 \Rightarrow x + \Delta x < 0$, для достаточно малых Δx

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-(x+\Delta x)-(x)}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1 \ (x<0)$$

Таким образом, $|x|' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, x>0 \\ -1, x<0 \end{cases}$.

Пусть теперь $x = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = sign\Delta x$; $\frac{\Delta x}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \Delta x>0 \\ -1, x<0 \end{cases}$.

Поэтому $\lim\limits_{\substack{x \to 0+0 \\ x>0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0-0 \\ x<0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$; т.е. функция $|x|$ в точке x=0 имеет $f'_{пр} = 1$; $f'_{лев} = -1$, не равные, значит, что при $\Delta x \to 0$, y=$|x|$ в x=0 предела не имеет, $f'(x)\big|_{x=0}$ не существует.

Геометрически в точке x=0 график функции не имеет касательной.

2.3 Производные некоторых основных элементарных функций

Теорема 2.3.1 Пусть $y = C$ (C – постоянная функция). Производная постоянной равна нулю. Следовательно,

$$C' = 0. \tag{2.3.1}$$

Доказательство: При всех x, $y = f(x) = C \Rightarrow$ любому приращению аргумента Δx соответсвует $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0 \Rightarrow C' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$, т.е. $C' = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.3.2 Производная степенной функции $y = x^n$, где n – натуральное число, равна nx^{n-1}, т.е.

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}. \tag{2.3.2}$$

Доказательство: Пусть x – любая выбранная точка; Δx и Δy – приращения аргумента и функции в этой точке. Тогда по формуле бинома Ньютона:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots$$

$$+(\Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right] = nx^{n-1}$$

Теорема 2.3.3 Производная логарифмической функции $y = \log_a x$ равна

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x}\ln a. \qquad (2.3.3)$$

Доказательство: Возьмем любое x из области определения логарифмической функции и дадим ему приращение Δx, $\Rightarrow$ $y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) \Rightarrow$

$(\log_a x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$ $\Rightarrow$ сделаем следующее преобразование $\Rightarrow$ $\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$;

обозначим через α=$\Delta x \Rightarrow \alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\right] = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta\alpha\to 0}\log_a(1+\alpha)^{1/\alpha} = \frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{\Delta\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right) = \frac{1}{x}\log_a e,$$

но так как $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$ $\Rightarrow$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\ln a$, что и требовалось доказать.

В частности, при $a = e$ получим:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (2.3.4)$$

Теорема 2.3.4 Производная от $\sin x$ есть $\cos x$,

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{2.3.5}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{2.3.6}$$

Доказательство: Пусть Δx – приращение произвольного аргумента функции $y = \sin x \Rightarrow$

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin\ x = 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} = \Rightarrow$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$(\sin\ x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

Аналогично выводится для $(\cos x)'$ (самостоятельно).

2.4 Основные правила дифференцирования

Теорема 2.4.1 Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций:

$$(u+v)' = u' + v'. \tag{2.4.1}$$

Доказательство: Рассмотрим функцию

$$y = f(x) = u(x) + v(x).$$

Приращению Δx аргумента x соответствуют:
$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$; $\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x)$. Тогда y получит приращение $\Rightarrow$

$$\Delta y = \Delta(u+v) = f(x+\Delta x) - f(x) = [u(x+\Delta x) - u(x)] -$$

$$-[v(x+\Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v.$$

Следовательно

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Итак $(u+v)' = u' + v'$, что и требовалось доказать.

Пример 1.
$$y' = \left(x^3 + \sin x + \ln x\right)' = \left(x^3\right)' + (\sin x)' + (\ln x)' =$$
$$= 3x^2 + \cos x + \frac{1}{x}.$$

Теорема 2.4.2 Производная от произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первой функции на вторую плюс произведение первой функции на производную от второй функции, т.е. если $y=uv$, то
$$(uv)' = u'v + uv'. \qquad (2.4.2)$$

Доказательство: Пусть $y = f(x) = u(x)\cdot v(x)$.

Приращению Δx соответствуют приращения Δu, Δv, Δy, причем
$$\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - u\cdot v = v\cdot\Delta u + u\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v \Rightarrow$$
$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\Delta u + u\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot u\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v\right);$$

т.к. u и v не зависят от $\Delta x \Rightarrow$
$$\Delta y = \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)v + \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)u + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = u'v + uv' + 0$$

(т.к. v - дифференцируема и непрерывна, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$).

Следовательно, $(uv)' = u'v + uv'$, что и требовалось доказать.

Следствие 1 Постоянный множитель можно вынести за знак производной.
$$(Cv)' = Cu'. \qquad (2.4.3)$$

Доказательство: Пусть v=C=$const$; тогда по формуле (2.4.2) x $\Rightarrow$ $(Cu)' = C'u + Cu' = 0\cdot u + Cu' = Cu'$.

В частности:
$$(-u)' = -u'. \qquad (2.4.4)$$

Тогда производная разности 2-х функций:
$$(u-v)' = u' - v'. \qquad (2.4.5)$$

Замечание Формулу 2.4.2 можно обобщить только на случай любого конечного числа n -сомножителей.

Пример 2. $n = 3 \Rightarrow$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'. \tag{2.4.6}$$

Действительно,

$$([uv] \cdot w)' = [uv]' \cdot w + [u \cdot v] \cdot w' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

Теорема 2.4.3 Если в данной точке x функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы и $v(x) \neq 0$, то дифференцируемо и их частное u/v, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{2.4.7}$$

Доказательство: Δx, Δv, Δu – приращения u и v. Тогда:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$ следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v) \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

что и требовалось доказать ($\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$ в силу дифференцируемости и непрерывности v).

Теорема 2.4.4 Производная от функции $y = tg\, x$ есть $\frac{1}{\cos^2 x}$:

$$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{2.4.8}$$

$$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{2.4.9}$$

Доказательство: $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\Rightarrow$ по формуле (2.4.7) имеем:

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

при этом $v = \cos x \neq 0$ для любых x, принадлежащих области определения tg x.

Аналогично для y=ctg x по формуле (2.4.9) самостоятельно.

2.5 Производная сложной функции

Пусть имеется сложная функция $y = f(Y(x))$, которую можно подставить как $y = f(u)$,
где $u = Y(x)$ – промежуточный аргумент.

Теорема 2.5.1 Если функция $u = Y(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке u, то сложная функция $y = f(Y(x))$ в данной точке x имеет y'_x, которая находится по следующей формуле:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x . \qquad (2.5.1)$$

т.е. производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную по x промежуточного аргумента.

Доказательство: Пусть приращению Δx соответствует Δu $\Delta u = Y(x+\Delta x) - Y(x)$ и Δy, причем при $\Delta x \to 0$, будет $\Delta u \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Пусть при $\Delta x \to 0$, $\Delta u \neq 0$, тогда имеет место тождество:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} . \qquad (2.5.2)$$

Переходя к пределу в формуле 2.5.2 при $\Delta x \to 0 \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x ,$$

и окончательно $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, что и требовалось доказать.

Формула 2.5.1 верна и при $\Delta u = 0$.

Пример 1. Дана функция $y = \sin x^3$. Найти y'_x.

Решение: Пусть $u = x^3$, тогда $y = \sin u$. По формуле 2.5.1:

$$y'_x = (\sin u)'_u \cdot (x^3)'_x = \cos u \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot \cos x^3 .$$

Сложная функция может быть составлена из большого количества звеньев. В таких случаях величина, над которой совершается последнее действие, принимается за промежуточный аргумент u.

Пример 2. Дана функция $y=\sin\left[(\ln x)^3\right]$. Найти y'_x.

Решение: $y=\sin u$, $u=(\ln x)^3=v^3$; $v=\ln x$.

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=\cos u\cdot 3v^2\cdot\frac{1}{x}=\cos u\cdot 3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=\cos\left[(\ln x)^3\right]\cdot 3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}=\frac{3}{x}(\ln x)^2\cos\left[(\ln x)^3\right]\Rightarrow$$

$$y'_x=\frac{3}{x}(\ln x)^2\cos\left[(\ln x)^3\right]$$ определено при $x>0$.

При достаточном навыке промежуточные буквы можно не вводить. Например:

$$\left(\sin x^3\right)'=\cos x^3\cdot\left(x^3\right)'=3x^2\cdot\cos x^3$$

$$\sin\left[\ln\left(x^3\right)\right]'=\cos\left[(\ln x)^3\right]=\cos\left[(\ln x)^3\right]3(\ln x)^2(\ln x)'=$$

$$=\cos\left[(\ln x)^3\right]3(\ln x)^2\frac{1}{x}'.$$

2.6 Обратная функция и ее дифференцирование

2.6.1 Понятие об обратной функции

Рассмотрим непрерывную возрастающую функцию $y=f(x)$ с областью определения D и множеством значений L. Пусть эта функция такова, что каждому значению $y\in L$ соответствует единственное значение $x\in D$, тем более, что $y=f(x)$ на множестве L этим определяется функция $x=f^{-1}(y)=\varphi(y)$ $y\in Z$, множество значений которой есть область D. Это функция называется *обратной* по отношению к $y=f(x)$ и обозначается $x=f^{-1}(y)$. Очевидно, что для функции $x=f^{-1}(y)$ обратной является $y=f(x)$. Поэтому они называются *взаимно обратными*. Функция $y=f(x)$ и

$x = f^{-1}(y)$ выражают одну и ту же связь между переменными. Но в первом случае x – независимая переменная, y – функция, а во втором случае наоборот: y – независимая переменная, а x – функция (рисунок 2.5).

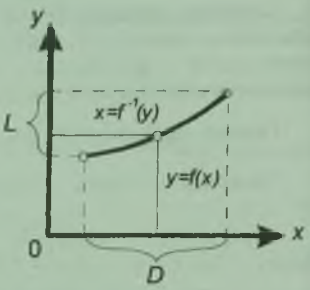


Рисунок 2.5

Замечание 1 Некоторые функции не имеют обратных, например, $y = x^2$. Если рассматривать данную функцию на всей числовой оси, то она не имеет обратной функции, т.к. каждому значению $y > 0$ соответствуют два значения x: $x = \sqrt{y}$; $x = -\sqrt{y}$; если же рассматривать $y = x^2$ на $0 \le x < +\infty$,то она имеет обратную $x = \sqrt{y}$, т.к. каждому значению y соответствует единственное значение x ($0 \le x < +\infty$), удовлетворяющее уравнению $y = x^2$. Аналогично на интервале $-\infty < x \le 0$ $y = x^2$ имеет обратную $x = -\sqrt{y}$. Какова должна быть функция, чтобы существовала обратная ей функция? Для этого введем понятие монотонной на отрезке (интервале) функции.

Определение 2.6.1 Функция $y = f(x)$, заданная на [a, b] ((a, b)) называется *монотонной* на [a, b], если она является только возрастающей или только убывающей на [a, b].

Замечание 2 Строго убывающая непрерывная на [a, b] функция $f(x)$, имеет обратную строго убывающую непрерывную функцию на [A, B], где $B = f(a)$, $A = f(b)$ $(y = f(-x))$.

Если непрерывная на $[a, b]$ функция не является монотонной строго на [a, b], то можно определить для неё обратную функцию, но она уже будет *многозначной* для некоторых y.

Необходимое условие монотонности:

Пусть $D = [a, b]$; $L = [A, B]$, $y = f(x)$ строго возрастает на

$[a, b]$. Тогда функция $x = f^{-1}(y)$ – строго возрастает на $[A, B]$ и отображает $[A, B] \to [a, b]$.

Выполняются тождества:

$f\left[f^{-1}(y)\right] = y$, $\forall\ y \in [A, B]$

$f\left[f(x)\right] = x$, $\forall\ x \in [a, b]$.

Таким образом мы установили справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.6.1 (о существования обратной функции) Пусть функция $y = f(x)$ – непрерывна на $[a, b]$, строго возрастает и $A = f(a)$, $B = f(b)$; тогда:

1) образ отрезка $[a, b]$ при помощи f есть отрезок $[A, B]$;

2) существует обратная к f функция $x = f^{-1}(y)$ однозначная, строго возрастающая и непрерывная на $[A, B]$.

Без доказательства.

Практически, чтобы найти обратную, необходимо разрешить уравнение $y = f(x)$ относительно x.

Пример 1. $y = \dfrac{2x+3}{x-5}$. Найти обратную функцию.

$$y = \frac{2x+3}{x-5} \Rightarrow (x-5)y = 2x+3 \Rightarrow x(y-2) = 5y+3 \Rightarrow x = \frac{5y+3}{y-2}.$$

Замечание 3 Возвращаясь к обозначению независимой переменной через x, а функции через y, можно записать $y = f^{-1}(x)$.

2.6.2 Производная обратной функции

Теорема 2.6.2 Если для функции $y = f(x)$ существует обратная функция

$$x = f^{-1}(y) = Y(y), \tag{2.6.1}$$

которая в рассматриваемой точке y имеет производную $Y'(y) \neq 0$, то в соответствующей точке x функция $y = f(x)$ имеет производную

$$f'(x) = \frac{1}{Y'(y)}; \quad Y'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{2.6.2}$$

Доказательство: Т.к. по условию функция $x = Y(y)$ – монотонна и дифференцируема (непрерывна), то по теореме 2.6.1 о существовании обратной функции, функция $y = Y^{-1}(x) = f(x)$ существует, монотонна и непрерывна. Дадим x приращение $\Delta x \neq 0 \Rightarrow$ функция $y = f(x)$ получает $\Delta y \neq 0$ (в силу монотонности). Кроме того, при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Следовательно, $$[f(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} \right) = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

что и требовалось доказать.

Формулу можно записать в виде

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \text{ и наоборот } x'_x = \frac{1}{y'_y} \qquad (2.6.3)$$

2.7 Обратные тригонометрические функции и их производные

2.7.1 y = arcsin *x*

Если рассмотреть функцию $y = \sin x$ на всей числовой оси $(-\infty < x < +\infty)$, то она не имеет обратной, т.к. одному значению y, $-1 \leq y \leq 1$, соответствует множество значений x: $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Например для $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6}$, $x_3 = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, … (рисунок 2.6).

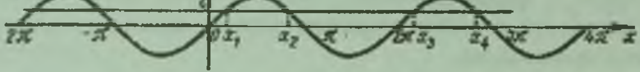


Рисунок 2.6

Если же функцию $y = \sin x$ рассмотреть только на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ то на нем функция $y = \sin x$ – непрерывна и возрастает, следовательно, имеет обратную функцию $x = \arcsin y$; обозначим независимую переменную через x, а функцию через $y \Rightarrow$ $y = \arcsin x$, график который симметричен с графиком $y = \sin x$ относительно прямой $y = x$; $y = \arcsin x$ определена на [-1, 1] и принимает значения $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ (рисунок 2.7).

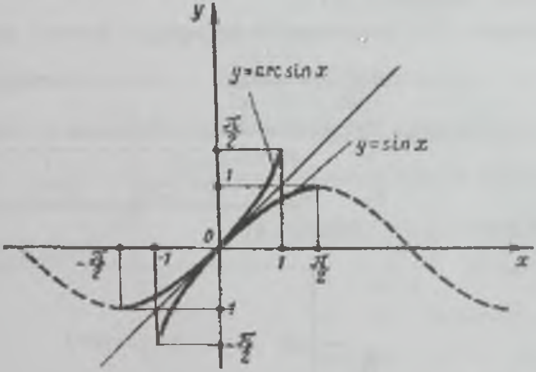


Рисунок 2.7

Теорема 2.7.1 Производная от функции $y = \arcsin x$ равна

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (2.7.1)$$

Доказательство: Рассмотрим обратную функцию $x = \sin y$; эта функция в интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ монотонна и дифференцируема и ее производная $x'_y = \cos y \ne 0$. Следовательно, по формуле 2.6.3 получим $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos x}$, но

$\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y} = +\sqrt{1-x^2}$, т.к. $\cos y \geq 0$ в $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, следовательно, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, что и требовалось доказать.

2.7.2 y = arccos *x*

Эта функция обратная по отношению к $y = \cos x$, рассмотренной на [0, π]; $y = \cos x$ на [0, π] убывает, функция $y = \arccos x$ определена на $[-1, 1] = D$, а ее значения принадлежат отрезку $[0, \pi] = L$.

Теорема 2.7.2 Производная от функции $y = \arccos x$ равна

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.7.2}$$

Доказательство: Рассмотрим обратную функцию $x = \cos y$ $\Rightarrow x'_y = -\sin y \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т.к. $\sin x \geq 0$ для $0 \leq y \leq \pi$ (рисунок 2.8).

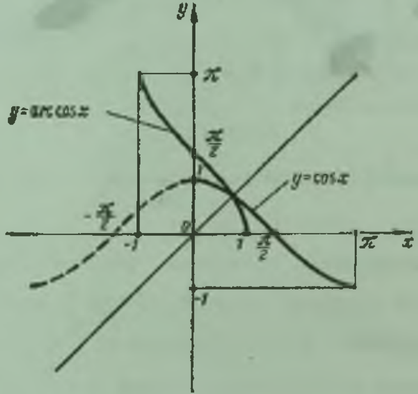


Рисунок 2.8

2.7.3 y = arctg x

Эта функция обратная к $y = \operatorname{tg} x$, рассматриваемой на $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена на всей числовой оси, а ее значения принадлежат $L = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, при этом $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Теорема 2.7.3 Производная от функции $y = \operatorname{arctg} x$ равна

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{2.7.3}$$

Доказательство: Рассмотрим обратную функцию $x = \operatorname{tg} y$, которая монотонна и дифференцируема, $(-\infty < x < +\infty)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; Тогда производная $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$, следовательно, по формуле 2.6.3 получим $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 x$.

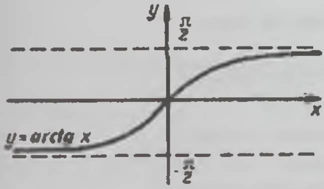


Рисунок 2.9

Но $\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$, $\Rightarrow$ $y'_x = \frac{1}{1+x^2}$ или $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ что и требовалось доказать (рисунок 2.9).

2.7.4 y = arcctg x

Эта функция обратная к функции $y = \operatorname{ctg} x$, если ее рассматривать на $(0, \pi)$; функция $y = \operatorname{arcctg} x$ определена на всей числовой оси, причем $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=A,$$

но $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\Rightarrow$ существует $f'(x)=A$.

Если $y=f(x)$ имеет в точке x производную, то она имеет в этой точке дифференциал $\mathrm{d}y$.

Доказательство (достаточность): Пусть $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$ Отношешие $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для малых $\Delta x\to 0$ стремится к $f'(x)$, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\beta(\Delta x), \tag{2.10.4}$$

где $\beta(\Delta x)$ – бесконечно малая функция Δx, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta x)=0$. Умножая обе части (2.10.4) на Δx, $\Rightarrow$ $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x)\cdot\Delta x$, таким образом, приращение Δy – сумма 2-х слагаемых: $f'(x)\cdot\Delta x$ и $\beta(\Delta x)\cdot\Delta x$, при этом второе слагаемое – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, т.к. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\beta(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta x)=0$. Следовательно, из существования $f'(x)$ следует, что Δy можно представить в виде функции от x, где $f'(x)=A$, тогда $\mathrm{d}y=f'(x)\cdot\Delta x=A\cdot\Delta x$, что и требовалось доказать.

2.10.2 Геометрический смысл дифференциала и его связь с производной

Проведем к графику $y=f(x)$ в точке $M(x, y)$ касательную через α – угол с осью OX, $\mathrm{tg}\alpha=f'(x)$ (рисунок 2.11).

Рассмотрим ординату касательной для точки $(x+\Delta x)$ – точку P. Покажем, что $NP=\mathrm{d}y$; из прямоугольного треугольника $MNP\Rightarrow NP=\mathrm{tg}\alpha\cdot MN\Rightarrow NP=\mathrm{tg}\alpha\cdot\Delta x$, но по геометрическому смыслу $\mathrm{tg}\alpha=f'(x)$, $\Rightarrow NP=f'(x)\cdot\Delta x=\mathrm{d}y$. Следовательно, геометрически дифференциал функции

$y = f(x)$ в точке $(x+\Delta x)$, соответствующий Δx, равен приращению ординаты точки, лежащей на касательной к кривой $y = f(x)$, проведенной в $M(x, y)$, ($\mathrm{d}y = NP$), $M_1P = \Delta y - \mathrm{d}y = \alpha(\Delta x)$ $\Rightarrow$, вообще говоря, $\mathrm{d}y \neq \Delta y$, т.к. $\Delta y = \mathrm{d}y + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \neq 0$.

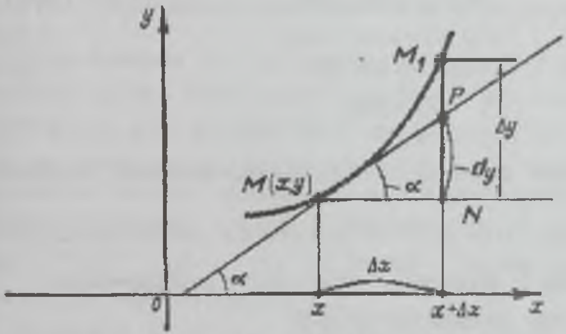


Рисунок 2.11

Только для линейной функции $y = Ax + B$ имеет место

$$\Delta y = A \cdot \Delta x = \mathrm{d}y, \qquad (2.10.5)$$

для всех x.

2.10.3 Производная как отношение дифференциалов

В частности, рассмотрим $y = x$; ее дифференциал, по формуле (2.10.5):

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x. \qquad (2.10.5)$$

Таким образом, дифференциал независимой переменной $\mathrm{d}x$ равен ее приращению:

$$\mathrm{d}y = \Delta x. \qquad (2.10.6)$$

Тогда формула (2.10.5) для $\mathrm{d}y$ примет вид:

$$\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x). \qquad (2.10.7)$$

т.е. производная функции f в точке x равна отношению ее дифференциала к дифференциалу независимой переменной.

Следует отметить, что dx не зависит от x, он равен Δx – произвольному приращению аргумента x. dy функции y зависит от x и dx.

Теорема 2.10.2 (дифференциал суммы, произведения и частного) Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы по x. Тогда имеет место:

$$d(u \pm v) = du \pm dv; \tag{2.10.8}$$

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du; \tag{2.10.9}$$

$$d(C \cdot u) = C \cdot du; \tag{2.10.10}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \ (v \neq 0). \tag{2.10.11}$$

Выведем формулу (2.10.9): по определению дифференциала:

$$d(u \cdot v) = (uv)'\,dx = (u'v + uv')dx = vu'\,dx + uv'\,dx = v\,du + u\,dv$$

Пример 1. Функция $y = x^2 e^x$. Найти дифференциал.

Решение: По формуле (2.10.9)

$$dy = x^2\,d(e^x) + e^x\,d(x^2) = x^2(e^x)'\,dx + e^x(x^2)'\,dx =$$

$$= x^2 e^x\,dx + e^x 2x\,dx = xe^x(x+2)dx.$$

2.10.4 Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала

Покажем, что формула (2.10.7) справедлива и в том случае, когда x является функцией.

Пусть $y = f(x)$, а $x = Y(t)$, т.е y – сложная функция от t: $y = f[Y(t)]$, тогда $dy = y_t\,dt$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$y'_t = y'_x x'_t \Rightarrow dy = y'_x x'_t\,dt = y'_x\,dx = f'(x)dx$, т.к $x'_t\,dt = dx$. Таким образом утверждение доказано.

Теорема 2.10.3 Дифференциал сложной функции $y = f(x)$, для которой $x = Y(t)$, имеет такой же вид (2.10.7), как и в том случае, когда аргумент x является независимой переменной.

Это свойство дифференциала сложной функции, заключающееся в том, что форма дифференциала не зависит от того, является x независимой переменной или функцией другого аргумента, называется *инвариантностью* формы дифференциала.

2.11 Производные высших порядков

2.11.1 Нахождение производных высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале (a, b). Тогда если существует ее производная $f'(x)$, то она есть функция от x. Может случиться, что эта функция также имеет производную. Тогда эта производная называется *второй производной* или производной второго порядка от функции $y = f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$: $f''(x) = \left[f'(x)\right]'$, где $f'(x)$ – первая производная или производная первого порядка.

Пример 1. $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2;\ y'' = (3x^2)' = 6x$.

Производная второй производной называется *третьей производной* или производной третьего порядка и обозначается y''' или $f'''(x)$: $f'''(x) = [f''(x)]'$.

Вообще, *производной* n *-го порядка* от функции $y = f(x)$ называется первая производная от производной $(n-1)$-го порядка данной функции $f^{(n)}(x) = [f^{n-1}(x)]'$.

Производные порядка выше первого называются *производными высшего порядка.*

Пример 2. $y = \ln x,\ y^{IV} - ?$

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x};\ y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};\ y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3};$$

$$y^{IV} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{6}{x^4}.$$

Пример 3. $y = e^{kx}, y^{(n)} - ?$

$y' = (e^{kx})' = ke^{kx};\ y'' = (ke^{kx})' = k^2e^{kx};\ y''' = (k^2e^{kx})' = k^3e^{kx}$,

по аналогии $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

2.11.2 Механический смысл второй производной

Пусть материальная точка M движется прямолинейно по закону $s = f(t)$, где s – путь за время t, в момент времени t скорость $\upsilon = \upsilon(t)$. В момент времени $t + \Delta t$ скорость $\upsilon_1 = \upsilon(t + \Delta t)$, тогда в Δt $\Delta\upsilon = \upsilon_1 - \upsilon = \upsilon(t + \Delta t) - \upsilon(t)$.

Отношение $\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = a_{ср}$ – среднее ускорение за время Δt.

Тогда $\lim\limits_{\Delta t \to 0} a_{ср} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \upsilon'_t = a$ называется *ускорением* точки M в момент t, т.е. ускорение прямолинейного движения есть производная скорости по времени или же вторая производная пути по времени:

$$a = \upsilon'_t = (s')' = s''.$$

2.11.3 Формула Лейбница

Найдем производную n-го порядка от функции $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x), v(x)$ - дифференцируемые функции.

$$y' = u'v + uv';$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'';$$

$$y''' = u''v + u'''v + 2u''v + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$
$$= u'''v + 3u''v + 3u'v'' + uv''';$$

$$y^{IV} = u^{IV}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{IV}.$$

Легко заметить аналогию между разложением выражения $(u+v)^n$ по формуле бинома Ньютона, если в полученном разложении заменить показатели степеней для u и v указателями порядка производных, причем нулевые степени ($u^0 = v^0 = 1$) заменяются самими функциями.

Формула Лейбница при любом n справедливо равенство:

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$$

Пример 4. $y = e^{ax}x^2;\ y^{(n)} - ?$

Решение: $u = e^{ax}, v = x^2 \Rightarrow$

$u' = ae^{ax}, v' = 2x$, $u'' = a^2e^{ax}, v'' = 2$, $u^{(n)} = a^n e^{ax}, v''' = v^{(n)} = 0 \Rightarrow$

$$y^{(n)} = a^n e^{ax} x^2 + na^{n-1}e^{ax}2x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}e^{ax}\cdot 2 =$$

$$= e^{ax}\left[a^n x^2 + 2na^{n-1}x + n(n-1)a^{n-2}\right].$$

2.12 Дифференциалы высших порядков

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и предположим, что x – независимая переменная, следовательно, дифференциал этой функции $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ зависит от x и $\mathrm{d}x = \Delta x$. Рассматривая $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ как функцию от x (т.е. считая $\mathrm{d}x = const$), можно найти дифференциал этой функции.

Определение 2.12.1 Дифференциал от дифференциала данной функции $y = f(x)$ называется ее *вторым дифференциалом* (второго порядка) и обозначается $\mathrm{d}^2 y$:

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y).$$

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}\left[f'(x)\mathrm{d}x\right] = \left[f'(x)\mathrm{d}x\right]'\mathrm{d}x = f''(x)(\mathrm{d}x)^2.$$

При дифференцировании считается, что $\mathrm{d}x = const$: $\mathrm{d}^2 y = f''(x)\mathrm{d}x^2$. Аналогично, $\mathrm{d}^3 y = f'''(x)\mathrm{d}x^3$ и т.д.

Вообще, дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ называется первый дифференциал от ее $(n-1)$-го дифференциала: $\mathrm{d}^n y = \mathrm{d}^n f(x) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} y)$.

Очевидно, что для $y = f(x)$, если x – независимая переменная:

$$\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n.$$

Из этого следует, что $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$. В частности, при $n = 1, 2, 3$:

$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; $f''(x) = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$; $f'''(x) = \dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$, т.е. производная n-го порядка есть отношение ее дифференциала к n-ой степени дифференциала независимой переменной x.

Форма дифференциала высшего порядка $\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$ $(n > 1)$ не обладает свойством инвариантности, т.к. формула

$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ при $n > 1$ становится неверной, если x не является независимой переменной. Тогда и $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ тоже будет неверна. Поэтому производную $f^{(n)}(x)$ ($n > 1$), если x – функция, нельзя рассматривать как отношение $\frac{d^n y}{dx^n}$, однако запись $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ сохраняется, как новое обозначение n-ой производной.

2.13 Дифференцирование функций, заданных параметрически

2.13.1 Параметрическое задание функций и линий

Пусть даны 2 функции переменной t:

$$\left.\begin{aligned} x = x(t) \\ y = y(t) \end{aligned}\right\}, \tag{2.13.1}$$

где $t \in [T_1, T_2]$. Тогда каждому значению t соответствуют определенные значения x и y, и, следовательно, определенная точка $M(x, y)$. Когда t пробегает все значения из $[T_1, T_2]$, то точка $M(x, y)$ описывает некоторую линию в плоскости OXY.

Уравнения (2.13.1) называются *параметрическими* уравнениями этой линии, а t – параметром.

Пусть функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$. Подставив во второе, из выражения (2.13.1) получим уравнение

$$y = y[\Phi(x)], \tag{2.13.2}$$

выражающее y как функцию от x.

Таким образом, уравнения (2.13.1) задают параметрически y как функцию от x, а переход от уравнений (2.13.1) к уравнению (2.13.2) называется *исключением* параметра.

Параметрическое задание функций во многих случаях гораздо удобнее для вычисления и расчетов, особенно часто используется в механике, причем роль параметра играет время.

2.13.2 Дифференцирование параметрических функций

Предположим, что функция y от x задана параметрически уравнениями 2.13.1, где $t_0 < t < T$. Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ – дифференцируемы, причем $x'(t) \neq 0$. Найдем y'_x.

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \text{ т.к. } dx = x'(t)dt;\ dy = y'(t)dt,$$

$$\text{то } y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ то есть}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (2.13.3)$$

Формула 2.13.3 позволяет находить производную функции, заданной параметрически.

Пример 1. Дана функция $\left.\begin{matrix} x = \sin^2 t \\ y = \sin 2t \end{matrix}\right\}$, найти y'_x.

Решение: $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{(\sin 2t)'}{(\sin^2 t)'} = \dfrac{2\cos 2t}{2\sin t \cos t} = 2\operatorname{ctg} 2t$.

С помощью той же формулы можно находить и производные высших порядков функций, заданных параметрически: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}$. При нахождении второй производной необходимо рассматривать $\dfrac{dy}{dx}$ как функцию от t. $\left.\begin{matrix} \dfrac{dy}{dx} = f(t) \\ x = \varphi(t) \end{matrix}\right\}$

Поэтому $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} = \dfrac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} = \dfrac{f'(t)}{x'_t} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

В общем случае, если $\left.\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{matrix}\right\}$, то

Пусть $M \neq m$, тогда хотя бы одно из чисел, например, $M \neq 0$. Пусть для определенности $M > 0$ и функция $f(x)$ имеет локальный максимум при $x = c$, т.е. $f(c) = M$. Тогда точка $c \in (a,b)$, и в ней достигается локальный максимум; кроме того, $f'(c)$ существует, т.к. по условию $f'(x)$ существует для всех $x \in (a, b)$. Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$, что и требовалось доказать.

Геометрически: если график непрерывной на отрезке $[a, b]$, дифференцируемой внутри него функции пересекает ось OX в двух точках $x = a, x = b$, то между ними найдется хотя бы одна точка $x = c$, $a < c < b$, для которой касательная к графику параллельна оси OX.

Замечание 3 Если $f(x)$ дифференцируема не во всех внутренних точках $[a,b]$, то утверждение теоремы Ролля неверно.

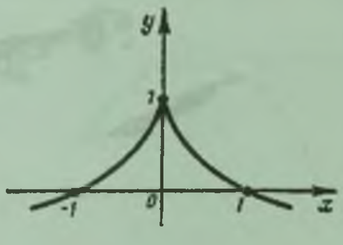


Рисунок 2.13

Пример 1. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ – непрерывна на $[-1, 1]$ и $f(-1) = f(1) = 0$. Однако производная $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ внутри $[-1, 1]$ в нуль не обращается, т.к. при $x = 0$ производная не существует, т.е. не существует касательной, параллельной OX (рисунок 2.13).

Теорема Лагранжа: Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема во всех внутренних точках $[a, b]$, то внутри $[a, b]$ найдется хотя бы одна точка $x = c$ такая, что имеет место равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \qquad (2.14.3)$$

Доказательство: Напишем уравнение хорды AB, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ (рисунок 2.14):

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Следовательно, ординаты хорды:

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-y,$$

для всех $x\in[a,b]$:

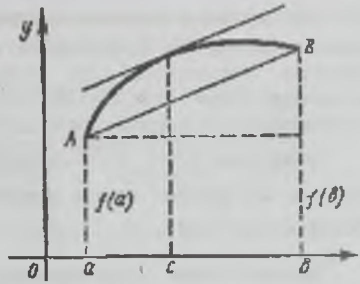


Рисунок 2.14

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right].$$

Легко проверить, что функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теорему Ролля:

1) Она непрерывна на $[a,b]$, т.к. непрерывны функции $f(x)$ и $(x-a)$.
2) Производная существует внутри (a,b):

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ т.к. существует } f'(x).$$

3) $F(a)=F(b)=0$.

Следовательно, по теореме Ролля найдется $x=c$, $a<c<b$, в которой $F'(c)=0$, т.е.

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Геометрически: Рассмотрим график $y=f(x)$. Отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ – угловой коэффициент хорды AB. Т.к. $f'(c)=tg\alpha$ – угловой коэффициент касательной, то теорема Лагранжа утверждает, что на графике $f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна хорде, соединяющей концы дуги.

Теорему Лагранжа записывают часто в виде:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a), \qquad (2.14.4)$$

т.е. приращение дифференцируемой функции на $[a, b]$ равно длине сегмента (т.е. приращению аргумента), умноженной на значение производной от этой функции в некоторой внутренней точке сегмента. Эту формулу называют формулой Лагранжа или формулой конечных приращений.

Следствие Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет во всех его внутренних точках производную $f'(x) = 0$, то $f(x)$ постоянна на $[a, b]$.

Теорема Коши Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы во всех внутренних его точках, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то внутри этого отрезка найдется такая точка $x = c$, что имеет место

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \qquad (2.14.5)$$

Доказательство: Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = [f(x) - f(a)] - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}[\varphi(x) - \varphi(a)].$$

Функция $F(x)$ дифференцируема во всех точках $]a, b[$ и $F(a) = F(b) = 0$. Следовательно, по теореме Ролля существует точка $c \in]a, b[$, что $F'(c) = 0$. Итак,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

что и требовалось доказать.

Эту формулу называют формулой Коши.

Замечание 4 Из теоремы Коши следует, что $\varphi(b) \neq \varphi(a)$, т.к. в противном случае нашлась бы такая точка $c \in (a, b)$, что $\varphi'(c) = 0$, но эти противоречит условию $\varphi'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Замечание 5 Теорема Лагранжа есть частный случай теоремы Коши, если положить $\varphi(x) = x$.

2.15 Приближение функции многочленом. Формула Тейлора. Формула Маклорена

2.15.1 Приближение функции многочленом

Ранее мы показали, что для приращения $\Delta y = y(x) - y(x_0)$ дифференцируемой в точке x_0 функции выполняется равенство

$$y(x) - y(x_0) = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

или

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x + o(\Delta x). \qquad (2.15.1)$$

здесь $\Delta x = x - x_0$, $o(\Delta x) = o(x - x_0)$ – бесконечно малая (при $\Delta x \to 0$ или $x \to x_0$) более высокого порядка малости, чем Δx или $x - x_0$.

Если обозначить $y(x_0) = A_0$, $y'(x_0) = A_1$, то из равенства (2.15.1) следует, что существует многочлен первой степени $P_1(x) = A_0 + A_1(x - x_0)$, такой, что в окрестности точки x_0 имеем

$$y(x) = P_1(x) + o(x - x_0). \qquad (2.15.2)$$

Практически, в окрестности точки x_0 функцию $y(x)$ можно заменить многочленом первой степени $P_1(x)$ (или, иначе говоря, линейной функцией $P_1(x)$):

$$y(x) \approx P_1(x). \qquad (2.15.3)$$

Величина $o(x - x_0)$ в формуле (2.15.2) характеризует погрешность приближения (2.15.3).

Заметим, что графиком функции $y = P_1(x)$ или $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$ является прямая, касательная к графику функции $y(x)$ в точке $M_0(x_0, y(x_0))$.

Таким образом, в окрестности точки $M_0(x_0, y(x_0))$ график функции $y(x)$ можно заменить отрезком касательной к графику функции в этой точке, а саму функцию – многочленом первой степени. В этом случае говорят, что имеем первое приближение функции.

Если требуется повысить точность при приближении функции многочленом, то необходимо функцию $y(x)$ заменить многочленом более высокой степени. Решим эту задачу.

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}\cdot(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n + \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x - x_0)^{n+1}. \tag{2.15.8}$$

При этом $\xi = \xi(x)$, то есть значение ξ зависит от значения x

Формула (2.15.8) точная, однако ее недостаток в том, что относительно точки ξ известно, что она всегда существует (при выполнении наложенных на функцию $y(x)$ условий), но не всегда можно указать ее точное численное значение.

Мы получили формулу Тейлора для ориентировочного отрезка $[x_0, x]$, тогда $(x_0 < \xi < x)$.

Последнее слагаемое в формуле Тейлора (2.15.8), обозначаемое $R_n(x)$ и равное

$$R_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{2.15.9}$$

$x_0 < \xi < x$ или $x < \xi < x_0$, называется остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа.

Если $\Delta x = (x - x_0) \to 0$ (или $x \to x_0$), то $R_n(x)$ – бесконечно малая порядка $n+1$ по сравнению с Δx и более высокого порядка, чем все предшествующие члены формулы Тейлора, т.е. при $\Delta x \to 0$

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n). \tag{2.15.10}$$

Последнее выражение называется остаточным членом формулы Тейлора в форме Пеано.

Остаточный член $R_n(x)$ – это та погрешность, которую мы допускаем, заменяя приближенно в окрестности точки x_0 функцию $y(x)$ многочленом

$$P_n(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

2.15.3 Формула Маклорена

Если в формуле Тейлора (2.15.8) положить $x_0 = 0$ ($\Delta x = x$), то получим формулу Маклорена для функции $y(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{2.15.11}$$

$0 < \xi < x$ или $x < \xi < 0$

2.15.4 Примеры разложения элементарных функций по формулам Маклорена и Тейлора

Записать формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа для следующих функций:

1. $y = e^x$.

Следуя формуле (2.15.11) имеем:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

при этом точка ξ находится между точками x и 0.

2. $y = \sin x$.

Согласно формуле (2.15.11):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{\sin\left(\xi + \frac{(2m+1)\pi}{2}\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1}.$$

Здесь $(2m-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m-2)(2m-1)$,

$(2m+1)! = (2m-1)! \cdot (2m) \cdot (2m+1)$.

3. $y = \cos x$.

Согласно формуле (2.15.11):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{\cos(\xi + (m+1)\pi)}{(2m+2)!}x^{2m+2}.$$

Здесь $(2m)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m-1) \cdot 2m$,

$(2m+2)! = (2m)! \cdot (2m+1) \cdot (2m+2)$.

4. $y = \ln(1+x)$.

Следуя (2.15.11):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}.$$

5. $y = \ln x$.

Согласно формуле (2.15.11):

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{(n+1)\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1},$$

точка ξ находится между точками x и 1.

2.16 Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Определение 2.16.1 *Абсолютной погрешностью* Δu приближенной величины u_0 называется абсолютная величина разности между точным значением u этой величины и ее приближенным значением u_0:

$$\Delta u = |u - u_0|. \qquad (2.16.1)$$

Чаще всего точное значение u, а, следовательно, и абсолютная погрешность Δu неизвестны. Поэтому вводят понятие границы абсолютной погрешности Δu.

Определение 2.16.2 *Границей абсолютной погрешности* приближенной величины u_0 называется любое положительное $\bar{\Delta} u > 0$, чтобы

$$|u - u_0| = \Delta u \le \bar{\Delta} u. \qquad (2.16.2)$$

Отсюда следует, что точное значение величины u содержится между $u_0 - \bar{\Delta} u \le u < u_0 + \bar{\Delta} u$.

Если граница абсолютной погрешности некоторой величины u равна $\bar{\Delta}$u, то говорят, что величина u найдется с точностью $\bar{\Delta}$u и пишут $u = u_0 + \bar{\Delta} u$.

Чем меньше $\bar{\Delta}$u, тем точнее величина u. Однако еще нельзя оценить качество приближений. Для этого вводится понятие относительной погрешности.

Определение 2.16.3 *Относительной погрешностью* называется отношение абсолютной погрешности Δu к модулю приближенного значения u_0 измеряемой величины:

$$\varepsilon_u = \frac{\Delta u}{|u_0|}. \qquad (2.16.3)$$

Определение 2.16.4 *Границей относительной погрешности* $\bar{\varepsilon}_u$ называется отношение границы абсолютной погрешности $\bar{\Delta}u$ к модулю приближенного значения u_0:

$$\bar{\varepsilon}_u = \frac{\bar{\Delta}u}{|u_0|}. \qquad (2.16.4)$$

Величины ε_u и $\bar{\varepsilon}_u$ выражают в процентах.

Пример 1. Найдем границы относительных погрешностей при измерениях расстояния L – Москва - Ленинград и длины l – человеческого роста с точностью до 1 км и 10 см соответственно, принимая приближенно $L \approx 650$ км, $l \approx 170$ см.

Так как $L_0 = 650$ км, $\bar{\Delta}L = 1$ км, то $\bar{\varepsilon}_L = 1/650 \approx 0,0015$ или 0,15%.

Так как $l_0 = 170$ см, $\bar{\Delta}l = 10$ см, то $\bar{\varepsilon}_l = 10/70 \approx 0,0588$ или 5,88%.

Можно сделать вывод, что в первом случае точнее, чем во втором.

Пусть нам известно значение функции $y = f(x)$ и ее производная в точке x. Покажем, как найти $f(x+\Delta x)$ в некоторой точке $x+\Delta x$. Для этого воспользуется приближенным равенством $\Delta y \approx \mathrm{d}y$, или $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

Так как $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, то $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ и $\Rightarrow f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Эта формула решает поставленную задачу. При этом абсолютная погрешность Δ не превышает границы $\bar{\Delta} = \frac{M}{2}(\Delta x)^2$, где $M = \max|f''(x)|$ на $[x, x+\Delta x]$.

Пример 2. Найти приближенное значение $\cos 61°$.

Решение: $y = f(x) = \cos x$. Пусть $x_0 = 60° = \pi/3$. Тогда новое приращенное значение – $x_1 = x_0 + \Delta x = 61° = \frac{61\pi}{180}$, а приращение аргумента $\Delta x = \frac{61\pi}{180} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{180} \approx 0,01745$. Тогда по формуле получаем:

$$\cos(x_0 + \Delta x) \approx \cos x_0 + (\cos x)'\Delta x \Rightarrow$$

$$\cos 61^\circ \approx \cos 60^\circ - \sin x_0 \cdot 0{,}01745 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}01745 \approx 0{,}4849.$$

Для оценки погрешности найдем $f''(x) = (\cos x)'' = -\cos x$. Т.к. $|f''(x)| = |-\cos x_0| \le 1$ для всех x, то абсолютная погрешность $\Delta \le \bar{\Delta}$, а $\bar{\Delta} = \frac{M}{2}(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}(0{,}01745)^2 \approx 0{,}0003$.

2.17 Правило Лопиталя

При нахождении пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших, т.е. при раскрытии неопределенностей вида $\left|\frac{0}{0}\right|, \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ пользуются также новым правилом, называемым *правилом Лопиталя*.

Теорема 2.17.1 Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, непрерывные на $[a,b]$, дифференцируемые внутри $[a,b]$, причем $\varphi'(x) \ne 0$, и пусть при $x \to a, \varphi(x) \to 0, f(x) \to 0$ (или обе стремятся к бесконечности), т.е. при $x = a, \varphi(a) = f(a) = 0$. Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (2.17.1)$$

Доказательство: Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$. По теореме Коши для всех x, $a < x < b$, справедливо

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

где $a < c < x$. Заметим, что при $x \to a + 0$ величина $c \to a$. Следовательно,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Т.е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, что и требовалось доказать.

Замечание Теорема справедлива и в том случае, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ стремятся к нулю или бесконечности одновременно при $x\to\pm\infty$, $x\to a\pm 0$, $x\to\infty$.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{1}=5\lim_{x\to 0}\cos 5x=5.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{16\cos 4x}{2}=$$

$$=8\lim_{x\to 0}\cos 4x=8.$$

Если отношение производных опять представляет собой неопределенность вида $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ или $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$, то можно снова применить правило Лопиталя, т.е. перейти к отношению вторых производных и т.д. Неопределенности вида $|\infty-\infty|$, $|0\cdot\infty|$ путем преобразования подпредельного выражения сводятся к виду $\left|\dfrac{0}{0}\right|$, а затем используется правило Лопиталя.

ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1 Возрастание и убывание функций

Определение 3.1.1 Функция $y = f(x)$, определенная на $[a, b]$, – *возрастающая*, если для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_2 > x_1$, верно $f(x_2) > f(x_1)$.

Обозначим $x_2 - x_1 = \Delta x > 0$, $f(x_2) - f(x_1) = \Delta y > 0$, тогда

$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ – для возрастающей функции.

Определение 3.1.2 Если для любых $x_1, x_2 \in [a, b] \Rightarrow x_2 > x_1$, верно $f(x_2) < f(x_1)$, то функция $y = f(x)$ *убывает*. Тогда $x_2 - x_1 = \Delta x > 0$, $f(x_2) - f(x_1) = \Delta y < 0$ и

$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ – для убывающей функции.

Теорема 3.1.1 (Необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции) Чтобы дифференцируемая в интервале (a, b) функция $y = f(x)$ возрастала, необходимо и достаточно, чтобы ее производная на (a, b) была неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$ для всех x, $a < x < b$. Если же функция $y = f(x)$ убывает на (a, b), то ее $f'(x) < 0$ для всех x, $a < x < b$.

Доказательство: Пусть $y = f(x)$ – возрастающая в (a, b) функция. Рассмотрим две точки x и $x + \Delta x$, принадлежащие (a, b). Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Переходя к пределу,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0.$$

Т.к. функция $y = f(x)$ дифференцируема, то $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, что и требовалось доказать.

Аналогично для убывающей функции.

Геометрический смысл теоремы:

- касательные к графику возрастающей функции образуют острые углы с положительным направлением OX, или в некоторых точках параллельны оси OX. Т.к. тангенс острых углов больше нуля (или равен нулю, если параллельны оси OX), то $tg\alpha = f'(x) \geq 0$ для возрастающей функции (рисунок 3.1а).

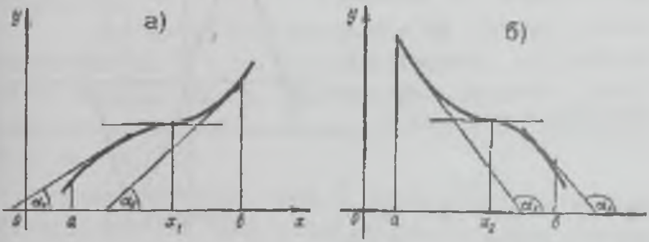


Рисунок 3.1

- касательные к графику убывающей функции образуют с осью OX тупые углы или в некоторых точках параллельны оси OX. Так как тангенс тупых углов отрицателен, то для убывающей функции $f'(x) \leq 0$.

Теорема 3.1.2 (Достаточное условие возрастания (убывания) функции) Если непрерывная на $[a, b]$ функция $y = f(x)$ в каждой внутренней точке имеет $f'(x) > 0$, $a < x < b$, то эта функция возрастает на $[a, b]$.

Если непрерывная на $[a, b]$ функция $y = f(x)$ имеет $f'(x) < 0$, $a < x < b$, то эта функция убывает на $[a, b]$.

Доказательство: Пусть $f'(x) > 0$, $a < x < b$. Рассмотрим любые два значения $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_2 > x_1$. Напишем формулу Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c), \quad x_1 < c < x_2.$$

По условию $f'(c) > 0$. Так как $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow$

$$(x_2 - x_1)f'(c) > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1),$$

т.е. $f(x)$ возрастает на $[a,b]$. Аналогично доказывается убывание функции на $[a,b]$.

Пример 1. Определим интервалы монотонности функции $y = x^3 - 3x$.

Решение: Найдем $y' = 3x^2 - 3$. Функция возрастает для тех x, при которых $y' > 0$. Следовательно, решая $3x^2 - 3 > 0$, получим $|x| > 1$ (рисунок 3.2). Таким образом, функция возрастает в интервалах

$$\begin{cases} -\infty < x < -1 \\ 1 < x < +\infty \end{cases}$$

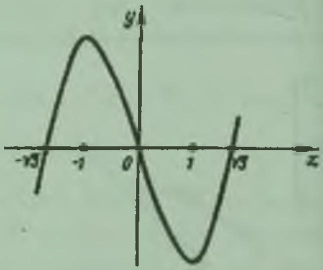


Рисунок 3.2

Функция убывает для тех x, при которых $y' < 0$. Т.е. $3x^2 - 3 < 0 \Rightarrow |x| < 1$. Функция убывает в интервале $-1 < x < 1$ (рисунок 3.2).

3.2 Локальный экстремум функции

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$ на $[a,b]$. Точки x_1, x_3 – точки максимума, x_2, x_4 – минимума (рисунок 3.3). Следует отметить, что если функция имеет в точке $x = x_1$ максимум, то это не означает, что в этой точке функция имеет наибольшее значение во всей области определения. Из определения максимума следует только то, что это самое большое значение функции в точках, близких к этой точке.

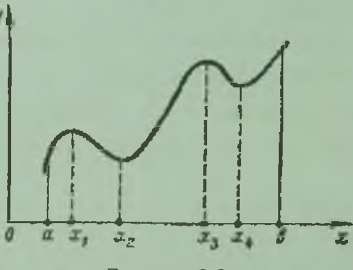


Рисунок 3.3

В частности, может оказаться, что минимум функции больше максимума: $f(x_4) > f(x_1)$.

Определению локального экстремума можно придать и следующую форму.

Определение 3.2.1 Функция $y = f(x)$ достигает в $x = c$ локального максимума (минимума), если можно указать такое $\delta > 0$, что приращение Δy в точке c удовлетворяет неравенству:

$$\Delta y = f(x) - f(c) \leq 0 \text{ для всех } x \in (c - \delta, c + \delta),$$

(соответственно $\Delta y = f(x) - f(c) \geq 0$ для всех $x \in (c - \delta, c + \delta)$).

По теореме Ферма, если $f(x)$ достигает в точке x_0 локального максимума (минимума) и в этой точке существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Определение 3.2.2 Точка x_0 называется *стационарной* для функции $f(x)$, если в ней производная существует и равна нулю $f'(x_0) = 0$.

Если на некотором интервале (a, b) задана $f(x)$ и необходимо найти все точки локального экстремума, то их необходимо искать среди стационарных точек ($f'(x_0)$) и среди точек, где $f(x)$ не имеет производных, если такие точки имеются.

Определение 3.2.3 Значения аргумента x, в которых производная обращается в нуль или терпит разрыв (в частности, обращается в ∞), называются *критическими точками* или *критическими значениями*.

Таким образом, экстремум функции, если он существует, может иметь место только в критических точках. Однако не во всякой критической точке функция имеет экстремум.

Стационарные точки определяются из уравнения: $f'(x) = 0$.

Теорема 3.2.1 (Необходимый признак существования экстремума) Если дифференцируемая в точке $x = c$ функция $y = f(x)$ имеет в этой точке локальный экстремум, то ее производная при $x = c$ равна нулю:

$$f'(c) = 0. \qquad (3.2.1)$$

Доказательство: Пусть $y = f(x)$ имеет в точке $x = c$ локальный максимум. Согласно определению, можно указать такое $\delta > 0$, что Δy в точке c удовлетворяет неравенству:

$$\Delta y = f(x) - f(c) \le 0 \text{ для всех } x \in (c - \delta, c + \delta),$$

следовательно, $f(x) \le f(c)$, т.е. $f(c)$ – локальный экстремум.

Согласно определению существует такая окрестность $U(c)$, что для всех $x \in U(c)$, $x \ne c$: $f(x) < f(c) \Rightarrow f(c)$ – максимум.

Т.к. $y = f(x)$ имеет в точке $x = c$ производную $f'(c)$, то по теореме Ферма $f'(c) = 0$, что и требовалось доказать.

Условие $f'(c) = 0$ является необходимым для существования экстремума, но не достаточным.

Пример 1. $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2 = 0$ в стационарной точке $x = 0$, однако при $x = 0$ функция не имеет экстремума (возрастает).

Следствие Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = c$ экстремум, то производная этой функции $f'(x)$ обращается в этой точке в нуль или не существует.

Пример 2. Для функции $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ производная не существует, однако в $x = 0$ функция имеет минимум.

Теорема 3.2.2 (Достаточный признак существования экстремума) Пусть $x = c$ – критическая точка непрерывной функции $y = f(x)$ и пусть $y = f(x)$ дифференцируема во всех точках $U_\delta(c)$, кроме, может быть, самой точки $x = c$. Тогда, если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку $x = c$ меняет знак с "+" на "–", то функция имеет в этой точке максимум, а при перемене знака с "–" на "+" имеет минимум. Т.е. если:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & при \quad x < c \\ f'(x) < 0 & при \quad x > c \end{cases} \Rightarrow \text{в точке } x = c \text{ максимум } f(x), \qquad (3.2.2)$$

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & при \quad x < c \\ f'(x) > 0 & при \quad x > c \end{cases} \Rightarrow \text{в точке } x = c \text{ минимум } f(x). \qquad (3.2.3)$$

Замечание Если $f'(x)$ не меняет знака при переходе через критическую точку, то функция не имеет ни максимума, ни минимума в этой точке.

Доказательство: Пусть $x = c$ - критическая точка, и пусть

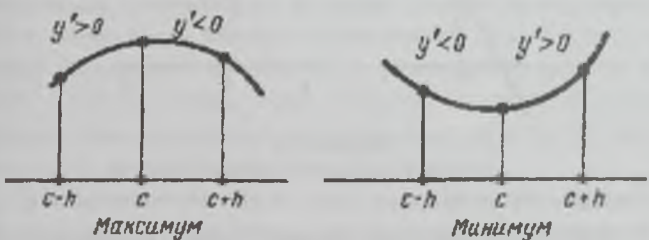
$$\begin{cases} f'(x) > 0 \quad при \quad x < c \\ f'(x) < 0 \quad при \quad x > c \end{cases}$$

Это значит, что существует достаточно малое число $\delta > 0$, что

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \quad при \quad c-\delta < x < c \\ f'(x) < 0 \quad при \quad c < x < c+\delta \end{cases}$$

На основании теорем о возрастании и убывании функции, следует, что $f(x)$ возрастает на $[c-\delta, c]$ и убывает на $[c, c+\delta]$. Получается, значение функции в точке c больше, чем в остальных точках $[c-\delta, c+\delta]$, следовательно, в $x = c$ функция $f(x)$ имеет максимум, что и требовалось доказать (рисунок 3.4а).

Аналогично в случае минимума (рисунок 3.4б).



а) б)

Рисунок 3.4

Схема исследования дифференцируемой функции на экстремум с помощью первой производной

1. Находим производную функции, т.е. $f'(x)$.
2. Находим критические точки аргумента x. Для этого:
   а) приравниваем производную нулю и находим действительные корни уравнения $f'(x) = 0$ – стационарные точки;

б) находим значения x, при которых $f'(x)$ терпит разрыв.

3. Исследуем знак производной слева и справа от критической точки, т.е. определяем знак производной в точках между критическими.
4. Вычисляем значение $f(x)$ при каждом критическом значении аргумента.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1.$$

Решение: Функция определена и дифференцируема во всей числовой оси (рисунок 3.5).

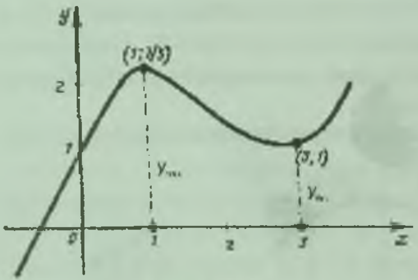


Рисунок 3.5

1. Находим $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.
2. Приравниваем нулю и находим корни (стационарные точки): $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Эти числа разбивают всю область определения на 3 интервала:

$$-\infty < x < 1,\ 1 < x < 3,\ 3 < x < +\infty .$$

3. Исследуем знак производной в каждом интервале. Для этого достаточно взять любую точку данного интервала:

а) $-\infty < x < 1$. Возьмем $x = 0$: $f'(0) = 3 > 0$. Следовательно, $f'(x) > 0$ в интервале $-\infty < x < 1$ и $f(x)$ возрастает.

б) $1 < x < 3$. Возьмем $x = 2$: $f'(2) = -1 < 0$. Следовательно, $f'(x) < 0$ в интервале $1 < x < 3$ и $f(x)$ убывает.

в) $3 < x < +\infty$. Возьмем $x = 4$: $f'(4) = 3 > 0$. Следовательно, $f'(x) > 0$ в интервале $3 < x < +\infty$ и $f(x)$ возрастает.

Т.к. при переходе через $x_1 = 1$ функция меняет знак с "+" на "–", то $f(1)$ – точка максимума.

При переходе через $x_2 = 3$ функция меняет знак с "–" на "+", то $f(3)$ – точка минимума.

То есть $y_{\max} = f(1) = \frac{7}{3}$, $y_{\min} = f(3) = 1$ (таблица 3.1).

Таблица 3.1

x	$-\infty < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x < +\infty$
y'	+	0	–	0	+
y	*возрастает* ↗	$y_{\max} = \frac{7}{3}$	*убывает* ↘	$y_{\min} = 1$	*возрастает* ↗

Теорема 3.2.3 (Достаточный признак существования экстремума, основанный на знаке второй производной) Пусть точка $x = c$ является стационарной, т.е. $f'(c) = 0$, и вторая производная в точке $x = c$ существует и отлична от нуля: $f''(c) \neq 0$. Тогда, если $f''(c) < 0$, то в точке $x = c$ функция имеет локальный максимум, если же $f''(c) > 0$, то в точке $x = c$ функция имеет локальный минимум.

Доказательство: Пусть для определенности $f''(c) < 0$. Покажем, что $f(c) = f_{\max}$. По определению второй производной

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x) - f'(c)}{\Delta x}.$$

Т.к. по условию $f'(c) = 0$, то

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Т.к. $f''(c) < 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x} < 0$, следовательно, для малых Δx, $\frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x} < 0$ в достаточно малой окрестности точки c.

Пусть $\Delta x < 0 \Rightarrow f'(c+\Delta x) > 0$, а если $\Delta x > 0 \Rightarrow f'(c+\Delta x) < 0$, т.е. при переходе через точку c первая производная меняет "+" на "–", следовательно, $f(x)$ в точке c имеет максимум.

В тех случаях, когда в критической точке $f''(c)=0$ или не существует, второй достаточный признак неприменим и следует пользоваться первым достаточным признаком, основанным на перемене знака первой производной.

Схема исследования с помощью второй производной

$f'(c)$	$f''(c)$	Характер стационарной точки
0	–	Точка максимума
0	+	Точка минимума
0	0	Неизвестен

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию

$$y = x^3 - 12x.$$

Решение:

1. $y' = 3x^2 - 12 = 0$ в точках $x_1 = 2, x_2 = -2$. Эти точки являются критическими. Производная существует всюду, поэтому других критических точек не имеется (рисунок 3.6).
2. $y'' = 6x; y''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow$ $x_2 = -2$ – точка максимума, где $y_{max} = y(-2) = 16$.
   $y''(2) = 12 > 0 \Rightarrow$
   $x_1 = 2$ – точка минимума, где $y_{min} = y(2) = -16$ (рисунок 3.6).

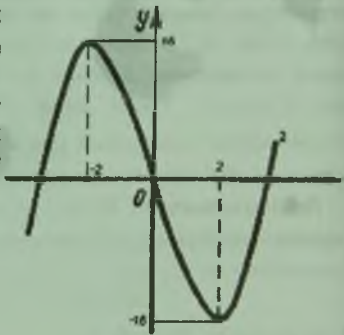


Рисунок 3.6

3.3 Наибольшее и наименьшее значение функций

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда $f(x)$ достигает своего наибольшего или наименьшего значения либо на концах отрезка, либо внутри него (по теореме о непрерывных функциях). Если наибольшее значение функции достигается внутри (a, b), то, очевидно, это значение будет одним из локальных максимумов функции, а именно, наибольшим максимумом. Аналогично, если наименьшее значение достигается внутри (a, b), то это значение будет наименьшим минимумом.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений на $[a, b]$:

1. Находим все критические точки функции в (a, b) – $\{x_1, ..., x_m\}$.
2. Вычисляем значения функций на концах $[a, b]$ в точках $x = a, x = b$ и в критических точках – $f(a), f(b), f(x_1), ..., f(x_m)$.
3. Из всех значений выбираем наибольшее и наименьшее –

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), ..., f(x_m)\} = y_{наиб},$$

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), ..., f(x_m)\} = y_{наим}.$$

Замечание Если непрерывная функция на $[a, b]$ имеет внутри только один экстремум, то в этой точке она имеет наибольшее значение в случае максимума или наименьшее в случае минимума.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x$ на $[-1,5; 3]$.

Решение: Находим критические точки в $[-1,5; 3]$:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

$$f(-1) = 2; \ f(1) = -2; \ f(-1,5) = 1,125; \ f(3) = 18.$$

Следовательно, $y_{наиб} = f(3) = 18$ на правом конце, $y_{наим.} = f(1) = -2$ в точке $x = 1$.

Пример 2. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в данный прямой конус.

Решение: Пусть высота конуса $OB = h$ и радиус основания $OA = R$. Высоту цилиндра OC обозначим y, а радиус $OF - x$. Объем цилиндра $V = \pi x^2 y$. Из подобия треугольников OAB и CDB следует (рисунок 3.7):

$$\frac{DC}{CB} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{x}{h-y} = \frac{R}{h} \Rightarrow x = \frac{R(h-y)}{h} \Rightarrow$$

$$V = \pi \frac{R^2(h-y)^2}{h^2} y = \frac{\pi R^2}{h^2}(h^2 y - 2hy^2 + y^3).$$

Переменная y может принимать значения $0 < y < h$. Найдем наибольшее значение функции $V(y)$ в $(0, h)$. Найдем производную V_y', а затем критические точки в $(0, h)$:

$$V' = \frac{\pi R^2}{h^2}\left(h^2 - 4hy + 3y^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{h}{3}, \quad y_2 = h \notin (0, h)$$

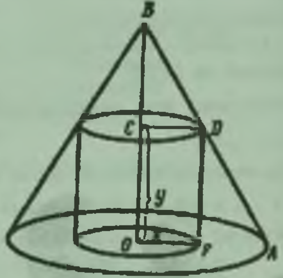


Рисунок 3.7

Так как $V'' = \frac{\pi R^2}{h^2}(-4h + 6y)$,

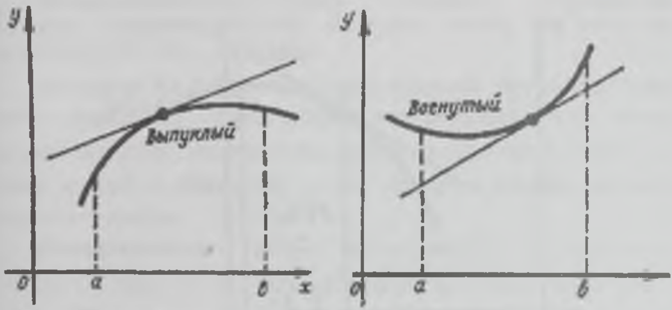
$V''\left(\frac{h}{3}\right) < 0 \Rightarrow$ при $y = \frac{h}{3}$ объем $V = V_{max}$. Это максимальное значение будет наибольшим.

3.4 Выпуклость и вогнутость графика. Точки перегиба

Изучим теперь некоторые свойства графика функции, связанные с понятием выпуклости и вогнутости.

Определение 3.4.1 График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* в интервале (a, b), если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале (рисунок 3.8а).

Определение 3.4.2 График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* (или выпуклым книзу) в интервале (a,b), если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале (рисунок 3.8б).



а) б)

Рисунок 3.8

График функции в одних интервалах может быть выпуклым, в других - вогнутым. Например, график $y = \sin x$ в интервале $(0, 2\pi)$: выпуклый в $(0, \pi)$ и вогнутый в $(\pi, 2\pi)$.

Теорема 3.4.1 Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ во всех точках (a,b). Если $f''(x) < 0$ в (a,b), то график функции в (a,b) – выпуклый, если $f''(x) > 0$ – вогнутый.

Доказательство: Пусть для определенности $f''(x) < 0$, докажем, что график – выпуклый. Возьмем на графике Γ (рисунок 3.9) производную в точке M_0 – касательную. Покажем, что для одной и той же абсциссы x ордината кривой y меньше ординаты касательной Y.

Уравнение касательной в точке M_0 имеет вид:

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение кривой $y = f(x)$. Разложим его в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора:

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x),$$

где $r_1(x) = \dfrac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0 + \Theta(x - x_0)),\ 0 < \Theta < 1.$

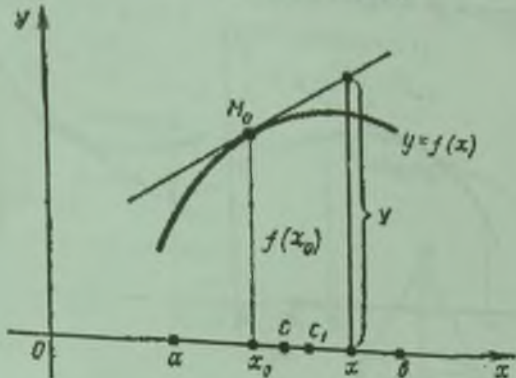


Рисунок 3.9

Следовательно, разность $y - Y = r_1(x)$, т.е. остаток равен величине превышения касательной над прямой. В силу непрерывности второй производной, если $f''(x_0) < 0$, то и $f''(x_0 + \Theta(x - x_0)) < 0 \Rightarrow r_1(x) < 0$ для всех $x \in O(x_0), x \neq x_0$, т.е. график функции лежит ниже касательной и кривая обращена в точке x_0 выпуклостью вверх.

Аналогично, если $f''(x_0) > 0 \Rightarrow r_1(x) > 0 \Rightarrow$ график вогнутый.

По формуле Лагранжа $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c)$, где $x_0 < c < x$. Тогда

$$y - Y = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)].$$

Преобразуем по формуле Лагранжа разность

$$f'(c) - f'(x_0) = (c - x_0)f''(c_1),\ x_0 < c_1 < c \Rightarrow x_0 < c_1 < x.$$

Подставляя в предыдущую: $y - Y = (x - x_0)(c - x_0)f''(c_1)$.

Здесь $x - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0 \Rightarrow (x - x_0)(c - x_0) > 0$. Т.к. по условию $f''(x) < 0$ в (a, b), то значит $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - Y = (x - x_0)(c - x_0)f''(c_1) < 0$, т.е. для всех точек интервала (a, b) $Y > y$, т.е. график выпуклый, что и требовалось доказать.

Определение 3.4.3 Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется *точкой перегиба.*

Теорема 3.4.2 (Достаточный признак существования точки перегиба) Если вторая производная $f''(x)$ непрерывной функции меняет знак при переходе через точку x_0, точка кривой с абсциссой $x = x_0$ является точкой перегиба графика функции.

Доказательство: Пусть $f''(x_0) = 0$ и $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$. Тогда слева от x_0 график вогнутой, а справа от x_0 – выпуклый. Следовательно, точка x_0 отделяет интервал выпуклости от интервала вогнутости, т.е. точка $A(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба, что и требовалось доказать (рисунок 3.10).

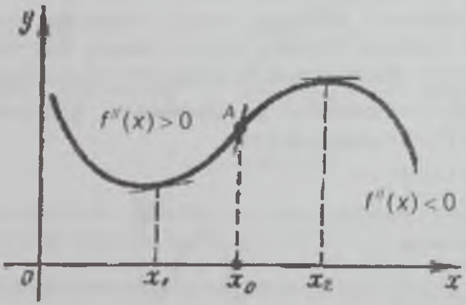


Рисунок 3.10

Теорема 3.4.3 (Необходимый признак существования точки перегиба) Пусть функция $y = f(x)$ имеет в (a, b) непрерывную вторую производную $f''(x)$. Тогда, если точка $A(x_0, f(x_0))$, где $x_0 \in (a, b)$, является точкой перегиба графика данной функции, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство: Предположим противное, т.е. что $f''(x_0) \neq 0$. Пусть $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ в силу непрерывности второй производной, она является положительной в некоторой окрестности точки x_0, и следовательно, график функции в этой окрестности вогнутый (по теореме 3.4.1). Но это противоречит тому, что x_0 – есть абсцисса точки перегиба. Следовательно, $f''(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание Могут встретиться случаи, когда в точке x_0 вторая производная непрерывной функции разрывна (в частности, не существует).

Пример 1. $y = \sqrt[3]{x^5}$.

$$y' = \left(x^{5/3}\right)' = \frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}, \quad y'' = \left(\frac{5}{3}x^{2/3}\right)' = \frac{10}{9}x^{-1/3} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

Очевидно, что $y'' < 0$ при $-\infty < x < 0$, $y'' > 0$ при $0 < x < +\infty \Rightarrow$ в точке $x = 0$ график имеет точку перегиба. Однако $y''(0)$ не существует.

Таким образом, абсциссы точек перегиба графика непрерывной функции следует искать среди тех точек, в которых $y''(x) = 0$ или разрывна (в частности, не существует).

Пример 2. Исследовать на выпуклость и вогнутость график $f(x) = x^3 - 3x$ (рисунок 3.11).

Решение: $f'(x) = 3x^2 - 3$,

$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Замечаем, что если

$x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$,

$x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$,

следовательно, в интервале $(-\infty, 0)$ – график выпуклый, в интервале $(0, +\infty)$ – вогнутый, при $x = 0$ – точка перегиба.

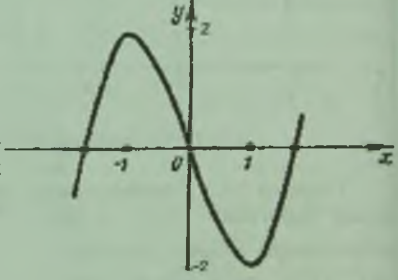


Рисунок 3.11

3.5 Асимптоты графика функции

При исследовании функции важно знать, какую форму имеет график функции при неограниченном удалении его переменной точки в бесконечность. При этом особый интерес представляет случай, когда график функции при удалении его переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение 3.5.1 *Асимптотой* графика функции $y = f(x)$ называется прямая линия, обладающая тем свойством, что расстояние δ от переменной точки $M(x, f(x))$ на графике до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M в бесконечность (рисунок 3.12).

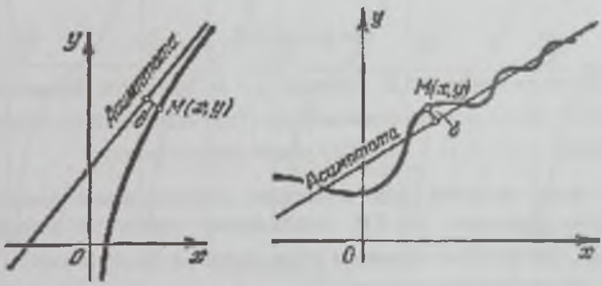


Рисунок 3.12

Рассмотрим отдельно случаи асимптот, параллельных оси OY и не параллельных оси OY.

3.5.1 Вертикальные асимптоты (параллельны оси ОУ)

Пусть при $x \to x_0 - 0$ функция $y = f(x)$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$. Тогда из определения следует, что прямая $x = x_0$ есть асимптота. Аналогично, если при $x \to x_0 + 0$ предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, то прямая $x = x_0$ есть асимптота.

Очевидно и обратное: если прямая $x = x_0$ есть асимптота, то хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен бесконечности (рисунок 3.13).

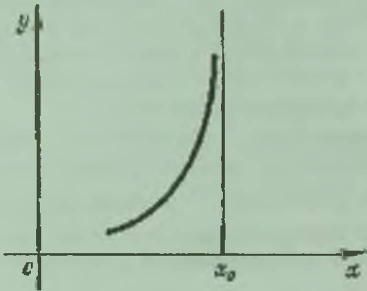


Рисунок 3.13

Определение 3.5.2 Прямая $x = x_0$ является асимптотой графика непрерывной функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен бесконечности.

Таким образом, для отыскания вертикальных асимптот графика функции $y = f(x)$ необходимо найти те значения $x = x_0$, при которых функция обращается в бесконечность (то есть терпит бесконечный разрыв).

Пример 1. Найти вертикальные асимптоты функции

$$f(x) = \frac{2}{x-5}.$$

Решение: Так как

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{2}{x-5} = \infty,$$

то прямая $x = 5$ есть асимптота (рисунок 3.14).

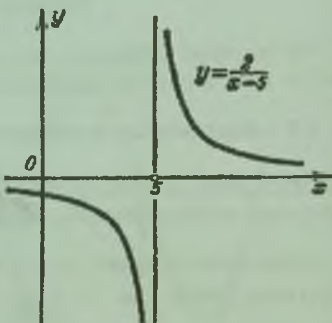


Рисунок 3.14

Пример 2. Найти вертикальные асимптоты $f(x) = tgx$.

Решение: Т.к. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}(2k+1)} tgx = \infty$, то график этой функции имеет бесчисленное множество асимптот (рисунок 3.15):

$$x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3\pi}{2},\ x = \frac{5\pi}{2},\ldots;\ x = -\frac{\pi}{2},\ x = -\frac{3\pi}{2},\ldots \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in (-\infty, +\infty) \text{ -- целые.}$$

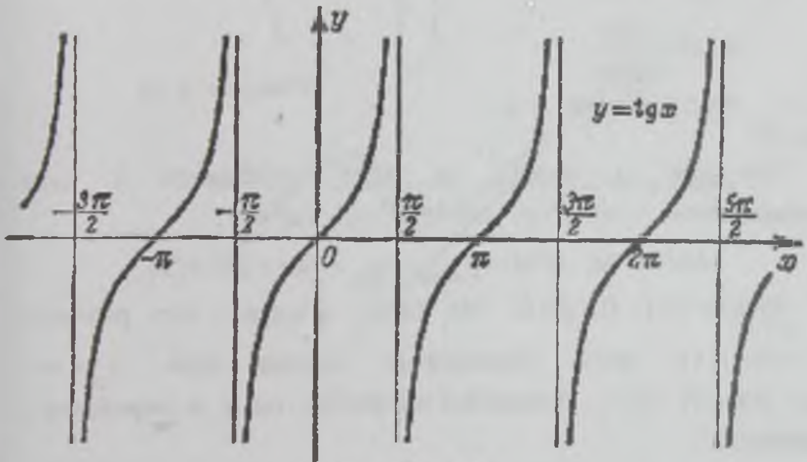


Рисунок 3.15

3.5.2 Наклонные асимптоты

Определение 3.5.3 Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* непрерывной кривой $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, т.е.

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \alpha(x) = 0.$$

Пусть график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту, не параллельную оси OY. Тогда уравнение такой асимптоты имеет вид $y = kx + b$ (рисунок 3.16).

Определим числа k и b следующим образом. Опустим из точки M на асимптоту перпендикуляр MN. По определению асимптоты при $x \to +\infty$ длина $MN = \delta \to 0$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} \delta = 0$. Из треугольника MNM_1 следует, что

$$M_1M = \frac{MN}{\cos\alpha},$$

где α – угол наклона A к оси OX.

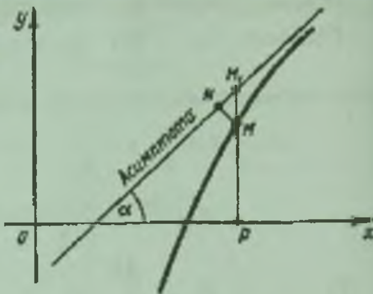


Рисунок 3.16

Так как $\alpha = const$, то M_1M стремится к нулю одновременно с MN, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} M_1M = 0$. Так как

$$M_1M = PM_1 - PM = y_{асимп} - y_{гр} = (kx+b) - f(x),$$

то $\lim\limits_{x\to+\infty}[(kx+b) - f(x)] = 0$. Из этого следует, что разность $(kx+b) - f(x)$ есть бесконечно малая при $x \to +\infty$: $f(x) - (kx+b) = \beta(x)$. Разделим почленно на x и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k + \frac{b}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{x}.$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x} = 0, \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0 \Rightarrow k = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

В то же время из $f(x) - (kx+b) = \beta(x)$ следует $b = f(x) - kx - \beta(x)$, переходя к пределу, $b = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - kx]$.

Таким образом, для нахождения наклонной асимптоты необходимо найти пределы $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - kx]$. Если хотя бы один из этих пределов не существует, то график функции $y = f(x)$ асимптот при $x \to +\infty$ не имеет.

В частном случае коэффициент k может быть равен нулю, тогда асимптота $y = b$ называется *горизонтальной.*

Аналогично находятся асимптоты при $x \to -\infty$. Заметим, что график функции может иметь две различные асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

Пример 3. Найти асимптоты графика $y = x - 2arctgx$.

Решение: Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, следовательно, вертикальных асимптот график не имеет (рисунок 3.17). Находим наклонные асимптоты:

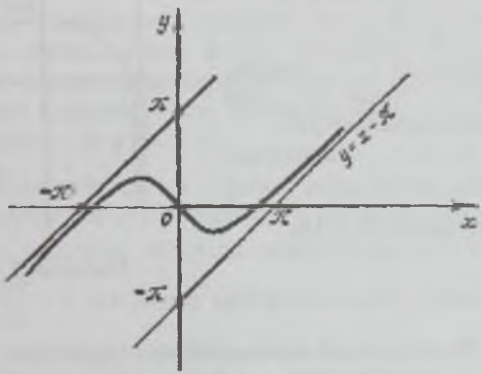


Рисунок 3.17

1. $x \to +\infty$;

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2arctgx}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2arctgx}{x}\right) = 1 - 2\frac{\pi}{\infty} = 1.$$

$$b = \lim_{x \to +\infty}[x - arctgx - x] = -2\lim_{x \to +\infty} arctgx = -2\frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Итак, при $x \to +\infty$ прямая $y = x - \pi$ является асимптотой.

2. $x \to -\infty$;

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - 2arctgx}{x} = \lim_{x \to -\infty}\left(1 - \frac{2arctgx}{x}\right) = 1.$$

$$b = \lim_{x \to -\infty}[x - arctgx - x] = -2\lim_{x \to -\infty} arctgx = -2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ уравнение асимптоты: $y = x + \pi$.

Таким образом, график функции имеет две наклонные асимптоты.

Пример 4. Найти асимптоты графика $y = \ln\left(4 - x^2\right)$.

Решение: Найдем О.О.Ф.: $4 - x^2 > 0 \Rightarrow 4 > x^2 \Rightarrow x < |2| \Rightarrow$ функция определена в интервале $-2 < x < 2$. Найдем пределы

$$\lim_{x \to -2+0} f(x) = \lim_{x \to -2+0} \ln\left(4 - x^2\right) = \\ = \ln 0 = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} \ln\left(4 - x^2\right) = \\ = \ln 0 = -\infty;$$

Следовательно график функции имеет две вертикальные асимптоты $x = -2$, $x = 2$. Наклонных асимптот нет, т.к. $x \nrightarrow \pm\infty$, а $x \in (-2,2)$ (рисунок 3.18).

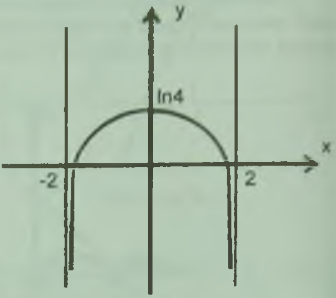


Рисунок 3.18

3.6 Общая схема исследования функции и построение ее графика

1. Нахождение области определения функции.
2. Исследование функции на периодичность и на четность.
3. Нахождение точек пересечения графика с осями координат и определение интервалов знакопостоянства функции.
4. Нахождение интервалов непрерывности и точек разрыва. Установление характера разрыва.
5. Нахождение асимптот графика функции.
6. Исследование функции на экстремум.
7. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика.
8. Составление таблицы значений функции для некоторых значений ее аргумента и построение графика функции.

Пример 1. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3 + 9x}{x^2 - 4}$ и построить ее график.

Решение:

1) Функция определена для всех $x \neq \pm 2$:

$$(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$$

2) Функция не является периодической. Функция нечетная, т.к. $f(-x)=-f(x)$ и определена на симметричном множестве.

В самом деле $f(-x)=\dfrac{-x^3-9x}{x^2-4}=-\dfrac{x^3+9x}{x^2-4}=-f(x)$.

Значит, для построения графика функции достаточно исследовать функцию при $x \geq 0$, построить ее график и отразить его симметрично относительно начала координат. Поэтому для дальнейшего исследования ограничимся промежутками $[0,2)$ и $(2,+\infty)$.

3) График пересекает оси в начале координат, поскольку $f(0)=0$. Других точек пересечения с осью ординат не может быть, а с осью OX в данном случае нет, т.к. уравнение $\dfrac{x^3+9x}{x^2-4}=0$ не имеет других решений, кроме $x=0$.

Интервалы знакопостоянства:

$(2,+\infty)$ – $f(x)>0$ – положительные значения;

$(0,2)$ – $f(x)<0$ – отрицательные значения; т.к. график симметричен относительно 0;

$(-2,0)$ – $f(x)>0$ – положительные значения;

$(-\infty,-2)$ – $f(x)<0$ – отрицательные значения.

4) $x=2$ – точка разрыва второго рода. Имеем $f(0)=0$.

5) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^3+9x}{x^2-4}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^3+9x}{x^2-4}=+\infty$.

Значит, график рассматриваемой функции имеет при $x \geq 0$ вертикальную асимптоту $x=2$ (аналогично $x=-2$ – вертикальная асимптота).

Далее, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+9x}{x^2-4}=+\infty$. Т.к. числитель данной дробно-рациональной функции имеет степень, большую степени знаменателя на 1, то существует наклонная асимптота $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+9x}{x(x^2-4)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+9x}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{13x}{x^2-4}=0.$$

Итак, уравнение наклонной асимптоты: $y=x$.

Заготовка для будущего графика: асимптоты, точка $O(0,0)$, те участки, где графика нет.

6) Найдем точки экстремума на $[0,2)$ и $(2,+\infty)$.

$y'=\left(\dfrac{x^3+9x}{x^2-4}\right)'=\dfrac{x^4-21x^2-36}{(x^2-4)^2}$. Производная не существует в точке $x=2$, но в этой точке функция не определена. Приравняем производную нулю:

$x^4-21x^2-36=0$. Сделаем замену $x^2=z$:

$$z^2-21z-36=0\Rightarrow z=22{,}6\Rightarrow x_1\approx4{,}8, x_2\approx-4{,}8.$$

$$\left.\begin{array}{ll}2<x<4{,}8, & y'(x)<0\\ 4{,}8<x<+\infty, & y'(x)>0\end{array}\right|\Rightarrow$$

точка x_1 – точка минимума, $y(4{,}8)=y_{\min}\approx8{,}1$, очевидно, $y(-4{,}8)=y_{\max}\approx-8{,}1$.

7) Определяем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика. Для этого найдем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{x^4-21x^2-36}{(x^2-4)^2}\right)'=\frac{2x(13x^2+156)}{(x^2-4)^3}.$$

$y''=0$ при $x=0\Rightarrow$ точка перегиба $x=0$,

внутри $[0,2)$ и $(2,+\infty)$ точек перегиба нет.

Т.к. для $0<x<2$, $y''(x)<0\Rightarrow$ выпуклость,

для $2<x<+\infty$ – $y''(x)>0\Rightarrow$ вогнутость.

	$X=0$	$0<x<2$	$x=2$	$2<x<4{,}8$	$x=4{,}8$	$4{,}8<x<+\infty$
y'	-2,25	–	*не сущ-ет*	–	0	+

y	0	*убывает*	*не сущ-ет*	*убывает*	$y_{min} = 8,1$	*возрастает*
y''	0	–	*не сущ-ет*	+	+	+
гра-фик	*перегиб*	*выпукл.*	*асимпт.*	*вогнутость*		

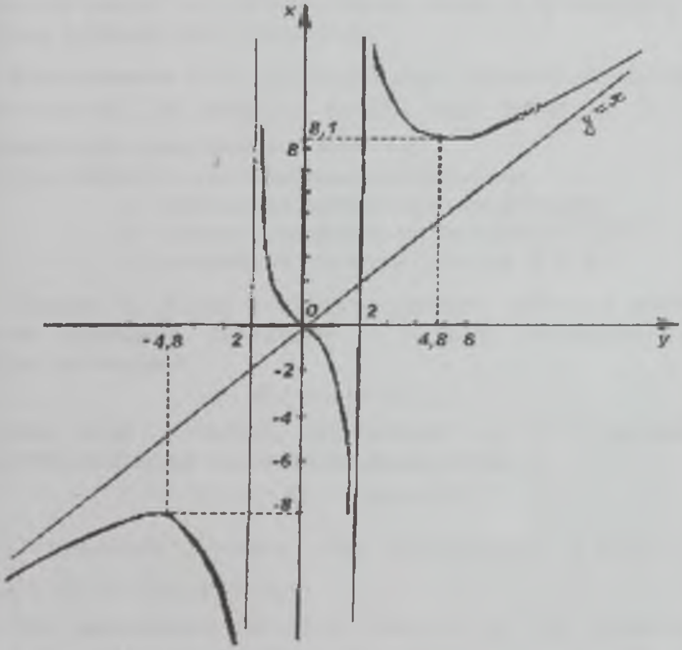


Рисунок 3.19

8) Составим таблицу значений для некоторых аргументов:

x	0	1	3	4.8	6
y	0	-3,33	10,8	8,1	8,43

Из графика следует (рисунок 3.19):

1 $x = -4{,}8$ – точка максимума, $y(-4{,}8) = y_{max} \approx -8{,}1$.

2 $x = 0$ - точка перегиба.

3 На $(-\infty, -2)$ функция отрицательна, на $(-2, 0)$ - положительна.

4 Область изменения функции – множество всех действительных чисел.

ГЛАВА 4. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1 Функции многих переменных Способы задания функции

Если в определении функции одной переменной под множеством D следует понимать некоторое множество пар (x, y) – действительных чисел, а под множеством L – некоторое множество действительных чисел z, то приходим к понятию функции двух переменных.

Определение 4.1.1 Функцией двух переменных называется правило, по которому каждой паре чисел $(x, y) \in D$ соответствует единственное число $z \in L$.

При этом x и y – независимые переменные;

z – зависимая переменная или функция;

D – область определения функции (О.О.Ф.);

L – множество значений функции (М.З.Ф.).

Пример 1. Объем V прямого кругового цилиндра можно считать функцией, зависящей от радиуса основания r и высоты цилиндра h:

$$V(z, h) = \pi r^2 h .$$

При этом областью определения D этой функции является множество пар положительных чисел:

$$D = \{(r, h), r > 0, h > 0\} .$$

Обозначения функции двух переменных: $z = f(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$, $z = z(x, y)$ и т. д.

При нахождении частного значения z_0 при заданных $x = x_0$, $y = y_0$ пишут $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Так как каждой паре чисел (x, y) соответствует единственная точка $P(x, y)$ плоскости OXY и обратно, для каждой точки $P(x, y)$ есть единственная пара координат (x, y), то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки $P(x, y)$: $f(x, y) = f(P)$.

Способы задания функций различны:

1. *Табличный способ (таблица с двойным входом)*

x\y	0	1	2	3
0	100	81	63	45
1	100	83	65	48
2	100	84	68	51
3	100	84	69	54

Пример 2. Пусть z – значения относительной влажности воздуха (в %) в x – зависимости от температуры (в градусах) сухого воздуха и y – разности температур сухого и влажного воздуха.

2. *Аналитический* – (наиболее важный) с помощью формулы

$z = ax + bx + c$, $z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ly + f$ определены для всех пар (x, y), т.е. в плоскости OXY.

$z = \dfrac{x^2 + 3y^2}{x - y}$ определена на всей плоскости OXY, кроме прямой $x - y = 0$.

3. *Графический*

Если график функции одной переменной $y = f(x)$ в декартовой системе координат есть линия, то график функции двух переменных в прямоугольной декартовой системе координат в пространстве является поверхностью.

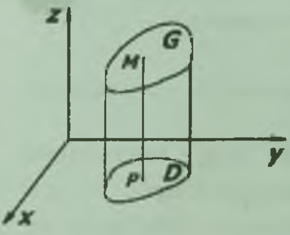


Рисунок 4.1

В самом деле, пусть $z = f(x, y)$ определена в области D. Каждой точке $P(x, y) \in D$ соответствует определенное значение функции $z = f(P)$. Пусть z – есть аппликата точки $M(x, y, z)$ в системе $OXYZ$ (рисунок 4.1). Таким образом, каждой точке $P \in D$ соответствует определенная точка M некоторой поверхности G, а всей области D соответствует некоторая поверхность G. Эта поверхность называется *графиком функции* $z = f(x, y)$.

В аналитической геометрии рассматриваются поверхности, которые являются графиками функции двух переменных. Например, эллиптический параболоид – график функции $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$, ($p$ и q – *const* одинакового знака).

Гиперболический параболоид – график функции $z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$.

Верхняя часть эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – график функции

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

а нижняя его часть – график функции

$$z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Определение 4.1.2 Пусть D – некоторое множество трех действительных чисел $z(x, y, z)$, L – некоторое множество действительных чисел. *Функцией трех переменных* называется правило, по которому каждой тройке $(x, y, z)\in D$ соответствует единственное число $u\in L$ при условии, что каждому числу $u\in L$ соответствует хотя бы одна тройка (x, y, z) из D, где

x, y, z – независимые переменные (аргументы);
u – зависимая переменная функция
($u=f(x, y, z)$, $\overline{\omega}=\overline{\omega}(x, y, z)$ и т.д.).

Область определения функции $u=f(x, y, z)$ есть некоторое множество упорядоченных точек (x, y, z) в пространстве.

Способы задания те же, в основном, аналитический.

Пример 3. Найти область определения функции

$$u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}.$$

Решение: $1-x^2-y^2-z^2\geq 0\Rightarrow x^2+y^2+z^2\leq 1\Rightarrow$ область определения – шар с R=1 с центром в начале координат.

Аналогично можно ввести понятия функций 4, 5 и n переменных.

$u=f(x_1, x_2,..., x_n)=f(P)$, при $n>3$ будем рассматривать как функцию точки $P(x_1, x_2,..., x_n) \Rightarrow u = f(P)$.

Областью определения функции $u = f(x_1, x_2,..., x_n)$ является некоторое множество $D = \{x_1, x_2,..., x_n\}$ n–мерного пространства R_n.

R_n – *n-мерное пространство* – множество всевозможных систем n чисел $\{x_1,x_2,...,x_n\}$.

4.2 Предел функции многих переменных. Непрерывность функций

4.2.1 Предел функции нескольких переменных

При введении понятия предела для функции двух переменных $z = f(x, y) = f(P)$ будем рассматривать окрестность точки в плоскости Oxy.

Определение 4.2.1 *Окрестностью* точки $P_0(x_0, y_0)$ называется совокупность точек $P(x, y)$, лежащих внутри круга радиуса δ с центром в точке $P_0(x_0, y_0)$ (рисунок 4.2).

Рисунок 4.2

Обозначим окрестность точки P_0 через

$$Q(P_0,\delta) = \left\{(x, y), \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}.$$

Очевидно, что любая точка $P \in Q(P_0,\delta)$, находится от точки P_0

на расстоянии, меньшем δ.

Определение 4.2.2 Число b называется *пределом функции двух переменных* $z = f(x, y) = f(P)$ при $P \to P_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая δ-окрестность $Q = (P_0, \delta)$, что для любой точки $P(x, y) \in Q = (P_0, \delta)$, за исключением, быть может, точки P_0, имеет место неравенство:

$$|f(P) - b| < \varepsilon \text{ или } |f(x, y) - b| < \varepsilon.$$

При этом пишут $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = b$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b$.

Функция двух переменных называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю.

Заметим, что если $b = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, то разность $f(x, y) - b$ есть бесконечно малая величина при $P \to P_0$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

Решение: Предел функции находится при $P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$; т.е. при $\rho \to 0$, где

$$\rho = \overline{P_0P} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\lim_{P \to P_0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)}{\rho^2 + 1 - 1} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} (\sqrt{\rho^2 + 1} + 1) = 2.$$

Пример 2. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to 0}} \dfrac{tg(xy)}{y} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to 0}} x \cdot \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to 0}} \dfrac{tg(xy)}{xy} = 3 \cdot 1 = 3$.

Определение 4.2.3 В n-мерном пространстве *δ-окрестностью* точки называется совокупность всех точек $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{(x_1 - x_1^o)^2 + (x_2 - x_2^o)^2 + \cdots + (x_n - x_n^o)^2} < \delta.$$

Очевидно, для n=3, т.е. в пространстве $Oxyz$ δ-окрестностью $P_0(x_0, y_0, z_0)$ является множество всех внутренних точек шара с центром в $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом δ.

4.2.2 Непрерывность функции многих переменных в точке

Определение 4.2.4 Функция многих переменных $u = f(P) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, называется *непрерывной* в точке $P_0(x_0, x_0, ..., x_0)$, если:

1) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_o)$.
2) функция $f(P)$ определена в точке P_o и в некоторой ее окрестности.

Тогда P_o называется *точкой непрерывности* этой функции.

Теорема 4.2.1 Если функции n переменных $f_1(P)$ и $f_2(P)$ непрерывны в точке P_0, то в той же точке непрерывны и их сумма $f_1(P) + f_2(P)$, разность $f_1(P) - f_2(P)$ и произведение $f_1(P) \cdot f_2(P)$, если, кроме того, $f_2(P_0) \neq 0 \Rightarrow$ частное $\dfrac{f_1(P)}{f_2(P)}$ также непрерывно в точке P_0.

Доказательствс самостоятельно.

На основании теоремы легко установить непрерывность многих функций, (многочленов, рациональных функций) во всех точках плоскости, в которых аналитическое выражение данной функции имеет смысл.

4.3 Область определения функции многих переменных. Свойства непрерывных функций

4.3.1 Область определения функции

Определение 4.3.1 *Открытой областью* или *областью* называется множество точек плоскости, обладающие следующими двумя свойствами:

1) каждая точка области принадлежит ей вместе со своей окрестностью (*свойство открытости*);
2) любые две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области (*свойство связности*).

Часть плоскости G, лежащая внутри контура L, есть область (рисунок 4.3), так как:

1) для любой точки P, существует окрестность, лежащая внутри L, т.е. принадлежащая G.
2) две любые точки P и Q можно соединить линией, лежащей внутри L.

Рисунок 4.3

Определение 4.3.2 Точка P_0 называется *граничной точкой* G, если любая окрестность этой точки содержит как точки области G, так и точки, ей не принадлежащие. Множество всех граничных точек области G называется *границей.*

Определение 4.3.3 Область, содержащая все свои граничные точки, называется *замкнутой областью.*

Определение 4.3.4 Область G называется *ограниченной*, если она полностью покрывается некоторым кругом радиуса $r > 0$, т.е. если существует такое число $r > 0$, что для любой $R \in G$ выполняется неравенство $\left|\left|P\right|\right| < r$.

Если же круг, покрывающий область подобрать нельзя, то область называется *неограниченной.*

Определение 4.3.5 Точка P_0 называется *точкой разрыва* функции $u = f(P)$, если она принадлежит области определения этой функции или ее границе, но не является точкой непрерывности.

Примеры.

1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$ – эллипс (рисунок 4.4а) – открытая область, не содержащая граничные точки, точки эллипса.

2) $4 \le x^2 + y^2 \le 9$ – круговое кольцо (рисунок 4.4б) – замкнутая область.

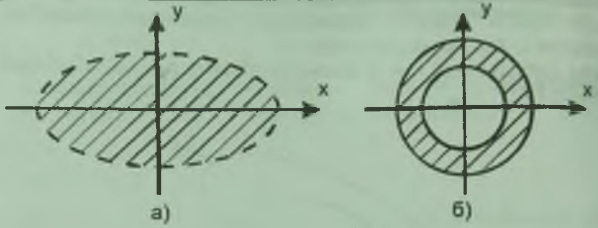


Рисунок 4.4

3) $0 < y < x$ – открытая область, ограничена биссектрисой координатного угла и осью OX (рисунок 4.5).

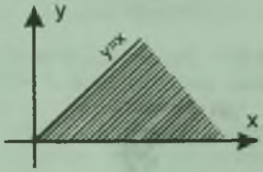


Рисунок 4.5

4.3.2 Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области

Определение 4.3.6 Функция $z = f(x, y) = f(P)$ называется *непрерывной* в открытой или замкнутой области, если она непрерывна в каждой точке этой области. При этом $f(P)$ считается непрерывной в граничной точке P_0, если в равенстве $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$, точка $P \to P_0$ вдоль любого пути, принадлежащего данной области.

Теорема 4.3.1 Если функция $z = f(P)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области:

1) ограничена $|f(P)| \le N$;

2) имеет наименьшее m и наибольшее M значения;

3) принимает хотя бы в одной точке области любые численные значения $m < f(P) < M$.

Пример 1. Функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $x^2 + y^2 \le 1$. Следовательно:

1. $|z| \le 1$;
2. наименьшее значение $z = m = 0$ достигается на границе области определения функции, т.е. в точках окружности $x^2 + y^2 = 1$; наибольшее M=1 в начале координат $O(0, 0)$ (т.к. z=1 при x=0 и y=0);
3. любое число между $0 < a < 1$ является значением функции $f(P) = a$. Графиком является полусфера (верхняя часть с центром в точке $O(0, 0)$ и $r = 1$).

4.4 Частные производные

4.4.1 Понятие частной производной

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определенную на любом отрезке множества G. Зафиксируем значение одного из аргументов, например, $y = y_0$. Тогда $f(x, y_0)$ есть функция одной переменной x. Пусть она имеет производную в точке x_o:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_o, y_o)}{\Delta x} = f'_x(x_o, y_o). \qquad (4.4.1)$$

Эта производная называется *частной производной* первого порядка по x функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ и обозначается $f'_x(x_0, y_0)$.

Разность $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ называется *частным приращением по x* функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ и обозначается

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \qquad (4.4.2)$$

Следовательно,

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}. \tag{4.4.3}$$

Аналогично определяется частное приращение по y и частная производная по y функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$: (в предположении, что $x = x_0 = const$)

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta x) - f(x_0, y_0). \tag{4.4.2$'$}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta x} \tag{4.4.3$'$}$$

Определение 4.4.1 *Частная производная* функции двух переменных по одному из ее аргументов равна пределу отношения частного приращения функции по данному аргументу к приращению соответствующего аргумента при стремлении его к нулю.

Частная производная функции двух переменных $z = f(x, y)$ есть функция точки $P(x, y)$, т.е. также является функцией двух переменных. Обозначается следующим образом:

$$f'_x(x, y), \quad f'_y(x, y) \text{ или } \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_x, \quad z'_y.$$

При $n > 2$ частные приращения и частные производные определяются аналогично. Например, для $n = 3$ $u = f(x, y, z)$:

$$u'_x = f(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

Частная производная определяется как производная функции по одной из этих переменных.

Следует помнить, что при нахождении частной производной функции многих переменных по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$z = f(x, y) = x^2 y - 3y^2 + 5x.$$

$$f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 y - 3y^2 + 5x)'_x = 2xy + 5;$$

$$f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 y - 3y^2 + 5x)'_y = x^2 - 6y + 0 = x^2 - 6y.$$

4.4.2 Геометрический смысл частных производных $z = f(x, y)$.

Графиком функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность в $OXYZ$ (рисунок 4.6).

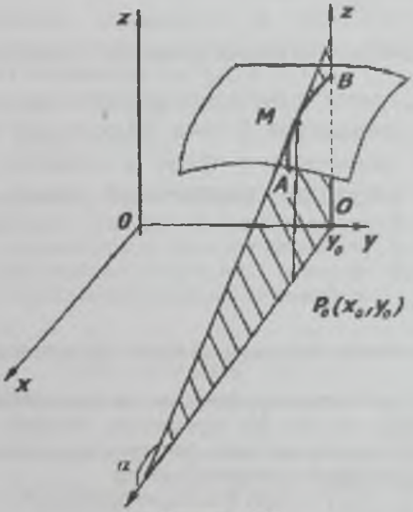


Рисунок 4.6

Рассмотрим точку $P_0(x_0, y_0)$ в плоскости OXY и соответствующую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на поверхности. Проведем плоскость $y = y_0$. В сечении этой плоскости с поверхностью получим линию AM_0B. Эту линию можно рассматривать как график функции $z = f(x_0, y_0)$ в плоскости O_1XZ. Тогда, согласно геометрическому смыслу производной функции одной переменной,

$$\frac{df(x, y_o)}{dx} = f'_x(x, y_o) = tg\alpha ,$$

где α – угол с осью O_1X (или с осью OX) касательной, проведенной в точке M_0 к кривой AM_0B.

С другой стороны

$$\left.\frac{df(x,y_0)}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0-y_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0}$$

$\Rightarrow$ следует, что $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} = tg\alpha$.

Итак, геометрически величина частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ равна тангенсу угла, составленного с осью OX касательной, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$. Аналогично выясняется геометрический смысл частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$.

4.5 Частные производные высших порядков

Частные производные функции многих переменных являются функциями тех же переменных, которые в свою очередь, могут иметь частные производные, называемые *частными производными второго порядка*.

Функция $z = f(x, y)$ имеет 4 частные производные второго порядка, которые определяются и обозначаются следующим образом.

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y); \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y);$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f''_{xy}(x, y); \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = f''_{yx}(x, y).$$

Функция трех переменных $u = f(x, y, z)$ имеет 9 частных производных второго порядка.

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{x^2}(x,y,z);\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y,z);$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=f''_{xz}(x,y,z) \text{ и т.д.}$$

Аналогично определяется и обозначается частные производные третьего и более высшего порядка функции нескольких переменных $u=f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right),\ i\neq k;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_x^2}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right).$$

Определение 4.5.1 Частная производная второго или более высокого порядка по одному аргументу называется *частной производной по данному аргументу*, а если частная производная взята по нескольким различным переменным, то называется *смешанной частной производной*.

Пример 1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2},\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$ являются смешанными частными производными функции $z=f(x,y)$.

Определение 4.5.2 Частная производная n-го порядка функции $f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ есть частная производная первого порядка от частной производной $(n-1)$-го порядка.

Пример 2. Для функции $z=f(x,y)$ частная производная третьего порядка по y: $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\partial\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\Big/\partial y$.

Пример 3. Найти смешанную частную производную второго порядка функции $z=x^2y^3$.

Решение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy^3$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2$, затем находим смешанную частную производную второго порядка:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\left(2xy^3\right)'_y=6xy^2\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\left(3x^2y^2\right)'_x=6xy^2\end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

поэтому имеет место следующее.

Теорема 4.5.1 Две смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности в $P_0(x_0, y_0)$.

В частности, для z=f(x,y) имеем $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

4.6 Полный дифференциал функции многих переменных

4.6.1 Полное приращение функции

Мы рассматривали частные приращения функции многих переменных, когда лишь один из аргументов изменялся, остальные же оставались фиксированными.

Пусть дана функция двух переменных $z=f(x,y)$.

Пусть ее аргументы x и y получают приращение Δx и Δy. Тогда функция $z=f(x,y)$ получает полное приращение Δz, которое определяется по формуле:

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y). \qquad (4.6.1)$$

Геометрически, приращение функции Δz равно приращению аппликаты графика функции $z=f(x,y)$ при переходе из точки $P(x,y)$ в точку $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ (рисунок 4.7).

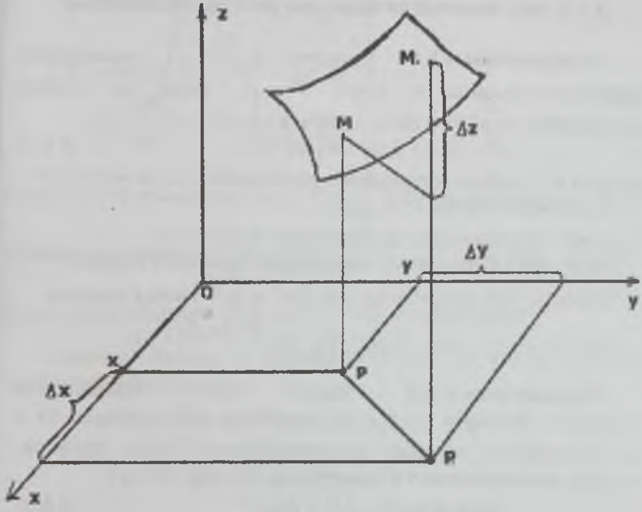


Рисунок 4.7

Пример 1. Найдем полное приращение функции $z = xy^2$ при условии, что x имеет приращение Δx, y – приращение Δy.

Решение: По формуле (4.6.1):

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y)^2 - xy^2 = xy^2 + y^2\Delta x + 2xy\Delta y + 2y\Delta x\Delta y +$$

$$+ x(\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2 - xy^2 = \left[y^2\Delta x + 2xy\Delta y\right] +$$

$$+\left[2y\Delta x\Delta y + x(\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2\right].$$

Следовательно, Δz = (1слагаемое)+(2слагаемое), где 1 слагаемое – линейное относительно Δx и Δy;

2 слагаемое – нелинейное относительно Δx и Δy.

При $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ оба слагаемых стремятся к нулю, но второе слагаемое стремится к нулю быстрее, чем первое.

Подобным свойством обладают многие функции. Эти функции называются *дифференцируемыми*.

4.6.2 Дифференциал функции многих переменных

Определение 4.6.1 Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $P(x, y)$, если ее полное приращение Δz можно представить в виде:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + W(\Delta x, \Delta y). \qquad (4.6.2)$$

где Δx и Δy –любые приращения аргументов x и y в некоторой окрестности точки $P(x, y)$;

A и B – постоянные, не зависящие от Δx и Δy;

$W(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем расстояние $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ между точками $P(x, y)$ и $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$, т.е. $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{W(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0$.

Определение 4.6.2 Главная часть приращения $A\Delta x + B\Delta y$ функции $z = f(x, y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется *полным дифференциалом* этой функции. Полный дифференциал обозначается $\mathrm{d}z$ или $\mathrm{d}f(x,y)$:

$$\mathrm{d}f(x,y) = \mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y. \qquad (4.6.3)$$

В (4.6.3) величины A и B зависят от точки $P(x, y)$, в которой этот дифференциал рассматривается. Поэтому A и B являются функциями от x и y. Вид их устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4.6.1 Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P(x, y)$, то она имеет в этой точке первые частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, причем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B. \qquad (4.6.4)$$

Доказательство: Т.к. $z = f(x, y)$ –дифференцируема, то полное приращение (4.6.2) $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + W(\Delta x, \Delta y)$ справедливо при любых достаточно малых Δx и Δy. Пусть $\Delta y \neq 0$, $\Delta x \neq 0$ $\Rightarrow$ (4.6.2) принимает вид: $\Delta_x z = A\Delta x + W$, т.е. частного приращения. Разделим на Δx и перейдем к пределу при $x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta x}. \qquad (4.6.5)$$

Т.к. $\Delta y=0$, то $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=|\Delta x|\Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta x}=\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta W}{|\Delta x|}=\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{W}{\rho}=0\Rightarrow\lim\frac{W}{\Delta x}=0.$$

Тогда (4.6.5) принимает вид $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A$, следовательно, этот предел существует. Но $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}$ и поэтому $\frac{\partial z}{\partial x}=A$.

Аналогично доказывается, что $\frac{\partial z}{\partial y}=B$ и существует.

Заменим теперь в формулах (4.6.2) и (4.6.3) A и B частными производными:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+W(\Delta x,\Delta y). \qquad (4.6.6)$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \qquad (4.6.7)$$

Предположим, что $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ существуют и непрерывны, тогда имеет место:

Теорема 4.6.2 Для того, чтобы функция $z=f(x,y)$ была дифференцируема в точке $P(x,y)$, необходимо, чтобы существовали частные производные, и достаточно, чтобы они были непрерывны в окрестности $P(x,y)$.

Введем для приращений независимых переменных следующие обозначения: $\Delta x=\mathrm{d}x$, $\Delta y=\mathrm{d}y$. Тогда (4.6.7) приобретет вид:

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y \qquad (4.6.8)$$

или

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y. \qquad (4.6.8')$$

Аналогично, для функции трех и более переменных. Пусть $n=3$, тогда приращение Δu для функции $u=f(x,y,z)$

имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + W(\Delta x, \Delta y, \Delta z); \qquad (4.6.9)$$

$$\lim_{\rho \to 0}\frac{W}{\rho} = 0, \ \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

а полный дифференциал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \qquad (4.6.10)$$

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $z = xy^2$ в каждой точке.

Решение: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, находим $\frac{\partial z}{\partial x} = (xy^2)'_x = y^2$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = (xy^2)'_y = 2xy$, эти функции непрерывны в плоскости OXY, следовательно, dz существует и $dz = y^2dx + 2xydy$

Аналогично для функций многих переменных.

Пример 2. Функция $u = |x|(y+1)$ непрерывна в точке (0, 0). Однако легко видеть, что $\frac{\partial u}{\partial x}$ не существует в точке (0, 0) $\Rightarrow$ и не дифференцируема в точке (0, 0).

Пример 3. Найти полный дифференциал функции $z = xy^2$ в произвольной точке.

Решение: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ существует при условии непрерывности частных производных. Находим $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$. Эти функции непрерывны в плоскости OXY, следовательно, dz существует и $dz = y^2dx + 2xydy$.

4.7 Производная сложной функции

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена на открытом множестве $G \in R_3$.

Теорема 4.7.1 Пусть функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $P(x, y, z) \in G$, где функции $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$ – функции, зависящие от скалярного параметра t, имеют производную в точке t. Тогда производная по t от сложной функции $u = F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ (т.е. производная от нее вдоль кривой $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$) вычисляется по формуле:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \qquad (4.7.1)$$

Доказательство: Т.к. функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $P(x, y, z)$, то каково бы ни было малое приращение $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, имеет место

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + 0(\rho); \end{aligned} \qquad (4.7.2)$$

($\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \to 0$).

Значению t, которому соответствует точка $P(x, y, z)$, придадим приращение Δt. Оно вызовет приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ функций $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$. Если их подставить в (4.7.2), то получим приращение функции $u = F(t)$ в точке t: $F(t + \Delta t) - F(t) = \Delta u$. Разделим на Δt и перейдем к пределу:

$$F'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{0(\rho)}{\Delta t} \right) = \Rightarrow$$

т.к. функции $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$ имеют производные

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}, \text{ а}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{0(\rho)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{0(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta t}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\varepsilon(\rho_0)\cdot\frac{\rho}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\varepsilon(\rho_0)\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}.$$

Теперь при $\Delta t\to 0$, $\rho\to 0\Rightarrow\lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon(\rho_0)$,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{0(\rho)}{\Delta t}=0\cdot\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=0\Rightarrow$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt},$$

т.е. получим (4.7.1), что и требовалось доказать.

Пример 1. Найти производную $\frac{dz}{dt}$, если $z=f(x,y)\Rightarrow$ $z=x^y$, $x=\sin t$, $y=t^2$.

Решение: Используя формулу (4.7.1), получим:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dt}=\left(x^y\right)'_x\cdot\frac{dx}{dt}+\left(x^y\right)'_y\cdot\frac{dy}{dt}=yx^{y-1}\cdot(\sin t)'+x^y\ln x\cdot(t^2)'=$$

$$=yx^{y-1}\cdot\cos t+x^y\ln x2t=t^2(\sin t)^{t^2-1}\cdot\cos t+(\sin t)^{t^2}\cdot\ln\sin t(2t)=$$

$$=t(\sin t)^{t^2-1}\left[t\cos t+2\sin t\cdot\ln\sin t\right].$$

Рассмотрим теперь функцию $u=f(x,y,z)$, при условии, что $y=y(x)$, $z=z(x)$, тогда переменная u есть функция от одной переменной x: $u=f(x,y(x),z(x))$, этот случай сводится к предыдущему, причем роль t играет x. По формуле (4.7.1) имеем: $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$, но $\frac{dx}{dx}=1\Rightarrow$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\qquad(4.7.3)$$

в формуле (4.7.3) в правой части $\frac{\partial u}{\partial x}$ – есть частная производная функции $u = f(x, y, z)$. В отличие от нее в левой части $\frac{du}{dt}$ – есть производная сложной функции одной переменной $u = f(x, y(x), z(x))$. Поэтому производная функции $u = f(x, y, z)$, определенная по формуле (4.7.3), называется *полной производной*.

Предположим теперь, что функция $u = f(x, y, z)$ – сложная функция, причем x, y, z зависят от многих переменных, например от двух: $x = \varphi(t, \tau)$; $y = \psi(t, \tau)$; $z = \chi(t, \tau)$ $\Rightarrow$ u есть функция от двух независимых переменных t и τ. Найдем частные производные функции u: $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ по формуле (4.7.3) фиксируя сначала τ, затем t $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \tau} \qquad (4.7.4)$$

Здесь полные производные заменяются частными производными.

Пример 2. Найти частную производную следующих функций: $z = x^2 \ln y$, где $x = \frac{u}{v}$; $y = uv$. $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\ln y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y}; \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x\ln y\cdot\frac{1}{v} + \frac{x^2}{y}\cdot v = \frac{2u}{v^2}\ln uv + \frac{u}{v^2} = \frac{u}{v^2}(2\ln uv).$$

4.8 Инвариантность формы полного дифференциала

Как известно, для функции одной переменной $y = f(x)$ имеет место инвариантность формы дифференциала. Это значит, что выражение для дифференциала $dy = f(x)dx$

остается верным независимо от того, является ли x независимой переменной или функцией некоторой переменной $x = Y(t)$.

Теорема 4.8.1 Для функции многих переменных $u = f(x, y, z, \dots, t)$ полный дифференциал функции n переменных сохраняет свою форму $\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z + \cdots + \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t$, независимо от того, является ли x, y, z,..., t независимыми переменными или функциями других переменных.

Доказательство: Проведем доказательство для случая функции двух переменных $z = f(x, y)$. Как известно, если x, y – непрерывные переменные, то полный дифференциал имеет вид:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y. \tag{4.8.1}$$

Пусть x, y – функции новых переменных:
$x = \varphi(t, \tau)$; $y = \psi(t, \tau) \Rightarrow z = Z(t, \tau)$ – сложная функция.

Дифференциал сложной функции z есть

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial z}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau. \tag{4.8.2}$$

Но по формуле (4.7.4) имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}. \tag{4.8.3}$$

Следовательно, подставляя (4.8.3) в (4.8.2), получим:

$$\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}t + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)\cdot\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial x}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial y}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

т.е. получили (4.8.1), что и требовалось доказать.

4.9 Неявные функции и их дифференцирование

4.9.1 Понятие неявной функции

Пусть дано уравнение

$$F(x,y)=0\,, \tag{4.9.1}$$

где $F(x,y)$ – функция двух переменных. Если каждому значению x, принадлежащему некоторому множеству D, соответствует единственное значение y, которое совместно с x удовлетворяет уравнению (4.9.1), то говорят, что это уравнение определяет на множестве D *неявную функцию*

$$y=\varphi(x)\,. \tag{4.9.2}$$

Таким образом, для неявной функции $y=\varphi(x)$, определенной уравнением (4.9.1), имеет место тождество $F(x,\varphi(x))\equiv 0$, справедливое для каждого $x\in D$.

В отличие от неявной функции (4.9.2) функция $y=f(x)$, заданная уравнением, разрешенным относительно y, называется *явной функцией*.

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$2^y-x^2-1=0\,, \tag{4.9.3}$$

которое можно разрешить относительно y: $2^y=x^2+1\Rightarrow$

$$y=\log_2\left(x^2+1\right). \tag{4.9.3$'$}$$

Эта функция явная. Она тождественно удовлетворяет уравнению (4.9.3).

Однако не всякую неявную функцию можно представить в виде явной элементарной функции. Например, уравнение

$$2^y-2y+x^2-1=0\,,$$

задает неявную функцию y, т.к. существуют пары значений (x,y), удовлетворяющие данному условию (x=0, y=0, x=1, y=1). Но это уравнение нельзя разрешить относительно y так, чтобы y выражался через элементарную функцию от x.

Кроме того, не всякое уравнение вида (4.9.1) задает неявную функцию. Например, уравнению

$$x^2+y^2+1=0$$

не удовлетворяют никакие действительные значения x и y следовательно, оно не определяет никакой неявной функции. Каким условиям должна удовлетворять функция $F(x,y)$?

Теорема существования неявной функции Если функция $F(x, y)$ и ее частные производные $F_x'(x, y)$ и $F_y'(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)=0$ и при этом $F(x_0, y_0)=0$, $F_y'(x_0, y_0)\neq 0$, то уравнение $F(x, y)=0$ определяет в некоторой окрестности точки P_0 единственную неявную функцию $y=y(x)$, непрерывную и дифференцируемую в некотором интервале, содержащем точку x_0, причем $y(x_0)=y_0$.

Доказательство самостоятельно.

4.9.2 Дифференцирование неявной функции

Пусть левая часть уравнения (4.9.1) удовлетворяет указанным в теореме условиям. Тогда это уравнение определяет неявную функцию $y=y(x)$, для которой в окрестности $Q(P_0(x_0, y_0))$ имеет место тождество $F(x, \varphi(x))\equiv 0$ относительно x.

Т.к. производная функции, тождественно равной нулю, также равна нулю, то полная производная $\frac{dF}{dx}=0$, но в силу соотношения (4.7.3): $\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$, и поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \qquad (4.9.4)$$

По этой формуле находится производная неявной функции.

Пример 2. Найти производную неявной функции y, заданной уравнением $x^2-2x+3y^2+xy-1=0$ и вычислить ее значение в точке $P(2, -1)$.

Решение: Пусть $F(x, y)=x^2-2x+3y^2+xy-1\Rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-2+y$, $\frac{\partial F}{\partial y}=6y+x\Rightarrow$ по формуле (4.9.4)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x-2+y}{6y+x},$$

в частности, в $P(2,-1)$ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2\\y=-1}} = -\frac{2\cdot 2-2(-1)}{-6+2} = \frac{1}{4}$

4.10 Производная по направлению. Градиент

Пусть задана дифференциальная функция $u = F(x,y,z)$. Рассмотрим точку $P(x,y,z)$ и луч l, выходящий из точки P в направлении одиночного вектора:

$$\overline{n}\chi = \cos\alpha\cdot\overline{i} + \cos\beta\cdot\overline{j} + \cos\gamma\cdot\overline{k}. \qquad (4.10.1)$$

где α, β, γ – углы вектора $\overline{l}$ с осями координат (рисунок 4.8).

Пусть $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ – какая-нибудь другая точка этого луча. Разность значений функции u скалярного поля в точках P и P_1 назовем приращением этой функции в направлении l и обозначим $\Delta_l u \Rightarrow$

$$\Delta_1 u = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x,y,z)$$

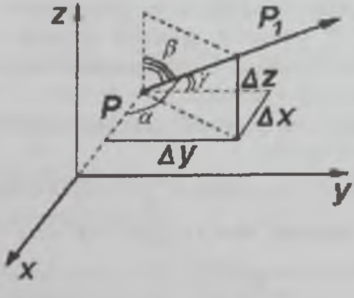


Рисунок 4.8

Пусть Δl – расстояние между P и $P_1 \Rightarrow \Delta l = PP_1$.

Определение 4.10.1 Производной функции $u = F(x, y, z)$ в точке P по направлению l называется предел $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ и обозначается символом $\frac{\partial u}{\partial l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \qquad (4.10.2)$$

Заметим, если $\frac{\partial u}{\partial l} > 0 \Rightarrow$ функция u в этом направлении возрастает, если $\frac{\partial u}{\partial l} < 0 \Rightarrow u$ убывает.

То есть производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ дает скорость изменения функции в этом направлении.

Теорема 4.10.1 Если функция $u = F(x, y, z)$ дифференцируема в точке $P(x, y, z)$, то для нее существует производная по направлению любого единичного вектора $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, выражаемая формулой:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (4.10.3)$$

Доказательство: Заметим, что приращения Δx, Δy, Δz координат точки P связан с длинной отрезка $PP_1 = \Delta l$ и направляющими cos–вектора $\bar{n}$ следующими соотношениями:

$$\Delta x = \Delta l \cdot \cos\alpha, \ \Delta y = \Delta l \cdot \cos\beta, \ \Delta z = \Delta l \cdot \cos\gamma. \qquad (4.10.4)$$

Т.к. функция u по условию дифференцируема, то ее приращение Δu в $P(x, y, z)$:

$$\Delta u = F_x'(x, y, z)\Delta x + F_y'(x, y, z)\Delta y + F_z'(x, y, z)\Delta z + o(\rho). \qquad (4.10.5)$$

причем $o(\rho) \to 0$ быстрее, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, т.е.

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0.$$

Если рассматривать приращение функции u вдоль луча по направлению $\bar{n}$, то $\Delta u = \Delta_e u$, $\rho = \Delta l$; Δx, Δy, Δz выражаются по формуле (4.10.4), тогда (4.10.5) примет вид:

$$\Delta_e u = F_x' \Delta l \cos\alpha + F_y' \Delta l \cos\beta + F_z' \Delta l \cos\gamma + o(\rho).$$

Разделим на Δl и перейдем к пределам.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_e u}{\Delta e} = \lim_{\Delta l \to 0} \left[F_x' \cos\alpha + F_y' \cos\beta + F_z' \cos\gamma \right] + \lim_{\Delta l \to 0} \frac{o(\rho)}{\Delta l}.$$

$\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{o(\rho)}{\Delta l} = 0$ при $\Delta l \to 0$, $\rho \to 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma$,

что и требовалось доказать.

Из (4.10.3) видно, если $\bar{n}$ совпадает с одним из отрезков $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, то производная u по $\bar{n}$ совпадает с соответствующей ей производной этой функции. Например, если $\bar{n} = 1$, то $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial n} = F_x'(x, y, z)$.

Пример 1. Найти производную функции $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точке $P_1(1, 2, -1)$ по направлению от P_1 к $P_2(2, 4, -3)$.

Решение: Находим P_1P_2:

$$\overline{P_1P_2} = (2-1)\bar{i} + (4-2)\bar{j} + (-3+1)\bar{k} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$$

и соответствующий ему единичный вектор:

$$\bar{n} = \frac{\overline{P_1P_2}}{\left|\overline{P_1P_2}\right|} = \frac{\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}.$$

Следовательно, $\bar{n}$ имеет направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

Найдем теперь частные производные функции $u = x^2 - 2xz + y^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -2x;$$

и значения в точке $P_1(1, 2, -1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_1} = 2 \cdot 1 - 2(-1) = 4; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_1} = 2 \cdot 2 = 4; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_1} = -2 \cdot 1 = -2,$$

подставляем в формулу (4.10.3) найденные значения частных производных и направляющих косинусов:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

Определение 4.10.2 *Градиентом* функции $u = F(x, y, z)$ в точке $P(x, y, z)$ называется вектор равный:

$$\mathrm{grad}\, u = \frac{\partial F}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\bar{k}. \qquad (4.10.6)$$

или кратко

$$\mathrm{grad}\, u = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right). \qquad (4.10.6')$$

Замечание. Формула (4.10.3) говорит, что производная от F в точке P по направлению единичного вектора $\bar{n}$ равна проекции градиента в этой точке на направление n:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = (\mathrm{grad}\, u, \bar{n}) = np_{\bar{n}}\, \mathrm{grad}\, u$$

Таким образом каждой точке $P(x, y, z)$ скалярного поля, заданного дифференциальной функцией $u = F(x, y, z)$ соответствует вполне определенный вектор $\mathrm{grad} F(P)$.

Пример 2. Найти градиент $u = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ в $P_0(2,-1,1)$.

Решение: Введем обозначения $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$, найдем $F'_x = 2x$; $F'_y = 4y$; $F'_z = -2z$ $\Rightarrow$ по формуле (4.10.6):

$$\mathrm{grad}\, u(P_0) = F'_x(2,-1,1)\bar{i} + F'_y(2,-1,1)\bar{j} + F'_z(2,-1,1)\bar{k} =$$
$$= 4\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Между градиентом $u = F(x, y, z)$ в данной точке и производной по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{n}}$ в той же точке имеется связь, которую устанавливает следующая теорема.

Теорема 4.10.2 Проекция вектора $\mathrm{grad}\, u$ на единичный вектор $\bar{n} = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma$ равна производной функции $u = F(x, y, z)$ по направлению $\bar{n}$:

$$np_{\bar{n}}\, \mathrm{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}. \qquad (4.10.7)$$

Доказательство: Пусть $u = F(x, y, z)$. Из векторной алгебры известно, что проекция какого-либо вектора на единичный вектор равна скалярному произведению этих векторов. Но $\operatorname{grad} u = F'_x(x, y, z)\bar{i} + F'_y(x, y, z)\bar{j} + F'_z(x, y, z)\bar{k} \Rightarrow$

$$np_{\bar{n}} \operatorname{grad} u = (\operatorname{grad} u, \bar{n}) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{zx}\cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial \bar{n}},$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, проекция grad u на вектор $\bar{n}$ равна скорости изменения поля $u = F(x, y, z)$ в направлении вектора $\bar{n}(l)$.

Пусть φ – угол между $\bar{n}$ и grad u. Тогда

$$np_{\bar{n}} \operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi$$

следовательно на основании формулы (4.10.7):

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi .$$

Если направления вектора $\bar{n}$ и grad u совпадают (φ=0), то $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$ имеет, очевидно, наибольшее значение, равное $|\operatorname{grad} u|$.

Для любого вектора $\bar{n}$ очевидно имеет место неравенство:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \le |\operatorname{grad} U| . \qquad (4.10.8)$$

Если $\operatorname{grad} u = 0$, то и $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = 0$ для любых $\bar{n}$.

Если же $\operatorname{grad} u \ne 0$ (одна из частных производных u не равна нулю), то (4.10.8) есть строгое неравенство для всех единичных векторов $\bar{n}$, кроме одного вектора

$$n_o = (\cos\alpha_o + \cos\beta_o + \cos\gamma_o),$$

направленного в сторону grad u $\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = |\operatorname{grad} u| > 0\right)$, проходящего через точку $P_o(x_o, y_o, z_o)$.

$$\cos\alpha_o = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}};$$

$$\cos\beta_0 = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}};$$

$$\cos\gamma_0 = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{z x}\right)^2}}.$$

Из сказанного следует вывод:

Градиент функции $u = F(x, y, z)$ в точке $P(x, y, z)$ есть вектор, обладающий следующими свойствами:

1) длина его равна максимальной величине производной по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{n}}$ в $P(x, y, z)$;
2) если его длина не равна нулю, то grad u направлен в ту же сторону, что и вектор $\overline{n}$, вдоль которого производная $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{n}}$ максимальна;
3) если $\mathrm{grad}\,u(P_0) \neq 0$, то $\mathrm{grad}\,u(P_0)$ перпендикулярен касательной плоскости, проходящей через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

4.11 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность S задана уравнением в неявном виде

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (4.11.1)$$

Пусть $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ функция F имеет непрерывные частные производные, одновременно не равные нулю. Следовательно

$$\mathrm{grad}_{P_0} F = \left(F'_x(P_0), F'_y(P_0), F'_z(P_0)\right) \neq 0. \qquad (4.11.2)$$

Определение 4.11.1 *Касательной плоскостью* Π к поверхности S в точке P_0 называется плоскость, в которой расположены касательные к всевозможным кривым, проведенным на поверхности S через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Определение 4.11.2 *Нормалью* к поверхности S называется прямая, проходящая через точку P_0 перпендикулярно касательной плоскости.

Чтобы написать уравнение касательной плоскости Π в точке P_0, необходимо знать вектор $\bar{N}\{ABC\}$, идущий по нормали (рисунок 4.9):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (4.11.3)$$

Так как искомая плоскость проходит через $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна к $\operatorname{grad}_{P_0} F$, то $\operatorname{grad} F(P_0)$ можно принять за нормальный вектор этой плоскости:

$$A=\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x};\ B=F'_y(P_0);\ C=F'_z(P_0). \qquad (4.11.4)$$

и уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$F'_x(P_0)(x-x_0)+F'_y(P_0)(y-y_0)+F'_z(P_0)(z-z_0)=0. \qquad (4.11.5)$$

Уравнение нормали к поверхности S в точке P_0, очевидно, есть

$$\frac{x-x_0}{F'_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(P_0)}. \qquad (4.11.6)$$

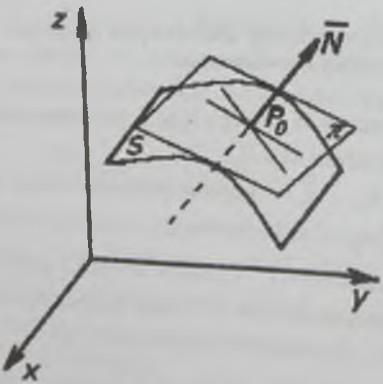


Рисунок 4.9

Если поверхность задана уравнением, разрешенным относительно z: $z = f(x, y)$, то координаты нормального вектора $\bar{N}$:

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x};\; B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y};\; C = -1. \qquad (4.11.7)$$

Здесь $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Пример 1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к эллиптическому параболоиду $z = 2x^2 + y^2$ в точке $A(1, -1, 3)$.

Решение: Преобразуем уравнение поверхности к виду $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z = 0$. Частные производные в точке A:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x;\; \frac{\partial F}{\partial y} = 2y;\; \frac{\partial F}{\partial z} = -1 \Rightarrow\; F'_x(A) = 4;\; F'_y(A) = 2;\; F'_z(A) = -1.$$

подставляем в уравнения (4.11.4) и (4.11.5) $\Rightarrow$

$$4(x-1) - 2(y+1) - 1(z-3) = 0 \;\Rightarrow\; 4x - 2y - z - 3 = 0.$$

Уравнение нормали $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

4.12 Экстремумы функций многих переменных

4.12.1 Определение экстремума функции многих переменных

Пусть функция $u = f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$ задана на некотором открытом множестве $G \in R_n$.

Здесь $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – независимая векторная переменная.

Пусть $X^0 = (x_1^0, x_2, \ldots, x_n^0)$ – точка G.

Определение 4.12.1 Функция $u = f(X)$ имеет локальный максимум (минимум) в точке X^0, если существует окрестность этой точки $Q(X^0, \delta)$, такая, что для всех $X \in Q(X^0, \delta)$:

$$f(X) \le f(X^0),\quad f(X) \ge f(X^0). \qquad (4.12.1)$$

Точка X^0 называется *точкой локального максимума (мини-*

мума), а соответствующее значение $f\left(X^0\right)$ – *максимальным* (*минимальным*) *значением* функции $u = f(X)$.

Локальные максимум и минимум объединяются общим названием *локальный экстремум.* Из определения экстремумов следует, что в достаточно малой окрестности точки X^0 приращение функции $\Delta u = f(X) - f\left(X^0\right)$ не меняет знака:

$\Delta u \geq 0$ – в случае локального минимума;

$\Delta u \leq 0$ – в случае локального максимума.

Теорема 4.12.1 (Необходимый признак существования экстремума) Пусть функция $\Delta u \geq 0$ имеет локальный экстремум в точке X^0. Тогда, если существуют частные производные 1-го порядка $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ $(i = 1 \ldots n)$ в точке X^0, то все они обращаются в нуль в этой точке:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial X_i} = 0, \quad (i = 1 \ldots n). \tag{4.12.2}$$

Доказательство: Докажем, что $\frac{\partial f(X^0)}{\partial X_1} = 0$.

Зафиксируем $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0 \Rightarrow$

$u = f(X) = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \varphi(x_1)$ – функция от x_1, причем имеет локальный экстремум в точке $x_1^0 \Rightarrow \varphi'(x_1^0) = 0$ в силу необходимого условия локальный экстремума функции одной переменой. Т.к. $\varphi'(x_1^0) = f'(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, то

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_0^n)}{\partial X_1} = \frac{\partial f(X^0)}{\partial X_1} = 0,$$

что и требовалось доказать. Другие случаи аналогичны.

Следствие: Если функция $u = f(X)$ имеет экстремум в точке X^0, то $df\left(X^0\right) = 0$ или $\operatorname{grad} f\left(X^0\right) = 0$.

Данное следствие вытекает из определения дифференциала и градиента.

Замечание Условие (4.12.2) не является достаточным для того, чтобы в точке X^0 был экстремум функции *f*.

Пример 1. Функция $u = f(x, y) = x^2 y$ имеет частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2$, которые обращаются в нуль в $P_0(0, 0)$. Однако $P_0(0, 0)$ не является точкой экстремума, т.к. в любой окрестности этой точки $\Delta u = x^2 y - 0 = x^2 y$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Определение 4.12.2 Точки, в которых существуют непрерывные частные производные $u = f(X)$, обращающиеся в нуль, называются *стационарными точками*.

Достаточным условием существования экстремума в стационарной точке $X^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ для функции двух переменных $u = f\left(x_1, x_2\right)$ является условие:

$$\Delta f\left(X^0\right) = f''_{x_1^2}\left(X^0\right) f''_{x_2^2}\left(X^0\right) - \left[f''_{x_1 x_2}\left(X^0\right)\right]^2 > 0, \qquad (4.12.3)$$

причем в случае:

$f''_{x_1^2}\left(X^0\right) < 0 \to$ точка X^0 – точка максимума;

$f''_{x_1^2}\left(X^0\right) > 0 \to$ точка X^0 – точка минимума.

Достаточным условием отсутствия экстремума в стационарной точке $X^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ является условие:

$$\Delta f\left(X^0\right) = f''_{x_1^2}\left(X^0\right) f''_{x_2^2}\left(X^0\right) - \left[f''_{x_1 x_2}\left(X^0\right)\right]^2 < 0. \qquad (4.12.4)$$

Если $\Delta f\left(X^0\right) = 0$, то вопрос об экстремуме остается открытым.

4.12.2 Достаточное условие существования экстремума функции многих переменных

Пусть функция $u = f(X)$ имеет непрерывную производную до второго порядка включая по всем переменным и пусть X^0 – стационарная точка, т.е $df\left(X^0\right) = 0$. Тогда, разлагая по функции Тейлора в окрестности точки $X^0 \Rightarrow$

$$\Delta f(X^0) = df(X^0) + \frac{1}{2}d^2 f(X^0 + \theta\Delta x) = \frac{1}{2}d^2 f(X^0 + \theta\Delta x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(X^0)\Delta x_i \Delta y_j + \frac{\rho^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\frac{\Delta x_i}{\rho}\frac{\Delta x_j}{\rho} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(X^0)\Delta x_i \Delta y_j + \frac{\rho^2}{2}\alpha(\Delta x).$$

где $0 < \theta < 1$; $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_n)$; $\rho = |\Delta x| = \sqrt{\sum \Delta x_i^2}$; $\alpha(\Delta x) \to 0$; $\rho \to 0$.

Т.к. вторые производные непрерывны, то величины $\varepsilon_{ij} \to 0$ при $\rho \to 0$, но тогда

$$\max_{i,j}|\varepsilon_{ij}| = \varepsilon \to 0 \text{ при } \rho \to 0,$$

поэтому

$$|\alpha(\Delta x)| \le \varepsilon \cdot \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{\rho}\frac{\Delta x_j}{\rho}\right| = n^2\varepsilon \to 0.$$

Следовательно,

$$\Delta f(X^0) = f(X^0 + \varepsilon) - f(X^0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\zeta_i\zeta_j + \frac{\rho^2}{2}\alpha(\zeta),$$

где $a_{ij} = a_{ji} = f''_{x_i x_j}(X^0)$; $\zeta_i = \Delta x_i$; $\zeta = (\zeta_1, \zeta_n)$ и $\alpha(\zeta) \to 0$ при $\rho = |\zeta| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\zeta_i^2} \to 0$.

Выражение $A(\zeta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\zeta_i\zeta_j$ $(a_{ij} = a_{ji})$, называется *квадратичной формой* относительно $\zeta = (\zeta_1, \zeta_n)$. По знаку этой формы можно узнать знак $\Delta f(X^0)$ для достаточно малых Δx.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4.12.2 (Достаточное условие.)

1) Если форма $A(\zeta)$ строго положительно определена, т.е. $A(\zeta) > 0$ для всех $\zeta \ne 0$, то f имеет в точке X^0 локальный минимум.
2) Если $A(\zeta) < 0$ для всех $\zeta \ne 0$, то f имеет в точке X^0 локальный максимум.
3) Если $A(\zeta) \ge 0$ или $A(\zeta) \le 0$ для всех $\zeta \ne 0$, и имеется

$\zeta \neq 0$, для которого $A(\zeta) = 0$, то вопрос о локальном экстремуме функции f в точке X^0 остается открытым.

Пример 2. Найти экстремум функции

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y.$$

Решение: Находим частные производные первого порядка:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 30, \quad f'_y(x, y) = 6xy - 18.$$

Приравниваем к нулю: $3x^2 + 3y^2 - 30 = 0, \quad 6xy - 18 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 16 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \pm 4 \\ x - y = \pm 2 \end{cases}.$$

Решая систему, получаем 4 стационарные точки: $P_1(3, 1)$; $P_2(1, 3)$; $P_3(-1, -3)$; $P_4(-3, -1)$.

Найдем вторые частные производные: $f''_{x^2} = 6x$, $f''_{xy} = 6y$, $f''_{y^2} = 6x$ и составим выражение:

$$\Delta f(P) = f''_{x^2}(P) \cdot f''_{y^2}(P) - \left[f''_{xy}(P)\right]^2 = 36(x^2 - y^2).$$

Убеждаемся, что:

1. $\Delta f(P) > 0$, $f''_{x^2}(P_1) > 0$, P_1 – точка минимума;
2. $\Delta f(P_2) < 0 \Rightarrow$ в точке P_2 нет экстремумов;
3. $\Delta f(P_3) < 0 \Rightarrow$ в точке P_3 нет экстремумов;
4. $\Delta f(P_4) > 0$, $f''_{x^2}(P_4) < 0 \Rightarrow$ в точке P_4 – точка максимума.

Итак, два экстремума: в точке P_1 – $\Delta f(P_1) = -72$ – минимум;

P_4 – $\Delta f(P_4) = 72$ – максимум.

4.12.3 Наибольшее и наименьшее значения функций многих переменных

Пусть функция $u = f(X)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $G \in R_n$ и дифференцируема внутри этой области. Тогда f достигает максимума и минимума в некоторых точках $x \in G$. Эти точки могут быть внутренними или граничными. Если точка x – внутренняя, то функция

$u = f(X)$ имеет в ней локальный экстремум. Поэтому, чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции, следует найти все стационарные точки, вычислить значения функции в этих точках и сравнить их со значениями функции на границе области ∂G. Наибольшее из этих значений будет наибольшим значением функции на G, а наименьшее их них – наименьшим значением функции.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1970, т. 1, 2.
2 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980.
3 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981.
4 Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. М.: Высшая школа, 1978, т. 1, 2.
5 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1969.
6 Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1980.
7 Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Мн.: Высшая школа, 1990, ч. 1, 2, 3.
8 Методические указания к выполнению контрольных работ № 1 – 6 по курсу Высшей математики. РУМК: ПИИ, Алматы,1988.
9 Методические указания к выполнению контрольных работ № 7 – 12 по курсу Высшей математики. РУМК: ПИИ, Алматы,1988.

СОДЕРЖАНИЕ

372 =

ШИНТЕМИРОВА Гульжихан Бейсембаевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Теория функции многих переменных

Учебное пособие

Подписано в печать 25.12.2003.
Печать ризографическая. Формат бумаги 60×84 1/16. Бумага офсетная №1. Условных печатных листов 3,8.
Тираж 500 экз. Заказ № 0361.
Издание научно-издательского центра Павлодарского государственного университета имени С. Торайгырова
г. Павлодар, ул. Ломова, 64.